

MICHEL LASSALLE

**Quelques valeurs prises par les polynômes  
de Macdonald décalés**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 49, n° 2 (1999), p. 543-561

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1999\\_\\_49\\_2\\_543\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_2_543_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1999, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## QUELQUES VALEURS PRISES PAR LES POLYNÔMES DE MACDONALD DÉCALÉS

par Michel LASSALLE

---

### 1. Introduction.

Soient  $q$  et  $t$  deux indéterminées, et considérons l'algèbre des polynômes symétriques de  $n$  variables à coefficients rationnels en  $q$  et  $t$ . Les polynômes de Macdonald  $P_\lambda(q, t)$  forment une base de cette algèbre, indexée par les partitions  $\lambda$  de longueur inférieure ou égale à  $n$  [7].

Dans un précédent travail [3], nous avons défini pour tout couple de partitions  $(\lambda, \mu)$  un coefficient binomial généralisé  $\binom{\lambda}{\mu}_{q,t}$  associé à ces polynômes. Nous avons donné les propriétés générales de ces coefficients binomiaux généralisés et obtenu des formules analytiques explicites pour les plus élémentaires d'entre eux.

Le but de cet article est d'explicitier plusieurs autres familles de coefficients binomiaux généralisés. Nous obtenons en particulier tous ceux qui correspondent à des partitions de longueur deux ainsi qu'à leurs conjuguées. Il est tout à fait remarquable que les expressions obtenues fassent apparaître la fonction hypergéométrique généralisée  ${}_3\phi_2^{(1/q)}$  de base  $1/q$ .

Simultanément et indépendamment de [3], les coefficients binomiaux généralisés associés aux polynômes de Macdonald ont été introduits par

---

*Mots-clés* : Polynômes de Macdonald (décalés) – Formule du binôme généralisée – Coefficients binomiaux généralisés – Fonctions hypergéométriques.

*Classification math.* : 33C50 – 33C20.

Okounkov par une méthode très différente [9]. Celle-ci repose sur la notion de polynôme de Macdonald “décalé” introduite par plusieurs auteurs ([2], [8], [12]). Dans cette approche nos résultats s’interprètent comme donnant la valeur des polynômes de Macdonald décalés en certains points particuliers.

Les polynômes de Jack  $J_\lambda(\alpha)$  sont la limite, lorsque  $t$  tend vers 1, des polynômes de Macdonald  $P_\lambda(t^\alpha, t)$ . Dans cette limite  $\binom{\lambda}{\mu}_{t^\alpha, t}$  définit un coefficient du binôme généralisé  $\binom{\lambda}{\mu}_\alpha$  associé aux polynômes de Jack. Nous obtenons ainsi plusieurs formules explicites pour les coefficients binomiaux généralisés associés aux polynômes de Jack. Ces expressions, auparavant annoncées dans [5], font apparaître la fonction hypergéométrique classique  ${}_3F_2$ .

Notre travail met, pour la première fois, en évidence les liens étroits qui existent entre les polynômes de Macdonald et les fonctions hypergéométriques. Il serait intéressant de disposer d’une meilleure compréhension de ce phénomène.

## 2. Fonctions hypergéométriques.

Soient  $a$  et  $q$  deux indéterminées. On note

$$(a; q)_\infty = \prod_{i \geq 0} (1 - aq^i),$$

et pour tout entier  $k \geq 0$ ,

$$(a; q)_k = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^k; q)_\infty} = \prod_{i=1}^k (1 - aq^{i-1}).$$

On rappelle que la fonction hypergéométrique généralisée  ${}_3\phi_2^{(q)}$  de base  $q$  est définie par

$${}_3\phi_2^{(q)}(a, b, c; x, y; z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(a; q)_k (b; q)_k (c; q)_k}{(x; q)_k (y; q)_k} \frac{z^k}{(q; q)_k},$$

pour toutes les valeurs de  $x$  et  $y$  où le dénominateur a un sens.

L’outil central de cet article est le résultat suivant qui explicite une “relation de contiguïté” pour la fonction hypergéométrique  ${}_3\phi_2^{(q)}$ .

THÉORÈME 1. — Soient  $a, b, c, x, y$  cinq variables réelles assujetties à la condition  $xy = a^2bc$ . Alors on a la “relation de contiguïté”

$$\begin{aligned} \left( (1-b) + \frac{x}{ac}(1-c) \right) \left( 1 - \frac{y}{ab} \right) {}_3\phi_2^{(q)}(a, b, c; x, y; a) \\ = -(1-b) \frac{(x-a)(x-c)}{x(1-x)} {}_3\phi_2^{(q)}(a, qb, c; qx, y; a) \\ + (1-c) \frac{(y-a)(y-b)}{y(1-y)} {}_3\phi_2^{(q)}(a, b, qc; x, qy; a). \end{aligned}$$

On observera que

$$\left( (1-b) + \frac{x}{ac}(1-c) \right) \left( 1 - \frac{y}{ab} \right) = - \left( (1-c) + \frac{y}{ab}(1-b) \right) \left( 1 - \frac{x}{ac} \right).$$

La relation de contiguïté du théorème 1 est donc parfaitement symétrique dans l'échange des variables  $(b, x)$  et  $(c, y)$ . La preuve du théorème 1 sera donnée à la section 9.

Soit  $(a)_k$  le coefficient hypergéométrique classique défini pour tout entier  $k \geq 0$  par

$$(a)_k = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q^a; q)_k}{(1-q)^k} = \prod_{i=1}^k (a+i-1).$$

La fonction hypergéométrique classique

$${}_3F_2(a, b, c; x, y; z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(a)_k (b)_k (c)_k}{(x)_k (y)_k} \frac{z^k}{k!}$$

satisfait la relation

$${}_3F_2(a, b, c; x, y; z) = \lim_{q \rightarrow 1} {}_3\phi_2^{(q)}(q^a, q^b, q^c; q^x, q^y; z).$$

Dans cette limite nous obtenons facilement le résultat suivant :

COROLLAIRE. — Soient  $a, b, c, x, y$  cinq variables réelles assujetties à la condition  $x + y = 2a + b + c$ . Alors on a la “relation de contiguïté”

$$\begin{aligned} (b+c) {}_3F_2(a, b, c; x, y; 1) &= b \frac{(x-a)(x-c)}{x(x-a-c)} {}_3F_2(a, b+1, c; x+1, y; 1) \\ &+ c \frac{(y-a)(y-b)}{y(y-a-b)} {}_3F_2(a, b, c+1; x, y+1; 1). \end{aligned}$$

Soient maintenant  $x, y, z$  trois variables réelles et  $r, s$  deux entiers positifs ou nuls. On pose

$$F^{(q)}(x, y, z, r, s) = \sum_{k \geq 0} (x; q)_{r-k} (y; q)_{s-k} (z; 1/q)_k (q^r; 1/q)_k (q^s; 1/q)_k \frac{z^k}{(1/q; 1/q)_k}.$$

La sommation est bien sûr finie, et la fonction  $F^{(q)}$  est un polynôme en les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Dans toute la suite de cet article, cette fonction jouera un rôle fondamental.

PROPOSITION 1. — *Pour toutes les valeurs de  $x$  et  $y$  distinctes de  $q^k$  ( $k$  entier  $\geq \min(1-r, 1-s)$ ), on a*

$$F^{(q)}(x, y, z, r, s) = (x; q)_r (y; q)_s {}_3\phi_2^{(1/q)}(z, q^r, q^s; xq^{r-1}, yq^{s-1}; z).$$

Preuve. — Conséquence immédiate de la relation élémentaire

$$(x; q)_{r-k} = \frac{(x; q)_r}{(xq^{r-1}; 1/q)_k}. \quad \square$$

Nous utiliserons le théorème 1 sous la forme suivante :

THÉORÈME 2. — *Soient  $x, y, z$  trois variables réelles assujetties à la condition  $xy = q^2 z^2$ . On considère une suite de fonctions  $u_{r,s}(x, y, z)$  (avec  $r$  et  $s$  entiers positifs) définie par*

i) *la condition initiale  $u_{0,0} = 1$ ,*

ii) *la relation de récurrence*

$$\begin{aligned} & \left( (1 - q^r) + \frac{x}{z} q^{r-s-1} (1 - q^s) \right) \left( 1 - \frac{y}{z} q^{s-r-1} \right) u_{r,s} \\ &= q^s (1 - q^r) \left( 1 - \frac{z}{x} q^{1-r} \right) (1 - xq^{r-s-1}) u_{r-1,s} \\ & \quad - q^r (1 - q^s) \left( 1 - \frac{z}{y} q^{1-s} \right) (1 - yq^{s-r-1}) u_{r,s-1}. \end{aligned}$$

Alors on a  $u_{r,s}(x, y, z) = F^{(q)}(x, y, z, r, s)$ .

Preuve. — En vertu de la proposition 1 et du théorème 1, la fonction  $F^{(q)}(x, y, z, r, s)$  satisfait la relation de récurrence pour presque toutes les valeurs de  $x$  et de  $y$ , et donc pour toutes par la continuité de  $F^{(q)}$ . D'où le résultat par récurrence.  $\square$

Remarque 1. — On observera que,  $F^{(q)}(x, y, z, r, s)$  étant un polynôme en  $x$ ,  $y$  et  $z$ , le théorème 2 implique qu'à chaque étape de la récurrence, le membre de droite soit divisible par

$$\begin{aligned} & \left( (1 - q^r) + \frac{x}{z} q^{r-s-1} (1 - q^s) \right) \left( 1 - \frac{y}{z} q^{s-r-1} \right) \\ &= - \left( (1 - q^s) + \frac{y}{z} q^{s-r-1} (1 - q^r) \right) \left( 1 - \frac{x}{z} q^{r-s-1} \right). \end{aligned}$$

De manière analogue on pose

$$G(x, y, z, r, s) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (x)_{r-k} (y)_{s-k} (z)_k (-r)_k (-s)_k.$$

La sommation est également finie et la fonction  $G$  est un polynôme en les variables  $x, y$  et  $z$ . Pour toutes les valeurs de  $x$  et  $y$  qui ne sont pas des entiers  $\geq \min(1-r, 1-s)$ , on a

$$G(x, y, z, r, s) = (x)_r (y)_s {}_3F_2(z, -r, -s; 1-x-r, 1-y-s; 1).$$

On a facilement

$$G(x, y, z, r, s) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{F^{(q)}(q^x, q^y, q^{-z}, r, s)}{(1-q)^{r+s}}.$$

On en déduit le résultat suivant, obtenu à partir du théorème 2 en prenant la limite  $q \rightarrow 1$ .

**THÉORÈME 3.** — Soient  $x, y, z$  trois variables réelles assujetties à la condition  $x + y + 2z = 2$ . On considère une suite de fonctions  $u_{r,s}(x, y, z)$  (avec  $r$  et  $s$  entiers positifs) définie par

i) la condition initiale  $u_{0,0} = 1$ ,

ii) la relation de récurrence

$$(r+s)(y+z+s-r-1)u_{r,s} = -r(x+z+r-1)(x+r-s-1)u_{r-1,s} \\ + s(y+z+s-1)(y+s-r-1)u_{r,s-1}.$$

Alors on a  $u_{r,s}(x, y, z) = G(x, y, z, r, s)$ .

*Remarque 2.* — De manière analogue, on observera que,  $G(x, y, z, r, s)$  étant un polynôme en  $x, y$  et  $z$ , le théorème 3 implique qu'à chaque étape de la récurrence, le membre de droite soit divisible par  $(y+z+s-r-1) = -(x+z+r-s-1)$ .

### 3. Coefficients binomiaux généralisés.

Soient  $q$  et  $t$  deux indéterminées. On considère l'algèbre des polynômes symétriques de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , à coefficients rationnels en  $q$  et  $t$ . Les polynômes de Macdonald  $P_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n; q, t)$  forment une base de cette algèbre, indexée par les partitions  $\lambda$  de longueur inférieure ou égale à  $n$ . Nous renvoyons le lecteur au Chapitre 6 du livre de Macdonald [7] pour leur définition et leurs propriétés.

Rappelons que, étant donnée une partition  $\lambda$ , c'est-à-dire une suite décroissante finie d'entiers positifs, on dit que le nombre  $n$  d'entiers non nuls est la longueur de  $\lambda$ . On écrit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $n = \ell(\lambda)$ . On dit que  $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} \lambda_i$  est le poids de  $\lambda$ . On pose  $n(\lambda) = \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} (i-1)\lambda_i$ .

On note  $\mu \subseteq \lambda$  lorsque  $\mu_i \leq \lambda_i$  pour tout  $i$ . Soit  $\mu \subseteq \lambda$  avec  $|\mu| = |\lambda| - 1$ . Il existe alors un entier  $j$  tel que  $\mu_j = \lambda_j - 1$  et  $\mu_m = \lambda_m$  ( $m \neq j$ ). Dans cette situation on note indifféremment  $\mu = \lambda_{(j)}$  et  $\lambda = \mu^{(j)}$ .

Dans [3] pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  de partitions, nous avons défini un coefficient binomial généralisé  $\binom{\lambda}{\mu}_{q,t}$  par la relation

$$\frac{P_\mu(x_1, x_2, \dots, x_n; q, t)}{b_\mu} \prod_{i=1}^n (x_i; q)_\infty^{-1} = \sum_{\lambda} \binom{\lambda}{\mu}_{q,t} t^{n(\lambda)-n(\mu)} \frac{P_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n; q, t)}{b_\lambda},$$

où  $b_\lambda$  est une quantité combinatoire appropriée. Cette définition généralise aux polynômes de Macdonald la propriété classique

$$\frac{x^k}{k!} e^x = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} \frac{x^n}{n!}.$$

Nous renvoyons le lecteur à [3] pour l'exposé de notre méthode, et rappelons seulement ici les trois résultats fondamentaux de [3] dont nous aurons besoin :

a) Les coefficients binomiaux généralisés  $\binom{\lambda}{\mu}_{q,t}$  sont nuls sauf si  $\mu \subseteq \lambda$ .

b) On dispose d'une expression analytique explicite pour  $\binom{\lambda}{\mu}_{q,t}$  dans la situation élémentaire où  $|\mu| = |\lambda| - 1$ . On a en effet ([3], théorème 4)

$$\binom{\lambda}{\lambda_{(j)}}_{q,t} = t^{1-j} \frac{1-q^{\lambda_j} t^{\ell(\lambda)-j}}{1-q} \prod_{i=1}^{j-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i}} \prod_{i=j+1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_j-\lambda_i} t^{i-j-1}}{1-q^{\lambda_j-\lambda_i} t^{i-j}}.$$

Cette expression peut s'écrire de manière plus condensée

$$\binom{\lambda}{\lambda_{(j)}}_{q,t} = t^{1-\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_j} t^{\ell(\lambda)-j}}{1-q} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i}}.$$

c) Il existe une relation entre les divers coefficients binomiaux généralisés, et celle-ci permet en principe de les calculer tous, par récurrence sur  $|\lambda| - |\mu|$ . Au théorème 9 de [3] nous avons en effet démontré la

*Relation de récurrence fondamentale.* — Pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  de partitions on a

$$\left( \sum_{(i,j) \in \lambda - \mu} q^{j-1} t^{1-i} \right) \binom{\lambda}{\mu}_{q,t} = \sum_{i=1}^{\ell(\mu)+1} \binom{\lambda}{\mu^{(i)}}_{q,t} \binom{\mu^{(i)}}{\mu}_{q,t} q^{\mu_i} t^{1-i}.$$

Dans [3] cette relation de récurrence nous a déjà permis d'expliciter  $\binom{\lambda}{\mu}_{q,t}$  lorsque  $\lambda$  est une équerre ou un rectangle. Le but de cet article est d'étudier d'autres cas particuliers.

### 4. Premier exemple.

Nous donnons d'abord  $\binom{\lambda}{\mu}_{q,t}$  dans le cas où  $\lambda_i = \mu_i$  sauf pour un seul indice  $j$ . Étant donné une partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et un entier  $r \geq 0$ , on note  $\lambda_{(j,r)}$  la partition  $\mu$  définie, si elle existe, par  $\mu_j = \lambda_j - r$  et  $\mu_m = \lambda_m$  ( $m \neq j$ ). On a  $\lambda = \lambda_{(j,0)}$  et  $\lambda_{(j)} = \lambda_{(j,1)}$ .

**THÉORÈME 4.** — Pour toute partition  $\lambda$  et tout entier  $1 \leq j \leq \ell(\lambda)$ , on a

$$\binom{\lambda}{\lambda_{(j,r)}}_{q,t} = t^{(1-\ell(\lambda))r} \frac{(q^{\lambda_j} t^{\ell(\lambda)-j}; 1/q)_r}{(q; q)_r} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\ell(\lambda)} \frac{(q^{\lambda_i - \lambda_j} t^{j-i+1}; q)_r}{(q^{\lambda_i - \lambda_j} t^{j-i}; q)_r}.$$

*Preuve.* — La propriété est vérifiée pour  $r = 0, 1$ . La relation de récurrence fondamentale s'écrit

$$\left( \sum_{i=\lambda_j-r+1}^{\lambda_j} q^{i-1} \right) t^{1-j} \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r)}}_{q,t} = \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r-1)}}_{q,t} \binom{\lambda_{(j,r-1)}}{\lambda_{(j,r)}}_{q,t} q^{\lambda_j - r} t^{1-j}.$$

En effet parmi les partitions  $(\lambda_{(j,r)})^{(i)}$ , la partition  $\lambda_{(j,r-1)}$  est la seule telle que  $(\lambda_{(j,r)})^{(i)} \subseteq \lambda$ . On applique donc la propriété a).

En appliquant la propriété b), la relation précédente s'écrit



$$\binom{\lambda}{\lambda_{(j,r)}}_{q,t} = \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r-1)}}_{q,t} t^{1-\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_j-r+1}t^{\ell(\lambda)-j}}{1-q^r} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+r-1}t^{j-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+r-1}t^{j-i}}.$$

D'où l'assertion.  $\square$

## 5. Le résultat principal.

Nous explicitons maintenant  $\binom{\lambda}{\mu}_{q,t}$  dans la situation où  $\lambda_i = \mu_i$  sauf pour deux indices  $j$  et  $k$  ( $j \neq k$ ). Étant donné une partition  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et deux entiers  $r, s \geq 0$ , on note  $\lambda_{(j,r;k,s)}$  la partition  $\mu$  définie, si elle existe, par  $\mu_j = \lambda_j - r$ ,  $\mu_k = \lambda_k - s$  et  $\mu_m = \lambda_m$  ( $m \neq j, k$ ). Voici notre résultat principal (on retrouve le théorème 4 lorsque  $s = 0$ ).

THÉORÈME 5. — Pour toute partition  $\lambda$  et tous entiers  $1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)$ , ( $j \neq k$ ), on a

$$\begin{aligned} \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t} &= \frac{t^{(1-\ell(\lambda))(r+s)}}{q^{rs}} \frac{(q^{\lambda_j} t^{\ell(\lambda)-j}; 1/q)_r}{(q; q)_r} \frac{(q^{\lambda_k} t^{\ell(\lambda)-k}; 1/q)_s}{(q; q)_s} \\ &\quad \left( \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k}}^{\ell(\lambda)} \frac{(q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i+1}; q)_r (q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i+1}; q)_s}{(q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i}; q)_r (q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i}; q)_s} \right) \\ &\quad \frac{F(q)(q^{\lambda_k-\lambda_j} t^{j-k+1}, q^{\lambda_j-\lambda_k} t^{k-j+1}, t/q, r, s)}{(q^{\lambda_k-\lambda_j-s} t^{j-k}; q)_r (q^{\lambda_j-\lambda_k-r} t^{k-j}; q)_s}. \end{aligned}$$

Preuve. — La relation de récurrence fondamentale s'écrit

$$\begin{aligned} &\left( \left( \sum_{i=\lambda_j-r+1}^{\lambda_j} q^{i-1} \right) t^{1-j} + \left( \sum_{i=\lambda_k-s+1}^{\lambda_k} q^{i-1} \right) t^{1-k} \right) \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t} \\ &= \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r-1;k,s)}}_{q,t} \binom{\lambda_{(j,r-1;k,s)}}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t} q^{\lambda_j-r} t^{1-j} \\ &\quad + \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s-1)}}_{q,t} \binom{\lambda_{(j,r;k,s-1)}}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t} q^{\lambda_k-s} t^{1-k}. \end{aligned}$$

En effet parmi les partitions  $(\lambda_{(j,r;k,s)})^{(i)}$ , les partitions  $\lambda_{(j,r-1;k,s)}$  et  $\lambda_{(j,r;k,s-1)}$  sont les seules telles que  $(\lambda_{(j,r;k,s)})^{(i)} \subseteq \lambda$ . On applique donc la propriété a).

En appliquant la propriété b) la relation précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \left( q^{\lambda_j-r}(1-q^r)t^{1-j} + q^{\lambda_k-s}(1-q^s)t^{1-k} \right) \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t} t^{\ell(\lambda)-1} \\ &= q^{\lambda_j-r} t^{1-j} \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r-1;k,s)}}_{q,t} (1 - q^{\lambda_j-r+1} t^{\ell(\lambda)-j}) \\ & \quad \frac{1 - q^{\lambda_k-\lambda_j+r-s-1} t^{j-k+1}}{1 - q^{\lambda_k-\lambda_j+r-s-1} t^{j-k}} \prod_{i \neq j,k} \frac{1 - q^{\lambda_i-\lambda_j+r-1} t^{j-i+1}}{1 - q^{\lambda_i-\lambda_j+r-1} t^{j-i}} \\ & + q^{\lambda_k-s} t^{1-k} \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s-1)}}_{q,t} (1 - q^{\lambda_k-s+1} t^{\ell(\lambda)-k}) \\ & \quad \frac{1 - q^{\lambda_j-\lambda_k+s-r-1} t^{k-j+1}}{1 - q^{\lambda_j-\lambda_k+s-r-1} t^{k-j}} \prod_{i \neq j,k} \frac{1 - q^{\lambda_i-\lambda_k+s-1} t^{k-i+1}}{1 - q^{\lambda_i-\lambda_k+s-1} t^{k-i}}. \end{aligned}$$

On va rechercher une solution à cette relation sous la forme

$$\begin{aligned} \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t} &= \frac{t^{(1-\ell(\lambda))(r+s)}}{q^{rs}} \frac{(q^{\lambda_j} t^{\ell(\lambda)-j}; 1/q)_r}{(q; q)_r} \frac{(q^{\lambda_k} t^{\ell(\lambda)-k}; 1/q)_s}{(q; q)_s} \\ & \quad \left( \prod_{i \neq j,k} \frac{(q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i+1}; q)_r (q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i+1}; q)_s}{(q^{\lambda_i-\lambda_j} t^{j-i}; q)_r (q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i}; q)_s} \right) \\ & \quad \frac{B(r,s)}{(q^{\lambda_k-\lambda_j-s} t^{j-k}; q)_r (q^{\lambda_j-\lambda_k-r} t^{k-j}; q)_s}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations

$$\begin{aligned} (qa; q)_n &= (a; q)_n \frac{(1 - aq^n)}{(1 - a)}, \\ (a; q)_n &= (a; q)_{n-1} (1 - aq^{n-1}), \end{aligned}$$

on voit facilement que

$$\begin{aligned} \frac{\binom{\lambda}{\lambda_{(j,r-1;k,s)}}_{q,t}}{\binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t}} &= t^{\ell(\lambda)-1} q^s \frac{1-q^r}{1-q^{\lambda_j-r+1} t^{\ell(\lambda)-j}} \left( \prod_{i \neq j,k} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+r-1} t^{j-i}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_j+r-1} t^{j-i+1}} \right) \\ & \quad (1-q^{\lambda_k-\lambda_j+r-s-1} t^{j-k}) \frac{1-q^{\lambda_j-\lambda_k-r} t^{k-j}}{1-q^{\lambda_j-\lambda_k-r+s} t^{k-j}} \frac{B(r-1,s)}{B(r,s)}, \end{aligned}$$

et de même

$$\frac{\binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s-1)}}_{q,t}}{\binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_{q,t}} = t^{\ell(\lambda)-1} q^r \frac{1-q^s}{1-q^{\lambda_k-s+1} t^{\ell(\lambda)-k}} \left( \prod_{i \neq j,k} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k+s-1} t^{k-i}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k+s-1} t^{k-i+1}} \right) \\ (1-q^{\lambda_j-\lambda_k+s-r-1} t^{k-j}) \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_j-s} t^{j-k}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_j-s+r} t^{j-k}} \frac{B(r, s-1)}{B(r, s)}.$$

En portant ces expressions dans la relation de récurrence, plusieurs simplifications permettent d'obtenir rapidement

$$\left( (1-q^r) + q^{\lambda_k-\lambda_j+r-s} (1-q^s) t^{j-k} \right) (1-q^{\lambda_j-\lambda_k-r+s} t^{k-j}) B(r, s) \\ = q^s (1-q^r) (1-q^{\lambda_j-\lambda_k-r} t^{k-j}) (1-q^{\lambda_k-\lambda_j+r-s-1} t^{j-k+1}) B(r-1, s) \\ - q^r (1-q^s) (1-q^{\lambda_k-\lambda_j-s} t^{j-k}) (1-q^{\lambda_j-\lambda_k+s-r-1} t^{k-j+1}) B(r, s-1).$$

On reconnaît là l'équation de récurrence qui, en vertu du théorème 2, caractérise  $F(q)(q^{\lambda_k-\lambda_j} t^{j-k+1}, q^{\lambda_j-\lambda_k} t^{k-j+1}, t/q, r, s)$ . D'où l'assertion.  $\square$

*Remarque 3.* — Le théorème 5 peut s'écrire sous la forme condensée suivante. Soient  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$  et  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  deux partitions telles que  $\kappa_i \neq \lambda_i$  pour au plus deux indices  $i$ . On a

$$\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} = \frac{t^{(1-n)(|\kappa|-|\lambda|)}}{\prod_{i=1}^n (q^{\kappa_i-\lambda_i})} \prod_{i=1}^n \frac{(q^{\kappa_i} t^{n-i}; 1/q)_{\kappa_i-\lambda_i}}{(q; q)_{\kappa_i-\lambda_i}} \\ \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{F(q)(q^{\kappa_j-\kappa_i} t^{i-j+1}, q^{\kappa_i-\kappa_j} t^{j-i+1}, t/q, \kappa_i - \lambda_i, \kappa_j - \lambda_j)}{(q^{\lambda_i-\kappa_j} t^{j-i}; q)_{\kappa_j-\lambda_j} (q^{\lambda_j-\kappa_i} t^{i-j}; q)_{\kappa_i-\lambda_i}}.$$

Malheureusement cette expression n'est pas générale. Elle est fautive lorsque  $\kappa_i \neq \lambda_i$  pour au moins trois indices.

Le théorème 5 permet de déterminer tous les coefficients binomiaux généralisés associés aux partitions de longueur  $\leq 2$ . On a immédiatement le

**THÉOREME 6.** — On a

$$\binom{(k_1, k_2)}{(k_1-r, k_2-s)}_{q,t} \\ = \frac{1}{q^r s t^{r+s}} \frac{(q^{k_1} t; 1/q)_r}{(q; q)_r} \frac{(q^{k_2}; 1/q)_s}{(q; q)_s} \frac{F(q)(q^{k_2-k_1}, q^{k_1-k_2} t^2, t/q, r, s)}{(q^{k_2-k_1-s}/t; q)_r (q^{k_1-k_2-r} t; q)_s}.$$

De même la relation de dualité suivante (cas particulier du théorème 1 de [3]) :

$$\left( \begin{matrix} (2^n, 1^m) \\ (2^{n-r}, 1^{m-s}) \end{matrix} \right)_{q,t} = \left( \begin{matrix} (n+m, n) \\ (n+m-(r+s), n-r) \end{matrix} \right)_{1/t, 1/q}$$

implique immédiatement le

THÉORÈME 7. — On a

$$\begin{aligned} \left( \begin{matrix} (2^n, 1^m) \\ (2^{n-r}, 1^{m-s}) \end{matrix} \right)_{q,t} &= t^{r(r+s)} q^{2r+s} \frac{(t^{-n-m}/q; t)_{r+s}}{(1/t; 1/t)_{r+s}} \frac{(t^{-n}; t)_r}{(1/t; 1/t)_r} \\ &\quad \frac{F^{(1/t)}(t^m, t^{-m}/q^2, t/q, r+s, r)}{(qt^{m+r}; 1/t)_{r+s} (t^{r+s-m}/q; 1/t)_r}. \end{aligned}$$

### 6. Polynômes de Jack.

Étant donnée une indéterminée  $\alpha$ , les polynômes de Jack  $J_\lambda(x; \alpha)$  forment une base de l'algèbre des polynômes symétriques de  $n$  variables  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ , à coefficients rationnels en  $\alpha$  ([7], chapitre 6, section 10). Les coefficients binomiaux généralisés  $\binom{\lambda}{\mu}_\alpha$  associés à ces polynômes ont été introduits dans [4] et [5], et ultérieurement étudiés dans [1] par une autre méthode.

Dans [3], section 14, nous avons démontré les propriétés annoncées dans [4] par le passage à la limite

$$\binom{\lambda}{\mu}_\alpha = \lim_{t \rightarrow 1} \binom{\lambda}{\mu}_{t\alpha, t}.$$

Dans cette limite nous obtenons immédiatement les résultats suivants, auparavant annoncés dans [5].

THÉORÈME 8. — Pour toute partition  $\lambda$  et tous entiers  $1 \leq j, k \leq \ell(\lambda)$ , ( $j \neq k$ ), on a

$$\begin{aligned} \binom{\lambda}{\lambda_{(j,r;k,s)}}_\alpha &= \frac{1}{r!s!} (\lambda_j - r + 1 + (\ell(\lambda) - j)/\alpha)_r (\lambda_k - s + 1 + (\ell(\lambda) - k)/\alpha)_s \\ &\quad \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j, k}}^{\ell(\lambda)} \frac{(\lambda_i - \lambda_j + (j-i+1)/\alpha)_r (\lambda_i - \lambda_k + (k-i+1)/\alpha)_s}{(\lambda_i - \lambda_j + (j-i)/\alpha)_r (\lambda_i - \lambda_k + (k-i)/\alpha)_s} \\ &\quad \frac{G(\lambda_k - \lambda_j + (j-k+1)/\alpha, \lambda_j - \lambda_k + (k-j+1)/\alpha, 1-1/\alpha, r, s)}{(\lambda_k - \lambda_j - s + (j-k)/\alpha)_r (\lambda_j - \lambda_k - r + (k-j)/\alpha)_s}. \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — On a

$$\left( \begin{matrix} (k_1, k_2) \\ (k_1 - r, k_2 - s) \end{matrix} \right)_\alpha = \frac{1}{r!s!} \frac{(k_1 - r + 1 + 1/\alpha)_r (k_2 - s + 1)_s}{(k_2 - k_1 - s - 1/\alpha)_r (k_1 - k_2 - r + 1/\alpha)_s} G(k_2 - k_1, k_1 - k_2 + 2/\alpha, 1 - 1/\alpha, r, s)$$

et

$$\left( \begin{matrix} (2^n, 1^m) \\ (2^{n-r}, 1^{m-s}) \end{matrix} \right)_\alpha = \frac{1}{r!} \frac{1}{(r+s)!} \frac{(n+m-r-s+1+\alpha)_{r+s} (n-r+1)_r}{(-m-r-\alpha)_{r+s} (m-r-s+\alpha)_r} G(-m, m+2\alpha, 1-\alpha, r+s, r).$$

Pour plus de détails sur les polynômes de Jack, d'autres résultats et d'autres références, nous renvoyons le lecteur à [3], section 14.

*Remarque 4.* — Le théorème 8 pourrait être établi directement à partir de la relation de récurrence fondamentale ([3], section 14)

$$(|\lambda| - |\mu|) \binom{\lambda}{\mu}_\alpha = \sum_{i=1}^{\ell(\mu)+1} \binom{\lambda}{\mu^{(i)}}_\alpha \binom{\mu^{(i)}}{\mu}_\alpha.$$

En procédant de manière entièrement analogue à la démonstration du théorème 5, on aboutit à la caractérisation du théorème 3 pour  $G(\lambda_k - \lambda_j + (j - k + 1)/\alpha, \lambda_j - \lambda_k + (k - j + 1)/\alpha, 1 - 1/\alpha, r, s)$ .

## 7. Polynômes de Macdonald décalés.

Simultanément et indépendamment de [3], les coefficients binomiaux généralisés associés aux polynômes de Macdonald ont été introduits dans [9] par une méthode très différente. Celle-ci repose sur la notion de polynôme de Macdonald "décalé" introduite par plusieurs auteurs ([2], [8], [12]).

Pour toute partition  $\lambda$  de longueur inférieure ou égale à  $n$ , on désigne ainsi le polynôme  $P_\lambda^\sim(x_1, x_2, \dots, x_n; q, t)$  qui est

- i) symétrique dans les variables  $x_i t^{1-i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ),
- ii) de degré  $|\lambda|$ ,
- iii) tel que  $P_\lambda^\sim(q^\mu; q, t) = P_\lambda^\sim(q^{\mu^1}, q^{\mu^2}, \dots, q^{\mu^n}; q, t) \neq 0 \implies \lambda \subseteq \mu$ .

Ce polynôme est unique à une constante multiplicative près, spécifiée par la valeur de  $P_\lambda^\sim(q^\lambda; q, t)$ .

Dans [9] les coefficients binomiaux généralisés sont introduits à partir de la généralisation suivante de la formule classique du binôme :

$$P_{\lambda}^{\sim}(x_1, x_2, \dots, x_n; q, t) = \sum_{\mu} \binom{\lambda}{\mu}_{1/q, 1/t} \frac{P_{\lambda}^{\sim}(0; q, t)}{P_{\mu}^{\sim}(0; q, t)} P_{\mu}(x_1, t^{-1}x_2, \dots, t^{1-n}x_n; q, t),$$

c'est-à-dire à partir du développement sur les polynômes de Macdonald du polynôme de Macdonald décalé. On a en particulier

$$\binom{\lambda}{\mu}_{q, t} = \frac{P_{\mu}^{\sim}(q^{\lambda}; q, t)}{P_{\mu}^{\sim}(q^{\mu}; q, t)}.$$

Compte-tenu de cette relation, le théorème 5 peut être interprété en termes de polynômes de Macdonald décalés : il donne la valeur du polynôme  $P_{\mu}^{\sim}(x; q, t)$  en tous les points de la forme  $x = (q^{\lambda_1}, q^{\lambda_2}, \dots, q^{\lambda_n})$  avec  $\lambda_j = \mu_j + r$ ,  $\lambda_k = \mu_k + s$  et  $\lambda_m = \mu_m$  ( $m \neq j, k$ ).

La même interprétation est possible dans le cas des polynômes de Jack. Dans [10] les coefficients binomiaux généralisés  $\binom{\lambda}{\mu}_{\alpha}$  sont introduits à partir des polynômes de Jack "décalés"

$$J_{\lambda}^{\sim}(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \lim_{q=t \rightarrow 1} [(q-1)^{-|\lambda|} P_{\lambda}^{\sim}(q^{x_1}, q^{x_2}, \dots, q^{x_n}; q, t)].$$

On a en particulier

$$\binom{\lambda}{\mu}_{\alpha} = \frac{J_{\mu}^{\sim}(\lambda; \alpha)}{J_{\mu}^{\sim}(\mu; \alpha)}.$$

Interprété en termes de polynômes de Jack décalés, le théorème 8 donne donc la valeur du polynôme  $J_{\mu}^{\sim}(x; \alpha)$  en tous les points de la forme  $x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_j = \mu_j + r$ ,  $\lambda_k = \mu_k + s$  et  $\lambda_m = \mu_m$  ( $m \neq j, k$ ).

Pour d'autres résultats et références sur les polynômes de Jack décalés, nous renvoyons le lecteur à [6], [10].

### 8. Relations de contiguïté.

Dans cette section nous établissons des "relations de contiguïté" pour la fonction hypergéométrique  ${}_3\phi_2^{(q)}(a, b, c; x, y; z)$ . Ces relations sont certainement connues, mais nous n'avons pu les trouver dans la littérature.

Dans toute la suite, on écrit  $\phi$  pour  ${}_3\phi_2^{(q)}(a, b, c; x, y; z)$ ,  $\phi(qb)$  pour  ${}_3\phi_2^{(q)}(a, qb, c; x, y; z)$ ,  $\phi(qx)$  pour  ${}_3\phi_2^{(q)}(a, b, c; qx, y; z)$ , et  $\phi(qb, qx)$  pour

${}_3\phi_2^{(q)}(a, qb, c; qx, y; z)$ . On a des notations analogues si on échange  $a, b, c$  ou  $x, y$ . On écrit de même  $\phi(b/q)$  pour  ${}_3\phi_2^{(q)}(a, b/q, c; x, y; z)$  et ainsi de suite.

On note  $\Delta_z$  l'opérateur aux différences finies défini par  $\Delta_z f(z) = f(z) - f(qz)$ . On écrit

$$\phi = \sum_{n \geq 0} c_n \frac{z^n}{(q; q)_n},$$

c'est-à-dire

$$c_n = \frac{(a; q)_n (b; q)_n (c; q)_n}{(x; q)_n (y; q)_n}.$$

PROPOSITION 2. — On a

$$\Delta_z \phi = \frac{1-a}{a} (\phi(qa) - \phi) = \frac{1-b}{b} (\phi(qb) - \phi) = \frac{1-c}{c} (\phi(qc) - \phi).$$

Preuve. — On a

$$\begin{aligned} \Delta_z \phi &= \sum_{n \geq 1} c_n (1 - q^n) \frac{z^n}{(q; q)_n}, \\ \phi(qa) - \phi &= \sum_{n \geq 1} c_n \left( \frac{1 - aq^n}{1 - a} - 1 \right) \frac{z^n}{(q; q)_n}. \quad \square \end{aligned}$$

COROLLAIRE. — On a

- i)  $(c - b)\phi = c(1 - b)\phi(qb) - b(1 - c)\phi(qc)$ ,
- ii)  $c(1 - b)\Delta_z \phi(qb) - b(1 - c)\Delta_z \phi(qc) = (1 - b)(1 - c)(\phi(qc) - \phi(qb))$ .

PROPOSITION 3. — On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \left( 1 - \frac{abc}{xy} z \right) \Delta_z \phi &= \frac{x}{(x-y)(1-x)} \left( 1 - \frac{a}{x} \right) \left( 1 - \frac{b}{x} \right) \left( 1 - \frac{c}{x} \right) \phi(qx) \\ &+ \frac{y}{(y-x)(1-y)} \left( 1 - \frac{a}{y} \right) \left( 1 - \frac{b}{y} \right) \left( 1 - \frac{c}{y} \right) \phi(qy) \\ &+ \frac{\phi}{x^2 y^2} (xy(ab + bc + ca - abc) - abc(x + y)). \end{aligned}$$

Preuve. — On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \frac{(1 - aq^n)(1 - bq^n)(1 - cq^n)}{(1 - xq^n)(1 - yq^n)} \\ &= \frac{x}{x - y} \left(1 - \frac{a}{x}\right) \left(1 - \frac{b}{x}\right) \left(1 - \frac{c}{x}\right) \frac{1}{(1 - xq^n)} \\ &\quad + \frac{y}{y - x} \left(1 - \frac{a}{y}\right) \left(1 - \frac{b}{y}\right) \left(1 - \frac{c}{y}\right) \frac{1}{(1 - yq^n)} + \frac{abc}{xy} (1 - q^n) \\ &\quad + \frac{1}{x^2 y^2} (xy(ab + bc + ca - abc) - abc(x + y)). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\Delta_z \phi = \sum_{n \geq 1} c_n (1 - q^n) \frac{z^n}{(q; q)_n} = z \sum_{n \geq 0} \frac{c_{n+1}}{c_n} c_n \frac{z^n}{(q; q)_n}.$$

D'où l'assertion. □

PROPOSITION 4. — On a

$$\begin{aligned} \Delta_z \phi(b/q) &= z(1 - b/q) \left( \frac{ac}{xy} \phi + \frac{(a-x)(c-x)}{x(1-x)(x-y)} \phi(qx) + \frac{(a-y)(c-y)}{y(1-y)(y-x)} \phi(qy) \right), \\ \Delta_z \phi(c/q) &= z(1 - c/q) \left( \frac{ab}{xy} \phi + \frac{(a-x)(b-x)}{x(1-x)(x-y)} \phi(qx) + \frac{(a-y)(b-y)}{y(1-y)(y-x)} \phi(qy) \right). \end{aligned}$$

Preuve. — On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(1 - aq^n)(1 - cq^n)}{(1 - xq^n)(1 - yq^n)} \\ &= \frac{ac}{xy} + \frac{(a-x)(c-x)}{x(x-y)} \frac{1}{(1 - xq^n)} + \frac{(a-y)(c-y)}{y(y-x)} \frac{1}{(1 - yq^n)}. \end{aligned}$$

Mais d'autre part on a

$$\Delta_z \phi(b/q) = \sum_{n \geq 1} c_n (1 - q^n) \frac{z^n}{(q; q)_n} \frac{(1 - b/q)}{(1 - bq^{n-1})} = z(1 - b/q) \sum_{n \geq 0} c_n u_n \frac{z^n}{(q; q)_n}.$$

D'où la première relation. La preuve de la seconde est analogue. □

PROPOSITION 5. — On a

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{abc}{xy} \frac{z}{q}\right) \phi &= \phi(b/q) + \frac{b}{q} z \left( \frac{(a-x)(c-x)}{x(1-x)(x-y)} \phi(qx) + \frac{(a-y)(c-y)}{y(1-y)(y-x)} \phi(qy) \right), \\ &= \phi(c/q) + \frac{c}{q} z \left( \frac{(a-x)(b-x)}{x(1-x)(x-y)} \phi(qx) + \frac{(a-y)(b-y)}{y(1-y)(y-x)} \phi(qy) \right). \end{aligned}$$

Preuve. — Conséquence immédiate des propositions 2 et 4. □



### 9. Preuve du théorème 1.

Nous allons démontrer le théorème 1 sous la forme plus générale suivante (on retrouve le théorème 1 en faisant  $xy = a^2bc$ ).

THÉORÈME 9. — On a la relation de contiguité

$$\begin{aligned} \left(c - b + \frac{ab}{y}(1 - c) - \frac{ac}{x}(1 - b)\right) {}_3\phi_2^{(q)}\left(a, b, c; x, y; \frac{xy}{abc}\right) \\ = -(1 - b) \frac{(x - a)(x - c)}{x(1 - x)} {}_3\phi_2^{(q)}\left(a, qb, c; qx, y; \frac{xy}{abc}\right) \\ + (1 - c) \frac{(y - a)(y - b)}{y(1 - y)} {}_3\phi_2^{(q)}\left(a, b, qc; x, qy; \frac{xy}{abc}\right). \end{aligned}$$

*Preuve.* — On note désormais  $\phi_0 = {}_3\phi_2^{(q)}\left(a, b, c; x, y; \frac{xy}{abc}\right)$ . En substituant  $b$  à  $b/q$  (resp.  $c$  à  $c/q$ ) dans la première (resp. seconde) relation de la proposition 5, puis en faisant  $z = \frac{xy}{abc}$ , on obtient

$$(1) \quad -\frac{ac}{xy}\phi_0 = \frac{(a - x)(c - x)}{x(1 - x)(x - y)}\phi_0(qb, qx) + \frac{(a - y)(c - y)}{y(1 - y)(y - x)}\phi_0(qb, qy),$$

$$(2) \quad -\frac{ab}{xy}\phi_0 = \frac{(a - x)(b - x)}{x(1 - x)(x - y)}\phi_0(qc, qx) + \frac{(a - y)(b - y)}{y(1 - y)(y - x)}\phi_0(qc, qy).$$

En substituant  $qb$  à  $b$  (resp.  $qc$  à  $c$ ) dans la proposition 3, puis en faisant  $z = \frac{xy}{abc}$ , on a de même

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x - y)(1 - x)} \left(1 - \frac{a}{x}\right) \left(1 - \frac{qb}{x}\right) \left(1 - \frac{c}{x}\right) \phi_0(qb, qx) \\ + \frac{y}{(y - x)(1 - y)} \left(1 - \frac{a}{y}\right) \left(1 - \frac{qb}{y}\right) \left(1 - \frac{c}{y}\right) \phi_0(qb, qy) \\ + \frac{\phi_0(qb)}{x^2y^2} (xy(aqb + qbc + ca - qabc) - qabc(x + y)) \\ (3) \quad \quad \quad = \frac{abc}{xy} (1 - q) \Delta_z \phi_0(qb), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{x}{(x - y)(1 - x)} \left(1 - \frac{a}{x}\right) \left(1 - \frac{b}{x}\right) \left(1 - \frac{qc}{x}\right) \phi_0(qc, qx) \\ + \frac{y}{(y - x)(1 - y)} \left(1 - \frac{a}{y}\right) \left(1 - \frac{b}{y}\right) \left(1 - \frac{qc}{y}\right) \phi_0(qc, qy) \\ + \frac{\phi_0(qc)}{x^2y^2} (xy(ab + qbc + qca - qabc) - qabc(x + y)) \\ (4) \quad \quad \quad = \frac{abc}{xy} (1 - q) \Delta_z \phi_0(qc). \end{aligned}$$

En comparant (1) et (3) on a immédiatement

$$\begin{aligned}
 qb \frac{(x-a)(x-c)}{x(1-x)} \phi_0(qb, qx) &= -\frac{\phi_0(qb)}{xy} (xy(aqb + qbc + ca - qabc) - qabc(x+y)) \\
 &\quad + abc(1-q)\Delta_z \phi_0(qb) + ac \left(1 - \frac{qb}{y}\right) \phi_0.
 \end{aligned}$$

De même en comparant (2) et (4) il vient

$$\begin{aligned}
 qc \frac{(y-a)(y-b)}{y(1-y)} \phi_0(qc, qy) &= -\frac{\phi_0(qc)}{xy} (xy(ab + qbc + qca - qabc) - qabc(x+y)) \\
 &\quad + abc(1-q)\Delta_z \phi_0(qc) + ab \left(1 - \frac{qc}{x}\right) \phi_0.
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 -(1-b) \frac{(x-a)(x-c)}{x(1-x)} \phi_0(qb, qx) + (1-c) \frac{(y-a)(y-b)}{y(1-y)} \phi_0(qc, qy) &= \frac{1-b}{qb} \left( \frac{\phi_0(qb)}{xy} (xy(aqb + qbc + ca - qabc) - qabc(x+y)) \right. \\
 &\quad \left. - abc(1-q)\Delta_z \phi_0(qb) - ac \left(1 - \frac{qb}{y}\right) \phi_0 \right) \\
 + \frac{1-c}{qc} \left( -\frac{\phi_0(qc)}{xy} (xy(ab + qbc + qca - qabc) - qabc(x+y)) \right. &+ abc(1-q)\Delta_z \phi_0(qc) + ab \left(1 - \frac{qc}{x}\right) \phi_0 \left. \right).
 \end{aligned}$$

En appliquant successivement les corollaires ii) puis i) de la proposition 2, le membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned}
 (1-b) \left( \phi_0(qb) \left( a + c - ac + \frac{ca}{qb} - \frac{ac}{xy} (x+y) \right) - ac \left( \frac{1}{qb} - \frac{1}{y} \right) \phi_0 \right) &+ (1-c) \left( -\phi_0(qc) \left( \frac{ab}{qc} + b + a - ab - \frac{ab}{xy} (x+y) \right) - ab \left( \frac{1}{qc} - \frac{1}{x} \right) \phi_0 \right) \\
 + \frac{a}{q} (1-q)(1-b)(1-c) (\phi_0(qb) - \phi_0(qc)) &= (1-b) \left( a + \frac{ac}{qb} \right) \phi_0(qb) - (1-c) \left( a + \frac{ab}{qc} \right) \phi_0(qc) \\
 + \frac{a}{q} (1-q)(1-b)(1-c) (\phi_0(qb) - \phi_0(qc)) &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \left( 1 - a - \frac{a}{xy}(x+y)(c-b) + ab(1-c) \left( \frac{1}{qc} - \frac{1}{x} \right) \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - ac(1-b) \left( \frac{1}{qb} - \frac{1}{y} \right) \right) \right) \phi_0 \\
& = \left( \left( \frac{a}{q} \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + q - 1 \right) + 1 - a - \frac{a}{xy}(x+y) \right) (c-b) \right. \\
& \qquad \qquad \left. + ab(1-c) \left( \frac{1}{qc} - \frac{1}{x} \right) - ac(1-b) \left( \frac{1}{qb} - \frac{1}{y} \right) \right) \phi_0.
\end{aligned}$$

On conclut facilement.  $\square$

En passant à la limite  $q \rightarrow 1$ , et en développant le membre de gauche de la relation du théorème 9 à l'ordre 2 au voisinage de  $q = 1$ , nous obtenons facilement le

THÉORÈME 10. — *On a la relation de contiguïté*

$$\begin{aligned}
(b(a-x) - c(a-y)) {}_3F_2(a, b, c; x, y; 1) \\
& = -\frac{b}{x}(x-a)(x-c) {}_3F_2(a, b+1, c; x+1, y; 1) \\
& \quad + \frac{c}{y}(y-a)(y-b) {}_3F_2(a, b, c+1; x, y+1; 1).
\end{aligned}$$

Ce résultat était certainement connu mais nous n'avons pu le trouver explicitement formulé dans la littérature.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. KANEKO, Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, 24 (1993), 1086–1110.
- [2] F. KNOP, Symmetric and non-symmetric quantum Capelli polynomials, to appear.
- [3] M. LASSALLE, Coefficients binomiaux généralisés et polynômes de Macdonald, *J. Funct. Anal.*, 158 (1998), 289–324.
- [4] M. LASSALLE, Une formule du binôme généralisée pour les polynômes de Jack, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 310 (1990), 253–256.
- [5] M. LASSALLE, Coefficients du binôme généralisés, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, 310 (1990), 257–260.
- [6] M. LASSALLE, Some combinatorial conjectures for shifted Jack polynomials, *Ann. Combinatorics*, 2 (1998), 145–163.
- [7] I. G. MACDONALD, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second edition, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [8] A. OKOUNKOV, (Shifted) Macdonald polynomials:  $q$ -integral representation and combinatorial formula, *Compositio Math.*, 112 (1998), 147–182.

- [9] A. OKOUNKOV, Binomial formula for Macdonald polynomials and applications, *Math. Res. Lett.*, 4 (1997), 533–553.
- [10] A. OKOUNKOV, G. OLSHANSKI, Shifted Jack polynomials, binomial formula and applications, *Math. Res. Lett.*, 4 (1997), 69–78.
- [11] A. OKOUNKOV, G. OLSHANSKI, Shifted Schur functions, *St. Petersburg Math. J.*, 9 (1998).
- [12] S. SAHI, Interpolation, integrality, and a generalization of Macdonald's polynomials, *Internat. Math. Res. Notices*, 10 (1996), 457–471.

Manuscrit reçu le 24 juillet 1998,  
accepté le 18 décembre 1998.

Michel LASSALLE,  
École Polytechnique  
91128 Palaiseau (France).  
lassalle@chercheur.com