Annales de l'institut Fourier

Charles Ehresmann

Catégories ordonnées, Holonomie et Cohomologie

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 1 (1964), p. 205-268

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_1_205_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 1 (1964), 205-268.

CATÉGORIES ORDONNÉES, HOLONOMIE ET COHOMOLOGIE

par **Charles EHRESMANN** (Paris)

Introduction.

Le but de cet article était de développer une théorie de la cohomologie d'une catégorie ordonnée à valeur dans une catégorie et de l'appliquer au cas d'un espace feuilleté. Mais comme l'exposé complet de cette théorie s'est révélé trop long, il a fallu remanier le plan, de sorte que seules les cohomologies d'ordre 0 et 1 sont considérées ici.

Deux possibilités s'offrent pour définir la cohomologie dans le cas considéré : 1) Généraliser les méthodes utilisées dans le cas de la cohomologie pour un faisceau, en définissant les classes de cohomologie par un procédé de récurrence à partir des classes d'ordre 0. Il faut pour cela munir la classe de cohomologie d'un certain ordre d'une structure de même espèce que la structure initiale. Cela est possible en partant d'une catégorie quasi-inductive, à condition d'utiliser une nouvelle catégorie, à savoir celle des fusées. C'est la construction de cette catégorie des fusées, qui est très longue, qu'il nous a fallu supprimer et qui sera publiée ultérieurement. 2) Généraliser la construction de la cohomologie d'un groupe, à l'aide des foncteurs Ext^n. Le n° 4 indique rapidement comment construire ainsi la cohomologie d'ordre 1. Nous montrerons ailleurs que cette construction peut aussi se faire pour les ordres supérieurs.

Comme ces deux méthodes, pour les cohomologies d'ordre supérieur, ne s'appliquent que si l'on part d'une catégorie quasi-inductive, le premier problème est de plonger une catégorie ordonnée dans une catégorie quasi-inductive. Nous montrons que la catégorie des atlas réguliers résout cette question pour les groupoïdes ordonnés réguliers. Dans le cas général, il faut utiliser des catégories quotient de la catégorie des fusées et ceci se trouvera dans la suite du présent article.

Dans les n^{os} 1 et 2 les résultats sur les atlas obtenus dans le cas des groupoïdes sous-préinductifs [1] sont étendus au cas des catégories et des catégories ordonnées régulières. Dans le n° 3 est construit le groupoïde d'holonomie complet associé à un feuilletage localement simple, qui est un quotient d'un sous-groupoïde du groupoïde des atlas du groupoïde d'holonomie. Le n° 4 est l'étude de la cohomologie d'ordre 0 d'une espèce de structures (ordonnée). Le n° 5 est consacré à la cohomologie d'ordre 1 d'une catégorie munie d'une catégorie ordonnée d'opérateurs, ce qui généralise les résultats connus dans le cas des groupes. Enfin quelques applications aux structures feuilletées sont simplement esquissées (ces questions seront reprises ultérieurement).

Nous reprenons les notations de [3] : une catégorie sur la classe C est désignée par $C^{\cdot}$, le composé de f et g étant noté $g.f$. La classe des couples composables est $C^{\cdot} * C^{\cdot}$, la classe des unités $C_0^{\cdot}$, le groupoïde des éléments inversibles $C_{\gamma}^{\cdot}$, les applications source et but sont α et β, la loi de composition est notée $\times$. Le mot foncteur signifie foncteur covariant. Si $A \subset C$ et $B \subset C$, on désigne par $A.B$ la classe des $a.b$, où $a \in A$, $b \in B$, par A_0 la classe $A \cap C_0^{\cdot}$.

1. — Atlas dans une catégorie.

Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie.

Définition 1. — *Soit* $\mathcal{B}$ *un sous-groupoïde de* $\mathcal{C}^{\cdot}$. *On appelle* atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite (*resp.* à gauche) avec $\mathcal{B}$ *une sous-classe* F *de* $\mathcal{C}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\mathcal{B}_0 \subset \alpha(F)$ *et* $F.\mathcal{B} = F$ (*resp.* $\mathcal{B}_0 \subset \beta(F)$ *et* $\mathcal{B}.F = F$).

2) *Pour tout* $f \in F$ *et tout* $f' \in F$ *tels que* $\beta(f) = \beta(f')$ (*resp.* $\alpha(f) = \alpha(f')$), *il existe* $g \in \mathcal{B}$ *tel que* $f = f'.g$ (*resp.* $f = g.f'$).

Si F est un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite avec $\mathcal{B}$, on a $\alpha(F) = \mathcal{B}_0$, puisque d'après la condition 2 pour tout $f \in F$ il existe $g \in \mathcal{B}$ tel que $f.g = f$.

Remarque. — Si tous les éléments de F sont des monomorphismes (resp. des épimorphismes), il existe un et un seul $g \in \mathcal{B}$ tel que $f = f'.g$ (resp. $f = g.f'$) si F est un atlas compatible à droite (resp. à gauche) avec $\mathcal{B}$.

Proposition 1. — *Soit* C *une sous-classe de* $\mathcal{C}$; *soit* $\mathcal{B}$ *un sous-groupoïde de* $\mathcal{C}^\cdot$ *tel que* $\mathcal{B}$ *soit la composante de* $\alpha(C)$ *dans* $\mathcal{B}$; *si* C *vérifie la condition* 2 *de la définition* 1 (dans laquelle on remplace F par C), *alors* $C.\mathcal{B}$ *est un atlas compatible à droite avec* $\mathcal{B}$.

En effet, on a : $(C.\mathcal{B}).\mathcal{B} = C.\mathcal{B}$. Supposons $f_i.g_i \in C.\mathcal{B}$, où $i = 1,2$, $g_i \in \mathcal{B}$, $f_i \in C$ et $\beta(f_1) = \beta(f_2)$. Il existe $g \in \mathcal{B}$ tel que $f_1 = f_2.g$ et on trouve : $f_1.g_1 = f_2.g_2.(g_2^{-1}.g.g_1)$, donc $C.\mathcal{B}$ est compatible à droite avec $\mathcal{B}$.

Proposition 2. — *Soit* F *un atlas de* $\mathcal{C}^\cdot$ *compatible à droite avec* $\mathcal{B}$ *et à gauche avec* $\mathcal{B}'$. *Si* $\tilde{\mathcal{B}}$ (*resp.* $\tilde{\mathcal{B}}'$) *est un sous-groupoïde de* $\mathcal{C}$ *contenant* $\mathcal{B}$ (*resp.* $\mathcal{B}'$) *comme sous-groupoïde plein et si* A (*resp.* A') *est la composante de* $\mathcal{B}$ *dans* $\tilde{\mathcal{B}}$ (*resp. de* $\mathcal{B}'$ *dans* $\tilde{\mathcal{B}}'$), *alors* $A'.F.A$ *est un atlas compatible à droite avec* A *et à gauche avec* A'.

Démonstration. — Soit $e \in A_0$; il existe $g \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que $\alpha(g) = e$ et $\beta(g) \in \mathcal{B}_0$. Soit $f \in F$ tel que $\alpha(f) = \beta(g)$; on a $f.g \in A'.F.A$, d'où $A_0 \subset \alpha(A'.F.A)$. On trouve évidemment :

$$(A'.F.A).A = A'.F.A \qquad \text{et} \qquad A'.(A'.F.A) = A'.F.A.$$

Soient $g_1'.f_1.g_1 \in A'.F.A$ et $g_2'.f_2.g_2 \in A'.F.A$, où $g_i \in A$, $f_i \in F$ et $g_i' \in A'$, tels que $\beta(g_1') = \beta(g_2')$. Comme $\mathcal{B}'$ est plein dans $\tilde{\mathcal{B}}'$, on a :

$$g_1'^{-1}.g_2' \in \mathcal{B}', \qquad \text{d'où} \qquad g_1'^{-1}.g_2'.f_2 \in \mathcal{B}'.F = F;$$

F étant compatible à droite avec $\mathcal{B}$, il existe $g \in \mathcal{B}$ tel que :

$$f_1.g = g_1'^{-1}.g_2'.f_2;$$

posons $\bar{g} = g_1^{-1}.g.g_2$; on obtient : $\bar{g} \in A$ et :

$$(g_1'.f_1.g_1).\bar{g} = g_1.f_1.g_1.g_1^{-1}.g.g_2 = g_1'.g_1'^{-1}.g_2'.f_2.g_2 = g_2'.f_2.g_2.$$

Donc $A'.F.A$ est compatible à droite avec A. On montre de même que $A'.F.A$ est compatible à gauche avec A'.

Proposition 3. — *Soit* F *un atlas de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *compatible à droite avec* $\mathcal{B}$ *et à gauche avec* $\mathcal{B}'$. *Soit* B *une sous-classe de* F. *Soient* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}_1$ *les sous-groupoïdes pleins de* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *respectivement ayant* $\alpha(\mathrm{B})$ *et* $\beta(\mathrm{B})$ *pour classes d'unités. Alors* $\mathrm{F}' = \mathcal{B}_1'.\mathrm{B}.\mathcal{B}_1$ *est un atlas de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *compatible à droite avec* $\mathcal{B}_1$ *et à gauche avec* $\mathcal{B}_1'$.

Démonstration. — On a évidemment

$$\mathrm{F}'.\mathcal{B}_1 = \mathrm{F}' \qquad \text{et} \qquad \alpha(\mathcal{B}_1) = \alpha(\mathrm{B}) \subset \alpha(\mathrm{F}').$$

Soient $g_i'.f_i.g_i \in \mathrm{F}'$, où $i = 1{,}2$, $g_i \in \mathcal{B}_1$, $g_i' \in \mathcal{B}_1'$, $f_i \in \mathrm{B}$ et $\beta(g_1') = \beta(g_2')$. Comme $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$, il existe $g \in \mathcal{B}$ tel que

$$g_2'.f_2.g_2 = (g_1'.f_1.g_1).g;$$

les relations :

$$\alpha(g) = \alpha(g_2) \in \alpha(\mathrm{B}) \qquad \text{et} \qquad \beta(g) = \alpha(g_1) \in \alpha(\mathrm{B})$$

entraînent $g \in \mathcal{B}_1$. Par suite F' est un atlas compatible à droite avec $\mathcal{B}_1$. On montre de même que F' est compatible à gauche avec $\mathcal{B}_1'$.

Corollaire. — *Avec les hypothèses de la proposition* 3, *si* A *désigne la composante de* $\alpha(\mathrm{B})$ *dans* $\mathcal{B}$ *et* A' *la composante de* $\beta(\mathrm{B})$ *dans* $\mathcal{B}'$, *alors* A'.B.A *est un atlas compatible à droite avec* A *et à gauche avec* A'.

En effet, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ sont des sous-groupoïdes pleins de A et A' respectivement et le corollaire résulte de la proposition 2.

Remarque. — Avec les hypothèses de la proposition 3 et de son corollaire, les atlas $\mathcal{B}_1.\mathrm{B}.\mathcal{B}_1$ et A'.B.A sont resp. le plus petit atlas et le plus grand atlas contenus dans F et contenant B.

Théorème 1. — *Soit* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *un groupoïde. Pour qu'une sous-classe* F *de* $\mathcal{C}$ *soit un atlas compatible à droite avec un sous-groupoïde* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{C}^{\cdot}$, *il faut et il suffit que l'on ait :* $\mathrm{F}.(\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}) = \mathrm{F}$; *dans ce cas,* $\mathcal{B}$ *est égal à* $\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$ *et* F *est aussi compatible à gauche avec* $\mathrm{F}.\mathrm{F}^{-1}$.

Démonstration. — Soit F un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite avec $\mathcal{B}$. Les conditions $f \in \mathrm{F}$, $f' \in \mathrm{F}$ et $\beta(f) = \beta(f')$ entraînent :

$$f = f'.(f'^{-1}.f) \qquad \text{et} \qquad f = f'.g, \qquad \text{où} \qquad g \in \mathcal{B},$$

d'où

$$f'^{-1}.f = g \in \mathcal{B}.$$

Soit $g' \in \mathcal{B}$; comme $\alpha(g') \in \alpha(\mathrm{F})$, il existe $f'' \in \mathrm{F}$ tel que $\alpha(f'') = \beta(g')$; par suite $f''.g' \in \mathrm{F}$ et $g' = f''^{-1}.(f''.g') \in \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$. Ainsi on trouve $\mathcal{B} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$. — Inversement, supposons que F soit une sous-classe de $\mathcal{C}$ vérifiant la condition : $\mathrm{F} = \mathrm{F}.(\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F})$. La relation :

$$(\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}).(\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}) = \mathrm{F}^{-1}.(\mathrm{F}.\mathrm{F}^{-1}).\mathrm{F} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$$

montre que $\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$ est un groupoïde tel que $\alpha(\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}) = \alpha(\mathrm{F})$; la condition 2 de la définition 1 est évidemment vérifiée par F. Donc F est un atlas compatible à droite avec $\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$. De plus comme

$$(\mathrm{F}.\mathrm{F}^{-1}).\mathrm{F} = \mathrm{F}.(\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}) = \mathrm{F},$$

F est aussi un atlas compatible à gauche avec $\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$.

Corollaire. — *Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie. Si* F *est un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ contenu dans $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ et compatible à droite avec un sous-groupoïde $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$, alors* F *est un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ compatible à droite avec* $\mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$ *et on a* $\mathcal{B} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$.

Remarque. — Le théorème 1 signifie que, si $\mathcal{C}^{\cdot}$ est un groupoïde, F est un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ si, et seulement si, la classe réunion de F et de 0 est un atlas complet [1] du groupoïde obtenu en munissant le groupoïde somme de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et d'une unité 0 de la relation d'ordre définie par :

$$f' < f \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f \quad \text{ou si} \quad f' = 0.$$

Soit F un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite avec chacun des groupoïdes $\mathcal{B}_i$, où $i \in \mathrm{I}$. Alors F est aussi compatible à droite avec le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$ engendré par les sous-groupoïdes $\mathcal{B}_i$. Le plus grand sous-groupoïde $a(\mathrm{F})$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$ tel que F soit compatible à droite avec $a(\mathrm{F})$ est formé des $g \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $\mathrm{F}.g \subset \mathrm{F}$.

Définition 2. — *On appelle* atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ *une sous-classe* F *de $\mathcal{C}$ telle que* F *soit un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite avec le sous-groupoïde $a(\mathrm{F})$ de $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ formé des $g \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que* $\mathrm{F}.g \subset \mathrm{F}$, *et compatible à gauche avec le sous-groupoïde $b(\mathrm{F})$ de $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ formé des g' tels que* $g'.\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$.

Pour que F soit un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées, où $f \in \mathrm{F}$ et $f' \in \mathrm{F}$:

1) Si $\beta(f) = \beta(f')$, il existe $g \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tel que $F.g \subset F$ et $f.g = f'$;

2) Si $\alpha(f) = \alpha(f')$, il existe $g' \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tel que $g'.F \subset F$ et $g'.f = f$.

Il en résulte qu'un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite avec $\mathcal{B}$ et à gauche avec $\mathcal{B}'$ est un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$. D'après le théorème 1, si $\mathcal{C}^{\cdot}$ est un groupoïde et si F est un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite avec $\mathcal{B}$ et à gauche avec $\mathcal{B}'$, on a $\mathcal{B} = a(F)$ et $\mathcal{B}' = b(F)$ et F est simplement un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Si $\mathcal{C}^{\cdot}$ n'est pas un groupoïde et si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille d'atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$, alors la classe intersection des F_i peut ne pas être un atlas de $\mathcal{C}$.

Soit $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ la classe de tous les triplets $(\mathcal{B}', A, \mathcal{B})$ tels que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soient des sous-groupoïdes de $\mathcal{C}^{\cdot}$ et A un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ compatible à droite avec $\mathcal{B}$ et à gauche avec $\mathcal{B}'$.

Théorème 2. — *$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ est une catégorie pour la loi de composition définie par:* $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'_1).(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$ *si, et seulement si,* $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$; *le groupoïde des éléments inversibles de* $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ *est le groupoïde* $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma})$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{B}$ un sous-groupoïde de $\mathcal{C}^{\cdot}$; on a: $\mathcal{B}.\mathcal{B} = \mathcal{B}$; les conditions $g \in \mathcal{B}$, $g' \in \mathcal{B}$, $\beta(g) = \beta(g')$ entraînent $g^{-1}.g' \in \mathcal{B}$; par suite $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$. On a:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}').(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

car F est compatible à droite avec $\mathcal{B}$ et à gauche avec $\mathcal{B}'$. Ainsi $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ admet $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ respectivement pour unités à droite et à gauche dans $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$. Soient

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot}) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot});$$

on a:

$$\mathcal{B}''.(F'.F) = (\mathcal{B}''.F').F = F'.F = (F'.F).\mathcal{B}.$$

Supposons $f'.f \in F'.F$, $\bar{f}'.\bar{f} \in F'.F$ et $\beta(f') = \beta(\bar{f}')$; il existe $g' \in \mathcal{B}'$ tel que $f' = \bar{f}'.g'$; comme $g'.f \in \mathcal{B}'.F = F$ et $\alpha(\bar{f}') = \alpha(g') = \beta(f)$, il existe $g \in \mathcal{B}_{\gamma}$ tel que $g'.f = \bar{f}.g$; on en déduit:

$$f'.f = \bar{f}'.g'.f = \bar{f}'.\bar{f}.g;$$

donc $F'.F$ est un atlas compatible à droite avec $\mathcal{B}$; de même on voit que $F'.F$ est compatible à gauche avec $\mathcal{B}''$, d'où

$$(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot}).$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ est une catégorie, dont la classe des unités sera identifiée à la classe des sous-groupoïdes de $\mathcal{C}^{\cdot}$, en identifiant $(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B}$.

— Soit $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ tel que $\mathrm{F} \subset \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$. On a :

$$\mathrm{F}^{-1}.\mathcal{B}' = (\mathcal{B}'.\mathrm{F})^{-1} = \mathrm{F}^{-1} = \mathcal{B}.\mathrm{F}^{-1}$$

et F^{-1} est un atlas compatible à droite avec $\mathcal{B}'$, à gauche avec $\mathcal{B}$. Comme d'après le corollaire du théorème 1, on a $\mathcal{B} = \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}$ et $\mathcal{B}' = \mathrm{F}.\mathrm{F}^{-1}$, on obtient :

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}).(\mathcal{B}, \mathrm{F}^{-1}, \mathcal{B}') = (\mathcal{B}', \mathrm{F}.\mathrm{F}^{-1}, \mathcal{B}') = (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}')$$

$$\text{et} \quad (\mathcal{B}, \mathrm{F}^{-1}, \mathcal{B}').(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}, \mathrm{F}^{-1}.\mathrm{F}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}).$$

Il en résulte que $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ admet $(\mathcal{B}, \mathrm{F}^{-1}, \mathcal{B}')$ pour inverse dans $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$. Inversement, supposons que $(\mathcal{B}, \mathrm{F}', \mathcal{B}')$ soit l'inverse de $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ dans $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$. Soit $e \in \alpha(\mathrm{F})$; comme $\mathrm{F}'.\mathrm{F} = \mathcal{B}$, il existe $f \in \mathrm{F}$ et $f' \in \mathrm{F}'$ tels que $e = f'.f = \alpha(f)$; puisque $\mathrm{F}.\mathrm{F}' = \mathcal{B}'$, il existe $\bar{f} \in \mathrm{F}$ et $\bar{f}' \in \mathrm{F}''$ tels que $\bar{f}.\bar{f}' = \beta(f)$. La condition $\beta(f) = \beta(\bar{f})$ assure l'existence de $g \in \mathcal{B}$ tel que $\bar{f} = f.g$. Par suite $f.(g.\bar{f}') = \bar{f}.\bar{f}' = \beta(f)$. L'élément f, qui admet f' pour inverse à gauche et $(g.\bar{f}')$ pour inverse à droite dans $\mathcal{C}^{\cdot}$, est inversible dans $\mathcal{C}^{\cdot}$. Pour tout $f_1 \in \mathrm{F}$ tel que $\alpha(f_1) = e$, il existe $g' \in \mathcal{B}'$ satisfaisant à $f_1 = g'.f$, d'où $f_1 \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$. Il en résulte $\mathrm{F} \subset \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ et $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ admet $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma})$ pour groupoïde de ses éléments inversibles.

COROLLAIRE. — *Soit $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$ la classe des atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$. L'application : $\mathrm{F} \to (b(\mathrm{F}), \mathrm{F}, a(\mathrm{F}))$, où $\mathrm{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$, identifie $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$ à une sous-catégorie de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ contenant $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma})$. Si η désigne l'application : $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \to \mathrm{F}$ de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ sur $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$, alors $(\eta, \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot}))$ est une extension inessentielle de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$* (définition 5-2-III, 1) [2].

2. — Catégories ordonnées.

Soit $\mathcal{M}_0$ une classe de classes contenant avec une classe toutes ses sous-classes, avec deux classes leur produit. Soit $\mathcal{M}$ la catégorie des applications $(\mathrm{M}', f, \mathrm{M})$, où $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_0$, $\mathrm{M}' \in \mathcal{M}_0$ et où f est une surjection de M sur une partie de M'.

Soit $\tilde{\Omega}_0$ la classe des classes ordonnées $(M, <)$, où $M \in \mathcal{M}_0$ et où $<$ est une relation d'ordre sur M. Soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des triplets

$$((M', <), f, (M, <))$$

tels que $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$, $(M', <) \in \tilde{\Omega}_0$, $(M', f, M) \in \mathcal{M}$ et que, si $x \in M$, $x' \in M$ et $x' < x$, on ait $f(x') < f(x)$. Soit ω l'application :

$$((M', <), f, (M, <)) \rightarrow (M', f, M)$$

de $\tilde{\Omega}$ dans $\mathcal{M}$. Alors $(\mathcal{M}, \omega, \tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes résolvante à droite, à produits finis [3]. Si

$$(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$$

et si M_1 est une partie de M, le symbole $(M_1, <)$ désignera la sous-structure de $(M, <)$ au-dessus de M_1, c'est-à-dire la classe M_1 munie de la structure d'ordre induite par $(M, <)$.

Soit $\tilde{\Omega}'$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

vérifiant la condition :

Si $x \in M$, $x' \in M$, $x' < x$ et $f(x) = f(x')$, alors on a $x = x'$.

Soit $\tilde{\Omega}'_1$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}'$ formée des

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

satisfaisant à l'axiome :

Si $x \in M$, $x' \in M$, $x'' \in M$, $x' < x$, $x'' < x$ et $f(x') = f(x'')$, alors $x' = x''$.

Rappelons [3] qu'une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structurée est appelée *catégorie ordonnée.* Pour que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée (resp. catégorie ordonnée), il faut et il suffit que les axiomes O_1, O_2 et O_3 (resp. O_1, O_2, O_3 et O_4) suivants soient vérifiés :

O_1) $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie et $(\mathcal{C}, <) \in \tilde{\Omega}_0$.

O_2) Soient $f \in \mathcal{C}$ et $f' \in \mathcal{C}$; si $f' < f$, on a $\alpha(f') < \alpha(f)$ et $\beta(f') < \beta(f)$.

O_3) Soient $(g, f) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ et $(g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$; si $f' < f$ et $g' < g$, alors $g'.f' < g.f$.

O_4) Soient $f \in \mathcal{C}$ et $f' \in \mathcal{C}$; les conditions : $f' < f$, $\alpha(f) = \alpha(f')$ et $\beta(f) = \beta(f')$ entraînent $f = f'$.

D'après la proposition 18, II [3], tout groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré est ordonné.

Une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}'_1, \tilde{\Omega})$-structurée est appelée catégorie *s-ordonnée.*

Soit $\tilde{\Omega}''$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

vérifiant la condition :

Soit $x \in M$; pour tout $y \in M'$ tel que $y < f(x)$, il existe $x' < x$, $x' \in M$ pour lequel on ait $f(x') = y$.

DÉFINITION 1. — *On dira qu'une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée est* semi-régulière *si elle est $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}'', \tilde{\Omega}''), \tilde{\Omega})$-structurée.*

Pour qu'une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit semi-régulière, il faut et il suffit que soit vérifié l'axiome :

O_6) Soit $f \in \mathcal{C}$; si $e < \alpha(f)$, $e \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$, il existe $f' < f$ tel que $\alpha(f') = e$; si $e' \in \mathcal{C}^{\cdot}_0$ et $e' < \beta(f)$, il existe $f'' < f$ tel que $\beta(f'') = e'$.

Soit $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$. Soit C une sous-classe de M. Si C admet une borne inférieure dans $(M, <)$, nous l'appellerons *l'intersection* de C et la noterons $\bigcap C$. Si C est majoré par $x \in M$ et si C admet une borne supérieure dans la sous-classe des $x' \in M$ tels que $x' < x$, nous appellerons cette borne supérieure le *x-agrégat* de C et nous la noterons $\overset{x}{\bigcup} C$; la classe des x-agrégats de C, où $x \in M$, est appelée *congrégation* de C dans M et désignée par $\overline{\bigcup} C$; un élément de $\overline{\bigcup} C$ est aussi appelé sous-agrégat de C. Si pour tout majorant x de C il existe $\overset{x}{\bigcup} C$ et si $\overset{x}{\bigcup} C = y$, on dira que y est *l'agrégat* de C dans M, noté $\bigcup C$.

Soit $\tilde{\Omega}^s_0$ la sous-classe de $\tilde{\Omega}_0$ formée des classes sous-inductives, c'est-à-dire [1 b] des classes ordonnées $(M, <) \in \tilde{\Omega}_0$ admettant un plus petit élément 0 et telles que toute partie C de M, majorée dans $(M, <)$, admette une intersection; alors C admet un x-agrégat, pour tout majorant x. Soit $\tilde{\Omega}^s$ la sous-catégorie pleine de $\tilde{\Omega}$ ayant $\tilde{\Omega}^s_0$ pour classe des unités.

Soit $\mathfrak{J}^{\cup}$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}^s$ formée des applications *quasi-inductives*, c'est-à-dire des triplets $((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}^s$ tels que, pour toute partie C de M on ait :

$$f\left(\overline{\bigcup} C\right) \subset \overline{\bigcup}(f(C)).$$

Cette dernière condition est équivalente à :

(U) Si C est une partie de M majorée par $x \in M$, on a :

$$f\left(\overset{x}{\bigcup} C\right) = \overset{z}{\bigcup} f(C), \qquad \text{où} \qquad z = f(x).$$

Définition 2. — *Une catégorie* $\mathfrak{J}^{U}(\mathfrak{J}^{U} \cap \tilde{\Omega}', \mathfrak{J}^{U})$*-structurée sera appelée* catégorie quasi-inductive. *Une catégorie sous-préinductive* [3] $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *telle que* $(\mathcal{C}, <)$ *soit une classe préinductive* [1] *est appelée* catégorie préinductive.

Proposition 1. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée. Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit une catégorie quasi-inductive, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

Q_1) $(\mathcal{C}, <)$ *est une classe sous-inductive.*

Q_2) *Soit* F *une partie de* $\mathcal{C}$ *majorée par* $f \in \mathcal{C}$; *on a :*

$$\overset{\alpha(f)}{\bigcup} \alpha(F) = \alpha\left(\overset{f}{\bigcup} F\right) \qquad et \qquad \overset{\beta(f)}{\bigcup} \beta(F) = \beta\left(\overset{f}{\bigcup} F\right).$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 5 de [3].

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée.

Définition 3. — *Soient* $g \in \mathcal{C}$ *et* $f \in \mathcal{C}$; *soit* $\langle g, f\rangle$ *la classe des couples composables* $(g', f') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ *tels que* $g' < g$ *et* $f' < f$. *Si* $\langle g, f\rangle$ *admet un plus grand élément* $(\bar{g}, \bar{f})$ *dans* $(\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, <)$, *on dira que* g et f ont $\bar{g}.\bar{f}$ pour pseudoproduit dans $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *et on posera :* $gf = \bar{g}.\bar{f}$.

Cette définition entraîne que, si gf est défini, alors gf est le plus grand élément de la classe $\varkappa(\langle g, f\rangle)$.

Proposition 2. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie* $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}'_1, \tilde{\Omega}'_1), \tilde{\Omega}'')$*-structurée. Soient* $g \in \mathcal{C}$ *et* $f \in \mathcal{C}$; *si la classe* $\varkappa(\langle g, f\rangle)$ *admet un plus grand élément* $\bar{g}.\bar{f}$, *alors on a* $\bar{g}.\bar{f} = gf$.

Démonstration. — Soit $(g', f') \in \langle g, f\rangle$; comme $g'.f' < \bar{g}.\bar{f}$, on a :

$$g'.f' = g_1.f_1, \qquad \text{où} \qquad g_1 < \bar{g} \qquad \text{et} \qquad f_1 < \bar{f},$$

car $((\mathcal{C}, <), \varkappa, (\mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}, <)) \in \tilde{\Omega}''$. Les relations : $f_1 < f$, $f' < f$ et $\alpha(f_1) = \alpha(f')$ entraînent $f_1 = f'$, puisque

$$((\mathcal{C}, <), \alpha, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}'_1.$$

De même $g_1 = g'$; donc $f' < \overline{f}$, $g' < \overline{g}$ et $(\overline{g}, \overline{f})$ est le plus grand élément de $\langle g, f \rangle$, c'est-à-dire g et f ont $\overline{g}.\overline{f}$ pour pseudoproduit.

Corollaire. — *Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est un groupoïde fonctoriellement ordonné* [3], *le pseudoproduit gf est défini si, et seulement si, la classe $\varkappa(\langle g, f \rangle)$ admet un plus grand élément.*

En effet, les conditions de la proposition 2 sont vérifiées, en vertu de la proposition 20, II [3].

Proposition 3. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie quasi-inductive. Soient $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$; si $\alpha(g) \cap \beta(f)$ est défini, alors le pseudoproduit gf est défini.*

Démonstration. — Soit G (resp. F) la classe des g' (resp. f') tels qu'il existe $(g', f') \in \langle g, f \rangle$; posons $E = \alpha(G) = \beta(F)$. Soit $\overline{g} = \bigcup^{g} G$ et $\overline{f} = \bigcup^{f} F$. On a :

$$\alpha(\overline{g}) = \bigcup^{\alpha(g)} E \quad \text{et} \quad \beta(\overline{f}) = \bigcup^{\beta(f)} E.$$

Puisque E est majorée par $e = \alpha(g) \cap \beta(f)$, il existe $\bigcup^{e} E$ et on a :

$$\bigcup^{e} E = \alpha(\overline{g}) = \beta(\overline{f}).$$

Donc $(\overline{g}, \overline{f})$ est le plus grand élément de $\langle g, f \rangle$ et on trouve $gf = \overline{g}.\overline{f}$.

Corollaire. — *Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive, deux éléments quelconques ont un pseudoproduit.*

Remarque. — Dans [3], nous disons que gf est le pseudoproduit de g et f dans la catégorie sous-préinductive $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ si, et seulement si, gf est le plus grand élément de la classe $\varkappa(\langle g, f \rangle)$. En général cette propriété n'entraîne pas que gf soit le pseudoproduit de g et f au sens de la définition 3; mais si le pseudoproduit au sens de la définition 3 existe aussi, les deux pseudoproduits sont égaux. Toutefois, il résulte des propositions 3 et 2 que les deux notions sont identiques dans le cas des groupoïdes fonctoriellement ordonnés et des catégories inductives.

Proposition 4. — *Soient $f \in \mathcal{C}$ et $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$; si le pseudoproduit fe est défini, alors fe est le plus grand élément de la classe* F *des $f' < f$ tels que $\alpha(f') < e$.*

En effet, on a $(fe, \alpha(fe)) \in \langle f, e \rangle$. Comme les conditions $f' < f$ et $\alpha(f') < e$ entraînent $(f', \alpha(f')) \in \langle f, e \rangle$, on obtient $f' < fe$. Donc fe est le plus grand élément de F.

Proposition 5. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$ $(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}'')$-structurée; soient $h \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$; si $(hg)f$ et $h(gf)$ sont définis, on a $(hg)f = h(gf)$.*

En effet, on a $(hg)f = k.f_1$, où $k < hg$ et $f_1 < f$, d'où :

$$k = h_1 . g_1, \qquad h_1 < h \qquad \text{et} \qquad g_1 < g.$$

Par suite $g_1 . f_1 < gf$ et $(hg)f = h_1 . g_1 . f_1 < h(gf)$. De même $h(gf) < (hg)f$.

Soit $\tilde{\Omega}_2$ la sous-classe de $\tilde{\Omega}$ formée des triplets

$$((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}$$

vérifiant la condition suivante :

Soit $x \in M$; pour tout $y < f(x)$, la classe des $x' < x$ tels que $f(x') < y$ admet un plus grand élément x_y vérifiant $f(x_y) = y$.

$\tilde{\Omega}_2$ est évidemment une sous-classe de $\tilde{\Omega}''$.

Proposition 6. — *$\tilde{\Omega}_2$ est une sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$, stable par produit dans $\tilde{\Omega}$* (définition 2-II-[3]).

Démonstration. — Soit

$$((M'', <), f', (M', <)) \in \tilde{\Omega}_2 \quad \text{et} \quad ((M', <), f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}_2;$$

supposons $x \in M$ et $z < f'f(x)$. Soit y_z le plus grand élément de la classe des $y' \in M'$ tels que $y' < f(x)$ et $f'(y') < z$; soit x_{yz} le plus grand élément de la classe des $x' \in M$ tels que $x' < x$ et $f(x') < y_z$; on a :

$$f'f(x_{yz}) = f'(y_z) = z.$$

La condition $x'' < x$ entraîne $f(x'') < f(x)$; de plus si $f'f(x'') < z$, on a $f(x'') < y_z$, d'où $x'' < x_{yz}$. Donc x_{yz} est le plus grand élément de la classe des $x'' < x$ tels que $f'f(x'') < z$ et on trouve $((M'', <), f'f, (M, <)) \in \tilde{\Omega}_2$. Ainsi $\tilde{\Omega}_2$ est une sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$, laquelle est évidemment stable par produit.

Définition 4. — *On dira qu'une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est* assez régulière (*resp.* régulière) *si* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *est une catégorie $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega})$-structurée (resp. $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega}'')$-structurée).*

Proposition 7. — *Pour qu'une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ soit assez régulière (resp. soit régulière), il faut et il suffit que soient vérifiées les conditions R_d et R_g (resp. R_d, R_g et R_p) suivantes :*

(R_d) *Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$ tel que $e < \alpha(f)$, le pseudo-produit fe est défini et on a $\alpha(fe) = e$.*

(R_g) *Pour tout $f \in \mathcal{C}$ et tout $e' \in \mathcal{C}_0^\cdot$ tel que $e' < \beta(f)$, le pseudo-produit $e'f$ est défini et on a $\beta(e'f) = e'$.*

(R_p) *Soit $(g, f) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$ et $k < g.f$; on a $k = g'.f'$, où $g' < g$ et $f' < f$.*

Démonstration. — Soient $f \in \mathcal{C}$, $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$ et $e < \alpha(f)$. Supposons les conditions R_d et R_g vérifiées. D'après la proposition 4, fe est le plus grand élément de la classe des $f' < f$ tels que $\alpha(f') < e$, c'est-à-dire on a : $((\mathcal{C}_0^\cdot, <), \alpha, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}_2$; de même

$$((\mathcal{C}_0^\cdot, <), \beta, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}_2.$$

L'axiome (R_p) entraîne $((\mathcal{C}, <), \varkappa, (\mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot, <)) \in \tilde{\Omega}''$, puisque $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est $\tilde{\Omega}$-structurée. Les conditions sont donc suffisantes. Inversement soit $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée régulière. Soient $f \in \mathcal{C}$ et $e < \alpha(f)$; soit $(f', h) \in \langle f, e\rangle$. Comme $h < e$, on a $\beta(h) = \alpha(f') < e$ et f' est majoré par le plus grand élément f_e de la classe des $f' < f$ tels que $\alpha(f') < e$. Par définition $\alpha(f_e) = e$, donc (f_e, e) est le plus grand élément de $\langle f, e\rangle$. Par conséquent f et e admettent f_e pour pseudoproduit. On voit de même que la condition (R_g) est vérifiée.

Corollaire. — *Pour qu'un groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit régulier, il faut et il suffit que la condition* R_d *soit vérifiée. Par suite tout groupoïde $\tilde{\Omega}$-structuré assez régulier est un groupoïde ordonné régulier.*

Démonstration. — Montrons que la condition R_d est suffisante. En effet, soient $f \in \mathcal{C}$ et $e' < \beta(f)$; on a : $e'f = (f^{-1}e')^{-1}$, car $f' < f$ entraîne $f'^{-1} < f^{-1}$. Si $k < g.f$, on trouve :

$$k = g'.(f\alpha(k)), \qquad \text{où} \qquad g' = k.(f\alpha(k))^{-1} < g.f.f^{-1} = g.$$

Proposition 8. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée assez régulière. Soient* $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ *et* $e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$; $e \cap e'$ *est défini si, et seulement si,* e *et* e' *admettent une intersection* $\bar{e}$ *dans* $(\mathcal{C}_0^{\cdot}, <)$, *et on a :* $\bar{e} = e \cap e'$.

Démonstration. — Supposons $e \cap e'$ défini; on a :

$$\alpha(e \cap e') < e \cap e' \qquad \text{et} \qquad \beta(e \cap e') < e \cap e',$$

d'où

$$\alpha(e \cap e') < \beta(e \cap e') \qquad \text{et} \qquad \beta(e \cap e') < \alpha(e \cap e'),$$

c'est-à-dire $\alpha(e \cap e') = \beta(e \cap e')$; il en résulte

$$e \cap e' = \alpha(e \cap e') = \bar{e},$$

car $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est ordonnée. Inversement supposons $\bar{e}$ défini. Puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée régulière, il existe $e\bar{e}$ tel que $\alpha(e\bar{e}) = \bar{e}$; comme $\bar{e} < e\bar{e}$, on a $\bar{e} < \beta(e\bar{e})$ et il existe $\bar{e}(e\bar{e})$ pour lequel $\beta(\bar{e}(e\bar{e})) = \bar{e}$. La relation $\bar{e} < \bar{e}(e\bar{e})$ entraîne $\alpha(\bar{e}(e\bar{e})) = \bar{e}$, donc $\bar{e}(e\bar{e}) = \bar{e}$. Soit h un minorant de e et de e' dans $(\mathcal{C}, <)$; $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ étant majorés par e et e', on trouve $\alpha(h) < \bar{e}$ et $\beta(h) < \bar{e}$, d'où

$$h < e\bar{e} \qquad \text{et} \qquad h < \bar{e}(e\bar{e}) = \bar{e}.$$

Par conséquent $\bar{e} = e \cap e'$.

Proposition 9. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée assez régulière; soit* $g \in \mathcal{C}$ *et* $f \in \mathcal{C}$; *le pseudoproduit* gf *est défini si, et seulement si,* $\alpha(g)$ *et* $\beta(f)$ *admettent une intersection*

$$e = \alpha(g) \bigcap_{\mathcal{C}_0^{\cdot}} \beta(f) \qquad \textit{dans} \qquad (\mathcal{C}_0^{\cdot}, <);$$

dans ce cas, on a $gf = (ge).(ef)$.

Démonstration. — Supposons e défini; d'après la proposition 7, il existe ef et ge et on a :

$$\alpha(ge) = e = \beta(ef), \qquad \text{d'où} \qquad (ge, ef) \in \langle g, f \rangle.$$

Soit $(g', f') \in \langle g, f \rangle$; on trouve $\alpha(g') < e$, car $\alpha(g')$ est majoré par $\alpha(g)$ et $\beta(f)$. Il en résulte : $g' = g'.\alpha(g') < ge$ et $f' < ef$; par suite g et f admettent $(ge).(ef)$ pour pseudoproduit. Inversement, supposons gf défini et désignons par $(\bar{g}, \bar{f})$ le plus grand élément de $\langle g, f \rangle$. Alors $\alpha(\bar{g}) < \alpha(g)$ et $\alpha(\bar{g}) < \beta(f)$. Soit $e' \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ tel que $e' < \alpha(g)$ et $e' < \beta(f)$; comme $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée assez régulière, il existe $e'f < f$, $ge' < g$ et on a : $\beta(e'f) = e' = \alpha(ge')$. On en déduit :

$$(ge', e'f) \in \langle g, f \rangle, \quad ge' < \bar{g}, \quad e'f < \bar{f} \qquad \text{et} \qquad e' < \alpha(\bar{g}).$$

Par suite

$$\alpha(\bar{g}) = \alpha(g) \bigcap_{\mathcal{C}_0^{\cdot}} \beta(f).$$

Corollaire 1. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie ordonnée assez régulière; soient $g \in \mathcal{C}$ et $f \in \mathcal{C}$; le pseudoproduit gf est défini si, et seulement si, $e = \alpha(g) \cap \beta(f)$ est défini.*

Ce corollaire résulte des propositions 8 et 9.

Corollaire 2. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie ordonnée régulière telle que $(\mathcal{C}, <)$ soit une classe sous-préinductive. Soient $f \in \mathcal{C}$, $g \in \mathcal{C}$ et $h \in \mathcal{C}$; si gf et hg sont définis, alors $h(gf)$ et $(hg)f$ sont définis et égaux.*

En effet, comme $\alpha(h) \cap \beta(g)$ est défini et majoré par $\beta(g)$ et que $\beta(gf) < \beta(g)$, l'intersection $(\alpha(h) \cap \beta(g)) \cap \beta(gf)$ est définie et par suite égale à $\alpha(h) \cap \beta(gf)$. Donc $h(gf)$ est défini; de même $(hg)f$ est défini et, en vertu de la proposition 5, ces deux pseudoproduits sont égaux.

Proposition 10. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie ordonnée assez régulière; alors $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie s-ordonnée. Si $(\bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, <)$ est aussi une catégorie ordonnée assez régulière, la catégorie ordonnée produit $(\mathcal{C}^{\cdot} \times \bar{\mathcal{C}}^{\cdot}, <)$ est assez régulière.*

Démonstration. — Supposons

$$f \in \mathcal{C}, \;\; f' < f, f'' < f, \alpha(f') = \alpha(f'') = e \quad \text{et} \quad \beta(f') = \beta(f'') = e'.$$

Il existe fe et on a $\alpha(fe) = e$, $f' < fe$. Il existe $e'(fe)$ et on a $\beta(e'(fe)) = e'$ et $f' < e'(fe)$. Les relations :

$$e = \alpha(f') < \alpha(e'(fe)) \quad \text{et} \quad \alpha(e'(fe)) < \alpha(fe) < e$$

entraînent $e = \alpha(e'(fe))$; de même $e' = \beta(e'(fe))$. Comme $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est ordonnée, des conditions :

$$f' < e'(fe), \qquad \alpha(e'(fe)) = \alpha(f') \qquad \text{et} \qquad \beta(e'(fe)) = \beta(f')$$

il résulte $f' = e'(fe)$; de même $f'' = e'(fe)$. Donc $f' = f''$ et $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie s-ordonnée. La deuxième partie de la proposition se déduit du théorème 13 [3] et de la proposition 6.

Proposition 11. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie quasi-inductive. Pour que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit assez régulière, il faut et il suffit que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *soit semi-régulière.*

Démonstration. — La condition est évidemment nécessaire. Si elle est vérifiée soient $f \in \mathcal{C}$, $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e < \alpha(f)$. D'après la proposition 3, le pseudoproduit fe est défini et $\alpha(fe) < e$. Puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est semi-régulière, il existe $f' < f$ tel que $\alpha(f') = e$; comme $f' < fe$ en vertu de la proposition 4, on trouve $e = \alpha(f') < \alpha(fe)$, d'où $\alpha(fe) = e$. On montre de même que si $e' < \beta(f)$ on a $\beta(e'f) = e'$.

Proposition 12. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée assez régulière. Soit* C *une sous-classe de* $\mathcal{C}$ *admettant un sous-agrégat* g ; *alors* $\alpha(g)$ *et* $\beta(g)$ *sont des sous-agrégats de* $\alpha(\mathrm{C})$ *et* $\beta(\mathrm{C})$ *respectivement dans* $(\mathcal{C}_0^{\cdot}, <)$.

En effet, $\alpha(g)$ est un majorant de $\alpha(\mathrm{C})$; soit $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ un autre majorant de $\alpha(\mathrm{C})$ tel que $e < \alpha(g)$. Comme $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est régulière on a $ge = \alpha(ge)$. Pour tout $c \in \mathrm{C}$, on trouve : $c < ge < g$. Par suite $ge = g$ et $e = \alpha(g)$ est un sous-agrégat de $\alpha(\mathrm{C})$ dans $(\mathcal{C}_0^{\cdot}, <)$.

Corollaire 1. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée assez régulière, et si* $(\mathcal{C}, <)$ *est une classe sous-inductive, alors* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie* $\tilde{\Omega}^s(\mathfrak{J}^{\cup}, \tilde{\Omega}^s)$*-structurée.*

En effet, soit E une partie de $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ majorée par $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$; soit $h = \bigcup^{e} \mathrm{E}$; on a $\alpha(h) = \bigcup^{e} \mathrm{E}$ dans $(\mathcal{C}_0^{\cdot}, <)$ et $(\mathcal{C}_0^{\cdot}, <)$ est une classe sous-inductive. Si $(g, f) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$, $(g_i, f_i) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$ et $(g_i, f_i) < (g, f)$ pour tout $i \in \mathrm{I}$, alors :

$$\alpha\left(\bigsqcup^{g} g_i\right) = \bigsqcup^{\alpha(g)} \alpha(g_i) = \bigsqcup^{\beta(f)} \beta(f_i) = \beta\left(\bigsqcup^{f} f_i\right),$$

d'où $\left(\bigsqcup^{g}_{i \in \mathrm{I}} g_i, \bigsqcup^{f}_{i \in \mathrm{I}} f_i\right) \in \mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot$ et $(\mathcal{C}^\cdot * \mathcal{C}^\cdot, <) \in \tilde{\Omega}^s$. Le corollaire résulte donc de la proposition 12.

Corollaire 2. — *Si* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *est une catégorie ordonnée assez régulière et si* $(\mathcal{C}, <)$ *est une classe sous-inductive,* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *est une catégorie quasi-inductive.*

En effet, soit E une sous-classe de $\mathbf{C}^\cdot_0$ majorée par $e \in \mathcal{C}^\cdot_0$. Soit $h = \bigsqcup^{e} \mathrm{E}$; comme $\alpha(h)$ et $\beta(h)$ sont les e-agrégats de E dans $(\mathcal{C}^\cdot_0, <)$, on a : $\alpha(h) = \beta(h)$ et $\alpha(h) < h$, d'où $h \in \mathcal{C}^\cdot_0$, puisque $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une catégorie ordonnée. Le corollaire 2 résulte alors des propositions 1 et 12.

Soit $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée assez régulière.

Une sous-catégorie $\tilde{\Omega}((\tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_2), \tilde{\Omega})$-structurée de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-catégorie C de $\mathcal{C}^\cdot$ qui, munie de la relation d'ordre et de la loi de composition induites par $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée assez régulière $(\mathrm{C}^\cdot, <)$. Nous aurons à considérer des sous-catégories plus particulières de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$, à savoir :

Définition 5. — *On appelle* sous-catégorie régulière de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *une sous-catégorie* C *de* $\mathcal{C}^\cdot$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) *Soient* $f \in \mathrm{C}$ *et* $e \in \mathrm{C}^\cdot_0$; *si* $e < \alpha(f)$ (*resp.* $e < \beta(f)$), *on a :* $fe \in \mathrm{C}$ (*resp.* $ef \in \mathrm{C}$).

2) *Si* $e \in \mathrm{C}^\cdot_0$ *et* $e' \in \mathrm{C}^\cdot_0$ *et si* $e \bigcap_{\mathcal{C}^\cdot_0} e'$ *est défini, on a* $e \bigcap_{\mathcal{C}^\cdot_0} e' \in \mathrm{C}^\cdot_0$

Si C est une sous-catégorie de $\mathcal{C}^\cdot$, saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$, alors C est une sous-catégorie régulière de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

Si C est une sous-catégorie régulière de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$, alors $(\mathrm{C}^\cdot, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée assez régulière.

Proposition 13. — *Soit* $\tilde{\mathrm{C}}$ *une classe de sous-catégories régulières de la catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée régulière* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *telles* *que* $C_0^{\cdot} = B$ *pour tout* $C \in \tilde{C}$. *Alors la catégorie* $\mathcal{C}_{\tilde{C}}$ *engendrée par la classe réunion des* $C \in \tilde{C}$ *est une sous-catégorie régulière de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Démonstration. — Un élément de $\mathcal{C}_{\tilde{C}}$ est de la forme $f_n \ldots f_2 . f_1$, où $f_i \in C_i$, et $C_i \in \tilde{C}$. Soit $e < \alpha(f_1)$, $e \in B$; on a: $(f_2 . f_1)e = f_2(f_1 e)$, d'après la proposition 5 et:

$$(f_2 . f_1)e = (f_2 \beta(f_1 e)) . (f_1 e)$$

en vertu de la proposition 9. Comme $f_1 e \in C_1$, on en déduit:

$$\beta(f_1 e) \in B = \alpha(C_2), \qquad \text{d'où} \qquad f_2 \beta(f_1 e) \in C_2.$$

Par suite $(f_2 . f_1)e \in \mathcal{C}_{\tilde{C}}$. Par récurrence, on démontre

$$(f_n \ldots f_2 . f_1)e \in \mathcal{C}_{\tilde{C}}.$$

Proposition 14. — *Si* C *est une sous-catégorie régulière de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, *alors* C *est stable par pseudoproduit.*

En effet, soient $g \in C$ et $f \in C$ tels que gf soit défini; en vertu de la proposition 9, on a $gf = (ge) . (ef)$, où $e = \alpha(g) \bigcap_{\mathcal{C}_0} \beta(f)$; comme $e \in C_0^{\cdot}$, $ge \in C$ et $ef \in C$, on en déduit $gf \in C'$.

Théorème 1. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée régulière. Si* C *est une sous-catégorie régulière de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, *alors* $(C^{\cdot}, <)$ *est une catégorie ordonnée régulière.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que, si $k < g.f$, où $g \in C$, $f \in C$ et $k \in C$, il existe $g'' \in C$ et $f'' \in C$ tels que $f'' < f$, $g'' < g$ et $k = g''.f''$. En effet, puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$-structurée, il existe $g' < g$ et $f' < f$, $g' \in \mathcal{C}$ et $f' \in \mathcal{C}$ tels que $k = g'.f'$. Comme $\alpha(k) \in C_0^{\cdot}$ et $\beta(k) \in C_0^{\cdot}$, on a $f\alpha(k) \in C$. Soit $e' = \beta(f\alpha(k)) \in C_0^{\cdot}$; les relations $f' < f$ et $\alpha(f') = \alpha(k)$ entraînent $f' < f\alpha(k)$ et $\alpha(g') = \beta(f') < e'$. Puisque $e' < \alpha(g)$, on a $ge' \in C$, $\alpha(ge') = e'$ et $g' < ge'$, d'où

$$\beta(k) = \beta(g') < \beta(ge').$$

Par suite le pseudoproduit $\beta(k)(ge') = g''$ appartient à C; cet élément vérifie les conditions: $g' < g''$ et $\beta(g'') = \beta(k)$. Soit $e'' = \alpha(g'') < e'$; il existe $f'' = e''(f\alpha(k)) \in C$; des relations:

$$\beta(f') = \alpha(g') < e'' \qquad \text{et} \qquad f' < f\alpha(k),$$

il résulte $f' < f''$, d'où $\alpha(k) = \alpha(f') < \alpha(f'')$ et $\alpha(f'') = \alpha(k)$, car $\alpha(f'') < \alpha(k)$. Ceci prouve que $g''.f'' < g.f$ est défini et tel que :

$$\alpha(g''.f'') = \alpha(k) \qquad \text{et} \qquad \beta(g''.f'') = \beta(k).$$

En vertu de la proposition 10, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est s-ordonnée, de sorte que l'on a : $k = g''.f''$, où $g'' \in C$ et $f'' \in C$. Par conséquent $(C^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée régulière.

Théorème 2. — *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée. La catégorie $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^{\cdot})$* (théorème 2-1) *munie de la relation d'ordre : $(\mathcal{B}_1', F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ si, et seulement si, $F_1 \subset F$ et si $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_1'$) est un sous-groupoïde plein saturé par induction de $\mathcal{B}$* (resp. $\mathcal{B}'$), *est une catégorie quasi-inductive régulière.*

Démonstration. — Soient

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^{\cdot}) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{B}_1', F_1, \mathcal{B}_1) \in \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^{\cdot}).$$

Montrons que si $(\mathcal{B}_1', F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, alors F_1 est une sous-classe saturée par induction de F et on a : $F_1 = \beta(F_1).F.\alpha(F_1)$. En effet, $F_1 \subset F$ entraîne $F_1 \subset \beta(F_1).F.\alpha(F_1)$. Soit

$$f \in \beta(F_1).F.\alpha(F_1).$$

Il existe $f_1 \in F_1$ tel que $\alpha(f) = \alpha(f_1)$. Comme F est compatible à gauche avec $\mathcal{B}'$, il existe $g' \in \mathcal{B}'$ tel que $f = g'.f_1$; le sous-groupoïde $\mathcal{B}_1'$ étant plein dans $\mathcal{B}'$, g' appartient à $\mathcal{B}_1'$ et par suite $f \in \mathcal{B}_1'.F_1 = F_1$ et $\beta(F_1).F.\alpha(F_1) \subset F_1$. Ainsi

$$F_1 = \beta(F_1).F.\alpha(F_1).$$

De plus les conditions $f_1 \in F_1$ et $f \in F$, $f < f_1$ entraînent $\alpha(f) \in \mathcal{B}_1$ et $\beta(f) \in \mathcal{B}_1'$, car $\alpha(\mathcal{B}_1)$ et $\alpha(\mathcal{B}_1')$ sont saturées par induction dans $\alpha(\mathcal{B})$ et $\alpha(\mathcal{B}')$ respectivement, d'où :

$$f = \beta(f).f.\alpha(f) \in \beta(F_1).F.\alpha(F_1) = F_1.$$

Donc F_1 est saturée par induction dans F.

— Les relations $(\mathcal{B}_1', F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ et

$$(\mathcal{B}_1', F_2, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

entraînent $\mathcal{B}_1' < \mathcal{B}'$, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ et

$$F_1 = \alpha(\mathcal{B}_1').F.\alpha(\mathcal{B}_1) = \beta(F_2).F.\alpha(F_2) = F_2.$$

Si on suppose aussi $(\mathcal{B}_1'', F_1', \mathcal{B}_1') < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}')$, on trouve : $F_1'.F_1 \subset F'.F$ et

$$(\mathcal{B}_1'', F_1', \mathcal{B}_1').(\mathcal{B}_1', F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}').(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

Par conséquent $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ est une catégorie s-ordonnée.

— Soit H une sous-classe de $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ majorée par $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$. Le sous-groupoïde plein $\mathcal{B}_H$ (resp. $\mathcal{B}_H'$) de $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) ayant pour classe de ses unités la classe réunion des classes $\alpha(F_i)$ (resp. $\beta(F_i)$), où $(\mathcal{B}_i', F_i, \mathcal{B}_i) \in H$, est un sous-agrégat de la classe $\alpha(H)$ (resp. $\beta(H)$) dans $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$. Soit F_H la classe réunion des F_i; posons :

$$\tilde{H} = (\mathcal{B}_H', \mathcal{B}_H'.F_H.\mathcal{B}_H, \mathcal{B}_H).$$

Puisque $\alpha(F_H) = \alpha(\mathcal{B}_H)$ et $\beta(F_H) = \alpha(\mathcal{B}_H')$, on a $\tilde{H} \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$, en vertu de la proposition 3-1. On en déduit que $\tilde{H}$ est le $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$-agrégat de H dans $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$.

— Soient $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ et $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}_1'$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{B}'$ ayant $\beta(F.\mathcal{B}_1)$ pour classe de ses unités. On a :

$$F.\mathcal{B}_1 = F.\alpha(\mathcal{B}_1), \qquad \alpha(F.\mathcal{B}_1) = \alpha(\mathcal{B}_1)$$

et

$$\mathcal{B}_1'.(F.\mathcal{B}_1).\mathcal{B}_1 = F.\mathcal{B}_1.$$

D'après la proposition 3-1, il en résulte

$$(\mathcal{B}_1', F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot).$$

Si $(\mathcal{B}_2', F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, on a : $F_1 = \beta(\mathcal{B}_2').F.\alpha(\mathcal{B}_1)$, d'où $F_1 \subset F.\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2' < \mathcal{B}_1'$. Par suite $(\mathcal{B}_1', F.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ est le pseudoproduit de $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ et de $\mathcal{B}_1$ dans $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$. De même si $\mathcal{B}_1'' < \mathcal{B}'$, le pseudoproduit $\mathcal{B}_1''(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est défini et admet $\mathcal{B}_1''$ pour unité à gauche, de sorte que $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ est une catégorie quasi-inductive assez régulière.

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$, $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$, $(\mathcal{B}_1'', K, \mathcal{B}_1) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ et $(\mathcal{B}_1'', K, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$. Soit E' la classe des $e' \in \mathcal{B}_0'$ tels qu'il existe $f \in F$ et $f' \in F'$ vérifiant les conditions :

$$\alpha(f') = \beta(f) = e', \qquad \alpha(f) \in \alpha(K) \qquad \text{et} \qquad \beta(f') \in \beta(K).$$

Soit $\mathcal{B}_1'$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{B}'$ ayant E' pour classe des unités. Pour tout $e \in \alpha(\mathrm{K})$, il existe $k \in \mathrm{K} \subset \mathrm{F}'.\mathrm{F}$ tel que $\alpha(k) = e$, d'où $k = f'.f$, $f \in \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1$ et $f' \in \mathcal{B}''_1.\mathrm{F}'.\mathcal{B}_1$. On en déduit, en vertu de la proposition 3-1 et de ce qui précède :

$$\hat{\mathrm{F}}' \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), \qquad \hat{\mathrm{F}} \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot) \qquad \text{et} \qquad \hat{\mathrm{F}}'.\hat{\mathrm{F}} < (\mathcal{B}'', \mathrm{F}'.\mathrm{F}, \mathcal{B}),$$

en posant :

$$\hat{\mathrm{F}}' = (\mathcal{B}''_1, \ \mathcal{B}''_1.\mathrm{F}'_1.\mathcal{B}'_1, \ \mathcal{B}'_1) \qquad \text{et} \qquad \hat{\mathrm{F}} = (\mathcal{B}'_1, \ \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1, \ \mathcal{B}_1).$$

Comme $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ est une catégorie *s*-ordonnée d'après la proposition 10, les atlas $\hat{\mathrm{F}}'.\hat{\mathrm{F}}$ et $(\mathcal{B}''_1, \mathrm{K}, \mathcal{B}_1)$, qui ont mêmes unités à droite et à gauche $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}''_1$ respectivement, et qui sont majorés par $(\mathcal{B}'', \mathrm{F}'.\mathrm{F}, \mathcal{B})$, sont égaux. Par conséquent $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière, car on a $\hat{\mathrm{F}}' < (\mathcal{B}'', \mathrm{F}', \mathcal{B}')$ et $\hat{\mathrm{F}} < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$.

Corollaire 1. — *$\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ est une sous-catégorie saturée par induction de $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ et la relation d'ordre induite par $<$ sur $\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ est définie par :*

$\mathrm{F}_1 < \mathrm{F}$ *si, et seulement si, $\alpha(\mathrm{F}_1)$ et $\beta(\mathrm{F}_1)$ sont des sous-classes saturées par induction dans $\alpha(\mathrm{F})$ et $\beta(\mathrm{F})$ respectivement et si F_1 est plein dans F, c'est-à-dire si*

$$\mathrm{F}_1 = \beta(\mathrm{F}_1).\mathrm{F}.\alpha(\mathrm{F}_1).$$

Démonstration. — Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ et $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) < \mathrm{F}$ dans $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$. Montrons que l'on a $\mathcal{B}_1 = a(\mathrm{F}_1)$ et $\mathcal{B}'_1 = b(\mathrm{F}_1)$. En effet, soit $g \in a(\mathrm{F}_1)$. Comme

$$\alpha(g) \in \alpha(\mathrm{F}_1) \subset \alpha(\mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad \beta(g) \in \alpha(\mathrm{F}_1),$$

il existe $f_1 \in \mathrm{F}_1$ tel que $\alpha(f_1) = \beta(g)$ et on a $f_1.g \in \mathrm{F}_1.a(\mathrm{F}_1) = \mathrm{F}_1$. Soit $f \in \mathrm{F}$ et $\alpha(f) = \beta(g)$; il existe $g' \in b(\mathrm{F})$ tel que $f = g'.f_1$, d'où :

$$f.g = g'.f_1.g \in b(\mathrm{F}).\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{F}.$$

On en déduit $g \in a(\mathrm{F})$ et $g \in \mathcal{B}_1$, car $\mathcal{B}_1$ est un sous-groupoïde plein de $a(\mathrm{F})$. De même $\mathcal{B}_1{}' = b(\mathrm{F}_1)$, de sorte que

$$(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$$

et $\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ est une sous-catégorie saturée par induction de $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot), <)$.

— Montrons que la relation d'ordre induite par $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$ sur $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$ est définie par:

$$F_1 < F \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 = \beta(F_1).F.\alpha(F_1).$$

En effet, si $F_1 < F$, on a vu au cours de la démonstration du théorème 2 que l'on a $F_1 = \beta(F_1).F.\alpha(F_1)$. Inversement soient F et F_1 deux atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$ tels que $F_1 = \beta(F_1).F.\alpha(F_1)$. Soit $g \in \alpha(F_1).a(F).\alpha(F_1)$; si $f_1 \in F_1$ et $\alpha(f_1) = \beta(g)$, on a:

$$f_1.g \in F_1.a(F).\alpha(F_1) \subset \beta(F_1).F.\alpha(F_1) = F_1,$$

d'où $g \in a(F_1)$. De même $\beta(F_1).b(F).\beta(F_1) \subset b(F_1)$. Comme $F_1 \subset F$, il en résulte

$$(\beta(F_1).b(F).\beta(F_1),\ F_1,\ \alpha(F_1).a(F).\alpha(F_1)) < F$$

dans $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$, et, d'après le début de la démonstration, $F_1 < F$ dans $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$.

Corollaire 2. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *un groupoïde ordonné régulier; alors* $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$ *est un groupoïde quasi-inductif régulier admettant pour sous-groupoïde un sous-groupoïde* $\mathcal{C}^{>}$ *équivalent à* $\mathcal{C}^{\cdot}$, *sur lequel* $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$ *induit une structure d'ordre isomorphe à* $(\mathcal{C}, <)$.

Démonstration. — $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$ est évidemment un groupoïde ordonné. Soit $f \in \mathcal{C}$ et $f^{>}$ la classe des minorants de f dans $(\mathcal{C}, <)$; si $f_1 < f$, $f_2 < f$ et $\beta(f_1) = \beta(f_2)$, on a $f_1^{-1}.f_2 < \alpha(f)$; si de plus $f_3 < f$ et $\alpha(f_3) = \alpha(f_1)$, on obtient: $f_3.f_1^{-1}.f_2 < f.f^{-1}.f = f$, donc $f^{>} \in \mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$, en vertu du théorème 1-1. Soient $f \in \mathcal{C}$ et $f' \in \mathcal{C}$. Si $\alpha(f') = \beta(f)$, on a:

$$f'^{>}.f^{>} = (f'.f)^{>},$$

car $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est un groupoïde ordonné régulier. Supposons $f' < f$ dans $(\mathcal{C}, <)$; soit $f_1' < f$ tel que $\alpha(f_1') < \alpha(f')$ et

$$\beta(f_1') < \beta(f').$$

On a:

$$f_1' = \beta(f_1')(f\alpha(f_1')) < \beta(f')(f\alpha(f')) = f'$$

et par suite $f'^{>}$ est plein dans $f^{>}$, d'où $f'^{>} < f^{>}$ dans $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$. Enfin, si $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ et $e < \alpha(f)$, on trouve, par définition du pseudo-produit

$$f^{>}e^{>} = (fe)^{>}.$$

Ceci montre que la bijection : $f \to f^{>}$ identifie $\mathcal{C}^{\cdot}$ à un sous-groupoïde régulier de $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ un groupoïde ordonné régulier.

DÉFINITION 6. — *On appellera* atlas régulier de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *un atlas* F *de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *tel que* $a(F)$ *et* $b(F)$ *soient des sous-groupoïdes réguliers de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *et que l'on ait:* $Fa(F) \subset F$ *et* $b(F)F \subset F$.

PROPOSITION 15. — *Pour qu'une sous-classe* F *de* $\mathcal{C}$ *soit un atlas régulier de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, *il faut et il suffit que l'on ait:*

$$F(F^{-1}F) \subset F.$$

Démonstration. — Supposons $F(F^{-1}F) \subset F$. On a :

$$F.(F^{-1}.F) \subset F(F^{-1}F) \subset F,$$

donc F est un atlas de $\mathcal{C}^{\cdot}$, en vertu du théorème 1-1. De plus :

$$Fa(F) \subset F(F^{-1}F) \subset F.$$

Supposons $e \in \alpha(F)$, $e' \in \alpha(F)$ et $e \cap e'$ défini; il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) = e$ et il existe $f' \in F$ tel que $e' = \alpha(f')$; comme $fe' \in F\alpha(F) \subset F$, on a $\alpha(fe') = e \cap e' \in \alpha(F)$. Supposons $g \in a(F)$, $e \in \alpha(F)$ et $e < \beta(g)$; soit $f \in F$ tel que $\alpha(f) = \beta(g)$. Les relations :

$$fe \in F \qquad \text{et} \qquad (fe)g \in Fa(F) \subset F$$

entraînent $h = (fe)^{-1}.(fe)g \in F^{-1}.F$. Comme le pseudoproduit est associatif, en vertu de la proposition 5, on obtient :

$$h = ef^{-1}feg = eg, \qquad \text{car} \qquad e\alpha(f)e = e.$$

Donc $a(F)$ est un sous-groupoïde régulier de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; on a aussi :

$$(FF^{-1})F \subset F(F^{-1}F) \subset F,$$

car $F\alpha(F) \subset F$ entraîne

$$FF^{-1} = F.F^{-1};$$

ceci permet, par un raisonnement analogue, de démontrer que $b(F)$ est un sous-groupoïde régulier de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et que $b(F)F \subset F$, de sorte que F est un atlas régulier de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

— Inversement, soit F un atlas régulier de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. On a $Fa(F) \subset F$. Montrons que $a(F) = F^{-1}F$, d'où résultera la proposition. En effet, soient $f \in F$ et $f' \in F$. Si $f^{-1}f'$ est défini, on a :

$$\beta(f)f' \in \beta(F)F \subset F, \qquad \beta(f')f \in F$$

et

$$f^{-1}f' = (\beta(f')f)^{-1} . (\beta(f)f') \in F^{-1} . F,$$

d'où

$$F^{-1}F \subset F^{-1} . F.$$

Comme $F^{-1} . F \subset F^{-1}F$, on en déduit $a(F) = F^{-1} . F = F^{-1}F$ et $F(F^{-1}F) = Fa(F) \subset F$.

THÉORÈME 3. — *La classe $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ des atlas réguliers de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de*

$$(\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot), <) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <),$$

est un groupoïde quasi-inductif régulier à un sous-groupoïde duquel s'identifie $(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

Démonstration. — Supposons $F \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $F_1 < F$ dans dans $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot), <)$. Les sous-groupoïdes $a(F_1)$ et $b(F_1)$ de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ sont réguliers, car ils sont saturés par induction dans les sous-groupoïdes réguliers $a(F)$ et $b(F)$. Comme F_1 est saturé par induction dans F, on a $F_1 a(F_1) \subset F_1$, d'où $F_1 \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-classe saturée par induction de $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot), <)$. On a aussi $F^{-1} \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$, car $F^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ et :

$$F^{-1}((F^{-1})^{-1}F^{-1}) = (FF^{-1}F)^{-1} \subset F^{-1},$$

en vertu de la proposition 15. Supposons de plus $F' \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $a(F') = b(F)$. On a $F' . F \in \mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$ et les groupoïdes

$$a(F' . F) = a(F) \qquad \text{et} \qquad b(F' . F) = b(F')$$

sont réguliers. Soient $f \in F$ et $f' \in F$ tels que $f'f$ soit défini. On a :

$$f'f = (f'\beta(f)) . (\alpha(f')f) \in F' . F,$$

de sorte que $F'F \subset F' . F$. Évidemment, $F' . F \subset F'F$, d'où $F' . F = F'F$. Il en résulte :

$$(F'F)a(F) = F'(Fa(F)) = F'F = F' . F$$

et

$$b(F')(F'F) = (b(F')F')F = F' . F.$$

Par suite $F' . F \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)$.

Corollaire. — *Soit* $\overline{\mathcal{C}}_f$ *la sous-classe de* $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *formée des atlas saturés par induction dans* $(\mathcal{C}, <)$. *Alors* $(\overline{\mathcal{C}}_f^\cdot, <)$ *est un sous-groupoïde saturé par induction de* $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$, *à un sous-groupoïde duquel s'identifie* $\mathcal{C}^\cdot$ *La relation d'ordre induite par* $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ *sur* $\overline{\mathcal{C}}_f$ *est définie par:*

$$F' < F \quad \textit{si, et seulement si, on a} \quad F' = \beta(F').F.\alpha(F').$$

Démonstration. — Soient $F \in \overline{\mathcal{C}}_f$ et $F' \in \overline{\mathcal{C}}_f$. Si $F' < F$, on a $F' = \beta(F').F.\alpha(F')$. Inversement si $F' = \beta(F').F.\alpha(F')$, on obtient $F' \subset F$ et, $\alpha(F')$ et $\beta(F')$ étant des sous-classes saturées par induction de $(\mathcal{C}_0^\cdot, <)$, elles sont aussi saturées par induction dans $\alpha(F')$ et $\beta(F')$ respectivement. Donc, en vertu du corollaire 1 du théorème 2, on a $F' < F$. Le reste du corollaire est évident.

Théorème 4. — *Soit* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *un groupoïde fonctoriellement ordonné. Alors* $(\hat{\mathcal{C}}^\cdot, <)$ *est un groupoïde sous-inductif, où* $\hat{\mathcal{C}}$ *est le sous-groupoïde plein de* $\overline{\mathcal{C}}_f$ *dont les unités sont majorées dans* $(\mathcal{C}, <)$ *(et par suite dans* $(\mathcal{C}_0^\cdot, <)$*).*

Démonstration. — Supposons $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ fonctoriellement ordonné; alors $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est un groupoïde ordonné régulier [3]. Soit $\mathcal{B} \in \hat{\mathcal{C}}_0^\cdot$ et $F < \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{B}$ est majoré par $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$, on a $F \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}_0^\cdot$ et $(\hat{\mathcal{C}}^\cdot, <)$ est fonctoriellement ordonné. Comme $\hat{\mathcal{C}}$ est saturé par induction dans $(\overline{\mathcal{C}}_f, <)$, $(\hat{\mathcal{C}}^\cdot, <)$ est un groupoïde quasi-inductif (théorème 3), donc sous-inductif.

Remarque. — Le groupoïde $\mathcal{H}^f(\mathcal{C}^\cdot)$ des atlas faibles complets d'un groupoïde sous-préinductif $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ considéré dans [1] est un sous-groupoïde saturé par induction de

$$(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$$

3. — Groupoïde d'holonomie complet.

Soit (T, T′) un feuilletage topologique localement simple (nous supposons connues les notions de [4]).

Définition 1. — *Soient* W *et* W′ *deux ouverts simples tels que* W′ *soit distingué dans* W *et que l'ouvert obtenu par saturation* *de* W′ *relativement à la relation d'équivalence sous-jacente à* $(T, T')_W$ *soit identique à* W. *Alors nous dirons que le couple* (W′, W), *ou le couple* (W, W′), *est* un chaînon pur. *On appelle* chaîne pure *une suite* $\Gamma = (W_n, \ldots, W_1)$ *telle que, pour tout* $i < n$, *le couple* (W_i, W_{i+1}) *soit un chaînon pur.*

Cette définition est différente formellement de celle de [4]. A une chaîne pure $(W_n, \ldots, W_1)$ correspond la chaîne pure au sens de [4] : $(W_1, \ldots, W_n; W'_{1,2}, \ldots, W'_{n-1,n})$, où $W'_{i,i+1}$ est contenu dans W_i et dans W_{i+1} et égal à l'un de ces deux ouverts. Inversement si on a une chaîne pure

$$(W_1, \ldots, W_n; W_{1,2}, \ldots, W_{n-1,n}),$$

au sens de [4], alors la suite

$$(W_1, W_{1,2}, W_2, W_{2,3}, \ldots, W_{n-1,n}, W_n)$$

est une chaîne pure.

Soit $\mathcal{J}'$ le groupoïde formé des triplets (U′, f, U) tels que U et U′ soient deux ouverts simples et f un homéomorphisme de l'espace transverse $\check{U}$ sur l'espace transverse $\check{U}'$, muni de la loi de composition :

$$(U'_1, f_1, U_1).(U', f, U) = (U'_1, f_1 f, U)$$

si, et seulement si, $U' = U_1$. $\mathcal{J}'$ est un groupoïde ordonné pour la relation d'ordre :

$(U'_1, f_1, U_1) < (U', f, U)$ si, et seulement si, U'_1 est distingué dans U′, U_1 est distingué dans U et $u' f_1 = f u$, où u et u' sont les injections canoniques de $\check{U}_1$ dans $\check{U}$ et de $\check{U}'_1$ dans $\check{U}'$ respectivement. La classe des unités de $\mathcal{J}'$ est identifiée à la classe des ouverts simples.

Soit H′ le groupoïde d'holonomie, qui est le sous-groupoïde de $\mathcal{J}'$ engendré par les triplets (U′, f, U) tels que (U′, U) soit un chaînon pur et que f soit la bijection canonique de $\check{U}$ sur $\check{U}'$.

Proposition 1. — $(H', <)$ *est un groupoïde ordonné régulier, la relation d'ordre étant celle induite par* $(\mathcal{J}', <)$.

En effet, H′ est évidemment un groupoïde ordonné. Supposons $U < U_1$ et $h = (U_1, f_1, U_1)$. On a $hU = (U', f, U)$, où f est la restriction de f_1 à U_1 et U′ est la réunion des plaques de U'_1 appartenant à $f_1(\check{U})$.

DÉFINITION 2. — *On appellera* groupoïde d'holonomie faiblement complet *le sous-groupoïde* $(\overline{H}'_f, <)$ *de* $(\mathcal{A}(H', <), <)$ *formé des atlas* F *saturés par induction dans* $(H', <)$.

D'après le corollaire du théorème 3-2, $(\overline{H}'_f, <)$ est un groupoïde quasi-inductif régulier et H' s'identifie à un sous-groupoïde de $(\overline{H}'_f, <)$, en identifiant $h \in H'$ à la classe des minorants de h dans $(H', <)$.

En particulier, soit U un ouvert simple de (T, T') et soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts saturés de U, telle que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = U.$$

Soit A la classe formée des minorants d'un élément quelconque des U_i. Alors A est un élément de $\overline{H}'_f$; mais les éléments A et $U^{>}$ sont différents, si $U \neq U_i$ pour tout $i \in I$. Toutefois du point de vue holonomie ces deux éléments doivent généralement être considérés comme égaux. Nous allons montrer qu'on peut construire un groupoïde quasi-inductif régulier quotient de $(\overline{H}'_f, <)$ dans lequel ces deux éléments sont confondus.

Si $f \in H'$, nous désignerons par $\underline{f}$ l'isomorphisme de $\alpha(f)^{\mathrm{U}}$ sur $\beta(f)^{\mathrm{U}}$ tel que $f = (\beta(f), \underline{f}, \alpha(f))$.

DÉFINITION 3. — *Soit* C *une sous-classe saturée par induction de* $(H', <)$. *On dira que* C *admet* f *pour* sous-agrégat admissible *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1) C *est majorée par* f.

2) *Soient* $x \in \alpha(f)$ *et* y *un point de la plaque* $\underline{f}(\check{x})$ *de* $\beta(f)$; *il existe* $g \in C$ *tel que* $x \in \alpha(g)$ *et* $y \in \beta(g)$.

En particulier si $f \in H'$, alors f est le seul sous-agrégat admissible de la classe des minorants de f.

PROPOSITION 2. — *Si* f *est un sous-agrégat admissible de* C, f *est le* f*-agrégat de* C *et* $\alpha(f)$ *(resp.* $\beta(f)$*) est l'ouvert réunion des ouverts appartenant à* $\alpha(C)$ *(resp. à* $\beta(C)$*).*

En effet, soit f' un majorant de C tel que $f' < f$; pour tout $x \in \alpha(f)$, il existe $g \in C$ tel que $x \in \alpha(g)$; il en résulte $x \in \alpha(f')$, donc $\alpha(f') = \alpha(f)$. De même $\beta(f') = \beta(f)$; d'où $f' = f$. Ceci prouve que f est un sous-agrégat de C.

Remarque. — Si une classe C saturée par induction admet un sous-agrégat f tel que $\alpha(f) = \bigcup \alpha(C)$ et $\beta(f) = \bigcup \beta(C)$ dans $\tilde{\mathfrak{E}}$, il n'en résulte pas que f est un sous-agrégat admissible de C.

PROPOSITION 3. — *Si* C (*resp.* C′) *admet un sous-agrégat admissible* f (*resp.* f') *et si* $f'.f$ *est défini, alors* $f'.f$ *est un sous-agrégat admissible de la classe* C′.C *des composés* $g'.g$, *où* $g \in C$ *et* $g' \in C'$.

Démonstration. — Soient

$$x \in \alpha(f), \qquad y \in \check{f}(\check{x}) \qquad \text{et} \qquad y' \in \check{f}'(\check{y}) = (\check{f}'.f)(\check{x}).$$

Il existe $g \in C$ tel que $x \in \alpha(g)$ et $y \in \beta(g)$; il existe $g' \in C'$ tel que $y \in \alpha(g')$ et $y' \in \beta(g')$. Soit U un ouvert distingué dans $\alpha(g')$ et dans $\beta(g)$, contenant y; on a : $(g'U).(Ug) \in C'.C$, $x \in \alpha(Ug)$ et $y' \in \beta(g'U)$, donc $f'.f$ est un sous-agrégat admissible de C′.C.

DÉFINITION 4. — *On dira que* C *est* une sous-classe complète de $(H', <)$ *si* C *est une sous-classe de* H′ *saturée par induction et telle que* $f \in C$ *si* f *est un sous-agrégat admissible d'une sous-classe* C′ *de* C. *L'intersection* $\overline{A}$ *des sous-classes complètes contenant une partie* A *de* H′ *sera appelée* sous-classe complète engendrée par A.

PROPOSITION 4. — *Si* C *est une sous-classe de* H′ *saturée par induction, la sous-classe complète engendrée par* C *est la classe* $\overline{C}$ *des sous-agrégats admissibles des sous-classes de* C.

Démonstration. — Il suffit de montrer que $\overline{C}$ est saturée par induction. Soient $f \in \overline{C}$, $f = \bigcup^{f} C'$ et $f' < f$. Soit C″ la classe des $g' \in C'$ tels que $g' < f'$. Soient $x \in \alpha(f')$ et $y \in \check{f}'(\check{x})$. Comme $y \in \check{f}(\check{x})$, il existe $g \in C$ tel que $x \in \alpha(g)$ et $y \in \beta(g)$. Soit U un ouvert distingué dans $\alpha(g)$ et dans $\alpha(f')$ et soit $x \in U$; on a $y \in \beta(gU)$ et $y \in \beta(f'U)$. Soit U′ un ouvert contenant y et distingué dans $\beta(gU)$ ainsi que dans $\beta(f'U)$; les éléments $U'(gU)$ et $U'(f'U)$ sont égaux, car ils sont majorés par f, ont même unité à droite U_1 et même unité à gauche U′. Il en résulte $U'(gU) \in C''$, donc f' est un sous-agrégat admissible de C″ et $f' \in \overline{C}$.

DÉFINITION 5. — *On appelle* atlas complet saturé de H' *un atlas* A *de* H' *tel que* A *soit une sous-classe complète de* $(H', <)$.

Soit $\overline{H}'$ la classe des atlas complets saturés de H'. Si $A \in \overline{H}'$, nous désignerons par $\overline{a}(A)$ (resp. $\overline{b}(A)$) la classe complète engendrée par $a(A)$ (resp. par $b(A)$).

PROPOSITION 5. — *Soit* $A \in \overline{H}'$; *alors* $\overline{a}(A)$ *et* $\overline{b}(A)$ *sont des groupoïdes tels que* $A.\overline{a}(A) = \overline{b}(A).A = A$.

En effet, les conditions $\overline{h} \in \overline{b}(A)$, $\overline{h}' \in \overline{b}(A)$ et $\alpha(\overline{h}') = \beta(\overline{h})$ entraînent $\overline{h}'.\overline{h} \in \overline{b}(A)$, en vertu des propositions 3 et 4. Donc $\overline{b}(A)$ est un groupoïde. Si $f \in A$ et $\beta(f) = \alpha(\overline{h})$, $\overline{h}.f$ est le sous-agrégat admissible de la classe des composés $h''.f''$, où $f'' < f$, $h'' < \overline{h}$ et $h'' \in b(A)$. Comme $h''.f'' \in A$, on trouve $\overline{h}.f \in A$ et $\overline{b}(A).A \subset A$. D'où $\overline{b}(A).A = A$ et de même $A.\overline{a}(A) = A$.

PROPOSITION 6. — *Si* A *est une sous-classe de* H' *saturée par induction et si* $A.A^{-1}.A = A$, *la sous-classe complète* $\overline{A}$ *engendrée par* A *est un atlas complet saturé tel que* $\overline{a}(\overline{A}) = \overline{A^{-1}.A}$ et $\overline{b}(\overline{A}) = \overline{A.A^{-1}}$.

Démonstration. — Soient $\overline{f} \in \overline{A}$, $\overline{f}' \in \overline{A}$ et $\overline{f}'' \in \overline{A}$. Si

$$g = \overline{f}''.\overline{f}'^{-1}.\overline{f}$$

est défini, g est le sous-agrégat admissible de la classe des composés $f''.f'^{-1}.f \in A.A^{-1}.A = A$ tels que $f < \overline{f}, f' < \overline{f}'$ et $f'' < \overline{f}''$, en vertu de la proposition 3. Donc $\overline{A}.(\overline{A}^{-1}.\overline{A}) \subset \overline{A}$. Comme $\overline{A}$ est saturé par induction, il en résulte $\overline{A}(\overline{A}^{-1}\overline{A}) \subset \overline{A}$ et par suite $\overline{A}$ est un atlas complet saturé. De même la sous-classe complète engendrée par $A.A^{-1}$ est identique à la sous-classe complète $\overline{b}(\overline{A})$ engendrée par $\overline{A}.\overline{A}^{-1}$.

THÉORÈME 1. — $(\overline{H}', <)$ *est un groupoïde quasi-inductif régulier, la loi de composition étant définie par :*

$(A', A) \to A' \odot A = \overline{A'.A}$ *si, et seulement si,* $\overline{a}(A') = \overline{b}(A)$ *et la relation d'ordre par :*

$$A' < A \quad \textit{si, et seulement si,} \quad A' = \beta(A').A.\alpha(A').$$

$(\overline{\mathrm{H}}', <)$ *est un groupoïde quasi-inductif quotient* [5] *de* $(\overline{\mathrm{H}}'_f, <)$ *par la relation d'équivalence* ρ :

$$\mathrm{F}' \sim \mathrm{F} \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad \overline{\mathrm{F}}' = \overline{\mathrm{F}}.$$

Tout élément de $\overline{\mathrm{H}}'$ *est un sous-agrégat d'éléments de* H'.

Démonstration. — Si $\mathrm{A} \in \overline{\mathrm{H}}'$, on a évidemment $\mathrm{A}^{-1} \in \overline{\mathrm{H}}'$. Supposons $\mathrm{A}' \in \overline{\mathrm{H}}'$ et $\overline{a}(\mathrm{A}') = \overline{b}(\mathrm{A})$. La classe $\mathrm{A}'.\mathrm{A}$ est saturée par induction, car $(\mathrm{H}', <)$ est régulier. De plus :

$$\mathrm{A}'.\mathrm{A}.(\mathrm{A}'.\mathrm{A})^{-1}.\mathrm{A}'.\mathrm{A} = \mathrm{A}'.\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1}.\mathrm{A}'^{-1}.\mathrm{A}'.\mathrm{A} \subset \mathrm{A}'.\overline{b}(\mathrm{A}).\overline{a}(\mathrm{A}').\mathrm{A}$$

et

$$\mathrm{A}'.\overline{b}(\mathrm{A}).\overline{a}(\mathrm{A}').\mathrm{A} = \mathrm{A}'.\overline{a}(\mathrm{A}').\mathrm{A} = \mathrm{A}'.\mathrm{A}.$$

La proposition 6 entraîne $\mathrm{A}' \odot \mathrm{A} \in \overline{\mathrm{H}}'$ et

$$\overline{a}(\mathrm{A}' \odot \mathrm{A}) = \overline{(\mathrm{A}'.\mathrm{A})^{-1}.(\mathrm{A}'.\mathrm{A})} = \overline{\mathrm{A}^{-1}.\overline{a}(\mathrm{A}').\mathrm{A}}$$
$$= \overline{\mathrm{A}^{-1}.\overline{b}(\mathrm{A}).\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}^{-1}.\mathrm{A}} = \overline{a}(\mathrm{A}).$$

Si $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}'' \odot (\mathrm{A}' \odot \mathrm{A})$ est défini, A_1 est la sous-classe complète engendrée par $\mathrm{A}''.\mathrm{A}'.\mathrm{A}$, en vertu de la proposition 3, donc $\mathrm{A}_1 = (\mathrm{A}'' \odot \mathrm{A}') \odot \mathrm{A}$, et la loi de composition $\odot$ est associative. Par suite $\overline{\mathrm{H}}'$ est un groupoïde. Soit $\tilde{\rho}$ l'application : $\mathrm{F} \to \overline{\mathrm{F}}$ de $\overline{\mathrm{H}}'_f$ sur $\overline{\mathrm{H}}'$. On a :

$$\tilde{\rho}(a(\mathrm{F})) = \overline{a}(\mathrm{F}) = \overline{a}(\overline{\mathrm{F}}), \qquad \text{pour tout} \quad \mathrm{F} \in \overline{\mathrm{H}}'_f,$$

et $$\tilde{\rho}(\mathrm{F}'.\mathrm{F}) = \overline{\mathrm{F}'.\mathrm{F}} = \overline{\mathrm{F}}' \odot \overline{\mathrm{F}} = \tilde{\rho}(\mathrm{F}') \odot \tilde{\rho}(\mathrm{F}),$$

si $\mathrm{F}' \in \overline{\mathrm{H}}'_f$ et $a(\mathrm{F}') = b(\mathrm{F})$. Donc $\tilde{\rho}$ définit un foncteur de $\overline{\mathrm{H}}'_f$ sur $\overline{\mathrm{H}}'$ et, en vertu de la proposition 23 [5], $\overline{\mathrm{H}}'$ est un groupoïde quotient de $\overline{\mathrm{H}}'_f$.

— D'après le corollaire du théorème 3-2, la relation d'ordre indiquée sur H' est celle induite par $(\overline{\mathrm{H}}'_f, <)$. Une famille $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'éléments de $\overline{\mathrm{H}}'$, majorée par $\mathrm{A} \in \overline{\mathrm{H}}'$, admet pour sous-agrégat dans $(\overline{\mathrm{H}}', <)$ l'atlas $\overline{\mathrm{A}}_\mathrm{I}$ où A_I est le A-agrégat de $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ dans $\overline{\mathrm{H}}'_f$. Donc $(\overline{\mathrm{H}}', <)$ est une classe sous-inductive. De plus, on a $((\overline{\mathrm{H}}', <), \tilde{\rho}, (\overline{\mathrm{H}}'_f, <)) \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$.

— Soient $\mathrm{A} \in \overline{\mathrm{H}}'$ et $\mathrm{A}' \in \overline{\mathrm{H}}'$. Supposons $\mathrm{A}' < \mathrm{A}$. Comme $a(\mathrm{A}') = \alpha(\mathrm{A}').a(\mathrm{A}).\alpha(\mathrm{A}')$, on obtient, en utilisant la proposition 3 :

$$\overline{a}(\mathrm{A}') = \overline{\alpha(\mathrm{A}').a(\mathrm{A}').\alpha(\mathrm{A}')} = \alpha(\overline{a}(\mathrm{A}')).\overline{a}(\mathrm{A}).\alpha(\overline{a}(\mathrm{A}')),$$

c'est-à-dire $\overline{a}(A') < \overline{a}(A)$. De même $\overline{b}(A') < \overline{b}(A)$. Supposons de plus $A_1 \in \overline{H}'$, $A'_1 \in \overline{H}'$, $A'_1 < A$, $\overline{a}(A_1) = \overline{b}(A)$ et $\overline{a}(A'_1) = \overline{b}(A')$. Puisque $A'_1 \odot A'$ est la sous-classe complète engendrée par :

$$(\beta(A'_1).A_1.\alpha(A'_1)).(\beta(A').A.\alpha(A')),$$

elle est contenue dans la sous-classe complète engendrée par

$$C = \beta(A'_1).A_1.A.\alpha(A').$$

Soient $f_1 \in A_1$, $f \in A$ et $f_1.f \in C$. Il existe $f' \in A'$ tel que

$$\alpha(f') = \alpha(f)$$

et on a : $g' = f.f'^{-1} \in b(A)$. Il existe une sous-classe E de $\alpha(A'_1)$ dont $\alpha(g')$ est un sous-agrégat admissible, car

$$\alpha(g') \in \beta(A') \subset \overline{a}(A'_1).$$

Pour tout $e \in E$, on a $f_1 g' e \in A'_1$, puisque A'_1 est plein dans A_1, de sorte que $f'_1 = f_1.g'$ est un sous-agrégat admissible de la classe $f_1 g' E$ et appartient à A'_1. Il en résulte :

$$f_1.f = (f'_1.g'^{-1}).(g'.f') = f'_1.f' \in A'_1.A'.$$

Donc $A'_1 \odot A' = \overline{C}$ et $A'_1 \odot A' < A_1 \odot A$. Ceci montre que $(\overline{H}', <)$ est ordonné.

— Supposons $G < \overline{a}(A)$ et $G \in \overline{H}'_0$. On a $A.G \in \overline{H}'_f$, et $A.G$ est le pseudoproduit de A et de G dans $\overline{H}'_f$. On en déduit $\overline{A.G} \in \overline{H}'$ et par suite $\overline{A.G}$ est le pseudoproduit AG dans $(\overline{H}', <)$; on a :

$$\overline{a}(\overline{A.G}) = \overline{G^{-1}.A^{-1}.A.G} = G.$$

De même si $G' < \overline{b}(A)$ et $G' \in \overline{H}'_0$, on trouve $G'A = \overline{G'.A}$ et $\overline{b}(G'A) = G'$. Par conséquent $(\overline{H}', <)$ est un groupoïde ordonné régulier et, à l'aide de ce qui précède et du corollaire 2 de la proposition 12-2, on voit que $(\overline{H}', <)$ est un groupoïde quasi-inductif régulier. H' s'identifie au sous-groupoïde de $\overline{H}'$ formé des $f^{>}$, où $f \in H'$. Tout $A \in \overline{H}'$ est le A-agrégat de la classe des $f^{>}$, $f \in A$.

Définition 6. — *Avec les notations du théorème* 1, *on appellera* $(\overline{H}', <)$ le groupoïde d'holonomie complet.

Remarque. — $(\overline{\mathrm{H}}', <)$ n'est pas un groupoïde sous-inductif, car les relations $\mathrm{A}' < \mathrm{A}$ et $\mathrm{A}'' < \mathrm{A}$ n'entraînent pas :

$$\bar{b}(\mathrm{A}' \cap \mathrm{A}'') = \bar{b}(\mathrm{A}') \cap \bar{b}(\mathrm{A}'').$$

4. — 0-cocycle au-dessus d'une catégorie.

Soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie. Soit Σ une classe. Nous supposons que $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie d'opérateurs [1 *a*] sur Σ relativement à la loi de composition K. Soit $\eta = [\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$ l'espèce de structures correspondante, où π est l'application : $z \to e$ si $\mathrm{K}(z, e)$ est défini, de Σ dans $\mathcal{C}_0^{\cdot}$. Si $\mathrm{K}(f, z)$ est défini, nous poserons :

$$\mathrm{K}(f, z) = fz.$$

Soit $\overline{\Sigma}^{\cdot}$ la catégorie des hypermorphismes associée à η, dont les éléments [1 *a*] sont les couples $(f, z) \in \mathcal{C} \times \Sigma$ tels que $\mathrm{K}(f, z)$ soit défini, la loi de composition étant définie par :

$$(f', z').(f, z) = (f'.f, z) \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad z' = fz.$$

Nous identifions la classe des unités de $\overline{\Sigma}^{\cdot}$ à Σ, en identifiant (e, z) avec z; soit $\bar{\pi}$ le foncteur de $\overline{\Sigma}^{\cdot}$ sur $\mathcal{C}^{\cdot}$ défini par : $(f, z) \to f$.

Définition 1. — *On appelle* 0-cocycle sur une sous-catégorie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$ *un foncteur* $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ *tel que* $\bar{\pi}\Phi(f) = f$ *pour tout* $f \in \mathcal{B}$. *Si* $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ *est un* 0-*cocycle, la sous-classe* $\Phi(\mathcal{B}_0)$ *de* Σ est appelée une η-section sur $\mathcal{B}$.

Si $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ est un 0-cocycle, alors $\Phi(\mathcal{B})$ est une sous-catégorie de $\overline{\Sigma}^{\cdot}$.

Proposition 1. — *Pour qu'une sous-classe* $\overline{\mathcal{B}}_0$ *de* Σ *soit une* η-*section sur* $\mathcal{B}$, *il faut et il suffit que la restriction* $\pi/\overline{\mathcal{B}}_0$ *de* π *à* $\overline{\mathcal{B}}_0$ *soit une bijection sur* $\mathcal{B}_0$ *et que* $[\mathcal{B}^{\cdot}, \pi/\overline{\mathcal{B}}_0, \overline{\mathcal{B}}_0]$ *soit une sous-espèce de structures* [1 *a*] *de* $[\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$.

Démonstration. — Pour que $[\mathcal{B}^{\cdot}, \pi/\overline{\mathcal{B}}_0, \overline{\mathcal{B}}_0]$ soit une sous-espèce de structures de $[\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$, il faut et il suffit que, pour tout $f \in \mathcal{B}$, on ait :

$$s' = fs, \qquad \text{si} \qquad s \in \overline{\mathcal{B}}_0, \qquad s' \in \overline{\mathcal{B}}_0,$$
$$\pi(s) = \alpha(f) \qquad \text{et} \qquad \pi(s') = \beta(f).$$

Si $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ est un 0-cocycle, on a :

$$\Phi(f) = (f, s), \qquad \text{où} \qquad s = \Phi(\alpha(f))$$

et

$$s' = \Phi(\beta(f)) = \beta(\Phi(f)) = fs.$$

— Inversement si les conditions de la proposition sont vérifiées, alors l'application $\Phi : f \rightarrow (f, s)$, où $f \in \mathcal{B}$, $s \in \overline{\mathcal{B}}_0$ et $\pi(s) = \alpha(f)$, définit un 0-cocycle $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$.

Nous désignerons par $Z^0(\Sigma)$ la classe des 0-cocycles sur les sous-catégories de $\mathcal{C}^{\cdot}$. En particulier, $Z^0(\Sigma)$ contient la classe des 0-cocycles $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{C}^{\cdot})$. Soit $Z^0_g(\Sigma)$ la sous-classe des 0-cocycles $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ tels que $\mathcal{B}$ soit un sous-groupoïde de $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Théorème 1. — *La sous-catégorie pleine* $\overline{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot})$ *de* $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{\cdot})$ *formée des atlas* $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ *tels qu'il existe un* 0-*cocycle sur* $\mathcal{B}$ *opère sur la classe* $Z^0_g(\Sigma)$ *relativement à la loi de composition :*

$$((\mathcal{B}', F, \mathcal{B}_1), (\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})) \rightarrow (\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', \mathcal{B}'^{\cdot})$$

si, et seulement si,

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}, \qquad \textit{où} \qquad \Phi'(g') = (g', fs)$$

si $\qquad f \in F,\ s = \Phi(\alpha(f)) \qquad$ *et* $\qquad \beta(f) = \alpha(g')$.

La catégorie des hypermorphismes $\overline{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot}) * Z^0_g(\Sigma)$ *est équivalente à une sous-catégorie de* $\overline{\mathcal{A}}(\overline{\Sigma}^{\cdot})$.

Démonstration. — Soit $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot}) \in Z^0_g(\Sigma)$ et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot})$. Soit $g' \in \mathcal{B}'$; il existe $f \in F$ tel que $\beta(f) = \alpha(g')$ et le composé fs, où $s = \Phi(\alpha(f))$, est défini. Posons : $\Phi'(g') = (g', fs)$. Soit $f' \in F$ tel que $\beta(f') = \alpha(g')$ et $s_1 = \Phi(\alpha(f'))$. Il existe $g \in \mathcal{B}$ tel que $f = f'.g$. Comme Φ définit un foncteur, on a : $s_1 = gs$. Il en résulte :

$$f's_1 = f'(gs) = (f'.g)s = fs;$$

par suite $\Phi'(g')$ ne dépend pas du choix de $f \in F$. Soit aussi $g'' \in \mathcal{B}'$ tel que $\alpha(g'') = \beta(g')$. On trouve :

$$\Phi'(g'') = (g'', (g'.f)s),$$

car $g'.f \in F$, et :

$$\Phi'(g''.g') = (g''.g', fs) = \Phi'(g'').\Phi'(g').$$

Donc $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', \mathcal{B}'^{\cdot})$ est un 0-cocycle.

— Supposons de plus $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot)$; on a :

$$(\mathcal{B}'', F'.\, F, \mathcal{B}) \in \overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot),$$

de sorte que, pour tout $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot) \in Z_g^0(\Sigma)$, le composé :

$$(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi'', \mathcal{B}''^\cdot) = (\mathcal{B}'', F'.\, F, \mathcal{B})(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)$$

est défini. Puisque :

$$(f'.\, f)s = f'(fs), \qquad \text{si} \qquad f \in F, \qquad f' \in F' \qquad \text{et} \qquad s \in \Sigma,$$

on obtient :

$$(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi'', \mathcal{B}''^\cdot) = (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}')(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi', \mathcal{B}'^\cdot).$$

On en déduit que $\overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot)$ est une catégorie d'opérateurs sur $Z_g^0(\Sigma)$.

— Soit $((\mathcal{B}', F, \mathcal{B}), (\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)) \in \overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot) * Z_g^0(\Sigma)$ un couple composable dont le composé est $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi', \mathcal{B}'^\cdot)$. Posons $\overline{\mathcal{B}} = \Phi(\mathcal{B})$ et $\overline{\mathcal{B}}' = \Phi'(\mathcal{B}')$. Soit $\overline{F}$ la classe des couples $(f,s) \in \overline{\Sigma}$, où $f \in F$ et $s \in \overline{\mathcal{B}}_0$. Montrons que $(\overline{\mathcal{B}}', \overline{F}, \overline{\mathcal{B}}) \in \overline{\mathcal{A}}(\overline{\Sigma}^\cdot)$. En effet, $\overline{\mathcal{B}}$ et $\overline{\mathcal{B}}'$ sont des sous-groupoïdes de $\overline{\Sigma}^\cdot$ et on a :

$$\alpha(\overline{F}) = \overline{\mathcal{B}}_0 \qquad \text{et} \qquad \beta(\overline{F}) = \overline{\mathcal{B}}'_0.$$

Soit $(f, s) \in \overline{F}$ et $(g', fs) \in \overline{\mathcal{B}}'$. On a :

$$(g', fs).(f, s) = (g'.f, s) \in \overline{F}, \qquad \text{car} \qquad g'.f \in F;$$

si $(g, s_1) \in \overline{\mathcal{B}}$ et $gs_1 = s$, on obtient de même :

$$(f, s).(g, s_1) = (f.g, s_1) \in \overline{F}.$$

Soient $(f, s) \in \overline{F}$ et $(f', s) \in \overline{F}$. Il existe $g' \in \mathcal{B}'$ tel que $f' = g'.f$ et par suite :

$$(f', s) = (g', fs).(f, s), \qquad \text{où} \qquad (g', fs) = \Phi'(g') \in \overline{\mathcal{B}}'.$$

Enfin, si $(f', s_1) \in \overline{F}$ et $f's_1 = fs$, il existe $g \in \mathcal{B}$ tel que $f = f'.g$ et il s'ensuit :

$$(f, s) = (f', s_1).(g, s), \qquad \text{où} \qquad (g, s) = \Phi(g) \in \overline{\mathcal{B}}.$$

Donc $(\overline{\mathcal{B}}', \overline{F}, \overline{\mathcal{B}}) \in \overline{\mathcal{A}}(\overline{\Sigma}^\cdot)$. Soit μ l'application :

$$h = ((\mathcal{B}', F, \mathcal{B}), (\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)) \to (\overline{\mathcal{B}}', \overline{F}, \overline{\mathcal{B}})$$

de $\overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot) * Z_g^0(\Sigma)$ dans $\overline{\mathcal{A}b}(\overline{\Sigma}^\cdot)$. Si on a aussi :

$$h' = ((\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'), (\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi', \mathcal{B}'^\cdot)) \in \overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot) * Z_g^0(\Sigma),$$

on trouve :

$$\mu(h'. h) = (\overline{\mathcal{B}}'', \overline{F}'. \overline{F}, \overline{\mathcal{B}}) = \mu(h').\mu(h),$$

car la restriction de $\overline{\pi}$ à $\overline{F}$ et à $\overline{F}'$ est une bijection sur F et F' respectivement. Par conséquent μ définit un foncteur de $\overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot) * Z_g^0(\Sigma)$ sur la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{A}b}(\overline{\Sigma}^\cdot)$ ayant pour unités les groupoïdes $\overline{\mathcal{B}}$ tels que la restriction de $\overline{\pi}$ à $\overline{\mathcal{B}}$ soit une bijection sur $\overline{\pi}(\overline{\mathcal{B}})$.

Nous désignerons par $\overline{Z}^0(\eta)$ l'espèce de structures $(\overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot), Z^0(\pi), Z_g^0(\Sigma))$ où $Z^0(\pi)$ est l'application :

$$(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot) \to \mathcal{B}.$$

Corollaire. — *$\overline{Z}^0(\eta)$ admet pour sous-espèce de structures l'espèce de structures $(Z^0(\mathcal{C}^\cdot), Z^0(\pi), Z_g^0(\Sigma))$, où $Z^0(\mathcal{C}^\cdot)$ désigne la sous-catégorie de $\overline{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot)$ dont les éléments sont les atlas de $\mathcal{C}^\cdot$; la catégorie des hypermorphismes correspondante est équivalente à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}b(\overline{\Sigma}^\cdot)$.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, si

$$(\overline{\mathcal{B}}', \overline{F}, \overline{\mathcal{B}}) \in \mu(Z^0(\mathcal{C}^\cdot) * Z_g^0(\Sigma))$$

alors on a : $\overline{\mathcal{B}} = a(\mathrm{F})$ et $\overline{\mathcal{B}}' = b(\mathrm{F})$, le reste du corollaire résultant facilement de ce qui précède. Soit donc $\overline{g} \in \overline{\Sigma}$ tel que :

$$\overline{f}.\overline{g} \in \overline{F} \qquad \text{pour tout} \quad \overline{f} \in \overline{F}.$$

Soit $g = \overline{\pi}(\overline{g})$. Si $f \in \mathrm{F}$ et $\alpha(f) = \beta(g)$, on a, par construction :

$$(f, \beta(\overline{g})) \in \overline{F},$$

d'où $\qquad \overline{f}' = (f, \beta(\overline{g})).\overline{g} \in \overline{F} \qquad$ et $\qquad \overline{\pi}(\overline{f}') \in \mathrm{F}.$

Par suite $\overline{\pi}(\overline{g}) \in a(\mathrm{F})$ et $\overline{g} \in \overline{\mathcal{B}}$. Il en résulte $\overline{\mathcal{B}} = a(\overline{F})$. De même $\overline{\mathcal{B}}' = b(\overline{F})$.

Application. — Soit $\mathcal{S}$ la classe des parties A de Σ telles que $A \subset \overset{-1}{\pi}(e)$, où $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$. La catégorie $\mathcal{C}^\cdot$ opère sur $\mathcal{S}$ relativement à la loi de composition :

$$(f, A) \to fA = \text{classe des } fa, \qquad \text{où} \quad a \in A,$$

si, et seulement si,

$$\pi(A) = \{\alpha(f)\}.$$

Soit H l'espèce de structures $[\mathcal{C}^\cdot, \pi, \mathcal{S}]$ correspondante, π désignant aussi la projection canonique de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{C}_0^\cdot$; $A \to e$, si $A \subset \overset{-1}{\pi}(e)$. Soit $\overline{\mathcal{S}}^\cdot$ la catégorie des hypermorphismes associée à H.

Proposition 2. — *Il existe une bijection canonique* χ *de* $Z_g^0(\mathcal{S})$ *sur la classe des sous-espèces de structures* $[\mathcal{B}^\cdot, \pi', S]$ *de* η *telles que* $\mathcal{B}$ *soit un sous-groupoïde de* $\mathcal{C}^\cdot$.

Démonstration. — Soit $(\overline{\mathcal{S}}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)$ un 0-cocycle de H et soit $S = \bigcup_{e \in \mathcal{B}_0} \Phi(e)$. Supposons $z \in S$, $g \in \mathcal{B}$ et $\pi(z) = \alpha(g)$. Comme $z \in \Phi(\alpha(g))$ et que Φ définit un foncteur de $\mathcal{B}^\cdot$ vers $\overline{\mathcal{S}}^\cdot$, on a $gz \in \Phi(\beta(g)) \in S$. Donc $[\mathcal{B}^\cdot, \pi', S]$ est une sous-espèce de structures de η, en désignant par π' la restriction de π à S. Inversement, soit $[\mathcal{B}^\cdot, \pi', S]$ une sous-espèce de structures de η sur le sous-groupoïde $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^\cdot$. Pour tout $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$, posons :

$$\Phi(e) = S \cap \overset{-1}{\pi}(e).$$

Soit $g \in \mathcal{B}$, $e = \alpha(g)$ et $e' = \beta(g)$. Si $z \in \Phi(e)$, on a $gz \in S$, d'où $gz \in \Phi(e')$. Si $z' \in \Phi(e')$, on a de même $g^{-1}z' \in \Phi(e)$ et $z' = g(g^{-1}z') \in g\Phi(e)$. Par suite $\Phi(e') = g\Phi(e)$ et Φ définit un 0-cocycle.

Corollaire. — *Soit* E *la classe des sous-espèces de structures* $[\mathcal{B}^\cdot, \pi', S]$ *de* η *telles que* $\mathcal{B}$ *soit un sous-groupoïde de* $\mathcal{C}^\cdot$. *La catégorie* $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^\cdot)$ *est une catégorie d'opérateurs sur* E, *ainsi que la catégorie* $\mathcal{H}(\mathcal{C}^\cdot)$.

Démonstration. — Pour tout sous-groupoïde $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^\cdot$, le triplet $[\mathcal{B}^\cdot, \pi', \overset{-1}{\pi}(\mathcal{B})]$ est une sous-espèce de structures de η, de sorte que, en vertu du théorème 1, $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^\cdot)$ est la catégorie d'opérateurs sur $Z_g^0(\mathcal{S})$ de l'espèce de structures $\overline{Z}^0(H)$. Comme χ est une bijection de $Z_g^0(\mathcal{S})$ sur E, la catégorie $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^\cdot)$ opère aussi sur E, la loi de composition étant définie par :

$$((\mathcal{B}', F, \mathcal{B}_1), [\mathcal{B}^\cdot, \pi', S]) \to [\mathcal{B}'^\cdot, \pi'', S'],$$

si, et seulement si, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$, en désignant par S' la classe des fz

tels que $z \in S$, $f \in F$ et $(f, z) \in \overline{\Sigma}$. En utilisant le corollaire du théorème 1, on voit de même que $\mathcal{A}(\mathcal{C}^{\cdot})$ opère sur E.

Rappelons [3] qu'on appelle $\tilde{\Omega}$-espèce de structures un triplet $[(\mathcal{C}^{\cdot}, <), \pi, (\Sigma, <)]$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie d'opérateurs sur Σ relativement à K et $[\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$ est l'espèce de structures correspondante.

2) $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée et

$$((\mathcal{C}_0^{\cdot}, <), \pi, (\Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}.$$

3) On a : $\tilde{K} = ((\Sigma, <), K, (\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}$, où $\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$ est la catégorie des hypermorphismes associée à $[\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$, la relation d'ordre étant la relation induite par $(\mathcal{C}, <) \times (\Sigma, <)$.

Définition 2. — *On dira que* $\tilde{\eta} = ((\mathcal{C}^{\cdot}, <), \pi, (\Sigma, <))$ *est* une espèce de structures ordonnée *si* $\tilde{\eta}$ *est une* $\tilde{\Omega}$*-espèce de structures, si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie ordonnée et si on a* $\tilde{\eta}_0 = ((\mathcal{C}_0^{\cdot}, <), \pi, (\Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}'$. *On dira que* $\tilde{\eta}$ *est une* espèce de structures quasi-inductive (*resp.* sous-inductive) *si* $\tilde{\eta}$ *est une espèce de structures ordonnée, si* $\tilde{\eta}_0 \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$ (*resp.* $\in \mathfrak{J}^s$) *et si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie quasi-inductive* (*resp. sous-inductive*).

Proposition 3. — *Si* $\tilde{\eta}$ *est une espèce de structures quasi-inductive* (*resp. sous-inductive*) *on a :* $\tilde{K} \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$ (*resp.* $\in \mathfrak{J}^s$).

Démonstration. — Soient $(f_i, z_i) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$ et $(f, z) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$. Supposons $z_i < z$ et $f_i < f$ pour tout $i \in I$. Comme $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive il existe $\overset{f}{\bigcup} f_i$; comme $(\Sigma, <)$ est une classe sous-inductive, il existe $\overset{z}{\bigcup} z_i$ et on a, puisque $\tilde{\eta}_0 \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$:

$$\alpha\Big(\overset{f}{\bigcup} f_i\Big) = \overset{e}{\bigcup} \alpha(f_i) = \overset{e}{\bigcup} \pi(z_i) = \pi\Big(\overset{z}{\bigcup} z_i\Big), \qquad \text{où} \qquad e = \alpha(f);$$

donc $g = \Big(\overset{f}{\bigcup} f_i\Big)\Big(\overset{z}{\bigcup} z_i\Big)$ est défini. Les relations :

$$\pi(g) = \overset{e'}{\bigcup} \beta(f_i) = \beta\Big(\overset{f}{\bigcup} f_i\Big), \qquad \text{où} \qquad e' = \beta(f).$$

$$\pi\Big(\overset{fz}{\bigcup} f_i z_i\Big) = \overset{e'}{\bigcup} \pi(f_i z_i) = \overset{e'}{\bigcup} \beta(f_i) = \pi(g)$$

et $f_i z_i < g$ pour tout $i \in \mathrm{I}$ entraînent $\bigcup^{fz} f_i z_i < g$, d'où, en utilisant la relation $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'$, $\bigcup^{fz} f_i z_i = g$. Donc $\tilde{\mathrm{K}} \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$.

— Supposons que $\tilde{\eta}$ soit une espèce de structures sous-inductive. Supposons $(f', z') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$, $(f'', z'') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$, $(f, z) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$, $f' < f$, $f'' < f$, $z' < z$ et $z'' < z$. Puisque :

$$\alpha(f' \cap f'') = \alpha(f') \cap \alpha(f'') = \pi(z') \cap \pi(z'') = \pi(z' \cap z''),$$

on a $(f' \cap f'', z' \cap z'') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$. De plus les relations :

$$\bar{z} = (f' \cap f'')(z' \cap z'') < f'z' \cap f''z''$$

et

$$\pi(\bar{z}) = \beta(f' \cap f'') = \beta(f') \cap \beta(f'') = \pi(f'z' \cap f''z'')$$

entraînent

$$\bar{z} = f'z' \cap f''z'' \qquad \text{et} \qquad \tilde{\mathrm{K}} \in \mathfrak{J}^{s}.$$

Cette proposition signifie que $\tilde{\eta}$ est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive) si, et seulement si, $\tilde{\eta}$ est une $\mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$-(resp. $\mathfrak{J}^{s}$-) espèce de structures, si $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'$ et si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est ordonnée.

Théorème 2. — *Si $\tilde{\eta}$ est une espèce de structures ordonnée (resp. quasi-inductive, resp. sous-inductive), alors $((\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma^{\cdot})^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée (resp. quasi-inductive, resp. sous-inductive) et on a :*

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}' \quad (\textit{resp.} \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}, \textit{resp.} \in \mathfrak{J}^{s}),$$

où $\bar{\pi}(f, z) = f$.

Démonstration. — D'après un théorème de [3], $((\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma)^{\cdot}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée (resp. $\mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$-structurée, resp. $\mathfrak{J}^{s}$-structurée). Supposons $(f, z) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$, $(f', z') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$, $f' < f$, $z' < z$, $\alpha(f, z) = z'$ et $\beta(f, z) = \beta(f', z')$. Ces conditions entraînent :

$$z = z', \qquad \alpha(f) = \alpha(f'), \qquad \beta(f) = \beta(f') \qquad \text{et} \qquad fz = f'z'.$$

Comme $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée, il en résulte $f = f'$, d'où $(f, z) = (f', z')$ et $((\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma)^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée. D'après le même théorème de [3], on a aussi :

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega} \quad (\text{resp.} \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}, \text{resp.} \in \mathfrak{J}^{s}).$$

Si $(f', z') < (f, z)$ et $\bar{\pi}(f', z') = \bar{\pi}(f, z)$, on trouve :

$$f = f', \qquad z' < z \qquad \text{et} \qquad \pi(z') = \pi(z), \qquad \text{d'où} \qquad z' = z$$

et

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}'.$$

Soit $\tilde{\eta} = [(\mathcal{C}^{\cdot}, <), \pi, (\Sigma, <)]$ une espèce de structures ordonnée. Posons : $\eta = [\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$ et $\bar{\Sigma}^{\cdot} = (\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma)^{\cdot}$. Désignons par $\bar{\pi}$ la projection canonique : $(f, z) \to f$ de $\bar{\Sigma}$ sur $\mathcal{C}$. Soit $Z^0(\eta)$ l'espèce de structures construite ci-dessus à partir de η (théorème 1).

Définition 3. — *On appelle* 0-cocycle ordonné au-dessus de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *un* 0-*cocycle* $(\bar{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ *tel que*

$$((\bar{\Sigma}, <), \Phi, (\mathcal{B}, <)) \in \tilde{\Omega}.$$

Proposition 4. — *Pour qu'un* 0-*cocycle* $(\bar{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ *soit ordonné, il faut et il suffit que les conditions :* $e \in \mathcal{B}_0$, $e' \in \mathcal{B}_0$ *et* $e' < e$ *entraînent* $\Phi(e') < \Phi(e)$.

En effet, la condition est nécessaire. Si elle est vérifiée, soient $g \in \mathcal{B}$, $g' \in \mathcal{B}$ et $g' < g$. On a :

$$\Phi(\alpha(g')) < \Phi(\alpha(g)), \qquad \Phi(g) = (g, \Phi(\alpha(g)))$$

et

$$\Phi(g') = (g', \Phi(\alpha(g'))) < \Phi(g).$$

Proposition 5. — *Soit* $\tilde{\eta}$ *une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive). Si* $(\bar{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ *est un* 0-*cocycle ordonné et si* $(\mathcal{B}, <)$ *est une partie sous-inductive faible, on a :*

$$\tilde{\Phi} = ((\bar{\Sigma}, <), \Phi, (\mathcal{B}, <)) \in \mathfrak{J}^{\mathsf{U}}$$

(*resp.* $\in \mathfrak{J}^s$).

Démonstration. — Les conditions $g_i \in \mathcal{B}$, $g \in \mathcal{B}$ et $g_i < g$ pour tout $i \in I$ entraînent $g' = \bigsqcup^{g} g_i \in \mathcal{B}$ et :

$$\Phi(g_i) < \Phi(g') < \Phi(g).$$

Comme $(\bar{\Sigma}, <)$ est une classe sous-inductive, il existe :

$$\bigsqcup^{\Phi(g)} \Phi(g_i) = (h, s) \in \bar{\Sigma}$$

et on a :

$$\bar{\pi}(h, s) = h = \bar{\pi}\left(\bigcup^{\Phi(g)} \Phi(g_i)\right) = \bigcup^{g} \bar{\pi}\Phi(g_i) = g',$$

en vertu du théorème 2. Puisque :

$$(h, s) < \Phi(g') \qquad \text{et} \qquad \bar{\pi}(h, s) = \bar{\pi}(\Phi(g')) = g',$$

il résulte du théorème 2 : $(h, s) = \Phi(g')$. Donc $\tilde{\Phi} \in \mathcal{J}^{\cup}$.

— Supposons de plus $\tilde{\eta}$ sous-inductive. Soient $g \in \mathcal{B}$, $g' \in \mathcal{B}$, $g'' \in \mathcal{B}$, $g' < g$ et $g'' < g$. On a $g' \cap g'' \in \mathcal{B}$ et, les éléments $\Phi(g')$ et $\Phi(g'')$ étant majorés par $\Phi(g)$, il existe

$$\Phi(g') \cap \Phi(g'') = (h', s') \in \bar{\Sigma};$$

on a : $\Phi(g' \cap g'') < (h', s')$. D'après le théorème 2,

$$((\mathcal{C}, <), \bar{\pi}, (\bar{\Sigma}, <)) \in \mathcal{J}^s,$$

de sorte que l'on obtient :

$$h' = \bar{\pi}(h', s') = \bar{\pi}\,\Phi\,(g') \cap \bar{\pi}\,\Phi\,(g'') = g' \cap g'' = \bar{\pi}\,\Phi\,(g' \cap g'').$$

On en déduit $(h', s') = \Phi\,(g' \cap g'')$ et $\tilde{\Phi} \in \mathcal{J}^s$.

Soit $\tilde{Z}^0(\Sigma)$ la classe des 0-cocycles ordonnés $(\bar{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)$ tels que $\mathcal{B}$ soit un sous-groupoïde de $\mathcal{C}^\cdot$ et que $(\mathcal{B}^\cdot, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier. Soit $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot)$ la classe des atlas $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ vérifiant les conditions suivantes :

1) $(\mathcal{B}, <)$ et $(\mathcal{B}', <)$ sont des groupoïdes semi-réguliers.

2) Si $f \in F$, $e \in \mathcal{B}_0$ et $e < \alpha(f)$, il existe $f' \in F$ tel que $f' < f$ et $\alpha(f') = e$.

3) Si $f \in F$, $e' \in \mathcal{B}'_0$ et $e' < \beta(f)$, il existe $f'' \in F$ tel que $f'' < f$ et $\beta(f'') = e'$.

4) Il existe des 0-cocycles ordonnés $(\bar{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)$ et $(\bar{\Sigma}^\cdot, \Phi', \mathcal{B}'^\cdot)$.

Théorème 3. — *Avec les hypothèses précédentes,* $\bar{Z}^0(\eta)$ *admet pour sous-espèce de structures l'espèce de structures* $[\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot), \tilde{Z}^0(\pi), \tilde{Z}^0(\Sigma)]$. *De plus*

$$\tilde{Z}^0(\tilde{\eta}) = [(\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot), <), \tilde{Z}^0(\pi), (\tilde{Z}^0(\Sigma), <)]$$

est une espèce de structures ordonnée, la relation d'ordre sur $\tilde{Z}^0(\Sigma)$ *étant définie par :* $(\bar{\Sigma}^\cdot, \Phi', \mathcal{B}'^\cdot) < (\bar{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)$ *si, et seule-*

ment si, $\mathcal{B}' < \mathcal{B}$ *et si* Φ' *est une restriction de* Φ. *Les hypermorphismes correspondants s'identifient à des atlas de* $\overline{\Sigma}^{\cdot}$ *vérifiant les conditions* 1, 2, 3.

Démonstration. — Montrons que $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot})$ est une sous-catégorie de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^{\cdot})$. En effet, soient

$$(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot}) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot}).$$

Soient $f \in F$, $f' \in F'$, $\alpha(f') = \beta(f)$ et $e < \alpha(f)$. Il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\alpha(f_1) = e$; comme on a

$$\beta(f_1) = e' \in \alpha(F') = \beta(F) \qquad \text{et} \qquad e' < \alpha(f'),$$

il existe $f'_1 \in F'$ tel que $f'_1 < f'$ et $\alpha(f'_1) = e'$. Il en résulte $f'_1 . f_1 \in F'.F$, $f'_1 . f_1 < f'.f$ et $\alpha(f'_1 . f_1) = e$. De même si $e'' < \beta(f')$, il existe $f'_2 . f_2 \in F'.F$ tel que $f'_2 . f_2 < f'.f$ et

$$\beta(f'_2 . f_2) = e''.$$

Donc $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$ appartient à $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot})$ et $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot})$ est une sous-catégorie de $\overline{\mathcal{H}}(\mathcal{C}^{\cdot})$. De plus $(\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$ est une catégorie ordonnée.

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot})$ et $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot}) \in \tilde{Z}^0(\Sigma)$ et montrons qu'alors le 0-cocycle (théorème 1) :

$$(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', \mathcal{B}'^{\cdot}) = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$$

est ordonné. En effet, soient $e' \in \mathcal{B}'_0$, $e'_1 \in \mathcal{B}'_0$ et $e'_1 < e'$. Soit $f \in F$ et $\beta(f) = e'$. Il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\beta(f_1) = e'_1$. Si $s = \Phi(\alpha(f))$ et $s_1 = \Phi(\alpha(f_1))$, on a : $s_1 < s$. Puisque $\tilde{\eta}$ est une espèce de structures ordonnée, les conditions : $s_1 < s$ et $f_1 < f$ entraînent $f_1 s_1 < fs$. Par construction : $fs = \Phi'(e')$ et $f_1 s_1 = \Phi'(e'_1)$, de sorte que $\Phi'(e'_1) < \Phi'(e')$ et $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', \mathcal{B}'^{\cdot})$ est un 0-cocycle ordonné. Il en résulte que $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot})$ opère sur $\tilde{Z}^0(\Sigma)$, la loi de composition étant la restriction de celle de $\overline{Z}^0(\eta)$.

— Supposons $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'_2, F_2, \mathcal{B}_2)$ dans $(\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^{\cdot}), <)$ et :

$$(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi_1, \mathcal{B}_1^{\cdot}) < (\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi_2, \mathcal{B}_2^{\cdot}) \qquad \text{dans} \qquad (\tilde{Z}^0(\Sigma), <).$$

Soit :

$$(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi'_i, \mathcal{B}'^{\cdot}_i) = (\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi_i, \mathcal{B}^{\cdot}_i), \qquad \text{où} \qquad i = 1,2.$$

Pour tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$, il existe $f'_1 \in F_1$ tel que $\beta(f'_1) = e'$ et on a :

$$\Phi'_1(e') = f'_1\Phi_1(e) = f'_1\Phi_2(e) = \Phi'_2(e'), \qquad \text{où} \qquad e = \alpha(f'_1),$$

car $f'_1 \in F_2$ et Φ_1 et une restriction de Φ_2. On en déduit :

$$(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi_1'^\cdot, \mathcal{B}_1'^\cdot) < (\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi'_2, \mathcal{B}_2'^\cdot).$$

Puisque $\tilde{Z}^0(\pi)$:

$$(\underline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot) \to \mathcal{B}$$

définit évidemment un homomorphisme strict, $\tilde{Z}^0(\tilde{\eta})$ est une espèce de structures ordonnée.

— Soit $\mu((\mathcal{B}', F, \mathcal{B}), (\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)) = (\overline{\mathcal{B}}', \overline{F}, \overline{\mathcal{B}})$ (notations théorème 1). La restriction de $\overline{\pi}$ à $\overline{F}$, $\overline{\mathcal{B}}$ et $\overline{\mathcal{B}}'$ étant une bijection sur F, $\mathcal{B}$, et $\mathcal{B}'$ respectivement, $(\overline{\mathcal{B}}', \overline{F}, \overline{\mathcal{B}})$ vérifie les conditions 1, 2 et 3.

Remarque. — En général $\tilde{Z}^0(\tilde{\eta})$ n'est pas une espèce de structures quasi-inductive car $\tilde{Z}^0(\mathcal{C}^\cdot)$ n'est pas une catégorie quasi-inductive.

DÉFINITION 4. — *On dira qu'une espèce de structures ordonnée* $\tilde{\eta}$ *est* régulière *si* $(\overline{\Sigma}^\cdot, <)$ *et* $(C^\cdot, <)$ *sont régulières.*

PROPOSITION 6. — *Si* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *est un groupoïde ordonné régulier (resp. si* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *est une catégorie ordonnée régulière et si* $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'' \cap \tilde{\Omega}'_1$*), alors l'espèce de structures ordonnée* $\tilde{\eta}$ *est régulière.*

Démonstration. — Soit $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ une catégorie ordonnée régulière. Soient $(f, z) \in \overline{\Sigma}$ et $z' < z$. Comme $\pi(z') < \pi(z)$, il existe $f' = f\pi(z') \in \mathcal{C}$ et on a $(f', z') \in \overline{\Sigma}$. Si $(f_1, z_1) \in \overline{\Sigma}$, $z_1 < z'$ et $f_1 < f$, on trouve $f_1 < f'$, d'où $(f_1, z_1) < (f', z')$. Donc (f', z') est le pseudoproduit de (f, z) et de z' dans $(\overline{\Sigma}^\cdot, <)$. Si $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est un groupoïde ordonné régulier, alors $(\overline{\Sigma}^\cdot, <)$ est un groupoïde ordonné, et, en vertu du corollaire de la proposition 7-2, $(\overline{\Sigma}^\cdot, <)$ est un groupoïde ordonné régulier; ainsi $\tilde{\eta}$ est une espèce de structures ordonnée régulière. Supposons $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'' \cap \tilde{\Omega}'_1$. Soit $z'' < fz$ et $f'' = \pi(z'')f$. On a $\alpha(f'') < \alpha(f)$ et, puisque la restriction de π à la classe des minorants de z est une bijection sur $\alpha(f)^{>}$, il existe $z_1 < z$ tel que $\pi(z_1) = \alpha(f'')$. Par suite $(f'', z_1) \in \overline{\Sigma}$. Les relations :

$$z'' < fz, \qquad f''z_1 < fz \qquad \text{et} \qquad \pi(f''z_1) = \beta(f'') = \pi(z'')$$

entraînent $f''z_1 = z''$. Comme tout minorant de f est l'image par $\overline{\pi}$ d'un minorant de (f, z), l'élément (f'', z_1) est le pseudo-produit $z''(f, z)$ dans $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, <)$ et $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est assez régulière. Soient de plus :

$$(f_1, fz) \in \overline{\Sigma} \qquad \text{et} \qquad (g, \bar{z}) < (f_1 . f, z).$$

On a : $g = \bar{f}_1 . \bar{f}$, où $\bar{f}_1 < f$ et $\bar{f} < f$, donc :

$$(g, \bar{z}) = (\bar{f}_1, \bar{f}\bar{z}) . (\bar{f}, \bar{z})$$

et $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est régulière.

Remarque. — $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ peut être une catégorie ordonnée régulière sans que $\tilde{\eta}$ soit régulière, car l'axiome (R_g) peut ne pas être satisfait dans $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, <)$.

DÉFINITION 5. — *On appelle* espèce de structures ordonnée (*resp.* quasi-inductive) étalée *une espèce de structures ordonnée (resp. quasi-inductive)* $\tilde{\eta}$ *telle que l'on ait* $\tilde{\eta}_0 \in \tilde{\Omega}'' \cap \tilde{\Omega}'_1$.

Cette définition généralise la notion d'espèce de structures sous-préinductive étalée définie dans [1 *a*].

Soit $\tilde{\eta}$ une espèce de structures ordonnée régulière telle que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit un groupoïde ordonné régulier. Soit $Z^0_r(\Sigma)$ la classe des 0-cocycles ordonnés $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ tels que $\mathcal{B}$ soit un sous-groupoïde régulier de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Soit $Z^0_r(\mathcal{C}^{\cdot})$ le sous-groupoïde plein de $\mathcal{A}b^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ (théorème 2-3) ayant pour unités les sous-groupoïdes réguliers $\mathcal{B}$ tels qu'il existe un 0-cocycle

$$(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot}) \in Z^0_r(\Sigma).$$

THÉORÈME 4. — $[Z^0_r(\mathcal{C}^{\cdot}), Z^0_r(\pi), Z^0_r(\Sigma)]$ *est une sous-espèce de structures de* $\tilde{Z}^0(\tilde{\eta})$ *et* $Z^0_r(\tilde{\eta}) = [(Z^0_r(\mathcal{C}^{\cdot}), <), Z^0_r(\pi), (Z^0_r(\Sigma), <)]$ *est une espèce de structures quasi-inductive régulière; la catégorie des hypermorphismes correspondante est équivalente à un sous-groupoïde de* $\mathcal{A}b^r(\overline{\Sigma}^{\cdot}, <)$.

Démonstration. — Soient $\mathcal{B} \in Z_r^0(\mathcal{C}^\cdot)_0$ et $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Il existe $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot) \in Z_r^0(\Sigma)$ et on a

$$(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi_1, \mathcal{B}_1^\cdot) \in Z_r^0(\Sigma),$$

où Φ_1 est la restriction de Φ à $\mathcal{B}_1$. Donc $Z_r^0(\mathcal{C}^\cdot)$ est un sous-groupoïde saturé par induction de $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $(Z_r^0(\mathcal{C}^\cdot), <)$ est un groupoïde quasi-inductif régulier, en vertu du théorème 3-2. De plus $Z_r^0(\tilde{\eta})$ est une espèce de structures ordonnée.

— Si $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi_i, \mathcal{B}_i^\cdot) \in Z_r^0(\Sigma)$, $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot) \in Z_r^0(\Sigma)$ et :

$$(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi_i, \mathcal{B}_i^\cdot) < (\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot) \qquad \text{pour tout} \quad i \in \mathrm{I},$$

la classe des $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi_i, \mathcal{B}_i^\cdot)$ admet $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi_{\mathrm{I}}, \mathcal{B}_{\mathrm{I}}^\cdot)$ pour sous-agrégat, où $\mathcal{B}_{\mathrm{I}} = \bigcup^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i$ et Φ_{I} est la restriction de Φ à $\mathcal{B}_{\mathrm{I}}$. Ainsi $(Z_r^0(\Sigma), <)$ est une classe sous-inductive et on a : $Z_r^0(\tilde{\eta}) \in \mathfrak{J}^{\mathrm{U}}$. Ceci montre que $Z_r^0(\tilde{\eta})$ est une espèce de structures quasi-inductive. Comme $(Z_r^0(\mathcal{C}^\cdot), <)$ est un groupoïde ordonné régulier, il résulte de la proposition 6 que $Z_r^0(\tilde{\eta})$ est régulière.

— Si $(\overline{\mathcal{B}}', \overline{\mathrm{F}}, \overline{\mathcal{B}}) \in \mu(Z_r^0(\mathcal{C}^\cdot) * Z_r^0(\Sigma))$ (notation du théorème 1), on a :

$$\overline{\mathrm{F}} \in \mathcal{A}^r(\overline{\Sigma}^\cdot, <),$$

car $\overline{\mathrm{F}}$ est un atlas de $\overline{\Sigma}^\cdot$ d'après le corollaire de théorème 1 et que, si $z' < z$, on a : $\overline{\pi}((f, z)\, z') = \overline{\pi}(f, z)\overline{\pi}(z')$, en vertu de la démonstration de la proposition 6. La restriction de μ à $Z_r^0(\mathcal{C}^\cdot) * Z_r^0(\Sigma)$ définit une équivalence de la catégorie des hypermorphismes associée à $Z_r^0(\tilde{\eta})$ sur le sous-groupoïde plein de $\mathcal{A}^r(\overline{\Sigma}^\cdot, <)$ formé des atlas réguliers $\overline{\mathrm{F}}$ tels que la restriction de $\overline{\pi}$ à $\overline{\mathcal{B}} = a(\overline{\mathrm{F}})$ (et par suite aussi à $\overline{\mathcal{B}}' = b\,(\overline{\mathrm{F}})$) soit une bijection sur $\overline{\pi}(\overline{\mathcal{B}})$ (resp. sur $\overline{\pi}(\overline{\mathcal{B}}')$).

Corollaire. — *Soit $\tilde{\eta}$ une espèce de structures ordonnée étalée. $Z_r^0(\tilde{\eta})$ admet pour sous-espèce de structures l'espèce de structures quasi-inductive régulière*

$$\tilde{\eta}_f = [(\hat{\mathcal{C}}_f^\cdot, <), \pi_f, (Z_f^0(\Sigma), <)],$$

où $\hat{\mathcal{C}}_f$ est la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{C}}_f$ (corollaire, théorème 3-2) *dont les unités sont majorées dans $\mathcal{C}_0$ et où $Z_f^0(\Sigma)$ est la classe des 0-cocycles ordonnés $(\overline{\Sigma}^\cdot, \Phi, \mathcal{B}^\cdot)$ tels que $\mathcal{B} \in (\hat{\mathcal{C}}_f)_0$. De plus $\tilde{\eta}$ s'identifie à une sous-espèce de structures de $\tilde{\eta}_f$.*

Démonstration. — Comme $\hat{\mathcal{C}}_f^{\cdot}$ est un sous-groupoïde saturé par induction du groupoïde quasi-inductif régulier $(\overline{\mathcal{C}}_f^{\cdot}, <)$ défini dans le corollaire du théorème 3-2, $(\hat{\mathcal{C}}_f^{\cdot}, <)$ est un groupoïde quasi-inductif régulier. Soit $\mathcal{B} \in (\hat{\mathcal{C}}_f^{\cdot})_0$; il existe $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$ tel que $\mathcal{B} < e^{>}$; la restriction de π à la classe des minorants d'un élément z tel que $\pi(z) = e$ étant une bijection sur la classe des minorants de e dans $\mathcal{C}_0^{\cdot}$, l'application: $g \to (g, z')$, où $g \in \mathcal{B}$, $z' < z$ et $\pi(z') = \alpha(g)$ définit un 0-cocycle $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$. Par suite $\mathcal{B} \in Z_f^0(\Sigma)$. Soit $F \in \hat{\mathcal{C}}_f$ et $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, a(F)^{\cdot}) \in Z_f^0(\Sigma)$. On a :

$$F(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, a(F)^{\cdot}) = (\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', b(F)^{\cdot}) \in Z_f^0(\Sigma),$$

puisque l'image par Φ' d'une sous-classe saturée par induction de $(\mathcal{C}, <)$ est saturée par induction dans $(\overline{\Sigma}, <)$. Donc $\tilde{\eta}_f$ est une sous-espèce de structures quasi-inductive régulière de $Z_r^0(\tilde{\eta})$. De plus η s'identifie à une sous-espèce de structures de $\tilde{\eta}_f$, en identifiant $f \in \mathcal{C}$ à $f^{>} \in \hat{\mathcal{C}}_f$ et $z \in \Sigma$ au 0-cocycle

$$(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, (\pi(z)^{>})^{\cdot})$$

tel que $\Phi(e') = z' < z$, si $e' = \pi(z')$.

Remarque. — Si $\tilde{\eta}$ n'est pas une espèce de structures étalée, $\tilde{\eta}$ ne s'identifie pas une sous-espèce de structures de $Z_r^0(\tilde{\eta})$.

5. — Cohomologie d'ordre 1.

Soit $\Sigma^{\cdot}$ une catégorie; soit $\mathcal{C}^{\cdot}$ une catégorie d'opérateurs sur la classe Σ, relativement à la loi de composition K. Supposons vérifiées les conditions suivantes, dans lesquelles nous désignons par $\mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$ la classe des couples (f, z) tels que $K(f, z)$ soit défini et où nous posons $K(f, z) = fz$, si $(f, z) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$:

1) Si $s \in \Sigma_0$, on a $fs \in \Sigma_0^{\cdot}$, si $(f, s) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$.

2) Soit $(z', z) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \mathcal{C}^{\cdot}$ on a $(f, z'.z) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$ si, et seulement si, $(f, z) \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$ et $(f, z') \in \mathcal{C}^{\cdot} * \Sigma$; dans ce cas : $f(z'.z) = fz'.fz$.

DÉFINITION 1. — *Si les conditions précédentes sont vérifiées, on dit que* $\Sigma^{\cdot}$ est une catégorie munie d'une catégorie d'opérateurs $\mathcal{C}^{\cdot}$ relativement à la loi de composition K.

Les conditions 1 et 2 signifient que l'espèce de structures déterminée par $(\mathcal{C}^\cdot, \Sigma, K)$ est sous une espèce de morphismes [3] $(\mathcal{C}^\cdot, F)$ et que la catégorie $\Sigma^\cdot$ est la catégorie somme des catégories $F(e)$, où $e \in \mathcal{C}_0^\cdot$.

Définition 2. — *On dira que* $(\Sigma^\cdot, <)$ *est* une catégorie munie d'une catégorie ordonnée (*resp.* quasi-inductive, *resp.* sous-inductive) d'opérateurs $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ la loi de composition étant K, *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $\Sigma^\cdot$ *est une catégorie munie de la catégorie d'opérateurs* $\mathcal{C}^\cdot$, *relativement à la loi de composition* K.

2) $\tilde{\eta} = [(\mathcal{C}^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <)]$ *est une espèce de structures ordonnée (resp. quasi-inductive, resp. sous-inductive) régulière, où* $[\mathcal{C}^\cdot, \pi, \Sigma]$ *est l'espèce de structures déterminée par* $(\mathcal{C}^\cdot, \Sigma, K)$.

3) $(\Sigma^\cdot, <)$ *est une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée assez régulière.*

Dans la suite, nous supposons que $(\Sigma^\cdot, <)$ est une catégorie munie d'une catégorie ordonnée d'opérateurs $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ relativement à la loi de composition K. Nous désignons par $[\mathcal{C}^\cdot, \pi, \Sigma] = \eta$ l'espèce de structures déterminée par $(\mathcal{C}^\cdot, \Sigma, K)$ et par $\tilde{\eta}$ l'espèce de structures ordonnée $[(\mathcal{C}^\cdot, <), \pi, (\Sigma, <)]$. Soit $\eta' = [\mathcal{C}^\cdot, \pi', \Sigma_0^\cdot]$ la sous-espèce de structures de η telle que π' soit la restriction de π à $\Sigma_0^\cdot$. Soit $\overline{\Sigma}^\cdot$ la catégorie des hypermorphismes $(\mathcal{C}^\cdot * \Sigma)^\cdot$ associée à η et $S^\cdot$ la catégorie des hypermorphismes $(\mathcal{C}^\cdot * \Sigma_0^\cdot)^\cdot$ associée à η'. Soient $\overline{\pi}$ et $\overline{\pi}'$ respectivement les foncteurs canoniques $(f, z) \to f$ de $\overline{\Sigma}^\cdot$ et $S^\cdot$ sur $\mathcal{C}^\cdot$.

Proposition 1. — $(\Sigma^\cdot, <)$ *est une catégorie fonctoriellement ordonnée* [3]. *Si* $\tilde{\eta}$ *est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive),* $(\Sigma^\cdot, <)$ *est une catégorie quasi-inductive (resp. sous-inductive).*

Démonstration. — Soient $z \in \Sigma$, $z' \in \Sigma$, $z' < z$ et $\alpha(z') = \alpha(z)$. Les conditions : $z' < z$ et :

$$\pi(z) = \pi(\alpha(z)) = \pi(\alpha(z')) = \pi(z')$$

entraînent $z = z'$, puisque $\tilde{\eta}$ est ordonnée. De même $z' < z$ et $\beta(z') = \beta(z)$ entraîne $z = z'$. Il en résulte que $(\Sigma^\cdot, <)$ est une catégorie ordonnée. Soit $s \in \Sigma_0^\cdot$ et $z < s$. Il existe $z' = s\alpha(z)$ et on a $\alpha(z') = \alpha(z)$. Comme $z < z'$, il en résulte $z = z'$. Puisque $\alpha(z) < s\alpha(z)$ on a $\alpha(z) < z$, d'où $z = \alpha(z)$.

Ainsi un élément de Σ majoré par une unité $s \in \Sigma_0^{\cdot}$ est une unité de $\Sigma^{\cdot}$. Supposons $z_1 \in \Sigma$, $\alpha(z_1) = \beta(z)$ et $z'' < z_1 . z$. Il existe des pseudoproduits $z\alpha(z'')$ et $\bar{z} = (z_1 . z)\alpha(z'')$ tels que

$$\alpha(z\alpha(z'')) = \alpha(z'') = \alpha(\bar{z}),$$

car $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est assez régulière. On a $s' = \beta(z\alpha(z'')) < \beta(z)$, de sorte qu'il existe un pseudoproduit $z_1 s'$ tel que $\alpha(z_1 s') = s'$. Les éléments :

$$z'' \text{ et } z_2 = (z_1 s').(z\alpha(z''))$$

sont majorés par $\bar{z}$ et on a $\alpha(z_2) = \alpha(\bar{z}) = \alpha(z'')$. En vertu du début de la démonstration, il en résulte $z_2 = \bar{z} = z''$. Donc l'application : $z \to z^{>}$ définit un foncteur généralisé de $\Sigma^{\cdot}$ vers $\Sigma^{\cdot}$ et $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est une catégorie fonctoriellement ordonnée.

— Soit $\tilde{\eta}$ une espèce de structures quasi-inductive; alors $(\Sigma, <)$ est une classe sous-inductive et, en vertu du corollaire 2 de la proposition 12-2, $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive.

— Soit $\tilde{\eta}$ une espèce de structures sous-inductive. Supposons $z' < z$ et $z'' < z$. On a :

$$\alpha(z' \cap z'') < \alpha(z') \cap \alpha(z'')$$

et

$$\begin{aligned}\pi(\alpha(z' \cap z'')) = \pi(z' \cap z'') &= \pi(z') \cap \pi(z'') \\ &= \pi(\alpha(z')) \cap \pi(\alpha(z'')) = \pi(\alpha(z') \cap \alpha(z''))\end{aligned}$$

d'où $\alpha(z' \cap z'') = \alpha(z') \cap \alpha(z'')$. De même

$$\beta(z' \cap z'') = \beta(z') \cap \beta(z'').$$

Par conséquent $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-inductive.

Soit $\tilde{\Sigma}$ la classe des triplets (z, f, s) tels que :

$$z \in \Sigma, \qquad (f, s) \in S \qquad \text{et} \qquad \alpha(z) = fs.$$

THÉORÈME 1. — $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie ordonnée régulière, la loi de composition étant définie par :*

$$(z', f', s').(z, f, s) = (z'.f'z, f'.f, s)$$

si, et seulement si, $s' = \beta(z)$ *et la relation d'ordre étant définie par :*

$$(z', f', s') < (z, f, s)$$

si, et seulement si, $f' < f$, $z' < z$ *et* $s' < s$. $(\Sigma^{\cdot}, <)$ *et* $(S^{\cdot}, <)$ *s'identifient à des sous-catégories régulières de* $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$. *De plus* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie ordonnée quotient* [5] *de* $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$, *le foncteur projection* $\tilde{\pi}$ *étant défini par:* $(z, f, s) \to f$.

Démonstration. — Montrons d'abord que $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ est une catégorie. Soient :

$$h = (z, f, s) \in \tilde{\Sigma} \qquad \text{et} \qquad h' = (z', f', s') \in \tilde{\Sigma}.$$

Si $s' = \beta(z)$, on a :

$$\alpha(z'.f'z) = \alpha(f'z) = f'\alpha(z) = (f'.f)s,$$

de sorte que $(z'.f'z, f'.f, s) \in \tilde{\Sigma}$. Prouvons que $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ admet pour unités les triplets (s, e, s) tels que $e \in \mathcal{C}_0^{\cdot}$. En effet, si $h.(s, e, s)$ est défini, on a :

$$h.(s, e, s) = (z.fs, f.e, s) = h,$$

puisque $fs \in \Sigma_0^{\cdot}$. Si $(s, e, s).h'$ est défini, on trouve :

$$s = \beta(z') \qquad \text{et} \qquad (s, e, s).h' = (s.ez', e.f', s') = h'.$$

Par suite (s, e, s) est une unité; h admet pour seule unité à droite $(s, \alpha(f), s)$ et pour seule unité à gauche $(s', \beta(f), s')$, où $s' = \beta(z)$. Le composé $h'.h$ est défini, si, et seulement si, $\alpha(h') = (s', \alpha(f'), s') = \beta(h)$. Dans ce cas, on a :

$$\alpha(h'.h) = \alpha(h) \qquad \text{et} \qquad \beta(h'.h) = \beta(h').$$

Soit de plus $h'' = (z'', f'', s'')$. Si les composés $h''.(h'.h)$ et $(h''.h').h$ sont définis, ils sont respectivement égaux à :

$$h''.(h'.h) = (z'', f'', s'').(z'.f'z, f'.f, s) = (z''.f''(z'.f'z), f''.f'.f, s)$$
$$(h''.h').h = (z''.f''z', f''.f', s').(z, f, s)$$
$$= (z''.f''z'.(f''.f')z, f''.f'.f, s).$$

Comme $f''(z'.f'z) = f''z'.(f''.f')z$ et que la loi de composition dans $\Sigma^{\cdot}$ est associative, il en résulte :

$$h''.(h'.h) = (h''.h').h$$

et $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ est une catégorie; $\tilde{\pi}$ est un foncteur dont le noyau est la sous-catégorie de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ formée des triplets $(z, \pi(z), \alpha(z))$; nous identifierons cette sous-catégorie à $\Sigma^{\cdot}$, en identifiant

$$(z, \pi(z), \alpha(z)) \qquad \text{avec} \qquad z;$$

en particulier les unités de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ sont ainsi identifiées aux unités de $\Sigma^{\cdot}$.

— $S^{\cdot}$ s'identifie à la sous-catégorie de $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ formée des triplets (fs, f, s), où $(f, s) \in S$.

— Soit $(z', f', s') < (z, f, s)$ dans $(\tilde{\Sigma}, <)$; on a :

$$\alpha(z', f', s') = s' < s = \alpha(z, f, s)$$

et

$$\beta(z', f', s') = \beta(z') < \beta(z) = \beta(z, f, s).$$

Supposons aussi $(z'_1, f'_1, s'_1) < (z_1, f_1, s_1)$, $s'_1 = \beta(z')$ et $s_1 = \beta(z)$. Comme $\tilde{\eta}$ est ordonnée, les relations : $f' < f$ et $z' < z$ entraînent $f'z' < fz$. Les catégories $(\Sigma^{\cdot}, <)$ et $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ étant $\tilde{\Omega}$-structurées, on trouve :

$$z'_1 . f'_1 z' < z_1 . f_1 z \qquad \text{et} \qquad f'_1 . f' < f_1 . f.$$

Donc $(z'_1, f'_1, s'_1) . (z', f', s') = (z'_1 . f'_1 z', f'_1 . f', s') < (z_1, f_1, s_1) . (z, f, s)$ et $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée.

— Si $(z', f', s') < (z, f, s)$ dans $(\tilde{\Sigma}, <)$ et si on a

$$s' = s \qquad \text{et} \qquad \beta(z') = \beta(z),$$

les conditions : $f's < fs$ et

$$\pi(f's) = \pi(\beta(z')) = \pi(\beta(z)) = \pi(fs)$$

ont pour conséquence $f's = fs$, d'où $\beta(f') = \beta(f)$. La catégorie $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ étant ordonnée, on en déduit $f' = f$. En vertu de la proposition 1, on a aussi $z' = z$. Par suite $(z', f', s') = (z, f, s)$ et $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est ordonnée.

— Soit $(z, f, s) \in \tilde{\Sigma}$. Soit $s' \in \Sigma_0^{\cdot}$ et $s' < s$. Puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est régulière, il existe $f' = f\pi(s')$ et on a : $\alpha(f') = \pi(s')$; il en résulte $(f', s') \in S$ et $f's' < \alpha(z)$. $(\Sigma^{\cdot}, <)$ étant assez régulière, il existe $z' = z(f's')$ et on a : $\alpha(z') = f's'$; par conséquent $(z', f', s') \in \tilde{\Sigma}$. Supposons :

$$h = (\bar{z}, \bar{f}, \bar{s}) < (z, f, s), \quad h' = (\tilde{z}, \tilde{f}, \tilde{s}) < s' \quad \text{et} \quad \alpha(h) = \beta(h').$$

On a $\tilde{\pi}(h) < f$ et $\tilde{\pi}(h') < \pi(s')$, d'où $\tilde{\pi}(h.h') < f'$ et $\bar{f} < f'$; on trouve $\bar{f}\bar{z} < f's'$ et $\bar{z}.\bar{f}\bar{z} < z(f's') = z'$; par suite $h.h' < (z', f', s')$. Ainsi (z', f', s') est le pseudoproduit de (z, f, s) et de s' dans $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$. Soit $s'' \in \Sigma_0^{\cdot}$ et $s'' < \beta(z)$. Il existe $z'' = s''z$ et on a $\alpha(z'') < fs$; par définition $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est régulière, de sorte qu'il existe $(f'', s') = \alpha(z'')(f, s)$ et que $f''s' = \alpha(z'')$. Il s'ensuit $(z'', f'', s') \in \tilde{\Sigma}$ et un raisonnement analogue au précédent prouve que (z'', f'', s') est le pseudoproduit $s''(z, f, s)$. Ceci montre que $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est assez régulière.

— Supposons $g = (z', f', s').(z, f, s)$ défini dans $\tilde{\Sigma}^{\cdot}$ et

$$g'' = (z'', f'', s'') < g.$$

Il existe $f_1 < f$ et $f_1' < f$ tels que $f'' = f_1'.f_1$, car $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est régulière; on a : $h = (z_1, f_1, s'') \in \tilde{\Sigma}$, où $z_1 = z(f_1 s'')$. De l'égalité :

$$\pi(z_1) = \pi(\alpha(z_1)) = \beta(f_1),$$

il résulte $h' = (z_1, f_1', \beta(z_1)) \in \tilde{\Sigma}$, où $z_1' = z'(f_1'\beta(z_1))$. On trouve : $z'' = z_1'.f_1'z_1$, d'après la proposition 1, car :

$$\alpha(z'') = f''s'' = f_1'(f_1 s'') = \alpha(f_1'z_1), \qquad z'' < z'.f'z$$

et

$$z_1'.f_1'z_1 < z'.f'z.$$

Donc $h'.h = g''$ et $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée régulière.

THÉORÈME 2. — *Si $\tilde{\eta}$ est une espèce de structures quasi-inductive (resp. sous-inductive), $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive (resp. sous-inductive) et $\tilde{\pi}$ est un foncteur quasi-inductif (resp. sous-inductif).*

Démonstration. — Soient

$$h_i = (z_i, f_i, s_i) \in \tilde{\Sigma}, \qquad h = (z, f, s) \in \tilde{\Sigma} \qquad \text{et} \qquad h_i < h$$

pour tout $i \in \mathrm{I}$. Comme $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive, il existe $\bar{f} = \bigcup^{f} f_i$; puisque $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est quasi-inductive, en vertu de la proposition 1, il existe $\bar{z} = \bigcup^{z} z_i$ et $\bar{s} = \bigcup^{s} s_i$.

D'après le théorème 2-4 on a $(\bar{f}, \bar{s}) \in S$ et :

$$\bar{f}\bar{s} = \bigcup^{fs} f_i s_i = \bigcup^{\alpha(z)} \alpha(z_i) = \alpha(\bar{z});$$

il en résulte $\bar{h} = (\bar{z}, \bar{f}, \bar{s}) \in \tilde{\Sigma}$ et $\bar{h}$ est le h-agrégat des h_i. Donc $(\tilde{\Sigma}, <)$ est une classe sous-inductive et, en vertu du corollaire 2 de la proposition 12-2, $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive. De plus $\tilde{\pi}$ est un foncteur quasi-inductif.

— Supposons $\tilde{\eta}$ sous-inductive. Soient $h_i = (z_i, f_i, s_i) \in \tilde{\Sigma}$ et $h_i < h \in \tilde{\Sigma}$, où $i = 1,2$. Il existe $f_1 \cap f_2 \in \mathcal{C}$, $z_1 \cap z_2$ et $s_1 \cap s_2$, car $(\mathcal{C}, <)$ et $(\Sigma, <)$ sont des classes sous-inductives. En utilisant le théorème 2-4, on obtient :

$$(f_1 \cap f_2)(s_1 \cap s_2) = f_1 s_1 \cap f_2 s_2 = \alpha(z_1) \cap \alpha(z_2) = \alpha(z_1 \cap z_2),$$

puisque $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est sous-inductive (proposition 1). On en déduit :

$$h' = (z_1 \cap z_2, f_1 \cap f_2, s_1 \cap s_2) \in \tilde{\Sigma} \qquad \text{et} \qquad h' = h_1 \cap h_2.$$

Comme : $\alpha(h') = s_1 \cap s_2 = \alpha(h_1) \cap \alpha(h_2)$ et :

$$\beta(h') = \beta(z_1 \cap z_2) = \beta(z_1) \cap \beta(z_2) = \beta(h_1) \cap \beta(h_2),$$

$(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-inductive.

Soit $(\Sigma_1^{\cdot}, <)$ une autre catégorie munie d'une catégorie ordonnée d'opérateurs $(\mathcal{C}_1^{\cdot}, <)$ relativement à K_1, l'espèce de structures (resp. ordonnée) correspondante étant η_1 (resp. $\tilde{\eta}_1$).

Définition 3. — *On appelle* application covariante ordonnée de $((\mathcal{C}^{\cdot}, <), (\Sigma^{\cdot}, <), K)$ vers $((\mathcal{C}_1^{\cdot}, <), (\Sigma_1^{\cdot}, <), K_1)$ *un couple* (p, ψ) *vérifiant les conditions :*

1) $\bar{p} = (\mathcal{C}_1^{\cdot}, p, \mathcal{C}^{\cdot})$ *et* $\bar{\psi} = (\Sigma_1^{\cdot}, \psi, \Sigma^{\cdot})$ *sont des foncteurs.*

2) $(\eta_1, (p, \psi), \eta)$ *est une application covariante* [1 *a*], c'est-à-dire on a :

$$\psi(fz) = p(f)\psi(z) \qquad \text{si} \qquad (f, z) \in \bar{\Sigma}.$$

3) $\tilde{p} = ((\mathcal{C}_1, <), p, (\mathcal{C}, <)) \in \tilde{\Omega}$ *et*

$$\tilde{\psi} = ((\Sigma_1, <), \psi, (\Sigma, <)) \in \tilde{\Omega}.$$

PROPOSITION 2. — *Si* (p, ψ) *est une application covariante ordonnée de* $((\mathcal{C}^{\cdot}, <), (\Sigma^{\cdot}, <), K)$ *vers*

$$((\mathcal{C}_1^{\cdot}, <), (\Sigma_1^{\cdot}, <), K_1),$$

l'application $\psi \times_K p$:

$$(z, f, s) \to (\psi(z), p(f), \psi(s)), \qquad où \qquad (z, f, s) \in \tilde{\Sigma},$$

définit un foncteur ordonné de $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ *vers* $(\tilde{\Sigma}_1^{\cdot}, <)$

Démonstration. — Soit $h = (z, f, s) \in \tilde{\Sigma}$; on a $(p(f), \psi(s)) \in S_1$ et :

$$\alpha(\psi(z)) = \psi(\alpha(z)) = \psi(fs) = p(f)\psi(s),$$

d'où $(\psi(z), p(f), \psi(s)) \in \tilde{\Sigma}_1$. En particulier $\psi \times_K p(s) = \psi(s)$, si $s \in \Sigma_0^{\cdot}$. Soit $h' = (z', f', s') \in \tilde{\Sigma}$ et $s' = \beta(z)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \psi \times_K p(h'.h) &= (\psi(z'.f'z), p(f'.f), \psi(s)) \\ &= (\psi(z').\psi(f'z), p(f').p(f), \psi(s)) \\ &= \psi \times_K p(h').\psi \times_K p(h), \end{aligned}$$

car $\psi(f'z) = p(f')\psi(z)$. Donc $\psi \times_K p$ définit un foncteur.

DÉFINITION 4. — *Avec les hypothèses du théorème* 1, *on appelle* $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <)$ le produit croisé ordonné de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et de $(\Sigma^{\cdot}, <)$ *et on pose:* $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, <) = (\Sigma^{\cdot} \times_K \mathcal{C}^{\cdot}, <)$. *Si* (p, ψ) *est une application covariante ordonnée de* $((\mathcal{C}^{\cdot}, <), (\Sigma^{\cdot}, <), K)$ *vers* $((\mathcal{C}_1^{\cdot}, <), (\Sigma_1^{\cdot}, <), K_1)$, *on appelle* $(\tilde{\Sigma}_1^{\cdot}, \psi \times_K p, \tilde{\Sigma}^{\cdot})$ (proposition 2) le produit croisé de (p, ψ).

PROPOSITION 3. — *Soit* C *une sous-catégorie de* $\mathcal{C}^{\cdot}$. *Pour que* $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ *soit un foncteur tel que* $\tilde{\pi}\Phi(f) = f$ *pour tout* $f \in C$, *il faut et il suffit que l'on ait:* $\Phi(f) = (\varphi(f), f, \varphi(\alpha(f)))$, *où* φ *est une application de* C *dans* Σ *vérifiant les conditions:*

$$\text{(H)} \qquad \pi\varphi = \beta; \qquad \varphi(C_0^{\cdot}) \subset \Sigma_0^{\cdot}$$

et

$$\varphi(f'.f) = \varphi(f').f'\varphi(f), \qquad si \qquad (f', f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}.$$

Démonstration. — Soit $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ un foncteur tel que $\pi\Phi(f) = f$. Posons :

$$\varphi(f) = z, \qquad si \qquad \Phi(f) = (z, f, s).$$

On a $\pi\varphi(f) = \beta(f)$. Si $e \in C_0^{\cdot}$, la relation $\Phi(e) \in \tilde{\Sigma}_0^{\cdot}$ entraîne $\varphi(e) \in \Sigma_0^{\cdot}$. Soit $f \in C$, $f' \in C$ et $\alpha(f') = \beta(f)$. On trouve :

$$\Phi(f'.f) = (\varphi(f'.f),\ f'.f,\ s) = \Phi(f').\Phi(f) = (\varphi(f').f'\varphi(f),\ f'.f,\ s)$$

de sorte que (H) est vérifiée. Inversement soit φ une application de C dans Σ satisfaisant à la condition (H). Soit $f \in C$ et $\alpha(f) = e$. Posons : $\Phi(f) = (\varphi(f), f, \varphi(e))$. On obtient :

$$\varphi(f) = \varphi(f.e) = \varphi(f).f\varphi(e), \qquad \text{d'où} \qquad \alpha(\varphi(f)) = f\varphi(e)$$

et $\Phi(f) \in \tilde{\Sigma}$. Si de plus $f' \in C$ et $\alpha(f') = \beta(f)$, on a :

$$\Phi(f').\Phi(f) = (\varphi(f').f'\varphi(f),\ f'.f,\ \varphi(e)) = \Phi(f'.f).$$

Par suite $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ est un foncteur.

COROLLAIRE. — *Si* $(S^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ *est un* 0*-cocycle de* η', *l'application:* $f \to \Phi(\beta(f))$, *où* $f \in C$, *vérifie la condition* (H).

DÉFINITION 5. — *On dira qu'une sous-catégorie* C *de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ engendre $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *si* C *est une sous-classe saturée par induction de* $(\mathcal{C}, <)$ *et si, pour tout* $f \in \mathcal{C}$, *il existe une sous-classe* F *de* C *telle que* $f = \bigcup^{f} F$.

Remarquons que cette définition est surtout intéressante dans le cas où $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive.

Si C_1 et C_2 sont deux sous-catégories de $\mathcal{C}^{\cdot}$ engendrant $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, alors $C_1 \cap C_2$ engendre aussi $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

DÉFINITION 6. — *On appelle* 1-cocycle ordonné *un triplet* $(\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$, *où* C *est une sous-catégorie engendrant* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *et où* φ *est une application de* C *dans* Σ *vérifiant la condition* (H). *Le foncteur* $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ *correspondant sera appelé* foncteur croisé associé à $(\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$.

Nous désignerons par $Z^1(\Sigma^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$ la classe de tous les 1-cocycles ordonnés $\overline{\varphi} = (\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$ et par $\mathfrak{Z}$ l'application : $\overline{\varphi} \to (\tilde{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$, où $(\tilde{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, C^{\cdot})$ est le foncteur croisé associé à $(\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$. Nous écrirons aussi $\overline{\varphi}(f)$ au lieu de $\varphi(f)$, si $f \in C$.

D'après le corollaire de la proposition 4, tout 0-cocycle $\overline{\Phi}$ de η' sur une sous-catégorie C engendrant $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ détermine un 1-cocycle ordonné, qui sera dit *associé à* $\overline{\Phi}$.

Définition 7. — *On appelle* équivalence croisée ordonnée *un triplet* $(\overline{\varphi}_2, \tau, \overline{\varphi}_1)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\overline{\varphi}_i = (\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}, \varphi_i, C_i^{\boldsymbol{\cdot}})$, *où* $i = 1,2$, *sont des 1-cocycles ordonnés. Soit* $C = C_1 \cap C_2$.

2) τ *est une application de* $C_0^{\boldsymbol{\cdot}}$ *dans* $\Sigma_\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}$ *telle que*

$$\tau(e').\varphi_1(f) = \varphi_2(f).f\tau(e) \quad si \quad f \in C, \quad e = \alpha(f), \quad e' = \beta(f).$$

Dans la suite nous dirons équivalence croisée au lieu de « équivalence croisée ordonnée ».

Proposition 4. — *Soient* $\overline{\varphi}_i = (\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}, \varphi_i, C_i^{\boldsymbol{\cdot}})$ *deux 1-cocycles ordonnés et* $C = C_1 \cap C_2$. *Pour que* $(\overline{\varphi}_2, \tau, \overline{\varphi}_1)$ *soit une équivalence croisée, il faut et il suffit que* (Φ_2, τ, Φ_1) *soit une équivalence naturelle, où* Φ_i *est le foncteur restriction de* $\mathcal{Z}(\overline{\varphi}_i)$ *à* C.

En effet, soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. On a :

$$\tau(e').(\varphi_1(f), f, \varphi_1(e)) = (\varphi_2(f), f, \varphi_2(e)).\tau(e)$$

si, et seulement si, $\tau(e').\varphi_1(f) = \varphi_2(f).f\tau(e)$.

Théorème 3. — *Soit* $\overline{\varphi} = (\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}, \varphi, C^{\boldsymbol{\cdot}}) \in Z^1(\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}, \mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}})$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $((\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}, \varphi', C^{\boldsymbol{\cdot}}), \tau, \overline{\varphi})$ *est une équivalence croisée.*

2) τ *est une application de* $C_0^{\boldsymbol{\cdot}}$ *dans* $\Sigma_\gamma^{\boldsymbol{\cdot}}$ *telle que* $\alpha(\tau(e)) = \varphi(e)$ *pour tout* $e \in C_0^{\boldsymbol{\cdot}}$ *et* φ' *est l'application de* C *dans* Σ *définie par :*

$$\varphi'(f) = \tau(e').\varphi(f).f\tau(e)^{-1},$$

si $\quad f \in C, \quad e = \alpha(f), \quad e' = \beta(f).$

Démonstration. — Si la condition 1 est vérifiée, la condition 2 est évidemment satisfaite. Inversement supposons la condition 2 vérifiée et montrons qu'alors $(\Sigma^{\boldsymbol{\cdot}}, \varphi', C^{\boldsymbol{\cdot}})$ est un 1-cocycle ordonné. En effet, soit $e \in C_0^{\boldsymbol{\cdot}}$. On a :

$$\varphi'(e) = \tau(e).\varphi(e).\tau(e)^{-1} = \beta(\tau(e)) \in \Sigma_0^{\boldsymbol{\cdot}}.$$

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$. Comme $\overline{\varphi}$ est un homomorphisme croisé, on trouve :

$$\alpha(\tau(e')) = \varphi(e') = \beta(\varphi(f)), \qquad \alpha(f\tau(e)) = f\varphi(e) = \alpha\varphi(f),$$

de sorte que $\tau(e').\varphi(f).f\tau(e)^{-1}$ est défini. Supposons

$$(f', f) \in C^{\boldsymbol{\cdot}} * C^{\boldsymbol{\cdot}} \qquad \text{et} \qquad \beta(f') = e''.$$

Le composé $\varphi'(f').f'\varphi'(f)$ est défini, car :

$$\beta(f'\varphi'(f)) = \beta(f'\tau(e')) = \alpha(\varphi'(f')),$$

et on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(f').f'\varphi'(f) &= \tau(e'').\varphi(f').f'\tau(e')^{-1}.f'(\tau(e').\varphi(f).f\tau(e)^{-1})\\ &= \tau(e'').\varphi(f').f'\varphi(f).(f'.f)\tau(e)^{-1} = \varphi'(f'.f).\end{aligned}$$

Ainsi φ' définit un 1-cocycle ordonné et $(\overline{\varphi}', \tau, \overline{\varphi})$ est une équivalence croisée, où $\overline{\varphi}' = (\Sigma^{\cdot}, \varphi', C^{\cdot})$ car :

$$\tau(e').\varphi(f) = \varphi'(f).f\tau(e).$$

Corollaire. — *Soit* C *une sous-catégorie engendrant* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. *Soit* τ *une application de* $C_0^{\cdot}$ *dans* $\Sigma_\gamma^{\cdot}$ *telle que :*

$$\alpha(\tau(e')) = f\alpha(\tau(e)) \qquad si \qquad f \in C, \qquad e = \alpha(f), \qquad e' = \beta(f).$$

Soit φ_τ *l'application :* $f \to \tau(e').f\tau(e)^{-1}$. *Alors* $(\overline{\varphi}_\tau, \tau, \overline{\alpha\tau\beta})$ *est une équivalence croisée, où* $\overline{\varphi}_\tau = (\Sigma^{\cdot}, \varphi_\tau, C^{\cdot})$.

En effet, l'application : $f \to (f, \alpha(\tau(e)))$ définit un 0-cocycle de η' et, en vertu du corollaire de la proposition 3, l'application $\alpha\tau\beta$ de C dans Σ définit un 1-cocycle ordonné. Le corollaire résulte donc du théorème 3.

Définition 8. — *On appelle* 1-cobord ordonné *un 1-cocycle ordonné* $\overline{\varphi}$ *tel qu'il existe une équivalence croisée* $(\overline{\varphi}, \tau, \mathfrak{Z}^{-1}(\Phi))$, *où* Φ *est un 0-cocycle ordonné de* $\tilde{\eta}'$.

Les 1-cobords ordonnés sont donc les 1-cocycles ordonnés $\overline{\varphi}_\tau$ du corollaire du th. 3 tels que $((\Sigma_\gamma^{\cdot}, <), \alpha\tau, (C_0^{\cdot}, <)) \in \tilde{\Omega}$. Si τ' est un 0-cocycle ordonné de $\tilde{\eta}$ tel que $\beta\tau' = \alpha\tau$, alors le 1-cobord $\overline{\varphi}_\tau$ peut aussi être représenté par le symbole $\overline{\varphi}_{\tau.\tau'}$.

Soit $B^1(\Sigma^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$ la classe des 1-cobords ordonnés. En vertu de la proposition 3, $\overline{\varphi}$ est un 1-cobord ordonné si, et seulement si, il existe un 0-cocycle ordonné Φ de $\tilde{\eta}'$ et une équivalence naturelle $(\mathfrak{Z}(\overline{\varphi}), \tau, \Phi)$.

Proposition 5. — *La relation* ρ *définie sur* $Z^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ *par :* $\overline{\varphi} \sim \overline{\varphi}'$ *si, et seulement si, il existe une équivalence croisée* $(\overline{\varphi}', \tau, \overline{\varphi})$, *est une relation d'équivalence et* $B^1(\Sigma^{\cdot}, C^{\cdot})$ *est saturée relativement à* ρ.

Démonstration. — ρ est réflexive car $(\overline{\varphi}, \overline{\varphi}_0, \overline{\varphi})$ est une équivalence croisée, où $\overline{\varphi}_0(e) = \overline{\varphi}(e)$ pour tout $e \in C_0^{\cdot}$. Soit $(\overline{\varphi}', \tau, \overline{\varphi})$

une équivalence croisée; les relations :

$$\tau(e').\overline{\varphi}(f) = \overline{\varphi}'(f).f\tau(e) \qquad \text{et} \qquad \tau(e) \in \Sigma^{\cdot}_{\gamma}$$

entraînent :

$$f\tau(e) \in \Sigma^{\cdot}_{\gamma} \text{ et } \overline{\varphi}(f).f\tau(e)^{-1} = \tau(e')^{-1}.\overline{\varphi}'(f),$$

de sorte que $(\overline{\varphi}, \tau^{-1}, \overline{\varphi}')$ est une équivalence croisée, où

$$\tau^{-1}(e) = \tau(e)^{-1}.$$

Ainsi ρ est symétrique. Soient $(\overline{\varphi}_2, \tau, \overline{\varphi}_1)$ et $(\overline{\varphi}_3, \tau', \overline{\varphi}_2)$ deux équivalences croisées et $\overline{\varphi}_i = (\Sigma^{\cdot}, \varphi_i, C^{\cdot}_i)$. Posons

$$C = C_1 \cap C_2 \cap C_3.$$

Soit $f \in C$, $e = \alpha(f)$ et $e' = \beta(f)$; on a :

$$\begin{aligned}\tau'(e').\tau(e').\varphi_1(f) &= \tau'(e').\varphi_2(f).f\tau(e) = \varphi_3(f).f\tau'(e').f\tau(e)\\ &= \varphi_3(f).f(\tau'(e').\tau(e)).\end{aligned}$$

Donc $(\overline{\varphi}_3, \tau'.\tau, \overline{\varphi}_1)$ est une équivalence croisée et $\overline{\varphi}_1 \sim \overline{\varphi}_3$. Ainsi ρ est une relation d'équivalence.

Définition 9. — *On appelle* classe de cohomologie d'ordre 1 *une classe d'équivalence* $\overline{\varphi}$ mod ρ, *où* $\overline{\varphi} \in Z^1(\Sigma^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$. *Soit* $H^1(\Sigma^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$ *la classe des* classes de cohomologie d'ordre 1.

Soit $\overline{\varphi} = (\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$ un 1-cocycle ordonné. Il résulte du théorème 3 que la classe $\overline{\varphi}$ mod ρ est la classe des triplets $(\Sigma^{\cdot}, \varphi', C^{\cdot}_1)$ construits de la façon suivante : soit C_1 une sous-catégorie engendrant $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et soit $C_2 = C \cap C_1$; soit τ une application de $(C_2)^{\cdot}_0$ dans $\Sigma^{\cdot}_{\gamma}$ telle que $\alpha(\tau(e)) = \varphi(e)$ pour tout $e \in \alpha(C_2)$; alors φ' est une application de C_1 dans Σ vérifiant la condition (H) et telle que, pour tout $f \in C_2$ on ait :

$$\varphi'(f) = \tau(e').\varphi(f).f\tau(e)^{-1}, \qquad \text{où} \qquad e = \alpha(f), \qquad e' = \beta(f).$$

Supposons que $\tilde{\eta}$ soit une espèce de structures quasi-inductive. Soit $\mathcal{B}$ une sous-catégorie régulière de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ telle que $(\mathcal{B}^{\cdot}, <)$ soit quasi-inductive. Soit $\Sigma/\mathcal{B} = \overset{-1}{\pi}(\mathcal{B}_0)$. Alors

$$((\Sigma/\mathcal{B})^{\cdot}, <)$$

admet $(\mathcal{B}^{\cdot}, <)$ pour catégorie ordonnée d'opérateurs; soient

$Z^1(\Sigma^\cdot/\mathcal{B}, \mathcal{B}^\cdot)$ et $H^1(\Sigma^\cdot/\mathcal{B}, \mathcal{B}^\cdot)$ la classe des 1-cocycles ordonnés et la classe de cohomologie d'ordre 1 correspondantes.

Soit $N^U(\mathcal{C}^\cdot, <)$ la classe des triplets $(\Psi, \psi, \mathcal{B})$ tels que :

1) Ψ est un foncteur quasi-inductif de la sous-catégorie $\mathcal{B}^\cdot$ sur une sous-catégorie $\mathcal{B}'^\cdot$ de $\mathcal{C}^\cdot$.

2) $(i_{\mathcal{B}'}.\Psi, \psi, i_{\mathcal{B}})$ est une transformation naturelle, où $i_{\mathcal{B}}$ désigne le foncteur injection de $\mathcal{B}^\cdot$ dans $\mathcal{C}^\cdot$.

3) $((\mathcal{C}, <), \psi, (\mathcal{B}_0^\cdot, <)) \in \mathcal{J}^U$.

$N^U(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une catégorie pour la loi de composition :

$$(\Psi', \psi', \mathcal{B}').(\Psi, \psi, \mathcal{B}) = (\Psi'.\Psi, \psi'\Psi.\psi, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$\mathcal{B}' = \Psi(\mathcal{B}), \qquad \text{où} \qquad (\psi'\Psi.\,\psi)(e) = \psi'(\Psi(e)).\psi(e)$$

(c'est-à-dire pour la multiplication latérale des transformations naturelles correspondantes).

Proposition 6. — $N^U(\mathcal{C}^\cdot, <)_\gamma$ *est un groupoïde d'opérateurs sur* $\bigcup Z^1(\Sigma^\cdot/\mathcal{B}, \mathcal{B}^\cdot)$ *et sur* $\bigcup H^1(\Sigma^\cdot/\mathcal{B}, \mathcal{B}^\cdot)$.

Démonstration. — Soit $(\Psi, \psi, \mathcal{B}) \in N^U(\mathcal{C}^\cdot, <)_\gamma$,

$$\overline{\varphi} = ((\Sigma/\mathcal{B})^\cdot, \varphi, B^\cdot) \in Z^1(\Sigma^\cdot/\mathcal{B}, \mathcal{B}^\cdot) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}' = \Psi(\mathcal{B}).$$

La catégorie $\Psi(B)$ engendre $(\mathcal{B}'^\cdot, <)$. Soit φ' l'application :

$$g \to \psi(e')\varphi(\Psi^{-1}(g)), \qquad \text{où} \qquad g \in \Psi(B) \qquad \text{et} \qquad \Psi(e') = \beta(g).$$

Soit $g' \in \Psi(B)$ et $\alpha(g') = \beta(g)$; on a :

$$\begin{aligned}\varphi'(g'\cdot g) &= \psi(e'')\varphi(\Psi^{-1}(g'\cdot g))\\ &= \psi(e'')(\varphi(\Psi^{-1}(g')).\Psi^{-1}(g')\varphi(\Psi^{-1}(g)))\\ &= \varphi'(g').g'\varphi'(g),\end{aligned}$$

où $\Psi(e'') = \beta(g')$, car $\psi(e'').\Psi^{-1}(g') = g'.\psi(e')$. Par suite $((\Sigma/\mathcal{B}')^\cdot, \varphi', \Psi(B)^\cdot)$ est un 1-cocycle ordonné, qui définit le composé de $(\Psi, \psi, \mathcal{B})$ et de $\overline{\varphi}$.

— Si $h \in H^1(\Sigma^\cdot/\mathcal{B}, \mathcal{B})$ et $\overline{\varphi} \in h$, le composé $(\Psi, \psi, \mathcal{B})\, h$ est la classe :

$$((\Sigma/\mathcal{B}')^\cdot, \varphi', \Psi(B)^\cdot) \text{ mod. } \rho.$$

6. — Applications.

A) *Cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes:* Soit E un espace topologique et $\mathcal{C}^{\cdot}$ la catégorie ayant pour éléments les couples (U', U), où U et U' sont deux ouverts de E et $U' \subset U$, la loi de composition étant définie par:

$$(U'', U').(U', U) = (U'', U).$$

$\mathcal{C}^{\cdot}$ est munie de la relation d'ordre définie par:

$(U'_1, U_1) < (U', U)$ si, et seulement si, $U'_1 \subset U'$ et $U_1 \subset U$.

Soit $\Sigma^{\cdot}$ un groupoïde muni de la catégorie d'opérateurs $\mathcal{C}^{\cdot}$ relativement à la loi de composition K; soit $\eta = [\mathcal{C}^{\cdot}, \pi, \Sigma]$ l'espèce de structures correspondante. $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est munie de la catégorie quasi-inductive d'opérateurs $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ relativement à K, la relation d'ordre sur Σ étant définie par:

$$z' < z \quad \text{si, et seulement si,} \quad z' = (\pi(z'), \pi(z))z.$$

L'espèce de structures quasi-inductive $\tilde{\eta}$ est étalée.

Les 0-cocycles ordonnés sur $\mathcal{C}$ s'identifient aux sections de π sur E. Toute sous-catégorie pleine saturée par induction C de $\mathcal{C}^{\cdot}$ dont la classe des unités forme un recouvrement de E engendre $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Pour que $\Sigma^{\cdot}$ soit un faisceau de groupoïdes sur E [6], il faut et il suffit que $\tilde{\eta}$ soit une espèce de structures complète [1 *a*]. Supposons qu'il en soit ainsi.

Théorème 1. — *Il existe une bijection canonique de* $H^1(\Sigma^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$ *sur le premier ensemble de cohomologie* [6] *à valeurs dans le faisceau de groupoïdes* $\Sigma^{\cdot}$.

Démonstration. — La notion de 1-cocycle ordonné est différente de la notion de 1-cocycle au sens de [6]. En effet, un 1-cocycle au sens de [6] peut être défini, en utilisant notre terminologie (différente de celle de [6]) de la façon suivante: soit C une sous-catégorie engendrant $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Soit I un ensemble d'indices. Soit $\Sigma_1^{\cdot}$ un groupoïde dont les éléments sont des triplets $(U, j, i) \in C_0^{\cdot} \times I \times I$, la loi de composition étant définie par:

$(U', j', i').(U, j, i) = (U, j', i)$ si, et seulement si, $U' = U$, $j = i'$.

Nous supposons que les conditions $(U, i, i) \in \Sigma_1$ et $(U, j, j) \in \Sigma_1$ entraînent $(U, j, i) \in \Sigma_1$; de plus $C^{\cdot}$ opère sur Σ_1 relativement à la loi de composition K_1 : $(U', U)(U, j, i) = (U', j, i)$ (c'est-à-dire : si $(U, j, i) \in \Sigma_1$, alors $(U', j, i) \in \Sigma_1$ pour tout $U' \subset U$)·
Munissons Σ_1 de la relation d'ordre :

$$(U', j', i') < (U, j, i) \text{ si, et seulement si, } U' \subset U,\ j' = j \text{ et } i' = i.$$

Alors $(\Sigma_1^{\cdot}, <)$ admet $(C^{\cdot}, <)$ pour catégorie ordonnée d'opérateurs relativement à K_1. Un 1-cocycle au sens de [6] s'identifie à une application covariante (i_C, ψ) ordonnée de

$$((C^{\cdot}, <), (\Sigma_1^{\cdot}, <), K_1) \qquad \text{vers} \qquad ((\mathcal{C}^{\cdot}, <), (\Sigma^{\cdot}, <), K).$$

Soit $\overline{\varphi} = (\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot}) \in Z^1(\Sigma^{\cdot}, \mathcal{C}^{\cdot})$; soit $\Sigma_1^{\cdot}$ le groupoïde formé des triplets (U'', U, U') et (U'', U', U) tels que

$$U'' \subset U' \subset U, \qquad U \in C_0^{\cdot};$$

$\overline{\varphi}$ détermine l'application covariante (i_C, ψ) telle que

$$\psi(U'', U', U) = (U'', U')\varphi(U', U)$$

(= « restriction » de $\varphi(U', U)$ à U''). Inversement soit (i_C, ψ) une application covariante définissant un 1-cocycle au sens de [6]. Pour tout $U \in C_0^{\cdot}$, choisissons un $(U, i, i) \in \Sigma_1$ et posons $\varphi(U) = \psi(U, i, i)$. Si $U' \subset U$ et si $\varphi(U') = \psi(U', j, j)$, posons $\varphi(U', U) = \psi(U', j, i)$. Alors $(\Sigma^{\cdot}, \varphi, C^{\cdot})$ est un 1-cocycle ordonné. Le théorème résulte donc de la définition de ρ et de la définition de la relation d'équivalence sur l'ensemble des 1-cocycles de [5].

Nous discuterons dans un autre article le rapport entre les notions de feuilletages de seconde espèce définis par des atlas [4] ou par des classes de cohomologie d'ordre 1 dans un faisceau de groupoïdes [6].

Remarquons que la définition de [6] utilise essentiellement le fait que les seuls morphismes de $\mathcal{C}^{\cdot}$ sont les couples définissant la relation d'ordre et que $\Sigma^{\cdot}$ est un groupoïde et ne pourrait pas s'étendre au cas général que nous considérons ici.

B) *Structures transverses d'un feuilletage :*

Soit (T, T') un feuilletage topologique localement simple sur E. Soit $\overline{H}'$ le groupoïde d'holonomie complet construit au n° 3.

DÉFINITION 1. — *On appelle* groupoïde d'holonomie relativement complet *le sous-groupoïde plein* $\hat{H}'$ *de* $\overline{H}'$ *ayant pour unités les atlas complets saturés qui sont majorés par un élément de* H'_0.

Comme $\hat{H}'$ est une sous-classe saturée par induction dans $(\overline{H}', <)$, le groupoïde $(\hat{H}', <)$ est quasi-inductif régulier.

Supposons que $\tilde{\eta} = [(H', <), \pi, (\Sigma, <)]$ soit une espèce de structures ordonnée et soit $\overline{\Sigma}^{\cdot}$ la catégorie des hypermorphismes associée à $[H', \pi, \Sigma]$. Soit $\hat{\Sigma}$ la classe des 0-cocycles ordonnés $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \mathcal{B}^{\cdot})$ tels que $\mathcal{B} \in \hat{H}'_0$, que nous munissons de la relation d'ordre induite par $(Z^0_r(\Sigma), <)$ (th. 4-4). Soit $\hat{\pi}$ la restriction de $Z^0_r(\pi)$ à $\hat{\Sigma}$.

Une sous-classe π-complète de Σ est une sous-classe C de Σ, saturée par induction et par agrégation et telle que :

$$\pi(s \cap s') = \pi(s) \cap \pi(s'),$$

si $s \in C$, $s' \in C$ et si $s \cap s'$ est défini. On dira que $\tilde{\eta}$ est complète [1 *a*] si toute sous-classe π-complète C telle que $\pi(C)$ admette un sous-agrégat admissible dans H' admet un agrégat dans Σ.

PROPOSITION 1. — *Si* $\tilde{\eta}$ *est étalée et complète,*

$$\hat{\eta} = [(\hat{H}', <), \hat{\pi}, (\hat{\Sigma}, <)]$$

est une espèce de structures quasi-inductive étalée, dont $\tilde{\eta}$ *est une sous-espèce de structures.*

Démonstration. — Soit $F \in \hat{H}'$ et $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \overline{a}(F)^{\cdot}) \in \hat{\Sigma}$. Soit :

$$(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', b(F)^{\cdot}) = F(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi/a(F), a(F)^{\cdot}),$$

où $\Phi/a(F)$ est la restriction de Φ à $a(F)$ (notations corollaire du th. 4-4). Soit $\overline{g} = (U_2, g, U_1) \in \overline{b}(F)$; il existe une sous-classe C de $b(F)$ dont $\overline{g}$ est un sous-agrégat admissible. Comme Φ' est une bijection de C sur $\Phi'(C)$, les classes $\Phi'(\alpha(C))$ et $\Phi'(\beta(C))$ sont complètes et, puisque $\tilde{\eta}$ est supposée complète, elles admettent des agrégats σ et σ' respectivement. On a : $\sigma' = \overline{g}\sigma$, car $g's' < \overline{g}\sigma$ pour tout $g' \in C$ et $s' \in \alpha(C)$. Par suite, en posant $\Phi'(\overline{g}) = (\overline{g}, \sigma)$, on obtient le 0-cocycle ordonné $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', \overline{b}(F)^{\cdot})$ de $\tilde{\eta}$. Un raisonnement analogue à celui du théorème 4-4 et de son corollaire montre que $\hat{H}'$ opère sur $\hat{\Sigma}$ relativement à la loi de composition :

$$F(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, \overline{a}(F)^{\cdot}) = (\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi', \overline{b}(F)^{\cdot})$$

et que $\hat{\eta}$ est une espèce de structures quasi-inductive dont $\tilde{\eta}$ est une sous-espèce de structures.

DÉFINITION 2. — *Si* $\hat{\eta} = [(\hat{H}', <), \hat{\pi}, (\hat{\Sigma}, <)]$ *est une espèce de structures quasi-inductive, un* 0*-cocycle ordonné de* $\hat{\eta}$ *sur* H′ *sera appelé* $\hat{\eta}$-structure transverse du feuilletage (T, T′).

On peut ainsi construire par exemple une structure différentiable transverse sur (T, T′). Si U est un ouvert simple, soit $\overset{-1}{\pi}(U)$ la classe (supposée non vide) de toutes les structures r fois différentiables sur les ouverts de l'espace transverse $\breve{U}$ (dont la topologie est la topologie quotient de la topologie induite par T). Soit Σ la classe réunion des $\overset{-1}{\pi}(U)$. Le groupoïde H′ opère sur Σ, le composé $(U', f, U)s$, où $\pi(s) = U$, étant par définition la structure r fois différentiable image de s par l'homéomorphisme f. Munissons Σ de la relation d'ordre :

$s' < s$ si, et seulement si, $U' = \pi(s') < \pi(s) = U$ et si l'image de s' par l'injection canonique u de $\breve{U}'$ dans $\breve{U}$ est la structure différentiable induite par s sur $u(\breve{U}')$. $\tilde{\eta} = [(H', <), \pi, (\Sigma, <)]$ est une espèce de structures ordonnée étalée complète. Un 0-cocycle ordonné σ de $\tilde{\eta}$ sur $\mathcal{B} \in \hat{H}'_0$ sera appelé structure r fois différentiable transverse sur $\mathcal{B}$. D'après la proposition 1, $\hat{H}'$ opère sur la classe $\hat{\Sigma}$ des structures r fois différentiables transverses; soit $\hat{\eta}$ l'espèce de structures quasi-inductive correspondante. Un 0-cocycle ordonné de $\hat{\eta}$ sur H′ sera appelé *structure r fois différentiable transverse de* (T, T′). D'après la proposition 1, une telle structure transverse s'identifie à un 0-cocycle ordonné de $\tilde{\eta}$ sur H′.

Soit $(\overline{\Sigma}^{\cdot}, \Phi, H')$ une telle structure r fois différentiable. Considérons sur le groupoïde $\Phi(H')$ l'espèce de structures dont les structures se projetant sur $s \in \Phi(H'_0)$ sont les formes différentielles de degré p sur s. Soit $\tilde{\eta}^p$ l'espèce de structures ordonnée correspondante, qui est définie facilement. Un 0-cocycle ordonné de $\tilde{\eta}^p$ peut être appelé *forme différentielle transverse de degré p*. Les formes différentielles transverses forment un module différentiel gradué $\mathcal{L}^* = (\mathcal{L}^n)$ relativement à l'opérateur d. On définit par la méthode classique la cohomologie $H^*(\mathcal{L}^*)$ en posant :

$$H^n(\mathcal{L}^*) = Z^n(\mathcal{L}^*)/B^n(\mathcal{L}^*),$$

où $Z^n(\mathcal{L}^*)$ est le noyau de l'application d de $\mathcal{L}^n$ dans $\mathcal{L}^{n+1}$ et où $B^n(\mathcal{L}^*)$ est l'image $d(\mathcal{L}^{n-1}) \subset \mathcal{L}^n$.

On définirait de même les notions de champ de vecteurs transverses, de champ de tenseurs transverses, de structures riemanniennes transverses, de connexion transverse,... (voir aussi [5]).

Une construction analogue à partir de l'espèce de structures $[H', \pi, \Sigma]$ telle que $\overset{-1}{\pi}(U)$ soit l'ensemble des topologies sur $\breve{U}$ plus fines que la topologie de $\breve{U}$ conduit à définir les structures topologiques transverses d'un feuilletage. En particulier on a la structure topologique transverse canonique en associant à U la topologie de $\breve{U}$. On peut également construire les structures de feuilletages transverses : à une telle structure est associé un feuilletage (T, T_1) sur E tel que (T_1, T') soit aussi un feuilletage.

C. *Éléments transverses en un point ou le long d'une feuille :*

Soit H'' le groupoïde d'holonomie pointé, dont les éléments sont les (x', U', f, U, x) tels que :

$$(U', f, U) \in H', \quad x \in U, \quad x' \in U' \qquad \text{et} \qquad x' \in f(\breve{x}),$$

muni de la loi de composition :

$$(x'', U'', f', U', x') . (x', U', f, U, x) = (x'', U'', f'f, U, x).$$

Si F est une feuille de (T, T') la classe des (x', U', f, U, x) tels que $x \in F$ est un sous-groupoïde de H'', noté $H''(F)$. Soit V la classe des éléments (U, x, s, v), où U est un ouvert simple, $x \in U$, s est une structure r fois différentiable sur $\breve{U}$ et v un vecteur sur $(\breve{U}, s)$, de source $\breve{x}$. H'' opère sur V (si cette classe n'est pas vide) par la loi de composition :

$$(x', U', f, U, x)(U, x, s, v) = (U', x', fs, fv).$$

Soit ν l'espèce de structures correspondante. Un 0-cocycle de ν sur $H''(F)$ est appelé *vecteur transverse le long de* F. Un

0-cocycle de ν sur le sous-groupoïde $H''(x)$ formé des (x, U', f, U, x) est appelé *vecteur transverse en x.*

Soit $\sigma = (\overline{\Sigma}^{\bullet}, \Phi, H')$ une structure r fois différentiable transverse de (T, T'). Soit $V(\sigma)$ l'ensemble des vecteurs transverses associés à σ, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs transverses Ψ_x tels que :

$$\Psi_x(U) = (U, x, s, \nu), \qquad \text{où} \qquad s \in \Phi(H'_0).$$

$V(\sigma)$ est muni d'une structure d'espace fibré vectoriel de base E.

On étend de même les autres notions de Géométrie différentielle.

D. *Catégorie d'holonomie :*

Soit $\tilde{H}'$ la catégorie dont les éléments sont les triplets (U', f, U) tels que l'on ait $(U'', f, U) \in H'$ et que U'' soit un ouvert saturé de U'. On munit $\tilde{H}'$ de la loi de composition :

$$(U'_1, f_1, U_1) . (U', f, U) = (U'_1, f_1 f, U) \text{ si, et seulement si, } U_1 = U',$$

et de la relation d'ordre :

$$(U'_2, f_2, U_2) < (U'_1, f_1, U_1) \qquad \text{si, et seulement si,} \qquad U'_2 < U'_1$$

et

$$(U''_2, f_2, U_2) < (U''_1, f_1, U_1), \qquad \text{où} \qquad (U''_i, f_i, U_i) \in H'.$$

Alors $(\tilde{H}', <)$ est une catégorie ordonnée régulière.

Définition 3. — *On appelle* $(\tilde{H}', <)$ *la catégorie d'holonomie associée à* (T, T').

Soit $(\Sigma^{\bullet}, <)$ une catégorie admettant $(\tilde{H}', <)$ pour catégorie ordonnée d'opérateurs relativement à K. On peut alors définir les 1-cocycles ordonnés, les 1-cobords ordonnés et les classes de cohomologie d'ordre 1 correspondantes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *a*) Élargissement de catégories, *Sém. topo. et Géo. diff.*, 1961, III, Paris.
b) Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Inst. Fourier*, 13, 1963.

[2] Structures et catégories d'homomorphismes, chap. I, *Sém. Soc. Can. Un.*, Montréal, 1961.

[3] Catégories structurées (multigraphié Paris et *Ann. Ec. Norm.*, 1963, fasc. 4); *C.R.A.S.* 256, 1953, pp. 1198-2080-2280; Sous-structures et catégories ordonnées (multigraphié, Paris), à l'imp. dans *Fund. Math.*
[4] Structures feuilletées, *Proc. 5 th Can. Math. Congress*, 1961, p. 109.
[5] Structures quotient (multigraphié Paris et *Comm. Math. Helv.*, 1963, p. 219).
[6] A. HAEFLIGER, Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes, *Comm. Math. Helv.*, 32, 4, 1958, Zurich.