

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

AHCÈNE LAMARI

Courants kählériens et surfaces compactes

Annales de l'institut Fourier, tome 49, n° 1 (1999), p. 263-285

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_1_263_0

© Annales de l'institut Fourier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COURANTS KÄHLÉRIENS ET SURFACES COMPACTES

par AHCÈNE LAMARI

Introduction.

Le but de cet article est de donner une démonstration unifiée de l'existence de métriques kählériennes sur les surfaces à premier nombre de Betti (noté b_1) pair. Le problème avait été posé par Kodaira ([KM71]) et la résolution en a été achevée par Siu ([Siu83]).

Soit $a(X)$ la dimension algébrique de X , i.e. le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes sur X . Pour une surface, $a(X)$ vaut 0, 1 ou 2 (théorème de Siegel).

Le cas $a(X) = 2$ a été traité par Chow-Kodaira ([CK52]). Ils démontrent que toute surface complexe compacte de dimension algébrique 2 est projective (donc kählérienne).

Dans [K64], Kodaira démontre qu'une surface de dimension algébrique 1 est elliptique, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme surjectif $f : X \rightarrow C$ de fibre générale une courbe elliptique (C est une courbe). Il y démontre également que les seules surfaces à premier nombre de Betti pair de dimension algébrique nulle sont des tores complexes (donc kählériens) ou des surfaces K3 (fibré canonique trivial et $b_1 = 0$).

Le problème des surfaces elliptiques a été résolu par Miyaoka ([Miy74b]). La démonstration de Miyaoka utilise en particulier la structure des surfaces elliptiques établie par Kodaira.

Pour les surfaces K3, Siu a démontré ([Siu83]) que toute surface K3 était kählérienne en utilisant les propriétés de l'application des périodes (théorème de Torelli, surjectivité).

La démonstration proposée ici est différente. La section 5 lui est consacrée. En utilisant la symétrie de Hodge qui découle de l'hypothèse $b_1 = 2h^{0,1}$ et un critère analogue à celui de Harvey-Lawson, nous y démontrons de manière élémentaire l'existence sur X d'un courant strictement positif d -fermé ("courant kählérien", d'après [JS93]), ce qui, grâce aux résultats de la section 2, suffit à assurer l'existence de métriques kählériennes sur X .

Dans la section 2, nous utilisons le théorème de régularisation de Demailly et le théorème de décomposition de Siu ([Siu74]) pour démontrer qu'une variété complexe compacte possédant un courant kählérien est kählérienne en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins deux. Une surface ayant un tel courant est kählérienne (théorème de Miyaoka [Miy74a]).

Le critère d'existence d'un courant kählérien est démontré en section 3. Comme dans [HL83], nous utilisons le théorème de séparation de Hahn-Banach pour construire des formes (ou des courants) convenables. La méthode a été introduite par Sullivan ([Su76]) et a déjà été utilisée par Harvey-Lawson (qui redémontrent dans [HL83] le résultat de Miyaoka sur les surfaces elliptiques), Michelsohn ([Mi83], "balanced manifolds") ainsi que dans [Siu83]. Les obstructions à l'existence d'un courant kählérien sont, comme pour l'existence d'une forme kählérienne, des courants positifs de bidimension $(1, 1)$ composantes d'un bord. Mais il s'agit de courants limites de formes positives dd^c -fermées, ce qui les rend plus maniables (en cohomologie) que les courants positifs dd^c -fermés plus généraux ("pluriharmoniques", d'après [AB]) qui interviennent dans le théorème de Harvey-Lawson.

Pour faciliter la tâche du lecteur, l'article contient un bon nombre de rappels de résultats classiques : la section 1 est ainsi consacrée à certaines propriétés des courants positifs et des espaces de cohomologie que nous aurons à utiliser par la suite. Dans la section 4, nous rappelons ce qu'il est utile de connaître sur la cohomologie des surfaces complexes compactes.

Les méthodes présentées ici nous ont aussi permis de caractériser le cône kählérien d'une surface kählérienne compacte : une classe de cohomologie réelle α de type $(1, 1)$ est kählérienne si et seulement si $\alpha^2 > 0$, $\alpha \cdot E > 0$ pour toute courbe E de self-intersection négative, et $\alpha \cdot \omega > 0$ pour au moins une classe kählérienne ω . Ce résultat fera l'objet d'une publication séparée.

1. Courants positifs et dualité.

Soit X une variété complexe de dimension n .

On note $\mathcal{E}^{p,q}$ le faisceau des germes de formes C^∞ de bidegré (p, q) , $\mathcal{D}'_{p,q}$ le faisceau des germes de courants de bidimension (p, q) .

Si U est un ouvert de X , $\mathcal{D}'_{p,q}(U)$ est le dual topologique de $\Gamma_c(U, \mathcal{E}^{p,q})$. Un courant de bidimension (p, q) est de bidegré $(n - p, n - q)$ et nous noterons $\mathcal{D}'^{r,s} := \mathcal{D}'_{n-r,n-s}$. Les espaces de formes seront munis de la topologie C^∞ et les espaces de courants de la topologie faible.

1.1. Courants positifs.

DÉFINITION 1.1. — Soit $T \in \mathcal{D}'_{p,p}(U)$. T est un courant positif si $T \wedge i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p$ est une mesure positive, pour tout choix de $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans $\mathcal{E}^{1,0}(U)$.

Si α est une $(p, 0)$ -forme, la (p, p) -forme $\omega = i^{p^2} \alpha \wedge \bar{\alpha}$ est positive.

Les courants positifs sont réels à coefficients mesures.

On suppose X munie d'une métrique hermitienne et l'on note ψ la $(1,1)$ -forme positive associée.

L'ensemble $\mathcal{P}_p(X)$ des courants positifs de bidimension (p, p) est un cône convexe faiblement fermé dans $\mathcal{D}'_{p,p}(X)$.

Soit $\mathcal{C}_p(X) = \{T \in \mathcal{P}_p(X) \mid (\psi^p, T) = 1\}$. Si X est compacte, $\mathcal{C}_p(X)$ est un convexe compact pour la topologie faible des courants ([H77]).

Nous ne nous intéresserons qu'aux formes et courants de bidegré ou de bidimension $(1, 1)$.

Une forme ω de bidegré $(1, 1)$ (resp. $(n-1, n-1)$) est strictement positive si et seulement si $(\omega, T) > 0$ pour tout courant $T \in \mathcal{C}_1$ (resp. $T \in \mathcal{C}_{n-1}$).

L'ensemble U des formes strictement positives de bidegré $(1, 1)$ (resp. $(n-1, n-1)$) est un cône convexe ouvert dans $\mathcal{E}_\mathbb{R}^{1,1}(X)$ (resp. $\mathcal{E}_\mathbb{R}^{n-1,n-1}(X)$).

1.2. Groupes de cohomologie.

Pour l'étude des classes de courants d -fermés ou dd^c -fermés ("pluriharmoniques"), nous serons amenés à utiliser les groupes d'Aeppli :

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) = \frac{\{T \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \mid dT = 0\}}{dd^c \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^0(X)}$$

et

$$V_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X) = \frac{\{\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X) \mid dd^c \omega = 0\}}{\{\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X) \mid \exists \beta, \omega = \partial \bar{\beta} + \bar{\partial} \beta\}}.$$

Le faisceau $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ des germes de fonctions pluriharmoniques réelles admet deux résolutions fines commençant par

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{R}} & \rightarrow & \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^0 & \xrightarrow{dd^c} & \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{1,1} & \xrightarrow{d} & \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^3 \\ & & \downarrow id & & \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{H}_{\mathbb{R}} & \rightarrow & \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}{}^0 & \xrightarrow{dd^c} & \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}{}^{1,1} & \xrightarrow{d} & \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}{}^3 \end{array}$$

où j est l'injection des espaces de formes dans les espaces de courants.

On en déduit que $\Lambda_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ et que l'on peut faire le calcul avec les $(1, 1)$ -formes d -fermées.

On peut démontrer que $V_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X)$ peut également se calculer à l'aide des courants.

1.3. Sous-espaces fermés et dualité.

Si X est compacte, $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ et $V_{\mathbb{R}}^{n-1,n-1}(X)$ sont de dimension finie et les sous-espaces suivants sont fermés dans leurs espaces respectifs :

$$\begin{aligned} dd^c \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^0(X) &\subset \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X), \\ dd^c \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}{}^0(X) &\subset \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}{}^{1,1}(X), \end{aligned}$$

$$B_{1,1}(X) = \{T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}{}^{n-1,n-1}(X) \mid \exists S \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}{}^{n-1,n-2}(X), T = \bar{\partial} S + \partial \bar{S}\},$$

et

$$B_{1,1}^{\infty}(X) = \{T \in \mathcal{E}^{n-1,n-1}(X) \mid \exists S \in \mathcal{E}^{n-1,n-2}(X) \text{ tel que } T = \bar{\partial} S + \partial \bar{S}\}.$$

Pour $B_{1,1}(X)$, la démonstration se trouve dans ([HL83], p. 174). Pour les autres sous-espaces, la démonstration se fait de manière analogue en utilisant la finitude de groupes de Dolbeault et de De Rham convenables.

On en déduit une dualité (algébrique et topologique)

$$H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})^* \simeq V_{\mathbb{R}}^{n-1, n-1}(X).$$

DÉFINITION 1.2. — *Un courant T de bidimension $(1, 1)$ est composante d'un bord s'il existe $S \in \mathcal{D}'^{n-1, n-2}(X)$ tel que $T = \bar{\partial}S + \partial\bar{S}$.*

Le courant T de la définition est la composante de bidegré $(n-1, n-1)$ du courant $d(S + \bar{S})$. C'est un élément de $B_{1,1}(X)$.

On remarquera qu'une $(1, 1)$ -forme réelle α est d -fermée si et seulement elle est nulle sur $B_{1,1}(X)$ (en tant que forme linéaire continue sur l'espace des courants de bidimension $(1, 1)$).

De même, une $(n-1, n-1)$ -forme β est dd^c -fermée si et seulement si elle est nulle sur $dd^c\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}^0(X)$.

La dualité précédente sera utilisée sous l'une des deux formes suivantes :

(1) Soit τ un courant réel de bidegré $(1, 1)$.

Si $(\tau, \omega) = 0$ pour toute $(n-1, n-1)$ -forme réelle dd^c -fermée ω , il existe $\chi \in \mathcal{D}'_{\mathbb{R}}^0(X)$ tel que $\tau = dd^c\chi$.

Si τ est C^∞ , il en sera de même de χ .

(2) Soit T un courant réel de bidegré $(n-1, n-1)$.

Si $(\alpha, T) = 0$ pour toute $(1, 1)$ -forme réelle d -fermée α , il existe $S \in \mathcal{D}'^{n-1, n-2}(X)$ tel que $T = \bar{\partial}S + \partial\bar{S}$.

Si T est C^∞ , on peut choisir S de classe C^∞ .

1.4. Applications.

La proposition suivante sera utilisée plus loin.

PROPOSITION 1.3. — *Soit X une variété complexe compacte de dimension n . Il existe sur X des $(n-1, n-1)$ -formes strictement positives dd^c -fermées.*

Démonstration. — $\mathcal{C}^1 = \mathcal{C}_{n-1}$ est convexe faiblement compact dans $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. $\mathcal{C}^1 \cap dd^c\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}^0(X) = \emptyset$ car $\tau = dd^c\chi \geq 0$ implique $\tau = 0$ (χ est plurisousharmonique donc constante sur X).

Le théorème de séparation de Hahn-Banach permet de trouver une forme Ω de bidegré $(n-1, n-1)$ strictement positive sur \mathcal{C}^1 et nulle sur $dd^c\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}(X)$.

Une telle forme Ω est dd^c -fermée et strictement positive. \square

Remarque. — D'après Michelsohn ([M83]), toute $(n-1, n-1)$ -forme Ω strictement positive peut s'écrire de manière unique sous la forme $\Omega = \phi^{n-1}$, où ϕ est une $(1, 1)$ -forme strictement positive sur X . Gauduchon ([Gau77]) a démontré un résultat beaucoup plus précis : l'existence et l'unicité à normalisation près d'une forme ϕ strictement positive telle que $dd^c\phi^{n-1} = 0$ ("métrique standard") dans chaque classe conforme de métriques hermitiennes.

À titre d'application des théorèmes de dualité, nous pouvons donner une reformulation de la démonstration du théorème de Harvey-Lawson :

THÉORÈME DE HARVEY-LAWSON ([HL83]). — *Sur toute variété compacte non kählérienne, il existe un courant positif T non nul composante d'un bord (i.e. de la forme $T = \bar{\partial}S + \partial\bar{S}$).*

Démonstration. — Soit U l'ensemble des $(1, 1)$ -formes strictement positives, et E l'ensemble des $(1, 1)$ -formes réelles d -fermées.

X non kählérienne signifie $U \cap E = \emptyset$.

E est un sous-espace fermé de $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ et U en est un ouvert convexe.

D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ séparant U et E , strictement positive sur U et nulle sur E .

Une telle forme linéaire est un courant T de bidegré $(n-1, n-1)$.

$T|_U > 0$ signifie que T est un courant positif non trivial.

$T|_E = 0$ équivaut à $T = \bar{\partial}S + \partial\bar{S}$ d'après la dualité. \square

2. Courants kählériens et formes kählériennes.

DÉFINITION 2.1. — *Un courant kählérien est un courant τ de bidegré $(1, 1)$, d -fermé, tel que $\tau \geq C\psi$ où C est une constante strictement positive.*

Une forme kählérienne est une $(1, 1)$ -forme strictement positive d -fermée.

Exemples.

1. Toute forme kählérienne est un courant kählérien.
2. Si X est une variété de la classe \mathcal{C} de Fujiki, alors elle possède un courant kählérien, mais pas nécessairement une forme kählérienne.

Le théorème de régularisation de Demailly permet de relier formes et courants kählériens.

Si τ est un courant d -fermé positif (ou presque positif cf [Dem92]), $\nu(\tau, x)$ désignera le nombre de Lelong de τ en x . D'après Siu ([Siu74]), pour tout $c > 0$, l'ensemble $E_c(\tau) := \{x \in X \mid \nu(\tau, x) \geq c\}$ est analytique fermé.

THÉORÈME ([De92], p. 362). — Soit (X, ψ) une variété hermitienne compacte. On suppose données une métrique sur $\mathcal{O}_{TX}(1)$ et une $(1, 1)$ -forme semi-positive u sur X telles que

$$c(\mathcal{O}_{TX}(1)) + p^*u \geq 0$$

où $p : P(T^*X) \rightarrow X$.

Soit $\tau = \alpha + dd^c\chi$ un courant tel que $\tau \geq \gamma$ où γ est une $(1, 1)$ -forme continue. Alors pour tout $c > 0$, il existe une suite de courants $\tau_{c,k} = \alpha + dd^c\chi_{c,k}$ tels que $\chi_{c,k}$ soit C^∞ sur $X \setminus E_c(\tau)$ et que

- (i) $\tau_{c,k} \geq \gamma - \min\{\lambda_k, c\}u - \varepsilon_k\psi$, où
- (ii) λ_k est une suite décroissante de fonctions sur X telle que $\lim \lambda_k(x) = \nu(\tau, x)$ en tout point
- (iii) ε_k est positive décroissante telle que $\lim \varepsilon_k = 0$.

PROPOSITION 2.2. — Soit X une variété complexe compacte. Les énoncés suivants sont équivalents :

- (a) il existe un sous-espace analytique S de codimension au moins deux, une $(1, 1)$ -forme réelle ω , C^∞ sur $X \setminus S$, d -fermée, tels que

$$\omega \geq \psi|_{X \setminus S} ;$$

- (b) il existe un courant kählérien sur X .

Démonstration.

(a) \implies (b) découle du théorème de Shiffman ([Sh72]).

(b) \implies (a).

Nous allons appliquer le théorème de régularisation de Demailly avec $u = K\psi$ où $K > 0$ est assez grand. Choisissons $c > 0$ assez petit pour que $(K + 1)c \leq 1/2$.

Soit $\tilde{\tau}$ un courant kählérien sur X . On peut supposer $\tilde{\tau} \geq \psi$. Notons D_1, D_2, \dots, D_p les composantes irréductibles de codimension 1 de $E_{c/2}(\tilde{\tau})$. D'après Siu ([Siu74]), il existe des $a_i > 0$, un courant τ positif d -fermé tels que

$$(i) \quad \tilde{\tau} = \sum_{i=1}^p a_i D_i + \tau$$

$$(ii) \quad \text{codim } E_{c/2}(\tau) \geq 2.$$

$$\tilde{\tau} \geq \psi \text{ implique } \tau \geq \psi.$$

Le théorème de régularisation de Demailly appliqué à $\tau = \alpha + dd^c \chi$ et $S = E_c(\tau)$ assure l'existence d'une suite (τ_k) de courants d -fermés sur X tels que

$$(i) \quad \tau_k = \alpha + dd^c \chi_k \text{ avec } \chi_k \in C^\infty \text{ sur } X \setminus S$$

$$(ii) \quad \tau_k \geq \psi - cK\psi - \varepsilon_k \psi \text{ où } \lim \varepsilon_k = 0.$$

Choisissons m assez grand pour que $\varepsilon_m \leq c$. Alors $cK + \varepsilon_m \leq cK + c \leq 1/2$ et $\tau_m = \alpha + dd^c \chi_m \geq 1/2\psi$. On prend $\omega = 2\tau_m \big|_{X \setminus S}$. \square

Remarques.

1. Si TX est nef (cela signifie que l'on peut prendre $K > 0$ aussi petit que l'on veut en choisissant une métrique convenable sur $\mathcal{O}_{TX}(1)$), X possède un courant kählérien si et seulement si elle est kählérienne (démonstration analogue à celle de la proposition) (cf [De92] Cor. 1.6, p. 365).

2. Soit ω une $(n - 2)$ -forme holomorphe. La $(n - 1)$ -forme $d\omega = \partial\omega$ est de bidegré $(n - 1, 0)$ et $\beta := i^{(n-1)^2} d\omega \wedge \bar{d}\omega$ est une $(n - 1, n - 1)$ -forme semi-positives. Donc $(\tau, \beta) \geq (\psi, \beta)$. Comme β est d -exacte et τ est d -fermé, $(\tau, \beta) = 0$. Donc $(\psi, \beta) = 0$, $\beta = 0$ et $d\omega = 0$.

Ainsi, sur une variété possédant un courant kählérien, les $(n - 2)$ -formes holomorphes sont d -fermées.

En utilisant la théorie de l'intersection de Demailly ([De94]) on a $\tau^2 \geq \psi^2$ si τ est un courant kählérien C^∞ en dehors d'un ensemble analytique de codimension au moins deux. On en déduit que les $(n-3)$ -formes holomorphes sont d -fermées.

3. En dimension 3, la variété d'Iwasawa ne possède pas de courant kählérien. En effet, sur une telle variété, il existe des 1-formes holomorphes non fermées.

Si $\dim X = 2$, l'ensemble S de la proposition est fini. Dans ce cas, le théorème de prolongement de Miyaoka permet de conclure que X est kählérienne.

THÉORÈME 2.3 (Théorème de Miyaoka [Miy74a]). — *Soit ω une forme kählérienne sur $B^n(1) \setminus \{0\}$, où $B^n(r) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| < r\}$ et $n \geq 2$. Il existe une forme kählérienne $\tilde{\omega}$ sur $B^n(1)$ égale à ω en dehors de $B^n(1/2)$.*

Démonstration. — Le théorème d'extension de Shiffman [Sh72] montre que ω se prolonge en un courant positif fermé ω_0 sur $B^n(1)$. On peut donc écrire $\omega_0 = dd^c \chi_0$ où χ_0 est une fonction psh sur $B^n(1)$, strictement psh de classe C^∞ sur $B^n(1) \setminus \{0\}$. Si χ_ε est une régularisée de χ_0 par convolution, alors χ_ε est strictement psh sur $B^n(1-\varepsilon)$. Il suffit de prendre $\tilde{\omega} = dd^c(f\chi_\varepsilon + (1-f)\chi)$ avec ε assez petit, et f de classe C^∞ à support compact dans $B^n(1/2)$, égale à 1 sur $B^n(1/4)$.

COROLLAIRE 2.4. — *Une surface compacte est kählérienne si et seulement si elle possède un courant kählérien.*

Propriétés.

1. Si $f : X' \rightarrow X$ est surjectif, génériquement fini et si X' possède un courant kählérien, il en est de même de X . Il suffit de prendre l'image directe par f du courant kählérien de X' .

2. Si $f : X \rightarrow Y$ est surjective à fibres de dimension un, et si X possède un courant kählérien, il en est de même de Y . Pour cela, on choisit sur X un courant kählérien τ de classe C^∞ en dehors d'un sous-ensemble analytique de codimension au moins deux. D'après la théorie de l'intersection de Demailly ([De93]), le courant τ^2 est bien défini et l'on a $\tau^2 \geq \tau \wedge \psi$. Le courant $f_*(\tau^2)$ est un courant kählérien sur Y .

3. Soit $f : X \rightarrow Y$ surjectif. On suppose f kählérien. Alors si Y

possède un courant kählérien, il en est de même de X . C'est en particulier le cas si f est l'éclatement de Y le long d'une sous-variété de codimension au moins deux. En utilisant le lemme de Chow de Hironaka ([Hi75]), il est facile de démontrer que la classe des variétés possédant un courant kählérien est stable par modifications.

La proposition qui suit est suggérée par des résultats analogues de Kodaira ([K54]) pour les variétés kählériennes et de Fujiki ([F83]) pour la classe \mathcal{C} .

PROPOSITION 2.5. — Si X possède un courant kählérien et si $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$, alors X est une variété de Moishezon.

Démonstration. — On a un diagramme de suites exactes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{\mathbf{e}} & \mathcal{O}^* & \rightarrow & 1 \\
 & & & & \downarrow j & & \downarrow id & & \downarrow a \\
 0 & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{\text{Im}} & \mathcal{H}_{\mathbb{R}} & \rightarrow & 0
 \end{array}$$

où : $\mathbf{e}(f) = e^{2i\pi f}$, $\text{Im}(f) = \text{Im } f$ et $a(g) = \frac{-1}{2\pi} \ln |g|$.

Comme $H^2(X, \mathcal{O}) = 0$, on obtient les suites exactes de cohomologie :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{k} & H^1(X, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \hat{c} & & \downarrow j & & \\
 \dots & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\hat{k}} & H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{i} & H^2(X, \mathbb{R}) & \rightarrow & 0.
 \end{array}$$

L'ensemble $K_X \subset H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ des classes de courants kählériens est un cône convexe ouvert dans $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$. L'application i étant surjective, $i(K_X)$ est un cône convexe ouvert de $H^2(X, \mathbb{R})$. Il rencontre donc le réseau $\Gamma := j(H^2(X, \mathbb{Z}))$. Soient $\alpha \in K_X$ et $\beta \in H^2(X, \mathbb{Z})$ telles que $i(\alpha) = j(\beta)$.

Le groupe $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ est le groupe des classes d'isomorphismes de fibrés en droites holomorphes. Il existe un fibré en droites L tel que $c_1(L) = \beta$. Notons $\alpha_1 = \hat{c}(L)$. L'égalité $i \circ \hat{c} = j \circ c_1$ donne $i(\alpha_1) = j(\beta) = i(\alpha)$. Donc $i(\alpha - \alpha_1) = 0$ et $\alpha - \alpha_1 = \hat{k}(\gamma)$ pour un γ dans $H^1(X, \mathcal{O})$. Soit L' un fibré en droites de classe $k(\gamma)$. On a $\hat{c}(L') = \hat{c}(k(\gamma)) = \hat{k}(\gamma) = \alpha - \alpha_1$. Si l'on pose $F = L + L'$, on a $\hat{c}(F) = \alpha$.

Tout courant kählérien dans la classe α est le "courant de Chern" associé à une métrique singulière sur F .

On conclut en utilisant le théorème de Ji-Shiffman ([JS93]) que X est une variété de Moishezon. \square

3. Un critère d'existence d'un courant kählérien.

Dans toute cette section, X sera une variété complexe compacte de dimension n et ψ une $(1, 1)$ -forme strictement positive sur X .

Si $\tau = \alpha + dd^c\chi \geq \psi$ est un courant kählérien et ω une $(n-1, n-1)$ -forme positive dd^c -fermée, on a

— d'une part $(\tau, \omega) = (\alpha, \omega)$ car ω est dd^c -fermée,

— d'autre part $(\tau, \omega) \geq (\psi, \omega)$ car ω est positive.

D'où $(\alpha, \omega) \geq (\psi, \omega)$. En particulier, si ω est composante d'un bord, nous aurons $(\alpha, \omega) = 0$, ce qui implique $(\psi, \omega) = 0$, d'où $\omega = 0$ (car ω est semi-positive).

Cette remarque vaut également pour les courants qui sont limites faibles de telles formes.

DÉFINITION 3.1. — *Un courant T de bidimension $(1, 1)$ est nef pluriharmonique s'il est limite faible de $(n-1, n-1)$ -formes positives dd^c -fermées.*

Remarques.

1. Sur une variété complexe compacte, il existe toujours des $(n-1, n-1)$ -formes strictement positives dd^c -fermées.

2. Localement, tout courant positif dd^c -fermé est limite faible de formes positives dd^c -fermées (la convolution commute à ∂ et $\bar{\partial}$). La définition précédente n'a donc d'intérêt que global.

3. Tout courant nef pluriharmonique est positif dd^c -fermé ("pluriharmonique").

4. Si $\beta \in P^1(X)$ est la classe d'un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$, on a $(\beta, [T]) \geq 0$ ce qui justifie le terme "nef".

Exemples.

1. Si $f : X \rightarrow Y$ est surjective de dimension 1, le courant d'intégration sur une fibre générique est nef pluriharmonique au sens de la définition précédente.

2. Soient X une surface complexe compacte, et C une courbe irréductible sur X . La classe dans $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ du courant d'intégration sur C contient un courant nef pluriharmonique si et seulement si C est de self-intersection positive ou nulle.

3. (contre-exemple) Soit X une surface compacte. Le courant d'intégration sur une courbe exceptionnelle C obtenue par éclatement d'un point n'est pas nef car $C^2 = -1$.

S'il existe un courant kählérien sur X , tout courant nef pluriharmonique composante d'un bord est nul. Le théorème suivant établit la réciproque.

THÉORÈME 3.2. — *Soit X une variété complexe compacte. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) *il existe un courant kählérien sur X ;*
- (b) *il existe une $(1, 1)$ -forme réelle d -fermée telle que $(\alpha, \omega) \geq (\psi, \omega)$ pour toute $(n-1, n-1)$ -forme positive dd^c fermée ω ;*
- (c) *tout courant nef pluriharmonique composante d'un bord est nul.*

Démonstration.

(a) \implies (c) :

On écrit $\tau = \alpha + dd^c \chi \geq \psi$. Si T est nef pluriharmonique, $T = \lim \omega_p$ où les ω_p sont positives dd^c -fermées. Comme $(\alpha, \omega_p) \geq (\psi, \omega_p)$ pour tout p , on obtient $(\alpha, T) \geq (\psi, T)$ par passage à la limite. Si T est composante d'un bord, $T = \partial\bar{S} + \bar{\partial}S$ et donc $(\alpha, T) = 0$ car α est d -fermée. On en déduit $(\psi, T) = 0$ donc $T = 0$, car ψ est strictement positive.

(c) \implies (b) :

L'ensemble U des $(n-1, n-1)$ -formes strictement positives est un ouvert convexe de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{n-1, n-1}(X)$. Notons E l'ensemble des $(n-1, n-1)$ -formes réelles dd^c -fermées.

L'intersection $V = U \cap E$ est l'ensemble des formes strictement positives dd^c -fermées. Définissons $A = \{\omega \in V \mid (\psi, \omega) = 1\}$ et $K =$ adhérence faible de A dans $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{n-1, n-1}(X)$.

L'ensemble K est convexe, faiblement compact.

D'après Harvey-Lawson [HL83], $B_{1,1} := \{T \in \mathcal{D}^{n-1, n-1} \mid \exists S, T = \partial\bar{S} + \bar{\partial}S\}$ est faiblement fermé dans $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{n-1, n-1}(X)$.

La condition (c) implique $K \cap B_{1,1} = \emptyset$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $\beta \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ telle que $\beta|_K > 0$ et $\beta|_{B_{1,1}} = 0$.

La condition sur $B_{1,1}$ équivaut à $d\beta = 0$.

La compacité de K et la condition $\beta|_K > 0$ impliquent $(\beta, T) \geq C > 0$ pour tout $T \in K$.

Si $\omega \in V$, $\omega/(\psi, \omega) \in A$. D'où $(\beta, \omega) \geq C(\psi, \omega)$. On prend $\alpha = \beta/C$.

(b) \implies (a) :

Cette implication résulte du lemme suivant appliqué à $\theta := \alpha - \psi$.

LEMME 3.3. — Soit θ une $(1, 1)$ -forme. Si $(\theta, \omega) \geq 0$ pour toute $(n-1, n-1)$ -forme positive dd^c -fermée ω , il existe $\chi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^0(X)$ tel que $\theta + dd^c\chi \geq 0$ (au sens des courants).

Démonstration du lemme. — L'ensemble V est un ouvert convexe de E . Comme θ définit une forme linéaire sur E , $\theta|_V \geq 0$ implique

(1) ou bien il existe $\omega_0 \in V$ telle que $(\theta, \omega_0) = 0$.

Dans ce cas $\theta|_E = 0$.

En effet, soit α une $(n-1, n-1)$ -forme réelle dd^c -fermée. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\alpha$ et $f(t) = (\theta, \omega_t)$. f est une fonction affine de t . Pour t proche de zéro, $\omega_t \in V$, car V est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $f(\varepsilon) \geq 0$ et $f(-\varepsilon) \geq 0$. Comme $f(0) = (\theta, \omega_0) = 0$, ceci implique que f est identiquement nulle sur \mathbb{R} , donc $(\theta, \alpha) = f(1) = 0$.

Puisque $\theta|_E = 0$, il existe $\chi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^0(X)$ tel que $\theta = -dd^c\chi$. Donc $\theta + dd^c\chi = 0$.

(2) ou bien $\theta|_V > 0$.

Soient $G := \{\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{n-1, n-1}(X) \mid (\theta, \omega) = 0\}$ et $F = G \cap E$. Le sous-espace F est un hyperplan fermé de E .

Nous avons $U \cap F = U \cap E \cap G = V \cap G = \emptyset$, car θ est strictement positive sur V .

D'après le théorème de Hahn-Banach, nous pouvons séparer U et F par un courant τ de bidegré $(1, 1)$ strictement positif sur U et nul sur F .

Soit $\omega_1 \in V$. Nous avons $(\theta, \omega_1) > 0$ et $(\tau, \omega_1) > 0$. Donc $(\theta, \omega_1) = \lambda(\tau, \omega_1)$ pour un λ strictement positif. Comme F est de codimension 1 dans

E , le courant $\theta - \lambda\tau$ est nul sur E (car il est nul sur F et sur $\mathbb{R}\omega_1$). D'après la dualité, il existe $\chi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^0(X)$ tel que $\theta - \lambda\tau = -dd^c\chi$.

Nous avons donc $\theta + dd^c\chi = \lambda\tau$ et $\lambda\tau$ est positif.

Ceci achève la démonstration du lemme et donc celle du théorème. \square

Exemple. — Les variétés de Calabi-Eckman ne possèdent pas de courant kählérien.

Soit X une telle variété, $f : X \rightarrow \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$. X est homéomorphe au produit $S^{2r+1} \times S^{2s+1}$. Donc $H^{2n-2}(X, \mathbb{R}) = 0$, si $n = \dim X = r + s + 1$. Soit ω une forme-volume de la base. La $(n-1, n-1)$ -forme $f^*(\omega)$ est positive, d -exacte et non triviale. D'après le théorème 3.2, il n'existe pas de courant kählérien sur X .

4. La cohomologie des surfaces compactes.

Les résultats de cette section sont connus et se trouvent dans l'article de Kodaira ([K64]) où sont établies d'importantes relations entre les invariants numériques des surfaces. Nous en redémontrons la partie facile pour la commodité du lecteur (voir aussi [BPV84]).

Notations.

$$h^{i,j} = \dim_{\mathbb{C}} H^j(X, \Omega^i).$$

$$b_k = \dim_{\mathbb{R}} H^k(X, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} H^k(X, \mathbb{C}).$$

$$q = h^{0,1}.$$

$$p_g = h^{2,0}.$$

Si X est une surface complexe, les 2-formes holomorphes sont d -fermées et nous avons la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. — *Soit X une surface complexe compacte.*

(a) *La conjugaison $j_2 : H^0(X, \Omega^2) \rightarrow H^2(X, \mathcal{O})$ est un \mathbb{R} -isomorphisme.*

(b) *Les 1-formes holomorphes sont d -fermées.*

(c) *La conjugaison $j_1 : H^0(X, \Omega^1) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ est injective.*

Démonstration.

(a) Soit ω une 2-forme holomorphe. La $(0, 2)$ -forme $\bar{\omega}$ est $\bar{\partial}$ -fermée, ce qui définit l'application j_2 . La condition $j_2(\omega) = 0$ équivaut à l'existence d'une $(1, 0)$ -forme β telle que $\bar{\omega} = \bar{\partial}\beta$. La relation $\bar{\partial}\omega = 0$ implique

$$\omega \wedge \bar{\omega} = \partial\beta \wedge \bar{\omega} = \partial(\beta \wedge \bar{\omega})$$

car $\bar{\partial}\bar{\omega} = 0$. Comme $\beta \wedge \bar{\omega}$ est de bidegré $(1, 2)$, elle est $\bar{\partial}$ -fermée, ce qui implique $\omega \wedge \bar{\omega} = d(\beta \wedge \bar{\omega})$. On obtient grâce au théorème de Stokes $\int_X \omega \wedge \bar{\omega} = 0$. La forme $\omega \wedge \bar{\omega}$ est une forme positive, ce qui implique $\omega \wedge \bar{\omega} = 0$ et donc $\omega = 0$.

Ceci démontre l'injectivité de j_2 . On conclut en utilisant la dualité de Serre ($h^{2,0} = h^{0,2}$).

(b) Soit α une 1-forme holomorphe. La 2-forme $d\alpha = \partial\alpha$ est une 2-forme holomorphe. Comme $j_2(d\alpha) = [\bar{\partial}\alpha] = 0$ dans $H^2(X, \mathcal{O})$, on obtient $d\alpha = 0$ grâce au (a).

(c) D'après (b), j_1 est bien définie. Soit α une 1-forme holomorphe telle que $j_1(\alpha) = 0$. Il existe une fonction f telle que $\bar{\alpha} = \bar{\partial}f$. Cette fonction est pluriharmonique car $\partial\bar{\partial}f = \partial\bar{\alpha} = \bar{\partial}\alpha = 0$. Puisque X est compacte, f est constante et $\alpha = 0$. □

Remarque. — La proposition 4.1 implique que, sur une surface complexe compacte, toute forme holomorphe ∂ -exacte est nulle.

Soit $d\mathcal{O}$ le faisceau des germes de 1-formes holomorphes d -fermées. La suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow d\mathcal{O} \longrightarrow 0$$

donne une suite exacte de cohomologie dont la partie utile commence par

$$0 \longrightarrow H^0(X, d\mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \dots$$

D'après le (b) de la proposition 4.1, $H^0(X, \Omega^1) = H^0(X, d\mathcal{O})$. Ceci nous donne l'inégalité

$$b_1 \leq h^{1,0} + h^{0,1} \quad (*)$$

COROLLAIRE 4.2. — Soit X une surface compacte. Si $b_1 = 2h^{0,1}$, la conjugaison $H^0(X, \Omega^1) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O})$ est un \mathbb{R} -isomorphisme. Par dualité de Serre, la conjugaison $H^1(X, \Omega^2) \longrightarrow H^2(X, \Omega^1)$ est un \mathbb{R} -isomorphisme.

Démonstration. — En utilisant la proposition 4.1 (c) ($h^{1,0} \leq h^{0,1}$), et l'inégalité (*), on a la double inégalité $b_1 \leq h^{1,0} + h^{0,1} \leq 2h^{0,1}$.

Si $b_1 = 2h^{0,1}$, on obtient la double inégalité $2h^{0,1} \leq h^{1,0} + h^{0,1} \leq 2h^{0,1}$.

D'où $h^{1,0} = h^{0,1}$.

La conjugaison est injective d'après la proposition 4.1 (c). C'est donc un \mathbb{R} -isomorphisme. \square

5. Courants kählériens sur les surfaces à b_1 pair.

La suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \longrightarrow 0$$

donne la suite exacte de cohomologie

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \xrightarrow{i} H^2(X, \mathbb{R}) \\ \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \dots$$

Celle-ci montre que $b_1 = 2h^{0,1}$ équivaut à l'injectivité de i .

Par dualité, on obtient une suite exacte

$$\dots \longrightarrow H^0(X, \Omega^2) \longrightarrow H^2(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{p} V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \Omega^2) \dots$$

Si $b_1 = 2h^{0,1}$, p est donc surjective et l'on peut ainsi démontrer que toute $(1, 1)$ -forme réelle dd^c -fermée est la composante $(1, 1)$ d'une 2-forme réelle d -fermée.

Pour utiliser le théorème 3.2, nous aurons besoin d'un résultat plus précis que nous allons démontrer en utilisant la symétrie de Hodge sur $H^*(X, \mathbb{C})$.

Soient $\mathcal{Z}_{dd^c}^{1,1} = \{\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{1,1}(dd^c) \mid \omega = 0\}X$ et $\mathcal{Z}_d^2 = \{\omega \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^2(X) \mid d\omega = 0\}$.

PROPOSITION 5.1. — *Soit X une surface complexe compacte.*

Si $b_1 = 2h^{0,1}$, il existe une application \mathbb{R} -linéaire $S : \mathcal{Z}_{dd^c}^{1,1} \longrightarrow \mathcal{Z}_d^2$ telle que

- (i) $S(\omega) = \partial\gamma + \omega + \bar{\partial}\bar{\gamma}$ où γ est une $(1, 0)$ -forme.
- (ii) $S(\partial\bar{\sigma} + \bar{\partial}\sigma) = d(\sigma + \bar{\sigma})$.

Démonstration. — Soit ω une $(1, 1)$ -forme dd^c -fermée. La forme $\partial\omega$ est $\bar{\partial}$ -fermée. Si $f : H^1(X, \Omega^2) \longrightarrow H^2(X, \Omega^1)$ est la conjugaison, $f([\partial\omega]) = 0$. D'après le corollaire 4.2, f est un \mathbb{R} -isomorphisme, donc

$[\partial\omega] = 0$ dans $H^1(X, \Omega^2)$, ce qui signifie l'existence d'une $(2, 0)$ -forme β telle que $\partial\omega = -\bar{\partial}\beta$. Soit $\tilde{\theta} = \beta + \omega + \bar{\beta}$. On peut vérifier que $\tilde{\theta}$ est une 2-forme réelle d -fermée.

La forme $\bar{\beta}$ est de bidegré $(0, 2)$. Elle est donc $\bar{\partial}$ -fermée. D'après la proposition 4.1, il existe une 2-forme holomorphe η et une $(1, 0)$ -forme γ telles que $\bar{\beta} = \bar{\eta} + \bar{\partial}\gamma$.

La 2-forme $\tilde{\theta}$ s'écrit

$$\tilde{\theta} = \eta + \partial\gamma + \omega + \bar{\eta} + \bar{\partial}\gamma = \partial\gamma + \omega + \bar{\partial}\gamma + (\eta + \bar{\eta}).$$

Les formes holomorphes sont d -fermées. Par conséquent, $\theta = \tilde{\theta} - (\eta + \bar{\eta})$ est une 2-forme réelle d -fermée et de composante $(1, 1)$ égale à ω .

LEMME 5.2. — *Il existe une unique 2-forme fermée réelle θ telle que*

- (i) $\theta^{1,1} = \omega$
- (ii) $\theta^{0,2}$ est $\bar{\partial}$ -exacte.

Démonstration du lemme. — Nous venons de démontrer l'existence. Reste à prouver l'unicité.

Soient $\theta_i = \partial\gamma_i + \omega + \bar{\partial}\bar{\gamma}_i$ ($i = 1, 2$) deux telles formes. La condition " θ_i est d -fermée" se traduit par $\bar{\partial}\partial\gamma_i + \partial\omega = 0$.

On en déduit $\bar{\partial}\partial(\gamma_1 - \gamma_2) = 0$. La $(2, 0)$ -forme $\partial(\gamma_1 - \gamma_2)$ est holomorphe $\bar{\partial}$ -exacte, donc nulle d'après la proposition 4.1 (a).

D'où $\theta_1 = \theta_2$. □

Suite de la démonstration de la proposition. — On définit S par $S(\omega) = \theta$. L'unicité implique la linéarité ainsi que la propriété (ii). □

Remarques.

1. La $(1, 0)$ -forme γ n'est pas entièrement déterminée par la donnée de la $(1, 1)$ -forme ω comme on peut le voir en remplaçant γ par $\gamma' = \gamma + \partial f$.
2. On peut démontrer en utilisant le théorème de l'image ouverte que l'application S est continue pour la topologie C^∞ .
3. Siu a démontré pour les surfaces K3 l'existence d'une 2-forme réelle d -fermée dont la composante $(1, 1)$ est strictement positive (cf [Siu83], p. 143, Prop. 1.6).
4. Gauduchon ([Gau85]) démontre par d'autres méthodes l'existence de θ lorsque ω est strictement positive et b_1 pair ("métrique standard").

5. Le lemme d'unicité figure dans l'exposé de Beauville ([Be85]).

6. La proposition 5.1 est vraie pour $\dim X \geq 3$ en supposant une structure de Hodge sur $H^2(X, \mathbb{C})$ et sur $H^3(X, \mathbb{C})$ (avec une démonstration analogue).

Notons $s : V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{R})$ l'application induite par S (s est bien définie car $S(\partial\bar{\sigma} + \bar{\partial}\sigma) = d(\sigma + \bar{\sigma})$). L'application $\pi^{1,1} : \mathcal{Z}_d^2 \rightarrow \mathcal{Z}_{dd^c}^{1,1}$ qui, à une 2-forme réelle d -fermée θ , associe sa composante de bidegré $(1, 1)$ passe à la cohomologie et induit $p : H^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. Comme $\pi^{1,1} \circ S = \text{Id}$, on a $p \circ s = \text{Id}$.

PROPOSITION 5.3. — Si $b_1 = 2h^{0,1}$, l'application

$$p \circ i : H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}}) \rightarrow V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — $\text{Im } i$ est l'ensemble des classes représentables par des $(1, 1)$ -formes réelles d -fermées.

Si ω est une $(1, 1)$ -forme réelle dd^c -fermée, $\tilde{\omega} = \omega - (\bar{\partial}\gamma + \partial\bar{\gamma})$ est de bidegré $(1, 1)$ et l'on a $\tilde{\omega} = \theta - d(\gamma + \bar{\gamma})$, ce qui montre que $\tilde{\omega}$ est d -fermée. Donc $S(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}$ et l'on a $s([\omega]) = \{\tilde{\omega}\}$ en notant $[?]$ la classe dans $V^{1,1}$ et $\{?\}$ la classe dans $H^2(X, \mathbb{R})$.

Comme $p \circ s = \text{Id}_{V^{1,1}}$, on a $\text{Im } s = \text{Im } i$, et $p|_{\text{Im } i} = p|_{\text{Im } s}$ est un isomorphisme.

Puisque $b_1 = 2h^{0,1}$, i est injectif, donc est un isomorphisme de $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ sur $\text{Im } i$.

D'où la conclusion. □

THÉORÈME 5.4. — Soit X une surface complexe compacte. Si $b_1 = 2h^{0,1}$, X est kählérienne.

Démonstration. — D'après le corollaire 2.3, il suffit de montrer qu'il existe un courant kählérien sur X .

Soit $T = \lim \omega_p$ un courant nef pluriharmonique tel que $T = \partial\bar{R} + \bar{\partial}R$, et $\theta_p = S(\omega_p)$. On a $\lim[\omega_p] = 0$ dans $V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. On en déduit : $\lim s([\omega_p]) = 0$ dans $H^2(X, \mathbb{R})$. Donc $\lim\{\theta_p\} = \lim\{S(\omega_p)\} = 0$ dans $H^2(X, \mathbb{R})$.

Comme θ_p est d -fermée, $\int_X \theta_p \wedge \theta_p = \{\theta_p\}^2$ ne dépend que de la classe $\{\theta_p\}$. Donc $\lim \int_X \theta_p \wedge \theta_p = \lim\{\theta_p\}^2 = 0$.

La 2-forme θ_p s'écrit $\theta_p = \beta_p + \omega_p + \overline{\beta_p}$, où β_p est la $(2, 0)$ -forme $\partial\gamma_p$.

Or

$$\theta_p \wedge \theta_p = 2\beta_p \wedge \overline{\beta_p} + \omega_p \wedge \omega_p \geq 2\beta_p \wedge \overline{\beta_p} \geq 0,$$

car $\omega_p \geq 0$.

Donc $\lim \int_X \theta_p \wedge \theta_p = 0$ implique $\lim \int_X \beta_p \wedge \overline{\beta_p} = 0$.

Si ζ est une $(0, 2)$ -forme, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\left| \int_X \beta_p \wedge \zeta \right| \leq \left(\int_X \beta_p \wedge \overline{\beta_p} \right)^{1/2} \left(\int_X \overline{\zeta} \wedge \zeta \right)^{1/2}.$$

Donc $\lim \int_X \beta_p \wedge \zeta = 0$ pour toute $(0, 2)$ -forme ζ , ce qui signifie que la suite (β_p) converge faiblement vers 0 dans $\mathcal{D}'^{2,0}(X)$.

Dans $\mathcal{D}'^2(X)$, $\lim \omega_p = T$ et $\lim \beta_p = 0$ impliquent $\lim \theta_p = T$. Comme $d\theta_p = 0$ pour tout p , on a $dT = 0$.

Nous venons de démontrer que tout courant nef pluriharmonique composante d'un bord est d -fermé. Un tel courant est nul d'après le lemme suivant dû à Harvey-Lawson.

LEMME 5.5 ([HL83], p. 181). — Soit T un courant positif d -fermé de bidegré $(1,1)$ tel que $T = \bar{\partial}R + \partial\bar{R}$. Si $b_1 = 2h^{0,1}$, alors $T=0$.

Démonstration du lemme. — T est donc un courant d -fermé de bidegré $(1, 1)$. Soit α sa classe dans $H^1(X, \mathcal{H}_{\mathbb{R}})$. Nous avons $p \circ i(\alpha) = [T] = [\bar{\partial}\sigma + \partial\bar{\sigma}] = 0$ dans $V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$. Donc $\alpha = 0$ puisque $p \circ i$ est injective d'après la proposition 5.3.

Cela signifie $T = dd^c\varphi$. Comme T est positif, φ est plurisousharmonique. La compacité de X implique que φ est constante, d'où $T = 0$. \square

D'après le théorème 3.2, X possède un courant kählérien. \square

Le lien entre “ b_1 pair” et $b_1 = 2h^{0,1}$ se fait à l'aide d'un théorème de Kodaira que nous allons énoncer.

Sur $H^2(X, \mathbb{R})$, le cup-produit définit une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée de signature (b^+, b^-) .

En utilisant des théorèmes d'indices, Kodaira démontre les résultats suivants :

THÉORÈME 5.6 (de Kodaira [K64]). — Soit X une surface complexe compacte.

(1) Si b_1 est pair, $b_1 = 2h^{0,1}$ et $b^+ = 2h^{2,0} + 1$.

(2) Si b_1 est impair, $b_1 = 2h^{0,1} - 1$ et $b^+ = 2h^{2,0}$.

On en déduit le résultat suivant :

COROLLAIRE 5.7 ([K64], [Miy74b], [Siu83]). — *Toute surface complexe compacte à b_1 pair est kählérienne.*

6. Surfaces non kählériennes.

Soit X une surface compacte non kählérienne. D'après le théorème de Harvey-Lawson (sous-section 1.4), il existe sur X un courant positif non trivial de la forme $\partial\bar{S} + \bar{\partial}S$. Nous allons démontrer un résultat plus précis : l'existence d'un courant positif d -exact.

Notons $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des classes de $H^2(X, \mathbb{R})$ représentables par des $(1, 1)$ -formes réelles d -fermées.

D'après le corollaire 5.7, une surface X est non kählérienne si et seulement si b_1 est impair, ce que nous supposons par la suite.

D'après le théorème de Kodaira (th. 5.6), la forme d'intersection est alors définie négative sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$. Cela a comme conséquence que toute $(1, 1)$ -forme d -fermée et positive est d -exacte.

THÉORÈME 6.1. — *Sur toute surface compacte à b_1 impair, il existe un courant positif d -exact non trivial.*

Démonstration. — Dans $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$, l'ensemble U des $(1, 1)$ -formes strictement positives est un cône convexe ouvert.

Notons I l'image de $\pi^{1,1} : \mathcal{Z}_d^2(X) \longrightarrow \mathcal{Z}_{dd^c}^{1,1}(X)$.

Le lemme suivant découle de ce que $V_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ est de dimension finie.

LEMME 6.2. — *I est fermé de codimension finie dans $\mathcal{Z}_{dd^c}^{1,1}(X)$.*

Le lemme qui suit montre que $I \cap U = \emptyset$.

LEMME 6.3. — *Soit X une surface compacte à b_1 impair et ω une $(1, 1)$ -forme positive sur X .*

Si ω est la composante $(1, 1)$ d'une 2-forme réelle d -fermée, alors

(1) $\omega = d(S + \bar{S})$

(2) $\omega \wedge \omega = 0.$

En particulier ω n'est strictement positive en aucun point.

Démonstration. — Par hypothèse, il existe une $(2, 0)$ -forme β telle que $\tilde{\theta} := \beta + \omega + \bar{\beta}$ soit d -fermée. En procédant comme pour la proposition 5.1, on peut supposer $\theta = \partial\gamma + \omega + \bar{\partial}\bar{\gamma}$. La forme $\tilde{\omega} := \theta - d(\gamma + \bar{\gamma})$ est de bidegré $(1, 1)$, réelle et d -fermée, c'est-à-dire que $\{\tilde{\omega}\} \in H^{1,1}(X, \mathbb{R})$. On a

$$\{\tilde{\omega}\}^2 = \int_X \tilde{\omega} \wedge \tilde{\omega} = \int_X \theta^2 = 2 \int_X \partial\gamma \wedge \bar{\partial}\bar{\gamma} + \int_X \omega \wedge \omega \geq 0.$$

On en déduit (la forme d'intersection est définie négative sur $H^{1,1}(X, \mathbb{R})$) :

$$\{\omega\}^2 = 0, \quad \int \partial\gamma \wedge \bar{\partial}\bar{\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad \int \omega \wedge \omega = 0.$$

Ceci implique que $\{\tilde{\omega}\} = 0, \partial\gamma = 0$ et $\omega \wedge \omega = 0$. Donc $\tilde{\omega} = d(\sigma + \bar{\sigma})$ où σ est une $(1, 0)$ -forme. D'où $\omega = \theta = d(\gamma + \sigma + \bar{\gamma} + \bar{\sigma}) = d(S + \bar{S})$. □

Suite de la démonstration du théorème. — I étant fermé, et U ouvert convexe, on peut les séparer par une forme linéaire continue sur $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$.

Une telle forme linéaire est un courant $\tau \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}}^{1,1}(X)$ tel que

(1) $\tau|_U > 0$, i.e τ est un courant positif non trivial,

(2) $\tau|_I = 0.$

On a $(\tau, \pi^{1,1}(\theta)) = (\pi^{1,1}(\tau), \theta) = (\tau, \theta)$ car τ est de bidegré $(1, 1)$. La condition sur I se traduit donc par $(\tau, \theta) = 0, \forall \theta \in \mathcal{Z}^2(X)$. Le 2-courant τ est donc d -exact (dualité de Poincaré-De Rham). □

Remarques.

1. En utilisant les relations entre les invariants numériques, on peut démontrer que I est de codimension 1.

2. Si b_1 est impair et $b_1 \geq 3$, il est facile de voir qu'il existe sur X des $(1, 1)$ -formes positives d -exactes. En effet, on a alors $h^{1,0} \geq 1$. Si α est une 1-forme holomorphe non triviale, la $(1, 1)$ -forme $\omega = i\alpha \wedge \bar{\alpha}$ est positive d -fermée, donc d -exacte.

Remerciements. — Je remercie le Professeur Jean-Pierre Demailly pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [BPV84] W. BARTH, C. PETERS et A. VAN DE VEN, Compact complex surfaces, Springer, Berlin, 1984.
- [Be85] A. BEAUVILLE, Toutes les surfaces K3 sont kählériennes, Astérisque 126, Paris (1985).
- [CK52] W.-L. CHOW et K. KODAIRA, On analytic surfaces with two independent meromorphic functions, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38 (1952), 319–325.
- [De92] J.-P. DEMAILLY, Regularization of closed positive currents and intersection theory, J. Alg. Geom., 1 (1992), 361–409.
- [De93] J.-P. DEMAILLY, Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory, in Complex Analysis and Geometry, Univ. Series in Math., edited by V. Ancona and A. Silva, Plenum Press, New-York, 1993.
- [F83] A. FUJIKI, On compact complex manifolds in \mathcal{C} without holomorphic 2-forms Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, 19 (1983), 193–202.
- [Gau77] P. GAUDUCHON, Le théorème de l'excentricité nulle, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 285 (1977), 387–390.
- [Gau85] P. GAUDUCHON, Les métriques standard sur une surface à b_1 pair, Astérisque 126, Paris (1985).
- [H74] R. HARVEY, Removable singularities for positive currents, Amer. J. Math., 96 (1974), 67–78.
- [H77] R. HARVEY, Holomorphic chains and their boundaries Proc. Symp. Pure Math., 30, Part I, AMS, Providence, R.I. (1977), 309–382.
- [Hi75] H. HIRONAKA, Flattening theorem in complex analytic geometry, Amer. J. Math., 97 (1975), 503–547.
- [HL83] R. HARVEY et H.B. JR LAWSON, An intrinsic characterization of Kähler manifolds, Invent. Math., 74 (1983), 261–295.
- [JS93] S. JI et B. SHIFFMAN, Properties of compact complex manifolds carrying closed positive currents, J. Geom. Anal., 3 (1993), 37–62.
- [Ji93] S. JI, Currents, metrics and Moishezon manifolds, Pacific Journal of Math., 158 (1993), 335–351.
- [K64] K. KODAIRA, On the structure of compact complex analytic surfaces (I), Amer. J. Math., 86 (1964), 751–798.
- [KM71] K. KODAIRA et J. MORROW, Complex manifolds, New York: Holt, Rinehart and Winston, 1971.
- [Le68] P. LELONG, Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, Dunod, Paris, 1968.
- [M83] M.-L. MICHELSON, On the existence of special metrics in complex geometry, Acta Math., 143 (1983), 261–295.
- [Miy74a] Y. MIYAOKA, Extension theorems for Kähler metrics, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 407–410.
- [Miy74b] Y. MIYAOKA, Kähler metrics on elliptic surfaces, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 533–536.
- [Sh] B. SHIFFMAN, Extension of positive line bundles and meromorphic maps, Invent. Math., 15 (1972), 332–347.

- [Siu74] Y.-T. SIU, Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. Math.*, 27 (1974), 53–156.
- [Siu83] Y.-T. SIU, Every K3 surface is Kähler, *Invent. Math.*, 73 (1983), 130–150.
- [Su76] D. SULLIVAN, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Invent. Math.*, 36 (1976), 225–255.
- [V] J. VAROUCHAS, Propriétés cohomologiques d'une classe de variétés analytiques complexes compactes, *Sem. d'Analyse Lelong-Dolbeault-Skoda 1983–84*, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 1198, Springer, Berlin, 1985, 245–259.

Manuscrit reçu le 8 juin 1998,
accepté le 10 septembre 1998.

Ahcène LAMARI,
26, rue de Ménilmontant
75020 Paris (France).