ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

BRUNO COURCELLE
FRÉDÉRIC OLIVE

Une axiomatisation au premier ordre des arrangements de pseudodroites euclidiennes

Annales de l'institut Fourier, tome 49, nº 3 (1999), p. 883-903
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1999__49_3_883_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
49, 3 (1999), 883–903

UNE AXIOMATISATION AU PREMIER ORDRE DES ARRANGEMENTS DE PSEUDODROITES EUCLIDIENNES

par B. COURCELLE et F. OLIVE

Introduction.

Certaines structures combinatoires sont des classes d'équivalence de dessins définis comme des assemblages de segments de courbes et de droites. Deux telles structures sont équivalentes si elles représentent des dessins qui diffèrent de façon non pertinente par rapport aux applications envisagées. Ces équivalences de dessins peuvent être définies en termes d'homéomorphismes.

Il est manifestement préférable de représenter en machine, non pas de tels dessins eux-mêmes, mais leurs classes d'équivalences, par des structures combinatoires (finies). En effet, d'une part on économise de l'espace, du temps de calcul lors de l'évaluation d'une requête concernant ces dessins (ce point de vue est utilisé dans l'implantation des bases de données géographiques, voir par exemple [8]) et d'autre part, cela permet pour l'étude mathématique, de se concentrer sur les composantes réellement significatives des dessins considérés. Un exemple classique est la carte combinatoire, qui permet de représenter au moyen de couples de permutations les classes d'homéomorphisme des dessins sans croisement d'arcs des graphes planaires.

Nous étudions dans cette perspective les arrangements de pseudodroites euclidiennes. Nous considérons cette étude comme un fondement d'une théorie à bâtir des dessins de graphes avec croisements d'arcs.

Mots-clés : Pseudodroites – Arrangements – Insertions – Logique du premier ordre.
Classification math. : 51D20 – 05B35.

Un arrangement de droites est un ensemble (fini) de droites du plan euclidien tel que deux d'entre elles soient concourantes. Ces droites déterminent un régionnement du plan en zones convexes. Deux arrangements sont équivalents s'ils déterminent des régions ayant les mêmes dispositions relatives, les mêmes incidences etc... Les théorèmes de Desargues et de Pappus entraînent que certains alignements sont impliqués par d'autres. Ces théorèmes constituent des contraintes sur les dispositions relatives des droites d'un arrangement. Certains arrangements sont donc impossibles à construire à cause de ces contraintes. De plus, on ne connaît pas de caractérisation combinatoire des arrangements (réalisables) de droites, et la réalisabilité d'un arrangement est un problème NP-difficile [9].

Une pseudodroite est une courbe qui, comme une droite, sépare le plan en deux composantes connexes. Les arrangements de pseudodroites sont plus faciles à étudier que les arrangements de droites dans la mesure où les contraintes d'alignement disparaîssent. D'autre part, les lignes courbes sont importantes en vue des applications aux dessins de graphes, en particulier dès que ceux-ci comportent des arcs multiples.

Dans cet article, nous définissons une structure logique permettant de représenter les classes d'homéomorphisme des arrangements de pseudodroites du plan euclidien, et une axiomatisation finie du premier ordre de la réalisabilité des arrangements de pseudodroites. Une telle axiomatisation n'existe pas pour les arrangements de droites [9]. Nous utilisons une relation d'arité 4, notée cb, telle que $\mathsf{cb}(a, b, c, d)$ exprime que, sur la pseudodroite a, le croisement de a et c est entre ceux de a avec b et d. Nous avons donc besoin d'une axiomatisation de la relation ternaire, que nous nommons «insertion» : x est entre y et z par rapport à un ordre total sur l'ensemble considéré.

L'axiomatisation de cette relation fait l'objet de la section 1. La section 2 examine dans quelle mesure on peut élargir un arrangement en lui adjoignant une nouvelle pseudodroite contenant un ensemble de points fixé. La section 3 présente l'axiomatisation des arrangements de pseudodroites.

1. Insertions.

Pour chaque préordre total $\leqslant$ sur un ensemble X on appelle *relation ternaire d'intermédiarité* l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in X^3$ satisfaisant $x \leqslant y \leqslant z$ ou $z \leqslant y \leqslant x$. Autrement dit, la relation d'intermédiarité contient les triplets (x, y, z) tels que *y est entre x et z* pour le préordre considéré.

Inversement, il arrive que des relations ternaires soient informellement décrites comme des «insertions», c'est-à-dire comme le positionnement d'objets «les uns entre les autres». C'est par exemple le cas dans l'axiomatisation euclidienne de la géométrie, où la notion de «point situé entre deux autres sur une droite» est considérée, sans qu'un (pré)ordre sur cette droite ne soit envisagé *a priori*.

L'objectif de cette section est de formaliser cette notion d'insertion de sorte qu'elle coïncide avec celle d'intermédiarité. Plus précisément, nous donnons une axiomatisation intrinsèque (ne se référant à aucun préordre) des relations d'insertions, puis nous établissons dans la proposition 3 que toute relation I satisfaisant cette axiomatique est la relation d'intermédiarité d'un préordre $\leqslant$.

Ce résultat ne prétend pas à la nouveauté. On peut en trouver des formulations proches dans la littérature (voir par exemple [1]). Mais nous avons choisi d'en redonner une preuve sous une forme correspondant précisément à nos besoins, plutôt que d'adapter une version déjà existante.

Dans toute cette section, X et I désignent respectivement un ensemble fini de cardinal n et une relation ternaire sur cet ensemble. Pour alléger les notations, on note $[xyz]$ plutôt que $I(x, y, z)$.

DÉFINITION. — La relation I est une *insertion* sur X si elle satisfait les assertions suivantes (pour tous $x, y, z, t \in X$) :

P1. $[xyz] \vee [xzy] \vee [yxz]$;

P2. $[xxy]$;

P3. $[xyz] \to [zyx]$;

P4. $[xyx] \to (([zxt] \leftrightarrow [zyt]) \wedge ([ztx] \leftrightarrow [zty]))$;

P5. $(\neg[xyx] \wedge \neg[xzx] \wedge \neg[yzy] \wedge [xyz]) \to \neg[yxz]$;

P6. $([xyz] \wedge \neg[zyt]) \to [xyt]$.

On lira «y est entre x et z», ou encore «y sépare x de z», l'assertion $[xyz]$.

Interprétation.

P1. I est «totale» : de trois éléments quelconques, l'un est entre les deux autres ;

P2. I est «large» : tout $x \in X$ est entre lui même et n'importe quel autre. (En particulier, tout x satisfait $[xxx]$.)

P3. I est «symétrique» : un élément est entre x et z ssi il est entre z et x ;

P4. Nous aurions pu poser $[xyx] \to x = y$, d'où résulterait P4. Compte tenu des utilisations que nous avons en vue, nous permettons $[xyz]$ avec $x \neq y$. P4 signifie alors que $[xyx]$ est une forme faible d'égalité de x et de y, que nous appellerons «équivalence».

P5. I est «linéaire» : si trois éléments x, y, z de X sont deux à deux non-équivalents, l'un d'entre eux *au plus* (et donc *exactement*, par P1) sépare les deux autres. Sans cette contrainte, notre axiomatique aurait accepté comme modèle des insertions «circulaires» (*e.g.* l'insertion décrivant le positionnement de points sur un cercle). L'axiome P5 interdit ce cas de figure.

P6. I est «dichotomique» : grâce à P3, cet axiome peut être lu comme suit : *si y sépare x de z mais ne sépare pas z de t, alors y sépare x de t.* Autrement dit, tout y qui sépare deux éléments x et z partitionne X en deux sous-ensembles : celui des éléments qui sont «du côté» de x (relativement à y), et celui des éléments qui sont du côté de z.

Notation.

– On note $\equiv$ la relation d'équivalence définie par P4. Autrement dit, $a \equiv b$ dénote la formule $[aba]$.

– On abrège par $\mathsf{ddne}(x_1, \dots, x_k)$ la formule signifiant que les x_i sont deux à deux non-équivalents (*e.g.* $\mathsf{ddne}(x, y, z)$ est la formule $\neg[xyx] \wedge \neg[xzx] \wedge \neg[yzy]$).

LEMME 1. — *Soient X un ensemble fini et I une insertion sur X. Soient $a, b, x, y, z \in X$.*

(i) *Si ($a \not\equiv b$ et $[xab]$ et $[aby]$) alors ($[xay]$ et $[xby]$).*

(ii) *Si ($\mathsf{ddne}(a, b, y)$ et $[xab]$ et $[ayb]$) alors $[xyb]$.*

(iii) *Si $\mathsf{ddne}(a, x, y, z)$ alors non ($[xay]$ et $[xaz]$ et $[yaz]$).*

Preuve. — (i) Remarquons d'abord que l'hypothèse entraîne facilement : $y \not\equiv a$ (par l'absurde, en utilisant P4.) Donc, si $y \not\equiv b$ l'hypothèse entraîne : $\mathsf{ddne}(a, b, y)$ et $[aby]$ et donc, par P5 et P3, $\neg[yab]$. Si au contraire $y \equiv b$, on déduit à nouveau facilement de l'hypothèse : $\neg[yab]$ (toujours par l'absurde, en utilisant P4). Par conséquent, les assertions $a \not\equiv b$, $[xab]$ et $[aby]$ entraînent $[xab]$ et $\neg[yab]$ et donc, par P6, $[xay]$.

Par ailleurs, la conjonction ($a \not\equiv b$ et $[xab]$ et $[aby]$) équivaut à ($a \not\equiv b$ et $[yba]$ et $[bax]$) (par P3) et donc entraîne $[ybx]$ (par ce qui précède) ou encore $[xby]$ (par P3). D'où le résultat.

(ii) De ($\mathsf{ddne}(a,b,y)$ et $[ayb]$) on tire $\neg[yab]$ (par P5). De ($[xab]$ et $\neg[yab]$) on tire alors $[xay]$ (par P6). Enfin, de ($a \not\equiv y$ et $[xay]$ et $[ayb]$) on tire $[xyb]$, grâce à (i).

(iii) Supposons ($\mathsf{ddne}(a,x,y,z)$ et $[xay]$ et $[xaz]$ et $[yaz]$). On a, par P1 : ($[xyz]$ ou $[xzy]$ ou $[yxz]$). Si $[xyz]$, on a alors ($[xyz]$ et $\neg[zya]$) ($\neg[zya]$ se déduit de $[yaz]$ par P5) et donc $[xya]$ (par P6), d'où, toujours par P5, $\neg[xay]$. Ceci contredit l'hypothèse. La même contradiction est tirée des cas $[xzy]$ et $[yxz]$ par symétrie des variables x, y et z.

LEMME 2. — *Soient X un ensemble fini et I une insertion sur X. Il existe $\alpha \in X$ tel que pour tous $x, y \in X$: $x \equiv \alpha$ ou $y \equiv \alpha$ ou $\neg[x\alpha y]$.*

Preuve. — Soit $b \in X$. Si tous les éléments de X sont équivalents à b, alors b convient. Sinon, on construit simultanément une suite (a_i) d'éléments de X et une suite (A_i) de parties de X de la façon suivante :

– a_0 est un élément non-équivalent à b (quelconque);

A_0 est l'ensemble $\{x \in X \ : \ [xa_0b]\}$.

– Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et A_{n+1} sont choisis comme suit :

Si A_n contient des éléments non-équivalents à a_n, alors a_{n+1} est l'un quelconque de ces éléments, sinon a_{n+1} est l'un quelconque des éléments de A_n ;

$$A_{n+1} = \{x \in X \ : \ [xa_{n+1}b]\}.$$

Notons pour commencer que tous les a_n satisfont : $a_n \not\equiv b$ (récurrence sur n en utilisant P4 et l'assertion $[a_{n+1}a_nb]$, elle même justifiée par $a_{n+1} \in A_n$).

Montrons que la suite (A_i) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A_{n+1}$. On a, puisque $x \in A_{n+1}$ et $a_{n+1} \in A_n$:

$$[xa_{n+1}b] \quad \text{et} \quad [a_{n+1}a_nb].$$

Si $a_{n+1} \equiv a_n$ alors $[xa_nb]$ (par P4) et donc $x \in A_n$.

Si $a_{n+1} \not\equiv a_n$: comme a_n et a_{n+1} sont non-équivalents à b, on a en fait : $\mathsf{ddne}(a_{n+1}, a_n, b)$. De ($\mathsf{ddne}(a_{n+1}, a_n, b)$ et $[xa_{n+1}b]$ et $[a_{n+1}a_nb]$), on tire alors $[xa_nb]$ (résultat (ii) du lemme 1) et donc $x \in A_n$.

Ainsi la suite (A_i) est-elle décroissante et donc nécessairement stationnaire (puisque X est fini). Soit p un entier réalisant l'égalité $A_p = A_{p+1}$.

Montrons que $\alpha = a_p$ satisfait les conditions de l'énoncé. L'égalité $A_p = A_{p+1}$ signifie :

$$\forall x \in X : [xa_pb] \text{ si et seulement si } [xa_{p+1}b],$$

ce qui entraîne en particulier $[a_{p+1}a_pb]$ et $[a_pa_{p+1}b]$ (par P2) et donc $a_{p+1} \equiv a_p$ (par P5). Or, par construction des suites (a_i) et (A_i), l'équivalence $a_{p+1} \equiv a_p$ ne peut avoir lieu que si tous les éléments de A_p sont équivalents à a_p. Il s'ensuit que deux éléments x et y de X tous deux non-équivalents à a_p ne peuvent appartenir à A_p et donc satisfont : $\neg[xa_pb]$ et $\neg[ya_pb]$. Par conséquent, ils satisfont aussi $\neg[xa_py]$ (en utilisant la contraposée de l'implication P6). CQFD

PROPOSITION 3. — *Toute insertion est une relation d'intermédiarité.*

Preuve. — Soient I une insertion sur un ensemble X et α un élément de X satisfaisant les conditions du lemme 2. On vérifie facilement que la relation binaire $\leqslant$ définie sur X par «$x \leqslant y$ si et seulement si $[\alpha xy]$» est un préordre sur X :

$\leqslant$ *est totale.* Pour tout $x, y \in X$ on a ($[\alpha xy]$ ou $[x\alpha y]$ ou $[\alpha yx]$) (par P1) et $\neg[x\alpha y]$ (par définition de α). Ce qui entraîne bien que deux éléments quelconques de X sont comparables par $\leqslant$.

$\leqslant$ *est transitive.* Les inégalités $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ équivalent à $[\alpha xy]$ et $[\alpha yz]$. Elles entraînent donc $[\alpha yz]$ et $\neg[\alpha yx]$ (par P5) et donc $[xyz]$ (par P6). De cette dernière assertion et de l'hypothèse $[\alpha xy]$ on tire alors $[\alpha xz]$ (Lemme 1 (i)). Ceci signifie bien que $x \leqslant z$.

Montrons que I est la relation d'intermédiarité associée à ce préordre. Considérons l'assertion $x \leqslant y \leqslant z$. Elle signifie ($[\alpha xy]$ et $[\alpha yz]$) et entraîne $[xyz]$. En effet :

– si $\alpha \equiv x$ alors $[xyz]$ se déduit de $[\alpha yz]$ par P4;

– si $\alpha \equiv y$ alors $[\alpha xy]$ entraîne $\alpha \equiv x$ (P4) et donc $[xyz]$, par ce qui précède;

– si $x \equiv y$ alors $[xyz]$ découle immédiatement de P3 et P4;

– si $\mathsf{ddne}(\alpha, x, y)$ alors $[\alpha xy]$ entraîne $\neg[\alpha yx]$ (par P5). De l'hypothèse ($[\alpha xy]$ et $[\alpha yz]$) on tire alors ($[\alpha yz]$ et $\neg[\alpha yx]$), et donc $[xyz]$ (par P6).

Par symétrie on établit de même l'implication : $z \leqslant y \leqslant x \Rightarrow [xyz]$. Ainsi, la disjonction ($x \leqslant y \leqslant z$ ou $z \leqslant y \leqslant x$) entraîne-t-elle $[xyz]$.

Inversement, montrons que l'assertion $[xyz]$ entraîne ($x \leqslant y \leqslant z$ ou $z \leqslant y \leqslant x$), c'est-à-dire :

$$(1) \qquad ([\alpha xy] \text{ et } [\alpha yz]) \text{ ou } ([\alpha zy] \text{ et } [\alpha yx]).$$

– Si $x \equiv y$ alors (1) équivaut à ($[\alpha yz]$ ou $[\alpha zy]$), par P3 et P4, et cette assertion est vraie par définition de α.

– Si $x \equiv \alpha$ alors (1) équivaut à ($[\alpha yz]$ ou ($[\alpha zy]$ et $[\alpha yx]$)) (par P4) et l'implication $[xyz] \Rightarrow (1)$ se déduit de P4.

– Si $z \equiv y$ ou $z \equiv \alpha$, l'implication $[xyz] \Rightarrow (1)$ se déduit des cas précédents par symétrie des rôles joués par x et z.

– Si $x \equiv z$ alors $[xyz]$ entraîne de plus $y \equiv z$ (par P4) et l'implication $[xyz] \Rightarrow (1)$ se déduit du cas précédent.

– Si aucune de ces équivalences n'est réalisée, alors $\mathsf{ddne}(\alpha, x, y, z)$. Par ailleurs, on a nécessairement $[\alpha xy]$ ou $[\alpha yx]$ (par définition de α).

Si $[\alpha xy]$: de ($x \not\equiv y$ et $[\alpha xy]$ et $[xyz]$) on tire $[\alpha yz]$ (résultat (i) du lemme 1), ce qui garantit bien la validité de l'implication $[xyz] \Rightarrow (1)$.

Si $[\alpha yx]$: de $[xyz]$ et $[\alpha yx]$ et $\mathsf{ddne}(\alpha, x, y, z)$ on tire $\neg[\alpha yz]$ (résultat (iii) du lemme 1), ce qui garantit à nouveau la validité de l'implication $[xyz] \Rightarrow (1)$.

Ceci clôt la démonstration.

Dans les sections suivantes, nous rencontrerons à deux reprises un ensemble fini X muni d'une relation d'insertion, et nous chercherons à «trier» les éléments de X suivant I, c'est-à-dire à exhiber une énumération $x_1, \ldots, x_n$ de X telle que pour tous $i, j, k < n : i \leqslant j \leqslant k \Rightarrow [x_i x_j x_k]$.

L'intérêt de la proposition précédente est de rendre évidente l'existence d'un tel tri qui n'est rien d'autre qu'une énumération monotone de X suivant le préordre $\leqslant$ sous-jacent à I. Plus précisément :

Définition. — Soient X un ensemble fini, I une insertion sur X et $\leqslant$ un préordre dont I est la relation d'intermédiarité. Soit $\boldsymbol{a} = (a_0, \ldots, a_{p-1})$ un tuple d'éléments de X deux à deux distincts.

On note $[a_0 \ldots a_{p-1}]$ l'assertion : $(\forall i \leqslant j \leqslant k < p)[a_i a_j a_k]$. On dit que $\boldsymbol{a}$ est un *tri partiel de X selon I* si $[a_0 \ldots a_{p-1}]$. On dit de plus que $\boldsymbol{a}$ est un *tri de X selon I* si $p = n$. Il revient au même de dire que $\boldsymbol{a}$ est une énumération strictement monotone de l'ensemble préordonné $(X, \leqslant)$

2. Arrangements de pseudodroites.

2.1. Définitions et notations.

On désigne par $\mathbb{E}$ le plan réel euclidien. Une *pseudodroite* a est l'image d'une droite d de $\mathbb{E}$ par un homéomorphisme $h : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$. Elle partitionne $\mathbb{E} \setminus a$ en deux ouverts connexes que nous appelerons les *demi-plans ouverts définis par a*.

Si M est un point de $\mathbb{E} \setminus a$, on note $\pi^o(a, M)$ celui des deux demi-plans ouverts définis par a qui contient M, et $\pi(a, M)$ le demi-plan fermé correspondant, soit $a \cup \pi^o(a, M)$. Les demi-plans ouverts sont les images par h des demi-plans ouverts définis par la droite d.

Une *demi-pseudodroite fermée* (resp. un *pseudo-segment fermé*) est l'image par un homéomorphisme $h : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ d'une demi-droite fermée (resp. d'un segment de droite) de $\mathbb{E}$. Leurs *extrémités* sont les images par h de celle de la demi-droite (resp. celles du segment). Si A et B sont deux points distincts d'une pseudodroite a, on note $[A, B]_a$ le pseudo-segment fermé inclus dans a et d'extrémités A et B. On désigne par $]A, B[_a$ le pseudo-segment ouvert correspondant, c'est-à-dire l'ensemble $[A, B]_a \setminus \{A, B\}$.

Une *ligne brisée* est une pseudodroite de la forme $b_1 \cup b_2 \cup \ldots \cup b_n$, $n \geqslant 2$, où b_1 et b_n sont des demi-droites fermées et $b_2, \ldots, b_{n-1}$ des segments, tels que : (i) pour tout $i = 2, \ldots, n$, $(b_1 \cup \ldots \cup b_{i-1}) \cap b_i = \{A_i\}$, où A_i est une extrémité de b_{i-1} et de b_i ; (ii) les points A_i sont deux à deux distincts.

Un *arrangement* est un ensemble fini $\mathcal{A}$ de pseudodroites tel que pour toutes $a, b \in \mathcal{A}$, a et b se rencontrent en un unique point où elles se croisent (*i.e.* les deux demi-pseudodroites fermées incluses dans a et d'extrémité $a \cap b$ sont dans des demi-plans fermés définis par b différents).

Soit $\mathcal{A}$ un arrangement de pseudodroites. Une *cellule de $\mathcal{A}$* est une partie $\mathcal{C}$ d'intérieur non vide du plan de la forme $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} a^+$, où pour chaque $a \in \mathcal{A}$, a^+ et a^- dénotent les deux demi-plans fermés définis par a. L'ensemble $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} a^-$ est alors aussi une cellule, appelée *antipodale* de $\mathcal{C}$ (voir un exemple figure 1). On la note $\mathcal{C}^*$ (ou $\mathcal{C}^*_{\mathcal{A}}$ si l'on veut rappeler que cette cellule dépend de $\mathcal{A}$ tout entier, et non de la seule partie $\mathcal{C}$ du plan).

Une cellule est dite *finie* si son antipodale est vide, *infinie* dans le cas contraire. (Une cellule est finie si et seulement si elle est compacte.)

Pour tout arrangement $\mathcal{A}$ il existe un homéomorphisme du plan qui transforme $\mathcal{A}$ en un arrangement $\mathcal{B}$ de lignes brisées [3]. Les *wiring diagrams* de [3], [4], [5] sont des arrangements de lignes brisées utiles comme formes standards d'arrangements généraux. Ils permettent une description finie des classes d'homéomorphismes de tous les arrangements de pseudodroites. (Nous ne considérons que les arrangements finis.)

Un arrangement est *rectifiable* s'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{E}$ qui le transforme en un arrangement de droites. Tous les arrangements ne sont pas rectifiables. Décider si un arrangement de lignes brisées est rectifiable est un problème NP-difficile [9].

Une pseudodroite a *borde* une cellule $\mathcal{C}$ si la frontière de $\mathcal{C}$ contient un pseudo-segment de a. Un arrangement de n pseudodroites telles que $n-1$ d'entre elles au moins bordent une même cellule est rectifiable. Ce résultat est montré dans [6] (voir aussi [3]).

Soient $X \subseteq \mathbb{E}$ et $\mathcal{A}$ un arrangement. Le *support de X suivant $\mathcal{A}$* est l'ensemble des pseudodroites de $\mathcal{A}$ qui contiennent un point de X. Le support d'un point M sera noté $\text{SUPP}(M)$ plutôt que $\text{SUPP}(\{M\})$.

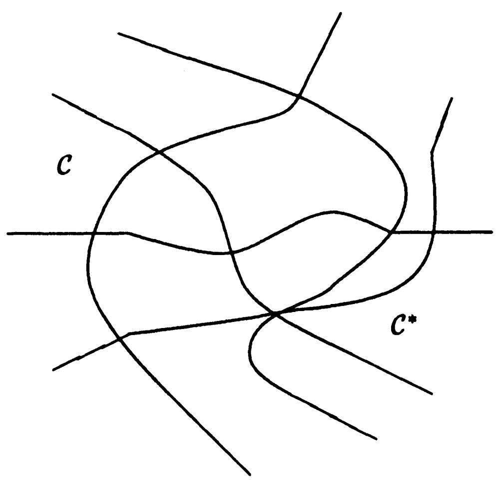

Figure 1. Cellules antipodales dans un arrangement

LEMME 4. — *Soit $\mathcal{A}$ un arrangement. Soient $\mathcal{C}$ une cellule infinie et $M \in \mathcal{C}$. Il existe une demi-pseudodroite fermée d'extrémité M entièrement contenue dans $\mathcal{C}$.*

Preuve. — $\mathcal{C}$ étant infinie, son antipodale $\mathcal{C}^*$ est non vide. Soit M^* un point de $\mathcal{C}^*$ n'appartenant à aucune des pseudodroites de $\text{SUPP}_{\mathcal{A}}(M)$ (si ce support est non vide, *i.e.* si M est sur la frontière de $\mathcal{C}$, il suffit de prendre

M^* à l'*intérieur* de $\mathcal{C}^*$). Alors aucune des pseudodroites de $\mathcal{A}$ ne contient simultanément M et M^*, et le Lemme de Levi [7] garantit l'existence d'une pseudodroite a telle que $\mathcal{A} \cup \{a\}$ est un arrangement et qui contient M et M^*. Si cette pseudodroite est l'image de $\mathbb{R}$ par l'homéomorphisme h, et si $\alpha = h^{-1}(M) > \beta = h^{-1}(M^*)$ (resp. $\alpha < \beta$), alors $h(\,[\alpha, +\infty[\,)$ (resp. $h(\,]-\infty, \alpha]\,))$ est la demi-pseudodroite cherchée.

LEMME 5. — *Soient $\mathcal{A}$ un arrangement, $\mathcal{C}$ une cellule de $\mathcal{A}$ et M, N deux points de $\mathcal{C}$. Il existe un pseudo-segment d'extrémités M et N entièrement contenu dans $\mathcal{C}$.*

Preuve. — On a rappelé plus haut que tout arrangement de pseudodroites bordant une même cellule peut être rectifié, c'est-à-dire transformé par homéomorphisme en un arrangement de droites. Soit donc h un homéomorphisme du plan qui rectifie l'ensemble des pseudodroites bordant $\mathcal{C}$. Alors $h(\mathcal{C})$ est un convexe du plan, $h(M)$ et $h(N)$ appartiennent à ce convexe, donc le segment $[h(M), h(N)]$ est inclu dans $h(\mathcal{C})$. Par conséquent le pseudo-segment $h^{-1}([h(M), h(N)])$, d'extrémités M et N est entièrement contenu dans $\mathcal{C}$.

LEMME 6. — *Soient $M_0, \dots, M_{p-1}$ p points du plan. Soient a et b deux demi-pseudodroites d'extrémités respectives M_0 et M_{p-1} et $[M_i, M_{i+1}]$, $i < p$, p pseudo-segments. Alors $a \cup \bigcup_{i<p} [M_i, M_{i+1}] \cup b$ est une pseudodroite si et seulement si les intérieurs des ensembles a, b, $[M_i, M_{i+1}]$, $i < p$, sont deux à deux disjoints.*

Soient a une pseudodroite et X, Y deux parties du plan euclidien. On dit que *a sépare X* si l'intersection de chacun des demi-plans ouverts définis par a avec X est non vide. On dira que la pseudodroite *a sépare X de Y* si l'un de ses demi-plans ouverts contient X tandis que l'autre contient Y.

THÉORÈME 7 (Pasch). — *Soient A, B, C trois points distincts et Δ une droite du plan euclidien ne contenant ni A, ni B, ni C. Si Δ sépare $\{A, B\}$ alors Δ sépare $\{B, C\}$ ou $\{A, C\}$.*

DÉFINITIONS. — On dit que X est *réparti* sur $\mathcal{A}$ si chaque $a \in \mathcal{A}$ contient au plus un point de X. Soient A, B, C trois points répartis sur $\mathcal{A}$. On dit que le triplet $\{A, B, C\}$ satisfait *l'axiome de Pasch généralisé suivant* $\mathcal{A}$, si :

$$\forall a \in \textsc{supp}(A),\ \forall b \in \textsc{supp}(B),\ \forall c \in \textsc{supp}(C)$$
$$a \text{ sépare } \{B, C\} \ \oplus\ b \text{ sépare } \{A, C\} \ \oplus\ c \text{ sépare } \{A, B\},$$

où $\oplus$ désigne le «ou» exclusif. On note alors : $\mathsf{PG}_{\mathcal{A}}(A,B,C)$. La syntaxe même de cette définition montre qu'elle équivaut à l'assertion : ($\forall a \in$ $\textsc{supp}(A)$, a sépare $\{B,C\}$) $\oplus$ ($\forall b \in \textsc{supp}(B)$, b sépare $\{A,C\}$) $\oplus$ ($\forall c \in$ $\textsc{supp}(C)$, c sépare $\{A,B\}$), que l'on notera :

$$\textsc{supp}(A) \text{ sépare } \{B,C\} \oplus \textsc{supp}(B) \text{ sépare } \{A,C\} \oplus \textsc{supp}(C) \text{ sépare } \{A,B\}.$$

On dit que X est *complètement réparti* sur $\mathcal{A}$ si chaque $a \in \mathcal{A}$ contient exactement un point de X.

Deux points de $\mathbb{E}$ sont dits *contigus sur* $\mathcal{A}$ si aucun élément de $\mathcal{A}$ ne les sépare. Il revient au même de dire que les deux points sont dans une même cellule de $\mathcal{A}$.

On dit que $\mathcal{A}$ admet un *élargissement* à X s'il existe une pseudodroite $b \notin \mathcal{A}$ telle que : $X \subseteq b$ et $\mathcal{A} \cup \{b\}$ est un arrangement.

2.2. Caractérisation combinatoire des arrangements prolongeables.

PROPOSITION 8. — *Soient $\mathcal{A}$ un arrangement et X un ensemble complètement réparti sur $\mathcal{A}$. Sont équivalents :*

1. *pour tous $A,B,C \in X$: $\mathsf{PG}_{\mathcal{A}}(A,B,C)$;*
2. *$\mathcal{A}$ admet un élargissement à X.*

Preuve.

$$\boxed{2 \Rightarrow 1}$$

Soient A, B, C trois points distincts de X. Soit α une pseudodroite qui élargit $\mathcal{A}$ à X. L'un des trois points, par exemple B, est entre les deux autres sur α, c'est-à-dire : $B \in [A,C]_\alpha$.

Soit $b \in \textsc{supp}(B)$. Les points A et C ne sont pas sur la même des deux demi-pseudodroites incluses dans α et d'extrémité B. Ils ne sont pas dans le même demi-plan défini par b, par définition d'un croisement de pseudodroites (voir la définition d'un arrangement). Et donc b sépare A de C.

Pour une raison similaire, une pseudodroite $a \in \textsc{supp}(A)$ (resp. $c \in \textsc{supp}(C)$) ne sépare pas B de C (resp. A de B). Ce qui prouve la validité de $\mathsf{PG}_{\mathcal{A}}(A,B,C)$.

$$\boxed{1 \Rightarrow 2}$$

Montrons d'abord : *pour tous* $A, B, C \in X$ *tels que* $\text{SUPP}(A)$ *sépare* B *de* C *et toute* $d \in \mathcal{A}$: d *ne sépare pas* A *de* $\{B, C\}$. Soit $d \in \mathcal{A}$. Si $d \in \text{SUPP}(A, B, C)$, la conclusion est claire. Sinon, soit $D = d \cap X$. Soit a l'un des éléments de $\text{SUPP}(A)$. Notons a^+ le demi-plan défini par a qui contient B. Soit a^- le demi-plan opposé qui, puisque a sépare B de C, contient (strictement) C.

Si $D \in a^+$, alors a sépare D de C et, par $\mathsf{PG}_{\mathcal{A}}(A, C, D)$, d ne sépare pas A de C. Si $D \in a^-$, d ne sépare pas A de B (par symétrie avec le cas précédent). Finalement, d ne sépare pas à la fois A de B et A de C. Donc d ne sépare pas A de $\{B, C\}$.

Remarquons ensuite que *la relation* $I \subseteq X^3$ *définie par* «$I(A, B, C)$ *si* $\text{SUPP}(B)$ *sépare* $\{A, C\}$ *ou* $B = A$ *ou* $B = C$» *est une insertion sur* X : l'axiome P1 est assuré par l'hypothèse 1 de la proposition ; les axiomes P2 à P6 se vérifient facilement.

Pour finir, construisons *un élargissement de* $\mathcal{A}$ *à* X. Soit $\mathcal{T} = M_0 \dots M_{p-1}$ un tri de X selon I. Deux éléments successifs de $\mathcal{T}$ étant contigus (les points de X équivalents selon I sont confondus), ils ne sont séparés par aucune pseudodroite, et donc appartiennent à une même cellule. Pour tout $i < p - 2$ on note $[M_i M_{i+1}]$ un pseudosegment joignant ces deux points et entièrement contenu dans la cellule qui les supporte. (L'existence de ce pseudosegment est garantie par le lemme 5.) Soit $a \in \mathcal{A}$:

– si $a \in \bigcup_{0<i<p-1} \text{SUPP}(M_i)$, alors a sépare M_0 de M_1. On note a^+ le demi-plan défini par a qui contient M_0 et a^- le demi-plan opposé, qui contient donc M_{p-1} ;

– si $a \in \text{SUPP}(M_0)$, on note a^- le demi-plan défini par a qui contient M_{p-1} et a^+ le demi-plan opposé ;

– si $a \in \text{SUPP}(M_{p-1})$, on note a^+ le demi-plan défini par a qui contient M_0 et a^- le demi-plan opposé.

On a clairement $M_0 \in \bigcap_{a \in \mathcal{A}} a^+$ et $M_{p-1} \in \bigcap_{a \in \mathcal{A}} a^-$. Par conséquent, $\mathcal{C}_0 = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} a^+$ et $\mathcal{C}_{p-1} = \bigcap_{a \in \mathcal{A}} a^-$ sont deux cellules antipodales non vides, donc infinies.

Soit a_0 (resp. a_{p-1}) une demi-pseudodroite d'origine M_0 (resp. M_{p-1}) entièrement contenue dans $\mathcal{C}_0$ (resp. $\mathcal{C}_{p-1}$) (voir Lemme 4).

Alors $b = a_0 \cup \bigcup_{i<p-2} [M_i, M_{i+1}] \cup a_{p-1}$ est une pseudodroite (voir Lemme 6). De plus, par construction, b contient X et croise chaque $a \in \mathcal{A}$ une et une seule fois, au point $a \cap X$. Ainsi, $\mathcal{A} \cup b$ est l'élargissement cherché.

3. Axiomatisation.

Notations.

– Dans la suite, cb désigne un symbole de relation d'arité 4. Comme c'est l'usage, on désigne de la même façon ce symbole et son interprétation dans une structure donnée, lorsqu'aucune confusion n'en résulte.

– On note $\text{DDD}(x_1, \ldots, x_p)$ la formule $\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$ (les x_i sont «deux à deux distincts»). On note de plus $a \in \{x_1, \ldots, x_p\}$ la formule $\bigvee_i a = x_i$ et $a \notin \{x_1, \ldots, x_p\}$ sa négation.

– Soit $\mathcal{A}$ un arrangement de pseudodroites. On note $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb} \rangle$ la $\{\mathsf{cb}\}$-structure finie de domaine $\mathcal{A}$ qui interprète cb comme l'ensemble des quadruplets (a, x, y, z) de $\mathcal{A}^4$ tels que $a \notin \{x, y, z\}$ et $a \cap y \in [a \cap x, a \cap z]_a$ (où $[a \cap x, a \cap z]_a$ désigne le pseudosegment inclus dans a et d'extrémités $a \cap x$ et $a \cap z$) ;

– Soient a, x, y, z quatre pseudodroites deux à deux distinctes d'un arrangement $\mathcal{A}$. Alors $x, y, z \in \mathcal{A}$ sont dites en *position générale* si les points $x \cap y$, $x \cap z$ et $y \cap z$ sont deux à deux distincts (*i.e.* les trois pseudodroites ne sont pas concourantes). Par ailleurs, $x, y, z \in \mathcal{A}$ sont dites en *position générale par rapport à* a si les points $a \cap x$, $a \cap y$ et $a \cap z$ sont deux à deux distincts.

– Par définition d'une structure d'arrangement $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb} \rangle$, l'assertion $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb} \rangle \models \mathsf{cb}(a, x, y, x)$ signifie que les pseudodroites $a, x, y \in \mathcal{A}$ se coupent en un même point. Ceci justifie les notations $\text{POGE}(x, y, z)$ et $\text{POGE}_a(x, y, z)$ pour les formules respectives : $\text{DDD}(x, y, z) \wedge \neg\mathsf{cb}(x, y, z, y)$ et $\text{DDD}(a, x, y, z) \wedge \neg\mathsf{cb}(a, x, y, x) \wedge \neg\mathsf{cb}(a, x, z, x) \wedge \neg\mathsf{cb}(a, y, z, y)$, dont les interprétations dans $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb} \rangle$ sont, respectivement : «x, y, z sont en position générale» et «x, y, z sont en position générale par rapport à a»

– Si R est un symbole de relation d'arité 4, on dit que la $\{R\}$-structure $\langle D, R \rangle$ *représente* l'arrangement $\mathcal{A}$ si elle est isomorphe à la structure $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb} \rangle$. On note alors $\langle D, R \rangle \simeq \langle \mathcal{A}, \mathsf{cb} \rangle$.

Axiomatique. — On considère les formules suivantes :

$\mathfrak{A}x1$. $\mathsf{cb}(a,x,y,z) \to a \notin \{x,y,z\}$;

$\mathfrak{A}x2$. $a \notin \{x,y,z\} \to \mathsf{cb}(a,x,y,z) \vee \mathsf{cb}(a,x,z,y) \vee \mathsf{cb}(a,y,x,z)$;

$\mathfrak{A}x3$. $a \notin \{x,y,z\} \to \mathsf{cb}(a,x,x,y)$;

$\mathfrak{A}x4$. $\mathsf{cb}(a,x,y,z) \to \mathsf{cb}(a,z,y,x)$;

$\mathfrak{A}x5$. $\mathsf{cb}(a,x,y,x) \to \ [\ (\mathsf{cb}(a,z,x,t) \leftrightarrow \mathsf{cb}(a,z,y,t)) \wedge (\mathsf{cb}(a,z,t,x) \leftrightarrow \mathsf{cb}(a,z,t,y))\ ]$;

$\mathfrak{A}x6$. $\textsc{poge}_a(x,y,z) \wedge \mathsf{cb}(a,x,y,z) \to \neg\mathsf{cb}(a,y,x,z)$;

$\mathfrak{A}x7$. $\mathsf{cb}(a,x,y,z) \wedge \neg\mathsf{cb}(a,z,y,t)) \to \mathsf{cb}(a,x,y,t)$;

$\mathfrak{A}x8$. $\mathsf{cb}(x,y,z,y) \to \mathsf{cb}(z,y,x,y)$;

$\mathfrak{A}x9$. $\textsc{poge}(x,y,z) \to [\mathsf{cb}(x,y,a,z) \leftrightarrow (\mathsf{cb}(y,x,a,z) \oplus \mathsf{cb}(z,x,a,y))]$.

On note $\mathfrak{A}x$ la conjonction de ces formules.

Interprétation. — L'axiome $\mathfrak{A}x1$ singularise le rôle de la première composante des tuples de cb conformément à la définition de cb donnée plus haut.

Les axiomes $\mathfrak{A}x2, \ldots, \mathfrak{A}x7$ stipulent que pour chaque a, la relation ternaire $\mathsf{cb}(a,\cdot,\cdot,\cdot)$ est une insertion.

L'axiome $\mathfrak{A}x8$ est l'interprétation dans le langage $\{\mathsf{cb},=\}$ de la symétrie de l'incidence des pseudodroites : *si les pseudodroites y et z coupent x en un même point, alors x et z coupent y en un même point.*

L'axiome $\mathfrak{A}x9$ est une interprétation dans le langage $\{\mathsf{cb},=\}$ du théorème 7 : *la pseudodroite a «entre par le côté x» dans le triangle formé par les pseudodroites x,y,z (triangle non-dégénéré, grâce à l'hypothèse «*POGE*(x,y,z)») si et seulement si elle en ressort par l'un (et un seul) des deux autres côtés.*

Dans la suite, on notera de la même façon une relation R sur un ensemble D et chacune de ses restrictions à une partie de D. Par ailleurs, si R est d'arité k et si x est un élément de D, on notera $R[x]$ la relation $(k-1)$-aire sur D définie par : $R[x](x_2,\ldots,x_k)$ si et seulement si $R(x,x_2,\ldots,x_k)$.

THÉORÈME 9 (Validité et complétude). — *Soient D un ensemble fini et R une relation d'arité 4 sur D. Alors :*

$\langle D,R\rangle \models \mathfrak{A}x$ *si et seulement si il existe un arrangement $\mathcal{A}$ tel que*

$$\langle D,R\rangle \simeq \langle \mathcal{A},\mathsf{cb}\rangle.$$

Preuve.

$\boxed{\Leftarrow}$

Il s'agit de montrer que $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathfrak{A}x$ pour tout arrangement $\mathcal{A}$. Comme $\mathfrak{A}x$ est de la forme $\forall x_1 \ldots \forall x_5\, \phi$, où ϕ est sans quantificateur, on a $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathfrak{A}x$ si et seulement si $\langle \mathcal{A}', \mathsf{cb}\rangle \models \mathfrak{A}x$ pour chaque sous-arrangement $\mathcal{A}'$ de cardinal $\leqslant 5$. Mais chaque tel arrangement est rectifiable (voir [7]) et donc homéomorphe à un arrangement $\mathcal{A}''$ de droites. Ainsi $\langle \mathcal{A}', \mathsf{cb}\rangle \models \mathfrak{A}x$ ssi $\langle \mathcal{A}''\ , \mathsf{cb}\rangle \models \mathfrak{A}x$. Le fait que $\langle \mathcal{A}'', \mathsf{cb}\rangle \models \mathfrak{A}x$ procède alors de considérations de géométrie euclidienne élémentaires.

$\boxed{\Rightarrow}$

L'existence, pour chaque modèle fini de $\mathfrak{A}x$, d'un arrangement qui lui est isomorphe se montre par récurrence sur la taille n du modèle. Si $n \leqslant 4$, le résultat s'obtient en construisant «à la main», pour chaque modèle de $\mathfrak{A}x$ de cardinal n, l'arrangement correspondant.

Montrons que la validité de l'hypothèse de récurrence pour les modèles de taille $n \geqslant 4$ entraîne sa validité pour les modèles de taille $n+1$.

Soit donc $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle$ un modèle de $\mathfrak{A}x$ de cardinal $n+1$ dont on a distingué un élément α. Alors $\langle D, R\rangle$ est une sous-structure de $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle$ et satisfait $\mathfrak{A}x$ (qui, comme formule universelle, a une validité préservée par passage à une sous-structure). Soit alors $\mathcal{A}$ un arrangement isomorphe à $\langle D, R\rangle$. (L'existence de $\mathcal{A}$ est garantie par hypothèse de récurrence.)

Notons $a \mapsto \tilde{a}$ l'isomorphisme de D sur $\mathcal{A}$. Nous allons construire une pseudodroite $\tilde{\alpha}$ qui prolonge $\mathcal{A}$ en un arrangement $\mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}$ isomorphe à $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle$. Pour chaque $a \in D$, on désigne par T_a un tri de $D \cup \{\alpha\} \setminus \{a\}$ selon la relation $R[a]$, dont on sait qu'elle est une insertion sur $D \cup \{\alpha\} \setminus \{a\}$. La construction de $\tilde{\alpha}$ s'appuie sur l'analyse suivante :

Considérons un instant que l'on a effectivement construit une pseudodroite $\tilde{\alpha}$ telle que $\langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle$ est isomorphe à $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle$. Il est facile de voir que pour chaque $a \in D$, la position de $\tilde{\alpha}$ dans un tri de $\mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\} \setminus \{\tilde{a}\}$ suivant $\mathsf{cb}[\tilde{a}]$ doit coïncider avec la position de α dans un tri de $D \cup \{\alpha\} \setminus \{a\}$ suivant $R[a]$. Autrement dit, la position du point $\tilde{a} \cap \tilde{\alpha}$ relativement à celle des points $\tilde{b} \cap \tilde{a}$, $b \in D \setminus \{a\}$ doit correspondre à la position de α dans T_a. Ainsi, la position de α dans les tris T_a détermine la *trace* de la pseudodroite $\tilde{\alpha}$ à construire sur l'arrangement $\mathcal{A}$ initial, c'est-à-dire l'ensemble des points d'intersection $M_a = \tilde{a} \cap \tilde{\alpha}$, pour $a \in D$. Notre preuve fait la synthèse de ces considérations :

– Pour chaque $a \in D$, on construit un point M_a sur la pseudodroite $\tilde{a}$, à un endroit déterminé par la position de α dans le tri T_a.

– Puis on montre, à l'aide de la proposition 8, que $\mathcal{A}$ admet un élargissement à l'ensemble $\{M_a, a \in D\}$ ainsi construit.

– On vérifie enfin que le dit élargissement est isomorphe à $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle$.

Pour commencer, décrivons la construction des points M_a, $a \in D$. Pour chaque $a \in D$, on note donc T_a un tri de $D \cup \{\alpha\} \setminus \{a\}$ selon $R[a]$. Considérons un élément a de D particulier. Le tri T_a est de l'une des formes :

$$\alpha a_1 \ldots a_{n-1} \quad \text{ou} \quad a_1 \ldots a_{n-1}\alpha \quad \text{ou} \quad a_1 \ldots a_i \alpha a_{i+1} \ldots a_{n-1} \ (1 \leqslant i \leqslant n-2).$$

Dans tous les cas, la suite $a_1 \ldots a_{n-1}$ est un tri de $D \setminus \{a\}$ selon $R[a]$. Par conséquent, $\tilde{a}_1 \ldots \tilde{a}_{n-1}$ est un tri de $A \setminus \{\tilde{a}\}$ selon $\mathsf{cb}[\tilde{a}]$.

Notons $]-\infty, \tilde{a}_1[_a$ (resp. $]\tilde{a}_{n-1}, +\infty[_a$) l'intérieur de la demi-pseudodroite portée par $\tilde{a}$, d'origine $\tilde{a} \cap \tilde{a}_1$ (resp. $\tilde{a} \cap \tilde{a}_{n-1}$) et qui ne contient pas $\tilde{a} \cap \tilde{a}_{n-1}$ (resp. $\tilde{a} \cap \tilde{a}_1$). Alors, par construction :

– les demi-pseudodroites ouvertes $]-\infty, \tilde{a}_1[_a$ et $]\tilde{a}_{n-1}, +\infty[_a$ sont non vides;

– un pseudo-segment ouvert $]\tilde{a} \cap \tilde{a}_i, \tilde{a} \cap \tilde{a}_{i+1}[_a$ $(i = 1, \ldots, n-2)$ n'est vide que si a_i est équivalent à a_{i+1} pour $R[a]$.

De plus, ces ensembles ne sont coupés par aucune des pseudodroites $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{n-1}$.

DÉFINITION. — Pour chaque $a \in D$, on choisit maintenant un point M_a de la façon suivante :

$\mathfrak{D}1$. Si α est équivalent à l'un des a_i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on prend $M_a = \tilde{a} \cap \tilde{a}_i$.

Sinon :

$\mathfrak{D}2$. si T_a est de la forme $\alpha a_1 \ldots a_{n-1}$, on prend pour M_a l'un quelconque des points de la demi-pseudodroite ouverte $]-\infty, \tilde{a}_1[_a$;

$\mathfrak{D}3$. si T_a est de la forme $a_1 \ldots a_n \alpha$, alors on prend M_a dans l'intérieur de la demi-pseudodroite ouverte $]\tilde{a}_{n-1}, +\infty[_a$;

$\mathfrak{D}4$. si T_a est de la forme $a_1 \ldots a_i \alpha a_{i+1} \ldots a_{n-1}$, alors $\tilde{a}_i$ et $\tilde{a}_{i+1}$ sont non équivalentes pour $\mathsf{cb}[\tilde{a}]$ (sinon a_i et a_{i+1}, et donc α, le seraient pour $R[a]$) et le pseudo-segment ouvert $]\tilde{a} \cap \tilde{a}_i, \tilde{a} \cap \tilde{a}_{i+1}[_a$ est non vide. On prend M_a dans $]\tilde{a} \cap \tilde{a}_i, \tilde{a} \cap \tilde{a}_{i+1}[_a$.

Nous avons dû invoquer le tri T_a, c'est-à-dire l'ordonnancement de *tous* les éléments de $D \cup \{\alpha\}$ selon $R[a]$, pour caractériser rigoureusement le positionnement de M_a sur $\tilde{a}$. Par la suite nous nous intéresserons essentiellement aux relations que cette définition induit entre le positionnement de *trois* éléments quelconques de $D \cup \{\alpha\}$ selon $R[a]$ et le positionnement sur $\mathcal{A}$ de points du plan associés à ces éléments.

Plus précisément, nous utiliserons à plusieurs reprises les équivalences suivantes qui sont, pour l'essentiel, des conséquences de la définition des M_a, $a \in D$. Soient $a, b, c, d \in D$ deux à deux distincts :

$\mathfrak{C}1$. $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(a,b,c,d)$ ssi $\mathsf{cb}(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d})$ ssi $\tilde{a} \cap \tilde{c} \in \,]\tilde{a} \cap \tilde{b}, \tilde{a} \cap \tilde{d}[_a$;

$\mathfrak{C}2$. $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(a,\alpha,b,\alpha)$ ssi $M_a = \tilde{a} \cap \tilde{b}$

$\mathfrak{C}3$. $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(a,\alpha,b,c)$ ssi $\tilde{a} \cap \tilde{b} \in \,]M_a, \tilde{a} \cap \tilde{c}[_a$;

$\mathfrak{C}4$. $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(a,b,\alpha,c)$ ssi $M_a \in \,]\tilde{a} \cap \tilde{b}, \tilde{a} \cap \tilde{c}[_a$;

$\mathfrak{C}5$. $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(\alpha,a,b,c)$ ssi $\tilde{a} \cap \tilde{b} \in \,]M_a, \tilde{a} \cap \tilde{c}[_a \oplus \tilde{c} \cap \tilde{b} \in \,]M_c, \tilde{a} \cap \tilde{c}[_c$.

$\mathfrak{C}1$ est une conséquence directe de l'isomorphisme $\langle D, R\rangle \to \langle A, \mathsf{cb}\rangle$ et de la définition de cb ;

$\mathfrak{C}2$, $\mathfrak{C}3$ et $\mathfrak{C}4$ découlent facilement de $\mathfrak{D}1$, $\mathfrak{D}2$ et $\mathfrak{D}4$ (les détails sont laissés au lecteur).

Enfin $\mathfrak{C}5$ se déduit des assertions $\mathfrak{C}3$ et $\mathfrak{C}4$ d'une part, et de l'axiome $\mathfrak{A}x9$ d'autre part.

L'ensemble $X = \{M_a,\ a \in D\}$ ainsi construit est complètement réparti sur $\mathcal{A}$. Par construction, une pseudodroite quelconque $b \in \mathcal{A}$ contient au moins un point de X, à savoir M_b. Montrons qu'elle n'en contient pas plus.

Supposons qu'il existe $a \in D$, $a \neq b$, tel que $M_a \in \tilde{b}$. Alors $M_a = \tilde{a} \cap \tilde{b}$ (puisque par définition, $M_a \in \tilde{a}$). Donc $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(a,\alpha,b,\alpha)$ (par $\mathfrak{C}2$). Mais alors, par $\mathfrak{A}x8$: $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(b,\alpha,a,\alpha)$ et donc, toujours par $\mathfrak{C}2$: $M_b = \tilde{b} \cap \tilde{a}$. D'où l'égalité $M_a = M_b$ recherchée.

L'arrangement $\mathcal{A}$ admet un élargissement à X. Du fait de la proposition 8, il suffit de prouver, pour tous $A, B, C \in X$: $\mathsf{PG}_{\mathcal{A}}(A,B,C)$. Ou encore, compte tenu de la définition de X : pour tous $a, b, c \in D$ deux à deux distincts :

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &\textsc{supp}(M_a) \text{ sépare } \{M_b, M_c\} \oplus \textsc{supp}(M_b) \text{ sépare } \{M_a, M_c\} \\ &\qquad \oplus \textsc{supp}(M_c) \text{ sépare } \{M_a, M_b\}. \end{aligned}$$

Constatons d'abord qu'une pseudodroite $x \in \mathcal{A}$ sépare deux points du plan M et N si et seulement si, pour un point quelconque P, distinct de M et de N : «x sépare $\{M, P\}$ et ne sépare pas $\{N, P\}$» ou «x ne sépare pas $\{M, P\}$ et sépare $\{N, P\}$». Autrement dit : x sépare $\{M, N\}$ ssi x sépare $\{M, P\} \oplus x$ sépare $\{N, P\}$. De plus, si M et N sont tous deux sur une pseudodroite $y \in \mathcal{A}$, on a : x sépare $\{M, N\}$ ssi $x \cap y \in \,]M, N[_y$.

De ces remarques on tire, pour tout triplet $\{a, b, c\}$ d'éléments deux à deux distincts de D :

$$\tilde{a} \text{ sépare } \{M_b, M_c\}$$
$$\text{ssi}$$
$$\tilde{a} \text{ sépare } \{M_b, \tilde{b} \cap \tilde{c}\} \;\oplus\; \tilde{a} \text{ sépare } \{M_c, \tilde{b} \cap \tilde{c}\}$$
$$\text{ssi}$$
$$\tilde{a} \cap \tilde{b} \in \,]M_b, \tilde{b} \cap \tilde{c}[_b \;\oplus\; \tilde{a} \cap \tilde{c} \in \,]M_c, \tilde{b} \cap \tilde{c}[_c.$$

Et donc, grâce à $\mathfrak{C}5$:

$$\tilde{a} \text{ sépare } \{M_b, M_c\} \text{ ssi } \langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(\alpha, b, a, c).$$

Mais par ailleurs, les axiomes $\mathfrak{A}x2$ et $\mathfrak{A}x6$ entraînent, pour tous $a, b, c \in D$ deux à deux distincts :

$$R(\alpha, b, a, c) \oplus R(\alpha, a, b, c) \oplus R(\alpha, a, c, b).$$

Par conséquent, avec les mêmes hypothèses sur a, b et c :

$$(3) \qquad \tilde{a} \text{ sépare } \{M_b, M_c\} \;\oplus\; \tilde{b} \text{ sépare } \{M_a, M_c\} \;\oplus\; \tilde{c} \text{ sépare } \{M_a, M_b\}.$$

Pour obtenir la conclusion (2) recherchée, il ne reste plus qu'à établir :

$$\tilde{a} \text{ sépare } \{M_b, M_c\} \text{ ssi } \textsc{supp}(M_a) \text{ sépare } \{M_b, M_c\}.$$

La partie «condition suffisante» est triviale, puisque $a \in \textsc{supp}(M_a)$. Prouvons la réciproque : soit donc $\tilde{d} \in \textsc{supp}(M_a)$. Nous avons vu, en prouvant que X est complètement distribué, que l'assertion $M_a \in \tilde{d}$ entraîne : $M_d = M_a$. De cette égalité d'une part, de l'hypothèse «$\tilde{a}$ sépare $\{M_b, M_c\}$» d'autre part, et de (3) enfin, on tire : $\tilde{b}$ ne sépare pas $\{M_d, M_c\}$ et $\tilde{c}$ ne sépare pas $\{M_d, M_b\}$. D'où, toujours par (3) : $\tilde{d}$ sépare $\{M_b, M_c\}$.

Autrement dit, tout élément de $\textsc{supp}(M_a)$ sépare $\{M_b, M_c\}$. C'est le résultat cherché.

La proposition 8 permet maintenant d'élargir l'arrangement $\mathcal{A}$ à l'ensemble X. Notons $\hat{\alpha}$ une pseudodroite qui réalise cet élargissement et étendons l'isomorphisme $\sim$: $D \to \mathcal{A}$ en une bijection de $D \cup \{\alpha\}$ sur $\mathcal{A} \cup \{\hat{\alpha}\}$, en rajoutant le couple $(\alpha, \hat{\alpha})$ dans son graphe. On peut désormais appeler $\tilde{\alpha}$ la pseudodroite $\hat{\alpha}$.

Nous allons prouver que cette nouvelle application est un isomorphisme de $D \cup \{\alpha\}$ sur $\mathcal{A} \cup \{\hat{\alpha}\}$, ce qui concluera la preuve du théorème.

Il s'agit donc d'établir l'équivalence :

$$\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models R(a,b,c,d) \text{ ssi } \langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$$

pour tous $a, b, c, d \in D \cup \{\alpha\}$.

Si $a, b, c, d \neq \alpha$, le résultat est acquis, puisque la restriction de $\tilde{}$ à D est un isomorphisme.

Si $a = \alpha$ et $\alpha \in \{b, c, d\}$, alors $\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle \models \neg R(a,b,c,d)$ et $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb}\rangle \models \neg\mathsf{cb}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$ puisque ces deux structures satisfont $\mathfrak{A}x1$. Ce qui valide l'équivalence à prouver.

Supposons donc $a, b, c \in D$. Les équivalences :

$$\begin{aligned}
\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle &\models R(a,\alpha,b,\alpha) \text{ ssi } \langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde{a}, \tilde{\alpha}, \tilde{b}, \tilde{\alpha}),\\
\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle &\models R(a,\alpha,b,c) \text{ ssi } \langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde{a}, \tilde{\alpha}, \tilde{b}, \tilde{c}),\\
\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle &\models R(a,b,\alpha,c) \text{ ssi } \langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\alpha}, \tilde{c}),
\end{aligned}$$

découlent

– des conséquences $\mathfrak{C}2$, $\mathfrak{C}3$, $\mathfrak{C}4$ de la définition des points M_a $(a \in D)$;

– du fait, clair par construction, que pour chaque $a \in D$: $M_a = \tilde{a} \cap \tilde{\alpha}$;

– de l'équivalence, voulue par la définiton de cb : pour tous $x, y, z, t \in \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}$ on a :

$$\langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(x,y,z,t) \leftrightarrow x \cap z \in \,]a \cap y, a \cap t[_x.$$

Les équivalences restant à prouver :

$$\begin{aligned}
\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle &\models R(a,b,\alpha,b) \text{ ssi } \langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{\alpha}, \tilde{b}),\\
\langle D \cup \{\alpha\}, R\rangle &\models R(a,b,c,\alpha) \text{ ssi } \langle \mathcal{A} \cup \{\tilde{\alpha}\}, \mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{\alpha})
\end{aligned}$$

se déduisent des précédentes grâce aux propriétés de symétrie propres aux modèles de $\mathfrak{A}x$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\langle D\cup\{\alpha\},R\rangle \models R(a,b,\alpha,b) \quad &\text{ssi} \quad \langle D\cup\{\alpha\},R\rangle \models R(a,\alpha,b,\alpha) \\
&\qquad \text{(par } \mathfrak{A}x8 \text{ et } \mathfrak{A}x5\text{)} \\
&\text{ssi} \quad \langle \mathcal{A}\cup\{\tilde\alpha\},\mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde a,\tilde\alpha,\tilde b,\tilde\alpha) \\
&\qquad \text{(grâce aux équivalences précédentes)} \\
&\text{ssi} \quad \langle \mathcal{A}\cup\{\tilde\alpha\},\mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde a,\tilde b,\tilde\alpha,\tilde b) \\
&\qquad \text{(par } \mathfrak{A}x8 \text{ et } \mathfrak{A}x5\text{).}
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\langle D\cup\{\alpha\},R\rangle \models R(a,b,c,\alpha) \quad &\text{ssi} \quad \langle D\cup\{\alpha\},R\rangle \models R(a,\alpha,c,b) \\
&\qquad \text{(par } \mathfrak{A}x4\text{)} \\
&\text{ssi} \quad \langle \mathcal{A}\cup\{\tilde\alpha\},\mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde a,\tilde\alpha,\tilde c,\tilde b) \\
&\qquad \text{(grâce aux équivalences précédentes)} \\
&\text{ssi} \quad \langle \mathcal{A}\cup\{\tilde\alpha\},\mathsf{cb}\rangle \models \mathsf{cb}(\tilde a,\tilde b,\tilde c,\tilde\alpha) \\
&\qquad \text{(par } \mathfrak{A}x4\text{).}
\end{aligned}$$

Ceci clôt la démonstration.

Conclusion.

Cet article n'est qu'une première étape ; nous prévoyons de poursuivre dans les directions suivantes :

1. Détermination d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un arrangement $\mathcal{A}$ puisse être étendu au moyen d'une pseudodroite contenant un ensemble X de points du plan, sans imposer les conditions de la section 2.

2. Détermination du nombre minimum de pseudodroites à ajouter à $\mathcal{A}$ pour l'élargir en un arrangement qui recouvre un ensemble X donné, et analyse de la complexité de ce problème.

3. Nous conjecturons que notre axiomatisation est valide pour les arrangement infinis.

4. On peut dessiner des graphes dans le plan en imposant que leurs arcs soient des segments de pseudodroites d'un arrangement donné $\mathcal{A}$. Que peut-on dire de l'ensemble des graphes représentables sur $\mathcal{A}$ fixé ?

5. Si on fixe une orientation sur chaque pseudodroite, on obtient un arrangement orienté. Au lieu d'utiliser une relation 4-aire pour le décrire, on peut utiliser une relation ternaire disant que l'intersection de b et de a est, sur a, «avant» celle de c et de a relativement à l'orientation fixée de a. Il

serait intéressant de déterminer une axiomatisation complète des structures représentant ainsi les arrangements orientés, et d'examiner comment on peut définir par des formules logiques une orientation d'un arrangement donné $\mathcal{A}$ représenté par $\langle \mathcal{A}, \mathsf{cb} \rangle$.

Remerciements. Nous tenons à remercier le rapporteur anonyme de cet article pour ses nombreuses corrections et suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S.A. ADELEKE and P.M. NEUMANN, Relations related to betweenness : their structure and automorphisms, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 623 (1998).

[2] A. BJÖRNER, M. LAS VERGNAS, B. STURMFELS, N. WHITE, and G. ZIEGLER, Oriented matroids, Encyclopedia of mathematics and its applications, Vol. 46, Cambridge University Press, 1993.

[3] J.E. GOODMAN, Proof of a conjecture of Burr, Grunbaum and Sloane, Discrete Mathematics, 32 (1980), 27-35.

[4] GOODMAN, Pseudoline arrangements, In J.E. Goodman and J. O'Rourke, editors, Hanbook of Discrete and Computational Geometry, pages 83–109. CRC Press LLC, 1997.

[5] J.E. GOODMAN and R. POLLACK, Semispaces of configurations, cell complexes of arrangements, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 37 (1984), 257–293.

[6] J.E. GOODMAN, R. POLLACK, R. WENGER, and T. ZAMFIRESCU, Arrangements and topological planes, Amer. Math. Monthly, 101 (1994), 866–878.

[7] B. GRUNBAUM, Arrangements and spreads. In CBMS Regional Conference, volume 10 of Series in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1972.

[8] L. SÉGOUFIN and V. VIANU, Spacial databases via topological invariants. Proc. ACM Symp. on Principles of Databases Systems, 1998 (version finale à paraître au J. Comput. Syst. Sciences).

[9] P.W. SHOR, Stretchability of pseudolines is NP-hard. In Applied geometry and discrete mathematics, The Victor Klee Festschrift, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, Vol. 4, 1991, 531-554.

B. COURCELLE,
Université Bordeaux 1
LaBRI
351 cours de la Libération
33405 Talence Cedex (France).
courcell@labri.u-bordeaux.fr

F. OLIVE,
Université de Provence
LMI
CMI - 39 rue Joliot-Curie
F-13453 Marseille Cedex 13 (France).
olive@gyptis.univ-mrs.fr