ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DENIS SERRE

Solutions globales $(-\infty < t < +\infty)$ des systèmes paraboliques de lois de conservation

Annales de l'institut Fourier, tome 48, nº 4 (1998), p. 1069-1091

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1998__48_4_1069_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
48, 4 (1998), 1069–1091

SOLUTIONS GLOBALES $(-\infty < t < +\infty)$ DES SYSTÈMES PARABOLIQUES DE LOIS DE CONSERVATION

par Denis SERRE (*)

Introduction.

Considérons un système strictement hyperbolique de lois de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \tag{1}$$

où l'inconnue $u(x,t)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$, tandis que x parcourt le domaine Ω, $\Omega =]0,+\infty[$ ou bien $\Omega = \mathbb{R}$. La matrice jacobienne $df(u)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec des valeurs propres réelles, distinctes et, dans le cas du problème mixte, non nulles : $\lambda_1(u) < \cdots < \lambda_p(u)(< 0) < \lambda_{p+1}(u) < \cdots < \lambda_n(u)$. Le bord éventuel $x = 0$ n'est donc pas caractéristique. Pour simplifier l'exposé, nous expliquons l'objet de ce travail dans le cas du problème mixte, puisqu'il contient les deux sortes d'interaction : choc-choc et choc-couche limite. La problématique pour le problème de Cauchy est en fait plus simple.

Il est bien connu que le problème mixte dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ n'est bien posé, localement en temps, que si la condition aux limites est constituée de $n-p$

(*) Ce travail a été réalisé lors d'un séjour de l'auteur à l'Institut Mittag-Leffler. L'auteur remercie de tout cœur l'Institut pour son invitation et pour l'accueil remarquable qu'il y a reçu.
Mots-clés : Profil de choc – Couche limite.
Classification math. : 35K60 – 35L50 – 35L65 – 35L67.

équations scalaires([1]). Cependant, pour des raisons pratiques ou bien dues à l'étape de modélisation, on considère en général u comme la limite, si elle existe, de la solution u^ϵ ($\epsilon \to 0^+$) du problème parabolique

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \epsilon \partial_x^2 u, \tag{2}$$

munie de la même condition initiale u_0.

Le problème mixte pour (2) n'est bien posé qu'en présence de n conditions aux limites scalaires, au lieu de $n-p$. On impose donc en général la condition de Dirichlet $u^\epsilon(0,t) = a(t)$, où a est prescrit. Naturellement, le choix de a influe de manière cruciale sur la limite u. Une question essentielle concerne la description du problème mixte dont u est solution. Puisqu'il est *a priori* constitué du système (1) et de la condition initiale u_0, il ne reste à identifier que la condition aux limites *résiduelle*. Il faut ensuite, lorsque ce problème mixte est bien posé, montrer la convergence de u^ϵ vers la solution (locale en temps) de celui-ci.

Le comportement de la suite $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ a donné lieu à de nombreuses études, parmi lesquelles on distingue trois types d'approches. En premier lieu, pour une équation scalaire, Bardos, LeRoux et Nédélec [1] explicitent le problème limite et démontrent la convergence lorsque les données u_0 et a sont à variation bornée. Leur résultat est valide même dans un domaine spatial multi-dimensionnel. L'absence d'hypothèse de régularité et/ou de petitesse fait de leur théorème un résultat très puissant, qui est dû à la propriété de contraction dans L^1 qu'ont les équations scalaires.

Par la suite, Dubois et LeFloch [6], ainsi que Benabdallah et l'auteur [2], [3] ont abordé le cas des systèmes (principalement ceux de deux équations, $n = 2$) en utilisant la technique dite de compacité par compensation. Mettant en œuvre l'analyse de DiPerna [5], on peut montrer dans certains cas que u^ϵ converge presque partout et dans $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ pour $p < \infty$, de sorte que la limite est bien solution faible entropique de (1). Cependant, l'information obtenue quant à la condition aux limites s'écrit

$$\gamma_0 q \circ u - q(a) \leq d\eta_a \cdot (\gamma_0 f \circ u - f(a)) \tag{3}$$

pour tout couple entropie-flux (η, q) dont l'entropie η est convexe, et cette liste d'inégalités ne conduit pas à un problème mixte bien posé, pour deux raisons. Tout d'abord, la trace calculée (*via* l'opérateur γ_0) peut être très faible et ne signifie pas que $u(x,t)$ admette une limite quand x tend vers zéro. Mais l'existence d'une trace dans un sens suffisamment

([1]) Encore faut-il que celles-ci ne soient pas elles-mêmes “caractéristiques”.

fort restant une question ouverte, la seconde objection est la plus sérieuse : l'ensemble $\mathcal{V}(a)$ défini par les inégalités (3), lorsque η parcourt les entropies convexes, n'est pas en général une sous-variété de dimension p. Bien que $\mathcal{V}(a)$ contienne l'ensemble $\mathcal{C}(a)$ qui décrit la condition aux limites résiduelle, il ne lui est pas égal, étant plutôt d'intérieur non vide, comme noté dans [3]. Ce point est particulièrement évident dans le cas général où le système n'admet qu'une seule entropie convexe, *modulo* les fonctions affines. L'exception notable des systèmes dits *de Temple*, qui contient tous les exemples facilement calculables mais pas ceux qui ont un intérêt physique, a conduit à la conjecture erronée [6] que $\mathcal{V}(a)$ et $\mathcal{C}(a)$ coïncident en général.

La compacité par compensation n'ayant pas été fructueuse, il a fallu se tourner vers une analyse détaillée de la couche limite qui apparaît au voisinage du bord. Notant $y := x/\epsilon$ la variable courte, la couche limite est une solution stationnaire de (2), qui raccorde la condition de Dirichlet à la trace de u en $x = 0$. On définit donc l'ensemble $\mathcal{C}(a)$ des états $b \in \mathbb{R}^n$ pour lesquels le problème suivant admet une solution (nécessairement unique) :

$$\begin{aligned} v' &= f(v) - f(b), \\ v(0) &= a, \\ v(+\infty) &= b. \end{aligned}$$

La condition aux limites résiduelle, identifiée par Gisclon [10], [9], s'écrit alors

$$u(0,t) \in \mathcal{C}(a(t)). \tag{4}$$

La limite u de u^ϵ est la solution de (1,4), dont la valeur initiale est u_0. Gisclon montre que ce problème mixte est localement bien posé dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$, lorsque les données u_0 et a sont compatibles à l'origine. Ainsi cette solution existe sur un intervalle de temps $(0, T)$ convenable $(T > 0)$ et elle est unique. Elle détermine une valeur au bord $u(0,t)$ qui à son tour définit de manière unique la couche limite $v(y,t)$ par $v(0,t) = a(t)$ et $\partial_y v(y,t) = f(v(y,t)) - f(u(0,t))$. Gisclon montre enfin que u^ϵ converge vers u dans $\mathcal{C}(0, T_0; L^2(\mathbb{R}^+))$, pour un T_0 convenable $(0 < T_0 < T)$.

L'analyse de Gisclon est très satisfaisante puisqu'elle identifie la limite sans ambiguïté et montre la convergence pendant un temps non nul. Il s'agit, dans le cas des systèmes, du premier résultat tangible. Il doit cependant être amélioré en ce qui concerne le temps de convergence. Puisque les solutions raisonnables des systèmes hyperboliques de lois de conservation développent des chocs en temps fini, il faut envisager de dépasser le temps T mentionné ci-dessus. En général, le problème mixte (1,4) aura une solution faible entropique u au-delà de T, qui pendant un temps raisonnable sera régulière par morceaux. Il y a tout lieu de croire que, si u^ϵ converge vers quelque chose, ce sera encore vers u. Tant que les chocs restent isolés les uns des autres et ne rencontrent pas le bord, on peut traiter séparément les différentes zones contenant une singularité : le bord relèvera de la méthode de Gisclon, tandis que les chocs seront étudiés comme dans [11]. Les difficultés arrivent lorsque deux chocs se rencontrent, ou bien lorsqu'un choc atteint le bord. Nous commençons par détailler cette seconde situation.

Voici où nous en sommes. Suivant Gisclon, Goodman et Xin, nous devons décrire u^ϵ dans chaque zone significative, c'est-à-dire

- l'intérieur $x > 0$, en dehors du voisinage des chocs,
- le voisinage des chocs, au moyen d'un profil de viscosité qui dépend de la variable rapide $(x - x(t))/\epsilon$,
- le voisinage du bord, au moyen de la variable rapide x/ϵ,
- le voisinage du point de rencontre $(0, t_0)$ du choc avec le bord.

Dans les trois premières zones, le terme dominant du développement asymptotique est connu. C'est respectivement la limite u, le profil de viscosité $w(\epsilon^{-1}(x-x(t)), t)$ et la couche limite $v(\epsilon^{-1}x, t)$. Il est raisonnable de penser que dans la dernière zone, le terme dominant doive dépendre simultanément de x/ϵ et de $(x - s(t-t_0))/\epsilon$ ($s = x'(t_0)$ étant la vitesse de l'impact), c'est-à-dire de $(y, \tau) := (x/\epsilon, (t-t_0)/\epsilon)$.

Nous écrivons donc

$$u^\epsilon(x,t) = U\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t-t_0}{\epsilon}\right) + \mathcal{O}(\epsilon),$$

pour $(x, t-t_0) = \mathcal{O}(\epsilon)$. Supposant que des formules similaires ont lieu pour les dérivées jusqu'à l'ordre deux, nous obtenons l'équation "locale"

$$\partial_\tau U + \partial_y f(U) = \partial_y^2 U, \quad y > 0, \tau \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Cette équation est posée pour $-\infty < \tau < +\infty$, parce que la droite réelle est la limite de l'intervalle $(-t_0/\epsilon, (T-t_0)/\epsilon)$ parcouru par τ, lorsque ϵ tend vers zéro. Elle est complétée par une condition aux limites, $U(0,\tau) = a(t_0)$, ainsi que par des conditions de raccordement à u. Ce raccordement ne prend en compte que la couche limite et le profil de choc, dans les secteurs (du domaine $y > 0$, $\tau < 0$) où ils dominent respectivement.

L'interaction de deux chocs est encore plus simple. A l'instant t_0, au point x_0, deux chocs du système (1) se rencontrent. Leurs états à gauche et à droite et leurs vitesses sont respectivement $(u_W, u_S; s_-)$ et $(u_S, u_E; s_+)$, avec $s_+ < s_-$. Les indices font référence aux points cardinaux dans les plans (x,t) ou (y,τ). La solution u^ϵ est bien comprise, pour $t < t_0$, en dehors d'un voisinage de (x_0, t_0) de taille ϵ : nous avons deux profils de viscosité w_j $(j = \pm)$, qui dépendent de la variable rapide $(x - x_j(t))/\epsilon$ et de la variable lente t. Au moment de l'interaction, les deux variables rapides $\epsilon^{-1}(x - x_0 - s_j(t - t_0))$ entrent en jeu et il faut trouver un "profil" $U((x - x_0)/\epsilon, (t - t_0)/\epsilon)$, solution du système parabolique

$$\partial_\tau U + \partial_y f(U) = \partial_y^2 U, \quad y \in \mathbb{R}, \tau \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

À nouveau, la "donnée" initiale est remplacée par un comportement prescrit lorsque τ tend vers $-\infty$, un raccordement avec les deux profils.

Notons que dans les deux problèmes considérés ici, on pourrait envisager l'interaction de plus de deux ondes en (x_0, t_0). Les résultats que nous obtenons s'adaptent aisément à ce cas. Mais son intérêt est plutôt limité car ce type d'interaction n'est pas générique, à moins de considérer une famille paramétrée de données initiales.

1. Le cas scalaire.

Donnons-nous trois états $u_W \neq u_S \neq u_E$, pour lesquels il existe une couche limite v, qui joint u_W à u_S, et un profil de choc, qui joint u_S à u_E à la vitesse $s < 0$:

$$v' = f(v) - f(u_S), \quad v(0) = u_W, \quad v(+\infty) = u_S,$$

$$w' = f(w) - f(u_S) - s(w - u_S), \quad s = (f(u_E) - f(u_S))/(u_E - u_S),$$

$$w(-\infty) = u_S, \quad w(+\infty) = u_E.$$

On a donc $s \leq f'(u_S) \leq 0$. On suppose également que ces deux ondes se rencontrent de manière non caractéristique :

$$s < f'(u_S) < 0. \tag{7}$$

Choisissons une fonction de localisation $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, avec la condition

$$\int_{\mathbb{R}} \chi(x) dx = 1,$$

puis posons

$$\theta(x) := \int_{-\infty}^{x} \chi(y)dy.$$

Choisissons ensuite un nombre σ dans l'intervalle $]s, 0[$. On construit alors la “solution approchée”

$$V(x,t) := (1 - \theta(x - \sigma t))v(x) + \theta(x - \sigma t)w(x - st).$$

On peut être contrarié, à première vue, du fait que cette construction fait appel à plusieurs choix *a priori* : ceux de χ et de σ. Cependant, ce n'est qu'une solution approchée, et on sait bien qu'il y a toujours une infinité de tels objets (pour une notion assez mal définie). En fait, seule l'unicité de la solution exacte a de l'importance et c'est elle qu'on démontrera.

Remarquons que V, égal à v ou à w en dehors d'une bande B de la forme $a < x - \sigma t < b$ (où $[a, b]$ est le support de χ), est une solution exacte de l'équation parabolique dans le complémentaire de B. De plus, pour $t < a/|\sigma|$, V satisfait la condition aux limites de Dirichlet $V(0,t) = u_W$. Notre résultat principal, dans le cas scalaire, s'énonce ainsi :

THÉORÈME 1.1. — *Les états u_W, u_S, u_E étant donnés comme ci-dessus, il existe une et une seule solution u des équations*

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \partial_x^2 u, \quad x > 0,\, t \in \mathbb{R},$$
$$u(0,t) = u_W,$$

vérifiant $u - V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}^+))$ et

$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t) - V(t)\|_1 = 0.$$

De plus, u ne dépend pas du choix de χ ni de celui de σ.

On dispose, pour l'interaction de deux chocs, d'un résultat analogue.

THÉORÈME 1.2. — *Soit v et w des profils de chocs joignant respectivement u_W à u_S (vitesse s_1) et u_S à u_E (vitesse s_2). On a donc $s_2 \le f'(u_S) \le s_1$ et on suppose qu'en fait ces inégalités sont strictes. Pour $\sigma \in]s_2, s_1[$, on définit la “solution approchée” par*

$$V(x,t) := (1 - \theta(x - \sigma t))v(x - s_1 t) + \theta(x - \sigma t)w(x - s_2 t).$$

Alors il existe une et une seule solution, qui ne dépend pas du choix de χ ou de σ, du problème

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \partial_x^2 u, \quad (x,t) \in \mathbb{R},$$

telle que $u - V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}\ ;\ L^1(\mathbb{R}))$ *et*

$$\lim_{t\to-\infty} \|u(t) - V(t)\|_1 = 0.$$

La preuve du théorème 1.2 est laissée au lecteur; elle suit fidèlement celle du théorème 1.1. On peut compléter le théorème 1.2 dans le cas où (u_W, u_E) admet un profil de choc v_0 de vitesse s, les trois chocs étant des chocs de Lax. C'est le cas si par exemple u_S est situé entre u_W et u_E ($(u_S - u_W)(u_S - u_E) < 0$) et si de plus les deux chocs incidents sont des chocs de Lax. En particulier, si f est concave (ou convexe), il suffit de se donner trois points $u_W < u_S < u_E$ (respectivement $u_E < u_S < u_W$) pour que toutes les hypothèses soient satisfaites. La situation est la suivante : comme $v - u_W$ et $v_0 - u_W$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^-$ (car $f'(u_W) < s_1, s$) et de même $w - u_E$ et $v_0 - u_E$ le sont sur $\mathbb{R}^+$, on voit que $V(t) - v_0(t)$ est intégrable, donc aussi $u(t) - v_0(t)$. Le résultat obtenu par Freistühler et l'auteur [7] prouve alors que $u(t) - v_0(t)$ tend vers zéro dans $L^1(\mathbb{R})$ quand t tend vers $+\infty$.

THÉORÈME 1.3. — *Si* $(u_W, u_S; s_1)$, $(u_S, u_E; s_2)$ *et* $(u_W, u_E; s)$ *sont trois chocs de Lax admettant des profils* v, w, v_0, *alors la solution* u *décrite au théorème 1.2 satisfait aussi*

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - v_0(t)\|_1 = 0.$$

De même, on peut compléter le théorème 1.1 lorsque le couple (u_W, u_E) correspond à une couche limite. L'énoncé suivant est dû à H. Freistühler et l'auteur [8].

THÉORÈME 1.4. — *Dans le théorème 1.1, on suppose de plus qu'il existe une couche limite entre* u_W *et* u_E, *c'est-à-dire une solution* $v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+)$ *du problème*

$$v_0' = f(v_0) - f(u_E), \quad v_0(0) = u_W, \quad v_0(+\infty) = u_E.$$

Alors la solution obtenue au théorème 1.1 satisfait

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - v_0\|_1 = 0.$$

Nous revenons maintenant à la démonstration du théorème 1.1.

Soit $t_0 = \min(0, a/|\sigma|)$. Pour $t < t_0$, nous définissons "l'erreur"

$$\phi := \partial_t V + \partial_x f(V) - \partial_x^2 V.$$

Tout d'abord, $\phi \equiv 0$ en dehors de la bande B. A l'intérieur de celle-ci, $\phi = \mathcal{O}(\exp \alpha t)$ avec $\alpha > 0$, c'est-à-dire que ϕ tend vers zéro exponentiellement vite quand $t \to -\infty$, ceci ayant lieu uniformément par rapport à x. En fait, chacun des trois termes $\partial_t V$, $\partial_x f(V)$ et $\partial_x^2 V$ ont cette propriété. Par exemple,

$$\partial_t V = \sigma\theta'(x-\sigma t)(v(x) - w(x-st)) - s\theta(x-\sigma t)w'(x-st)$$

est un $\mathcal{O}(\exp \alpha t)$ car $v(y)$ converge exponentiellement vite vers u_S pour $y \to +\infty$ tandis que $(w, w')(y)$ converge exponentiellement vite vers $(u_S, 0)$ pour $y \to -\infty$. On aura noté que dans B ont lieu les inégalités $x > a + |\sigma||t|$ et $x - st < b - |s-\sigma||t|$, de sorte que $x \to +\infty$ et $x - st \to -\infty$ quand $t \to -\infty$.

De ce qui précède, on déduit

$$\int_{-\infty}^{t_0} \|\phi(t)\|_1 dt < +\infty,$$

puisque $\|\phi(t)\|_1 \leq (b-a)\|\phi(t)\|_\infty$. Il reste à établir l'énoncé suivant :

LEMME 1.1. — *Soit $U(x,t)$ une fonction bornée de classe $\mathcal{C}^2$, telle que*

$$\partial_t U + \partial_x f(U) - \partial_x^2 U =: \psi \in L^1(\mathbb{R}^+ \times]-\infty, t_0[),$$

et $U(0,t) = u_W$ pour $t < t_0$. Alors il existe une et une seule solution globale u de l'équation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = \partial_x^2 u, \quad x > 0, t \in \mathbb{R},$$

telle que $u(0,t) = u_W$, $u - U \in \mathcal{C}\left(]-\infty, t_0]\ ;\ L^1(\mathbb{R}^+)\right)$ avec

$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t) - U(t)\|_1 = 0.$$

Démonstration. — Soit $\rho < t_0$. Nous définissons u^ρ comme l'unique solution du problème mixte

$$\partial_r u^\rho + \partial_x f(u^\rho) = \partial_x^2 u^\rho, \quad x > 0,\ t > \rho,$$
$$u^\rho(0,t) = u_W, \quad t > \rho,$$
$$u^\rho(x,\rho) = U(x,\rho), \quad x > 0.$$

D'après le principe du maximum, u^ρ reste borné et existe pour tout $t > \rho$. De plus, le semi-groupe associé à l'équation parabolique avec condition de Dirichlet (ici $u(0,t) = u_W$) est contractant pour la distance $\delta(u, \hat{u}) := \|u - \hat{u}\|_1$ associée à la norme de $L^1(\mathbb{R}^+)$. On a donc, pour $\rho < t < t_0$:

$$\|u^\rho(t) - U(t)\|_1 \leq \int_\rho^t \|\psi(\tau)\|_1 d\tau. \tag{8}$$

Choisissant maintenant $\eta < \rho < t_0$, nous comparons u^η et u^ρ. À nouveau, pour $t > \rho$, le principe de contraction fournit

$$\|u^\eta(t) - u^\rho(t)\|_1 \leq \|u^\eta(\rho) - u^\rho(\rho)\|_1 = \|u^\eta(\rho) - U(\rho)\|_1 \leq \int_\eta^\rho \|\psi(\tau)\|_1 d\tau,$$

d'après (8). Ainsi,

$$\lim_{\eta,\rho\to-\infty} \sup_{t\geq T} \|u^\eta(t) - u^\rho(t)\|_1 = 0,$$

ce qui signifie que la suite $(u^\rho(t) - U(t))_{\rho\to-\infty}$ est uniformément de Cauchy sur $[T, +\infty[$, à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^+)$. Elle admet donc une limite $u - U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; L^1(\mathbb{R}^+))$ et on a la convergence uniforme

$$\lim_{\rho\to-\infty} \sup_{t\geq T} \|u(t) - u^\rho(t)\|_1 = 0.$$

De plus, le passage à la limite fournit l'inégalité

$$\|u(t) - U(t)\|_1 \leq \int_{-\infty}^t \|\psi(\tau)\|_1 d\tau,$$

dont le second membre tend vers zéro quand t tend vers l'infini. Par ailleurs, on peut passer à la limite sans difficulté dans l'équation parabolique et la condition aux limites. □

Voyons maintenant l'unicité annoncée dans le théorème 1.1. Nous obtiendrons simultanément celle du lemme 1.1. Si deux solutions approchées V et $\hat{V}$ fournissent les solutions exactes u et $\hat{u}$, alors

$$\lim_{t\to-\infty} \|u(t) - \hat{u}(t)\|_1 = \lim_{t\to-\infty} \|V(t) - \hat{V}(t)\|_1.$$

Cependant, $\|V(t) - \hat{V}(t)\|_\infty$ tend exponentiellement vite vers zéro quand $t \to -\infty$, tandis que la mesure de son support ne croît que linéairement. Ainsi les limites calculées sont nulles. Mais comme $t \mapsto \|u(t) - \hat{u}(t)\|_1$ est décroissant, on en déduit que $u - \hat{u} \equiv 0$.

2. Le cas des systèmes.

Nous nous plaçons dans le cas dit “physique” : il existe une entropie E de classe $\mathcal{C}^3$, de flux F, dont la matrice hessienne est définie positive en tout point : $D^2E > 0_n$.

Nous nous donnons une couche limite v et un profil de choc w, de vitesse $s < 0$, reliant respectivement u_W à u_S et u_S à u_E. Nous renvoyons l'étude de l'interaction de deux chocs à la section 4.

Nous construisons la solution approchée V par la même formule que dans le cas scalaire. Cependant, au lieu de laisser libre la valeur de σ dans l'intervalle $]s,0[$, nous devons faire un choix optimal. Pour cela, observons d'abord que, sur le support de χ, lorsque $t \to -\infty$, on a $x \sim \sigma t \to +\infty$ et $x - st \sim (\sigma - s)t \to -\infty$. De plus, dans ce domaine,

$$\phi = \mathcal{O}(\|v - u_S\|, \|w - u_S\|, \|v'\|, \|w'\|, \|v''\|, \|w''\|).$$

Comme v et w sont des solutions d'équations différentielles qui convergent vers un point critique, on sait que

$$\|v - u_S\|, \|v'\|, \|v''\|(y) \overset{y\to+\infty}{=} \mathcal{O}(e^{\alpha y}),$$

où $\alpha < 0$ est la plus grande valeur propre négative (donc la plus proche de zéro) de $df(u_S)$. De même, pour le p-choc, on a

$$\|w - u_S\|, \|w'\|, \|w''\|(y) \overset{y\to-\infty}{=} \mathcal{O}(e^{\beta y}),$$

où $\beta = \lambda_p(u_S) - s > 0$. Ainsi,

$$\|\phi\|_1, \|\phi\|_\infty = \mathcal{O}(e^{\alpha\sigma t} + e^{\beta(\sigma - s)t}),$$

lorsque t tend vers $-\infty$. Le choix optimal est

$$\sigma := \frac{\beta s}{\beta - \alpha},$$

qui donne

$$\|\phi\|_1, \|\phi\|_\infty = \mathcal{O}\left(\exp \frac{\alpha\beta s}{\beta - \alpha} t\right). \tag{9}$$

Cette estimation est uniforme lorsque u_W, u_S, u_E restent dans un compact et t reste inférieur à t_0 convenable.

2.1. Une inégalité différentielle pour $u^\tau - V$.

L'estimation suit un schéma classique. Nous supposons dans un premier temps qu'il existe un compact convexe K positivement invariant pour le problème parabolique (voir [4]), qui contient les valeurs de v, de w, donc celles de V, puisque K doit être convexe. Nous renvoyons l'étude du cas général à la section 5.

Choisissant un temps $\tau < t_0$ (qu'on fera tendre ultérieurement vers $-\infty$), on définit u^τ comme l'unique solution du problème mixte pour le système parabolique, valant u_W au bord, dont la donnée initiale, au temps

τ, est $V(\cdot,\tau)$. Par le principe du maximum, u^τ prend ses valeurs dans K. En particulier, u^τ est défini pour tout temps $t > \tau$.

Nous commençons par estimer l'écart entre $u^\tau(t)$ et $V(t)$, pour $t > \tau$. Comme E est uniformément convexe sur K, il suffit de considérer l'expression $\Delta(u^\tau, V)$, où l'on a posé

$$\Delta(a,b) := E(a) - E(b) - dE(b)\cdot(a-b).$$

On a en effet $\Delta(a,b) \geq \omega(K)\|a-b\|^2$, où $\omega(K) > 0$. Définissons de même

$$\delta(a,b) = F(a) - F(b) - dE(b)\cdot(f(a)-f(b)).$$

Dans les calculs qui suivent, nous notons systématiquement g^τ pour $g(u^\tau)$ et g tout simplement, pour $g(V)$. Nous avons d'abord

$$\partial_t\Delta(u^\tau,V) + \partial_x\delta(u^\tau,V) = A + B + C, \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned}
A &:= (dE^\tau - dE)\cdot u^\tau_{xx} - D^2E(u^\tau - V, V_{xx}),\\
B &:= -D^2E(u^\tau - V, \phi),\\
C &:= -D^2E(f^\tau - f - df(u^\tau - V), V_x).
\end{aligned}$$

Il est clair que $C = \mathcal{O}(\Delta|V_x|)$ et $B = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta}|\phi|)$. Puis

$$\begin{aligned}
A &= ((dE^\tau - dE)\cdot(u^\tau - V)_x)_x - (dE^\tau - dE)_x\cdot(u^\tau - V)_x\\
&\qquad + (dE^\tau - dE - D^2E(u^\tau - V))\cdot V_{xx}\\
&= (\cdots)_x - D^2E^\tau(u^\tau_x - V_x, u^\tau_x - V_x) + (D^2E - D^2E^\tau)(V_x, u^\tau_x - V_x)\\
&\qquad + \mathcal{O}(|V_{xx}|\Delta)\\
&\leq (\cdots)_x - \omega(K)\|u^\tau_x - V_x\|^2 + \mathcal{O}(|V_{xx}|\Delta + \sqrt{\Delta}|V_x|\|u^\tau_x - V_x\|),
\end{aligned}$$

où la parenthèse s'annule à l'infini et en $x = 0$.

Nous intégrons maintenant l'égalité (10) sur $\mathbb{R}^+$. Les deux dérivées exactes, dont l'une est dans A et l'autre est $\partial_x\delta$, sont d'intégrales nulles car $u^\tau - V$ s'annule en $x = 0$ et à l'infini. Il reste donc

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^+}\Delta\,dx + \omega\int_{\mathbb{R}^+}\|u^\tau_x - V_x\|^2dx\\
&\qquad\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^+}\mathcal{O}\left(\Delta(|V_x| + |V_{xx}|) + \sqrt{\Delta}|\phi| + \sqrt{\Delta}|V_x||u^\tau_x - V_x|\right)dx.
\end{aligned}$$

Le dernier terme peut-être majoré à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz par

$$c(K)Y^2\|V_x\|^2_\infty + \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^+}\|u^\tau_x - V_x\|^2dx,$$

où

$$Y(t) := \left(\int_{\mathbb{R}+} \Delta(u^\tau, V)\, dx \right)^{1/2}.$$

Finalement, nous obtenons l'inégalité

$$Y' \leq c(K)\{\|\phi\|_2 + (\|V_x\|_\infty + \|V_x\|_\infty^2 + \|V_{xx}\|_\infty)Y\}. \tag{11}$$

2.2. Une inégalité différentielle pour $u^\tau - u^\nu$.

Nous considérons maintenant la différence $\xi := u^\tau - u^\nu$, où τ et ν sont choisis tels que $\tau < \nu < t_1$. L'estimation de ξ utilise la forme quadratique définie par $D^2 E_V$:

$$Q := \frac{1}{2} D^2 E_V(\xi, \xi).$$

Pour $t \in]\nu, t_0[$, nous avons

$$\begin{aligned}
\partial_t Q &= D^2 E_V(\xi, \partial_t \xi) + \mathcal{O}(|V_t| Q) \\
&= \mathcal{O}(|V_t| Q) + D^2 E_V(\xi, \partial_x^2 \xi - \partial_x (f^\tau - f^\nu)) \\
&= \mathcal{O}(|V_t| Q) + \partial_x (D^2 E_V(\xi, \partial_x \xi)) - D^2 E_V(\partial_x \xi, \partial_x \xi) \\
&\qquad + \mathcal{O}(|V_x| Q^{1/2} |\partial_x \xi|) - D^2 E_V(\xi, \partial_x (f^\tau - f^\nu)) \\
&\leq \mathcal{O}((|V_t| + |V_x|^2) Q) + \partial_x (D^2 E_V(\xi, \partial_x \xi)) - \frac{\omega}{2} |\partial_x \xi|^2 \\
&\qquad - D^2 E_V(\xi, \partial_x (f^\tau - f^\nu)),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité $D^2 E_V \geq \omega I_n$ ainsi que l'inégalité de Schwarz. Appelons $-D$ le dernier terme :

$$D = D^2 E_V(\xi, \partial_x (f^\tau - f^\nu) - df_V \partial_x \xi) + D^2 E_V(\xi, df_V \partial_x \xi) =: D_1 + D_2.$$

Tout d'abord,

$$D_2 = \frac{1}{2} \partial_x D^2 E_V(df_V \xi, \xi) + \mathcal{O}(|V_x| Q),$$

car df est symétrique, relativement à $D^2 E$, puisque E est une entropie. Enfin, $D_1 = D^2 E_V(\xi, Z)$ avec

$$\begin{aligned}
Z &:= \partial_x (f^\tau - f^\nu) - df_V \partial_x \xi \\
&= (df^\tau - df_V) \partial_x \xi + (df^\tau - df^\nu) \partial_x (u^\nu - V) + (df^\tau - df^\nu) \partial_X V.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$D_1 = \mathcal{O}\left(|V_x| Q + Q |\partial_x (u^\tau - V)| + Q^{1/2} |u^\tau - V| |\partial_x \xi| \right).$$

Rassemblant ces calculs et intégrant par rapport à x, il vient

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^+} Q dx + \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^+} |\partial_x \xi|^2 dx$$
$$\leq c(K)(\|V_t\|_\infty + \|V_x\|_\infty + \|V_x\|_\infty^2)\int_{\mathbb{R}^+} Q dx + G,$$

où

$$G := c(K)\int_{\mathbb{R}^+}\left(Q|\partial_x(u^\tau - V)| + Q^{1/2}|u^\tau - V||\partial_x\xi|\right) dx = G_1 + G_2.$$

Examinons G_2 :

$$\begin{aligned}
G_2 &\leq \frac{\omega}{10}\|\xi_x\|_2^2 + c(K)\int_{\mathbb{R}^+} Q|u^\tau - V|^2 dx \\
&\leq \frac{\omega}{10}\|\xi_x\|_2^2 + c(K)\ \|\xi\|_\infty^2\ \|u^\tau - V\|_2^2 \\
&\leq \frac{\omega}{10}\|\xi_x\|_2^2 + c(K)\ \|\xi\|_2\ \|\xi_x\|_2\ \|u^\tau - V\|_2^2 \\
&\leq \frac{\omega}{5}\|\xi_x\|_2^2 + c(K)\ \|u^\tau - V\|_2^4\ \|\xi\|_2^2 \\
&\leq \frac{\omega}{5}\|\xi_x\|_2^2 + c(K)\ \|u^\tau - V\|_2^4 \int_{\mathbb{R}^+} Q\, dx.
\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}
G_1 &\leq c(K)\|\partial_x(u^\tau - V)\|_2\ \|Q\|_2 \leq c(K)\ \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2\ \|\xi\|_4^2 \\
&\leq c(K)\ \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2\ \|\xi\|_2^{3/2}\ \|\xi_x\|_2^{1/2} \\
&\leq \frac{\omega}{10}\|\xi_x\|_2^2 + c(K)\ \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2^{4/3}\ \|\xi\|_2^2 \\
&\leq \frac{\omega}{10}\|\xi_x\|_2^2 + c(K)\ \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2^{4/3}\int_{\mathbb{R}^+} Q\, dx.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^+} Q dx + \frac{\omega}{5}\int_{\mathbb{R}^+} |\partial_x \xi|^2 dx \tag{12}$$
$$\leq c(K)(\|V_t\|_\infty + \|V_x\|_\infty + \|V_x\|_\infty^2)\int_{\mathbb{R}^+} Q dx + 2h(t)\int_{\mathbb{R}^+} Q\, dx,$$

avec

$$h(t) := c(K)\left(\|u^\tau - V\|_2^4 + \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2^{4/3}\right).$$

Notons maintenant

$$W(t) := \left(\int_{\mathbb{R}^+} Q dx\right)^{1/2}, \quad W(t)^2 \geq \omega\|\xi(t)\|_2^2.$$

Alors en particulier

$$W' \leq c(K)(\|V_t\|_\infty + \|V_x\|_\infty + \|V_x\|_\infty^2)W + h(t)W. \tag{13}$$

2.3. L'estimation *a priori*.

Nous écrivons les inégalités (11) et (13) sous la forme

$$Y' \leq d(t; u_W, u_S, u_E)Y + c(K)\|\phi(t)\|_2, \quad W' \leq (d(t; u_W, u_S, u_E) + h(t))W,$$

où

$$d(t; u_W, u_S, u_E) := c(K)(\|V_x\|_\infty + \|V_x\|_\infty^2 + \|V_{xx}\|_\infty + \|V_t\|_\infty).$$

Fixons $t_1 < t_0$, que nous choisirons plus tard, et notons

$$d_1(u_W, u_S, u_E) = \sup\{d(t, u_W, u_S, u_E); t < t_1\}.$$

Alors, pour $t \in [\tau, t_1]$, nous avons

$$Y' \leq c(K)\|\phi\|_2 + d_1 Y,$$

tandis que, pour $\tau < \nu < t < t_1$,

$$W' \leq (h(t) + d_1)W. \tag{14}$$

Compte tenu de la croissance de $\|\phi\|_2$, nous n'obtiendrons une estimation utile que sous l'hypothèse

$$d_1 < \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} s, \tag{15}$$

qui sera discutée à la section 3.

Puisque $Y(0) = 0$, il vient

$$\begin{aligned} Y(t) &\leq c(K) \int_\tau^t e^{d_1(t-m)} \|\phi(m)\|_2 \, dm \\ &\leq c(K) \int_\tau^t \exp\left(d_1(t-m) + \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} sm\right) dm. \end{aligned}$$

Supposons la condition (15) satisfaite. Alors

$$Y(t) \leq \frac{c(K)}{\left|d_1 - \frac{\alpha\beta s}{\beta - \alpha}\right|} \exp \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} st, \tag{16}$$

le majorant étant du même ordre que $\|\phi\|_2$ et indépendant de τ. Reprenant alors les calculs du paragraphe 2.1, nous obtenons aussi l'estimation

$$\int_\tau^t \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2^2 dm \leq \frac{d_1 c(K)}{\left|d_1 - \frac{\alpha\beta s}{\beta - \alpha}\right|^2} \exp \frac{2\alpha\beta}{\beta - \alpha} st. \tag{17}$$

De même,

$$W(t) \leq W(\nu) \exp\left\{d_1(t - \nu) + \int_\nu^t h(m) dm\right\}.$$

Cependant,

$$W(\nu) \leq c(K)\|u^\tau(\nu) - u^\nu(\nu)\|_2 = c(K)\|u^\tau(\nu) - V(\nu)\|_2,$$

qui est estimé par (16) :

$$W(\nu) \leq \frac{c(K)}{\frac{\alpha\beta s}{\beta-\alpha} - d_1} \exp \frac{\alpha\beta s\nu}{\beta - \alpha}.$$

Voyons maintenant l'intégrale de h :

$$\int_\nu^t h(m)\, dm = c(K) \int_\nu^t \left(\|u^\tau - V\|_2^4 + \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2^{4/3}\right) dm =: H_0 + H_1.$$

Tout d'abord, d'après (16),

$$H_0 \leq c(K, \alpha, \beta, s) \exp \frac{4\alpha\beta st}{\beta - \alpha},$$

où la constante $c(K, \alpha, \beta, s)$ est définie lorsque (15) est satisfaite. Puis, d'après l'inégalité de Hölder,

$$H_1 \leq c(K)(t - \nu)^{1/3} \left(\int_\nu^t \|\partial_x(u^\tau - V)\|_2^2 dm\right)^{2/3}.$$

On utilise alors la majoration (17) :

$$H_1 \leq c(K, \alpha, \beta, s)|\nu|^{1/3} \exp \frac{4\alpha\beta st}{3(\beta - \alpha)}.$$

Nous avons donc établi l'inégalité

$$\begin{aligned}(18)\qquad \|u^\tau(t) - u^\nu(t)\|_2 &\leq c(K)W(t)\\ &\leq c(K, \alpha, \beta, s)|\nu|^{1/3} e^{\gamma t} \exp\left(\frac{\alpha\beta s}{\beta - \alpha} - d_1\right)\nu,\end{aligned}$$

où $\gamma = \gamma(K, \alpha, \beta, s)$.

On déduit alors de (18) que la suite $(u^\tau)_{\tau\to-\infty}$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}(T, t_1; u_E + L^2(\mathbb{R}^+))$, pour tout $T < t_1$. Elle converge donc dans cet espace vers une fonction u qui est, bien entendu, solution du système parabolique. On peut montrer, avec les calculs des paragraphes précédents([2]), que cette suite est également bornée et de Cauchy dans $L^2(T, t_1; u_E + H^1(\mathbb{R}^+))$. Ainsi, u satisfait aussi la condition de Dirichlet $u(0, t) \equiv u_W$. Enfin, passant à la limite dans (16), nous obtenons

$$(19)\qquad \|u(t) - V(t)\|_2 \leq \frac{c(K)}{\left|d_1 - \frac{\alpha\beta s}{\beta-\alpha}\right|} \exp \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} st,$$

([2]) C'est une inégalité analogue à (17), mais pour $\partial_x\xi$ au lieu de $\partial_x(u^\tau - V)$.

qui donne
$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t) - V(t)\|_2 = 0.$$
Ainsi u est la solution de notre problème.

Remarques.

1. Contrairement au cas scalaire, où le comportement asymptotique de $u(t)$, lorsque $t \to -\infty$, était évalué dans $L^1(\mathbb{R}^+)$, il l'est ici dans $L^2(\mathbb{R}^+)$.

2. Si u et $\bar{u}$ sont solutions du même problème, on peut encore établir l'inégalité (14) pour
$$\hat{W} := \left(\int_{\mathbb{R}^+} D^2 E_V(\bar{u} - u, \bar{u} - u)\, dx \right)^{1/2}.$$
Si $\bar{u}$ et u satisfont chacun l'estimation (19), alors
$$\hat{W} = \mathcal{O}\left(\exp \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} st \right),$$
ce qui, joint à l'inégalité différentielle, fournit $\hat{W} \equiv 0$ (on utilise à nouveau l'hypothèse (15). Ainsi, le problème admet au plus une solution satisfaisant (19).

3. Discussion de la condition (15).

Puisque nous sommes libres de choisir le temps t_1 (avec $t_1 < t_0$), la condition (15) porte en fait sur $d^*(u_W, u_S, u_E) := \lim \inf_{t \to -\infty} d(t)$:

$$d^* < \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} s. \tag{20}$$

Reconnaissons tout d'abord que la définition de d, donc de d^*, contient une constante $c(K)$ qui, quoique finie, peut être assez grande. On ne peut donc pas espérer que (20) soit satisfaite pour tout choix de la couche limite et du choc visqueux. C'est pourquoi le résultat énoncé ci-dessous suppose que ces deux ondes incidentes sont d'amplitudes petites :
$$\operatorname{diam}(u_W, u_S, u_E) \ll 1.$$
Dans ce cas, les deux membres de (20) sont petits : d'une part, $\beta \ll 1$ car, pour un choc faible, $\beta = \lambda_p(u_S) - s$ est de l'ordre de $u_E - u_S$; d'autre part, V_x, V_t, V_{xx} sont petits, cela se voyant sur les équations différentielles satisfaites par v et w. Pour montrer que (20) est satisfait, nous montrons maintenant que d^* est *vraiment plus petit* que β.

3.1. Ordre de grandeur de $\frac{\beta\alpha}{\beta-\alpha}s$.

Nous notons $\lambda_1(a) < \cdots < \lambda_k(a) < 0 < \lambda_{k+1}(a) < \cdots < \lambda_n(a)$. On a donc $p < k$. Le p-ième champ caractéristique est supposé vraiment non-linéaire dans le domaine K. Le vecteur propre associé $r_p(a)$ est normalisé par l'égalité

$$d\lambda_p(a) \cdot r_p(a) \equiv 1.$$

De même, la forme linéaire propre associée est normalisée par $l_p \cdot r_p \equiv 1$. On sait qu'alors, pour $u_E - u_S$ petit, β satisfait

$$\beta \sim \frac{1}{2} d\lambda_p(u_S) \cdot (u_S - u_E) > 0.$$

Par ailleurs, $\alpha \sim \lambda_j(u_S)$, pour $j \leq k$. Puis $s \sim \lambda_p(u_S)$. Enfin, $u_S - u_E \sim \epsilon r_p(u_S)$ avec $\epsilon > 0$. Finalement,

LEMME 3.1. — *Lorsque* $\operatorname{diam}(u_E, u_W; u_S) \ll 1$, *on a*

$$\frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} s \sim -\frac{\epsilon}{2}\lambda_p(u_S) = \frac{\epsilon}{2}|\lambda_p(u_S)|.$$

3.2. Ordre de grandeur de d^*.

Lorsque $t \to -\infty$, $\|V_x\|_\infty$ tend vers $\max(\|v'\|_\infty, \|w'\|_\infty)$. De même, $\|V_t\|_\infty$ tend vers $\|w'\|_\infty |s|$ et $\|V_{xx}\|$ tend vers $\max(\|v''\|_\infty, \|w''\|_\infty)$. Ainsi,

$$d^* \leq c(K) \max(\|v'\|_\infty, \|w'\|_\infty, \|v''\|_\infty, \|w''\|_\infty).$$

Nous évaluons $v', \ldots$ à l'aide des équations de profil.

Tout d'abord, $v' = f(v) - f(u_S) = \mathcal{O}(v - u_S) = \mathcal{O}(u_W - u_S)$, puisque u_W est sur la variété stable de u_S pour cette équation et v parcourt la trajectoire issue de u_W. De même, $v'' = df(v)v' = \mathcal{O}(|v'|)$ montre que

$$\|v'\|_\infty, \|v''\|_\infty \leq c(K)\|u_W - u_S\|.$$

Ensuite, $w' = f(w) - f(u_S) - s(w - u_S)$ est *a priori* un $\mathcal{O}(u_E - u_S)$. Cependant, la construction des profils de viscosité (voir [12], pages 256-258) montre que (w, s) reste sur une variété centrale du système étendu

$$\frac{d}{dy}\begin{pmatrix} w \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(w;s) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(w;s) := f(w) - f(u_S) - s(w - u_S).$$

Cette variété est de dimension deux, tangente en $(u_S, \lambda_p(u_S))$ au plan engendré par $(r_p(u_S), 0)$ et $(0,1)$. Notant $\mu(y) := l_p(u_S) \cdot (w(y) - u_S) = \mathcal{O}(\|u_E - u_S\|)$, on a donc

$$w(y) - u_S = \mu(y) r_p(u_S) + \mathcal{O}(\mu^2) = \mu r_p(u_S) + \mathcal{O}(\|u_E - u_S\|^2).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} w' &= (df(u_S) - s)(w - u_S) + \mathcal{O}(\|u_E - u_S\|^2) \\ &= (\lambda_p(u_S) - s)\mu r_p(u_S) + \mathcal{O}(\|u_E - u_S\|^2) \\ &= \mathcal{O}(\|u_E - u_S\|^2), \end{aligned}$$

où on a utilisé l'estimation de β. Enfin $w'' = (df(w) - s)w' = \mathcal{O}(\|u_E - u_S\|^2)$. Finalement,

LEMME 3.2. — *Le p-ième champ étant vraiment non linéaire et le bord n'étant pas caractéristique, on a*

$$d^* \leq c(K)(\|u_W - u_S\| + \|u_E - u_S\|^2).$$

3.3. Conclusion.

D'après les lemmes 3.1 et 3.2, la condition (20) est satisfaite dès que $X := \|u_W - u_S\|$ et $Y := \|u_E - u_S\|$ satisfont l'inégalité

$$X + Y^2 \leq \eta(K) Y,$$

où $\eta(K)$ est une constante qui, bien que petite, ne dépend que de K. Cette inégalité définit un domaine compris entre l'axe $X = 0$ et une parabole. On en déduit le théorème d'existence, pour l'interaction choc-couche limite :

THÉORÈME 3.1. — *On suppose que le bord n'est pas caractéristique et que le p-ième champ caractéristique est vraiment non linéaire, avec $\lambda_p < 0$. On suppose aussi que le système (1) est strictement hyperbolique et qu'il admet une entropie fortement convexe ainsi qu'un compact K positivement invariant.*

Il existe alors deux nombres $\epsilon(K) > 0$ et $c(K) > 0$ tels que, pour tout $(u_W, u_S, u_E) \in K$ tels que $u_S \in \mathcal{C}(u_W)$ et $u_E \in S_p(u_S)$ ($S_p(a)$ désigne la courbe de p-choc issue de a), les conditions (de petitesse)

$$\|u_E - u_S\| \leq \epsilon(K), \quad \|u_W - u_S\| \leq c(K)\|u_E - u_S\|$$

assurent l'existence d'une solution globale $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_t; u_E + L^2(\mathbb{R}_x^+))$ *du problème aux limites*

$$u_t + f(u)_x = u_{xx}, \quad u(0,t) \equiv u_W,$$

telle que

$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t) - V(t)\|_2 = 0.$$

Remarques.

– La petitesse de $\|u_E - u_S\|$ assure en particulier l'existence du profil de viscosité, ce qui donne un sens à V.

– L'hypothèse $\|u_W - u_S\| = \mathcal{O}(\|u_E - u_S\|)$ est plutôt restrictive et il serait utile de savoir si elle est nécessaire ou pas.

– Les estimations, appliquées à deux solutions, montrent que la solution de ce problème est en fait unique.

4. L'interaction de deux chocs.

Il ne s'agit pas de refaire ici tous les calculs, puisqu'ils suivent les mêmes lignes, mais seulement d'adapter quelques étapes.

Nous sommes dans le cas où (u_W, u_S) est un q-choc de vitesse s_-, avec $q \geq p$. On a donc $s_- > s =: s_+$ (si $q = p$, c'est la condition de choc de Lax). Alors $\alpha = \lambda_q(u_S) - s_- < 0$. Dans la construction de V, v est désormais le profil du choc (u_W, u_S) et intervient par $v(x - s_- t)$. La meilleure valeur de σ est

$$\sigma := \frac{\alpha s_- - \beta s_+}{\alpha - \beta}.$$

Pour tout $p \in [1, \infty]$, on a alors

$$\|\phi\|_p = \mathcal{O}\left(e^{\omega t}\right), \quad t \to -\infty,$$

avec

$$\omega = \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha}(s_+ - s_-) > 0.$$

Les estimations sont les mêmes que précédemment et nous sommes ramenés à la discussion de la condition (20). Cependant, α est maintenant petit, de l'ordre de X, tandis que $\|v'\|_\infty, \|v''\|_\infty$ sont de l'ordre de X^2. La condition (20) est donc satisfaite dès que

$$(X + Y)(X^2 + Y^2) \leq \eta(K) XY (s_- - s_+). \tag{21}$$

Lorsque $q = p$, la différence des vitesses est elle-même de l'ordre de $X + Y$, car $s_- - s_+ \sim l_p(u_S) \cdot (u_W - u_E)/2$, tandis que $u_E - u_S$ et $u_S - u_W$ sont approximativement alignés avec $r_p(u_S)$ et de même sens. L'inégalité se ramène donc à $X^2 + Y^2 \leq \eta'(K)XY$, qui n'a pas en général de solution non triviale, puisque $\eta'(K)$ est petit. Pour cette raison, nous ne sommes pas capables ici de conclure lorsque les chocs incidents sont de la même famille.

En revanche, pour $q > p$, $s_- - s_+$ est proche de $\lambda_p(u_S) - \lambda_q(u_S)$, qui n'est pas nul. Ainsi la condition se lit

$$(X + Y)(X^2 + Y^2) \leq \eta'(K)XY.$$

L'ensemble ainsi décrit est un pétale de trèfle, de rayon $\eta'/4$. Nous obtenons donc l'énoncé :

THÉORÈME 4.1. — *On suppose que les p-ième et q-ième champs caractéristiques ($q > p$) sont vraiment non linéaires. On suppose aussi que le système (1) est strictement hyperbolique et admet une entropie fortement convexe, ainsi qu'un domaine compact K, positivement invariant.*

Il existe alors deux nombres $\epsilon(K) > 0$ et $c(K) > 0$ tels que, pour tout $(u_W, u_S, u_E) \in K$ avec $u_S \in S_q(u_W)$ et $u_E \in S_p(u_S)$, les conditions

$$\|u_W - u_S\| + \|u_E - u_S\| \leq \epsilon(K)$$

et

$$\|u_W - u_S\|^2 \leq c(K)\|u_E - u_S\|, \quad \|u_E - u_S\|^2 \leq c(K)\|u_W - u_S\| \tag{22}$$

assurent l'existence d'une solution globale $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ du système parabolique

$$u_t + f(u)_x = u_{xx},$$

telle que

$$\lim_{t \to -\infty} \|u(t) - V(t)\|_2 = 0.$$

Remarques.

– La condition de comparaison entre les ondes (22) est beaucoup moins restrictive que lors de l'interaction entre une couche limite et un choc. Une interprétation possible de cette condition est la suivante. Lorsque les deux ondes sont d'amplitudes très différentes γ et δ, avec $\gamma \ll \delta$, l'onde dominante envoie continuellement des perturbations d'ordre δ^2, parce que ces ondes sont vraiment non linéaires. L'onde dominée, recevant ces perturbations, ne peut les absorber que si son amplitude est au moins du même ordre : $\delta^2 = \mathcal{O}(\gamma)$. Dans le cas contraire, ce profil est déstabilisé par les perturbations qu'il reçoit de son compagnon.

– À nouveau, la solution de ce problème est en fait unique.

5. Résultats en l'absence de domaine positivement invariant.

Le cas où le système (1) n'admet aucun domaine positivement invariant est le plus fréquent, puisqu'il est à peu près systématique lorsque $n \geq 3$. La méthode suit alors une idée développée dans [12], page 236.

L'ensemble K est ici l'enveloppe convexe fermée de la réunion $v(\mathbb{R}) \cup w(\mathbb{R})$. C'est un compact, dont nous notons K_ρ le voisinage d'ordre $\rho > 0$: $K_\rho = K + B(0;\rho)$. Nous fixons arbitrairement un nombre $r > 0$ tel que K_r soit un compact de l'ensemble des états $\mathcal{U}$. La théorie classique dit qu'il existe un temps $\theta > 0$ tel que, pour toute donnée initiale à valeurs dans $K_{r/2}$, le problème parabolique admet une et une seule solution régulière sur $(0,\theta) \times \mathbb{R}^{(+)}$, à valeurs dans K_r (voir [12], pages 222–228 pour le problème de Cauchy, ou [9] pour le problème mixte).

Comme K est convexe, il contient les valeurs de la solution approchée V. On peut donc définir chaque u^ν de manière unique. C'est une solution régulière, *a priori* locale en temps. Nous notons $(\nu, T(\nu))$ l'intervalle de temps maximal pendant lequel elle reste définie et à valeurs dans K_r. Il s'ensuit que, pour $t \in (T(\nu) - \theta, T(\nu))$,

$$\|u^\nu(t) - V(t)\|_\infty > r/2.$$

Pour $t \in (\nu, T(\nu))$, les estimations des sections 2.1 et 2.3 restent valables, avec des constantes $c(K_r)$. Notons que ces constantes dépendent continûment de r. On peut donc satisfaire la condition (15) dans les mêmes circonstances que précédemment, pourvu que $r > 0$ soit choisi assez petit (notons qu'alors, t_1 dépend de ce choix).

Supposons que $T(\nu)$ soit inférieur à t_1. Nous avons alors, pour $t \in (\nu, T(\nu))$,

$$\|u^\nu(t) - V(t)\|_2 \leq c_1(K_r)e^{\omega t}, \quad \int_\nu^t \|u^\nu_x - V_x\|_2^2 dm \leq c_2(K_r)e^{2\omega t}.$$

En vertu de l'inégalité de Ladyzenskaya $\|h\|_\infty^2 \leq 2\|h\|_2 \cdot \|h_x\|_2$, il vient

$$\int_\nu^{T(\nu)} \|u^\nu(t) - V(t)\|_\infty^4 dt \leq 4(c_1c_2)(K_r)e^{4\omega T(\nu)}.$$

Remarquant que $T(\nu)$ est supérieur à $\nu+\theta$ (car $K \subset K_{r/2}$), nous minorons l'intégrale par sa valeur sur $(T(\nu)-\theta, T(\nu))$, pour obtenir

$$\theta\left(\frac{r}{2}\right)^4 \leq c(K_r)e^{4\omega T(\nu)}.$$

Cette inégalité fournit une borne inférieure T^* de $T(\nu)$, qui ne dépend que de K_r. Finalement, $T(\nu) \geq \min(T^*(K_r), t_1(K_r)) =: T(K_r)$.

Dans le paragraphe 2.2, les solutions u^τ et u^ν sont donc simultanément définies et à valeurs dans K_r sur l'intervalle de temps $(\nu, T(K_r))$. Les estimations de ce paragraphe et du suivant restent donc valables, avec des constantes qui dépendent du choix de r mais qui ne modifient pas la conclusion. Nous obtenons ainsi des énoncés analogues aux précédents, à ceci près que les solutions obtenues sont définies pour $t < T(K_r)$ et non pour $t \in \mathbb{R}$. Comme on peut choisir $r > 0$ en fonction de K pour que (15) soit réalisé, il s'écrivent :

THÉORÈME 5.1. — *Lorsque le système (1) n'admet pas de domaine convexe positivement invariant, les théorèmes 3.1 et 4.1 ont lieu, en remplaçant l'intervalle de temps $\mathbb{R}$ par $]-\infty, T]$, où T ne dépend que du choix des profils et/ou de la couche limite.*

Remarque. — La restriction concernant l'intervalle de temps signifie que nous n'avons pas totalement résolu le problème de l'interaction de deux ondes incidentes. Nous avons seulement montré que le terme parabolique ne les empêche pas de se rencontrer. Quitte à faire une translation en temps, la solution u est définie pour $t \in]-\infty, 0[$ et la solution

$$u^\epsilon(x,t) := u\left(\frac{x}{\epsilon}, \frac{t-t_0}{\epsilon}\right)$$

du problème parabolique (2) converge, lorsque ϵ tend vers zéro, vers la solution constante par morceaux de (1) :

ou bien

$$U(x,t) = \begin{cases} u_S, & 0 < x < s_+t, \\ u_E, & x > s_+t, \end{cases}$$

pour le problème mixte,

ou bien

$$U(x,t) = \begin{cases} u_W, & x < s_-t, \\ u_S, & s_-t < x < s_+t, \\ u_E, & x > s_+t, \end{cases}$$

pour le problème dans tout l'espace.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BARDOS, A.-Y. LEROUX, J.-C. NÉDÉLEC, First order quasilinear equations with boundary conditions, Comm. in PDEs, vol. 4 (1979), 1017–1034.

[2] A. BENABDALLAH, Le "p-système" dans un intervalle, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 303 (1986), 123–126.

[3] A. BENABDALLAH, D. SERRE, Problèmes aux limites pour des systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations à une dimension d'espace, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 305 (1987), 677–680.

[4] K. N. CHUEY, C. C. CONLEY, J. K. SMOLLER, Positively invariant regions of nonlinear diffusion equations, Indiana Univ. Math. J., vol. 26 (1977), 373–392.

[5] R. J. DIPERNA, Convergence of approximate solutions to conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 82 (1983), 27–70.

[6] F. DUBOIS, P. LEFLOCH, Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws, J. Diff. Equ., vol. 71 (1988), 93–122.

[7] H. FREISTÜHLER, D. SERRE, L^1-stability of shock waves in scalar viscous conservation laws, Comm. Pure Appl. Math., vol. 51 (1998), 291–301.

[8] H. FREISTÜHLER, D. SERRE, En préparation.

[9] M. GISCLON, Étude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, *via* l'approximation parabolique, J. Maths. Pures & Appl., vol. 75 (1996), 485–508.

[10] M. GISCLON, D. SERRE, Étude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, *via* l'approximation parabolique, C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 319 (1994), 377–382.

[11] J. GOODMAN, Z. XIN, Viscous limits for piecewise smooth solutions to systems of conservation laws, Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 121 (1992), 235–265.

[12] D. SERRE, Systèmes de lois de conservation. Diderot, Paris, 1996.

Manuscrit reçu le 23 février 1998,
accepté le 6 mai 1998.

Denis SERRE,
ENS Lyon
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées
CNRS UMR #128
46, Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07 (France).