ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

CHARLES EHRESMANN

Complétion des catégories ordonnées

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 2 (1964), p. 89-144

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_89_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 89-144.

COMPLÉTION DES CATÉGORIES ORDONNÉES

par Charles EHRESMANN

Introduction.

Étant donnée une catégorie ordonnée régulière $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, on appelle complétion de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie quasi-inductive régulière admettant $\mathcal{C}^{\cdot}$ pour sous-catégorie régulière et dont tout élément est un sous-agrégat d'éléments de $\mathcal{C}$. Le problème universel de la complétion est le suivant : associer canoniquement à une catégorie ordonnée régulière une complétion « minimale ». Nous montrerons que ce problème a en particulier une solution si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-prélocale régulière vérifiant la condition (P), la complétion étant alors une catégorie sous-locale (et locale si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est prélocale). Plus généralement, nous construirons des plongements d'une catégorie ordonnée régulière dans des catégories quasi-inductives régulières.

Le paragraphe 1 associe à une catégorie ordonnée régulière $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}^{s}$-structurée de fusées, qui admet pour quotient la catégorie quasi-inductive des fusées maximales. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude d'une sous-catégorie de la catégorie des fusées, à savoir la catégorie des fusées strictes régulières; elle admet pour catégorie quotient la catégorie des fusées strictes maximales. Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est préinductive, la catégorie des fusées strictes maximales a une sous-catégorie inductive, qui est une complétion de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. En considérant certains couples $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$, où $\mathcal{F}_1$ est une fusée majorée par la fusée stricte $\mathcal{F}$, on obtient la notion de superfusée. Les superfusées, qui font l'objet du paragraphe 3, forment une catégorie quasi-inductive régulière. On montre que, si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est sous-prélocale et vérifie la condition (P), elle admet pour complétion « universelle » une catégorie sous-locale régulière quotient d'une sous-catégorie de la catégorie des superfusées.

Ces résultats ont été résumés dans 2 Notes [0]. Le cas particulier des groupoïdes sous-locaux a été étudié dans [3]. Dans un prochain travail, nous étudierons le problème de la complétion d'une catégorie sous-prélocale au-dessus d'une catégorie sous-locale, généralisant les théorèmes indiqués dans [4] pour les groupoïdes sous-prélocaux, et nous montrerons comment les catégories des fusées, des fusées strictes et des superfusées interviennent dans divers problèmes, en particulier celui de la cohomologie.

Cet article est la suite de [1] et nous supposons connues les notations et la terminologie des n^{os} 1 et 2 [1]. En particulier, si $\mathcal{C}^{\cdot}$ est une catégorie, nous désignons par $\mathcal{C}_0^{\cdot}$ la classe de ses unités, par $\mathcal{C}_\gamma^{\cdot}$ la classe des éléments inversibles, par α et β les applications source et but. Si A et B sont deux sous-classes de $\mathcal{C}$, les classes B.A et BA sont respectivement formées de tous les composés $b.a$ et de tous les pseudoproduits ba tels que $b \in B$ et $a \in A$; on pose $A_0 = A \cap \mathcal{C}_0^{\cdot}$.

1. Fusées dans les catégories ordonnées.

Définition 1. — *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée. On appelle* fusée neutre de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une sous-catégorie* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $(\mathcal{B}^{\cdot}, <)$ *et* $(\mathcal{B}_\gamma^{\cdot}, <)$ *sont des catégories semi-régulières.*

2) *Soient* $f \in \mathcal{B}$ *et* $f' \in \mathcal{B}$. *Si* $\alpha(f) = \alpha(f')$ (*resp.* $\beta(f) = \beta(f')$), *il existe* $f_1 \in \mathcal{B}$ *et* $g \in \mathcal{B}_\gamma^{\cdot}$ *tels que* $f_1 < f$ *et* $g.f_1 < f'$ (*resp.* $f_1.g < f'$)

Si $\mathcal{B}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{C}^{\cdot}$, alors $\mathcal{B}$ est une fusée neutre de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ si, et seulement si, $(\mathcal{B}^{\cdot}, <)$ est une catégorie semi-régulière.

Si $\mathcal{C}$ est une fusée neutre de la catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, alors $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est semi-régulière et toute sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}^{\cdot}$, saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$, est une fusée neutre de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée semi-régulière telle que* $(\mathcal{C}_\gamma^{\cdot}, <)$ *soit un groupoïde* $\tilde{\Omega}$*-structuré semi-régulier.*

DÉFINITION 2. — *Soit* $\mathcal{B}$ *une fusée neutre de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. *On appelle* fusée à droite de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ compatible avec $\mathcal{B}$ *une sous-classe* F *de* $\mathcal{C}$ *vérifiant les conditions suivantes:*

(F_1) *On a* $F.\mathcal{B} = F$. *Pour tout* $e \in \mathcal{B}_0$, *il existe* $e' \in \alpha(F)$ *tel que* $e' < e$.

(F_2) *Soient* $f \in F$, $e \in \mathcal{B}_0$ *et* $e < \alpha(f)$; *il existe* $f_1 \in F$ *tel que* $f_1 < f$ *et* $\alpha(f_1) = e$.

(F_3) *Soient* $f \in F$ *et* $f' \in F$. *Si* $\beta(f) = \beta(f')$, *il existe* $f_1 \in F$, $f'_1 \in F$ *et* $g \in \mathcal{B}^{\cdot}_{\gamma}$ *tels que* $f_1 < f$, $f'_1 < f'$ *et* $f_1 . g = f'_1$.

On appelle fusée à gauche de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ compatible avec $\mathcal{B}$ *une fusée à droite de* $(\mathcal{C}^{*}, <)$ *compatible avec* $\mathcal{B}$, *où* $\mathcal{C}^{*}$ *désigne la catégorie duale de* $\mathcal{C}^{\cdot}$.

Dans la définition 2, on peut remplacer la condition (F_3) par: Soient $f \in F$, $f' \in F$ et $\beta(f) = \beta(f')$. Il existe $f_1 \in F$ et $g \in \mathcal{B}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $f_1 < f$ et $f_1 . g < f'$.

DÉFINITION 3. — *On dira que* $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une fusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *si* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *sont des fusées neutres de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *et si* F *est une fusée à droite de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *compatible avec* $\mathcal{B}$ *et une fusée à gauche de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *compatible avec* $\mathcal{B}'$.

En particulier, tout atlas $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ de $\mathcal{C}^{\cdot}$ tel que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soient des fusées neutres de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une fusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. (Voir [1].)

PROPOSITION 1. — *Soit* $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ *une fusée de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. *Alors* $\alpha(F)$ *et* $\beta(F)$ *sont des sous-classes saturées par induction de* $\mathcal{B}_0$ *et de* $\mathcal{B}'_0$ *respectivement. Soient* $f \in F$ *et* $f' \in F$ *tels que* $\beta(f)$ *et* $\beta(f')$ *admettent un minorant* e *dans* $(\mathcal{B}'_0, <)$; *il existe* $f_1 \in F$ *et* $g \in \mathcal{B}^{\cdot}_{\gamma}$ *tels que* $f_1 < f$ *et* $f_1 . g < f'$. *(On a de même la propriété duale.)*

En effet, la première partie résulte des conditions (F_1) et (F_2). Comme $e < \beta(f)$, il existe $\bar{f} \in F$ tel que $\bar{f} < f$ et $\beta(\bar{f}) = e$; il existe aussi $\bar{f}' < f'$ tel que $\bar{f}' \in F$ et $\beta(\bar{f}') = e$ et la proposition résulte de la condition (F_3) appliquée aux éléments $\bar{f}$ et $\bar{f}'$.

Soit I une classe d'indices. Soit $((\mathcal{C}^{\cdot}, I), <)$ la catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée semi-régulière définie de la façon suivante: $(\mathcal{C}^{\cdot}, I)$ est la catégorie produit $\mathcal{C}^{\cdot} \times (I \times I)^{\perp}$, où $(I \times I)^{\perp}$

est le groupoïde des couples $(j, i) \in I \times I$ muni de la loi de composition :

$$(j', i') \perp (j, i) = (j', i) \quad \text{si, et seulement si, } i' = j.$$

$(\mathcal{C}^{\cdot}, I)$ est munie de la relation d'ordre définie par :

$$(f', j', i') < (f, j, i)$$

si, et seulement si, $i' = i$, $j' = j$ et $f' < f$.

Si C est une sous-classe de $\mathcal{C}$, pour tout $(j, i) \in I \times I$, nous noterons (C, j, i) la sous-classe de $(\mathcal{C}^{\cdot}, I)$ ayant pour éléments les (c, j, i) tels que $c \in C$.

Soient $(j, i) \in I \times I$ et $i \neq j$. Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et F des sous-classes de $\mathcal{C}$. Soit $(\mathcal{F}, j, i)$ la classe réunion de $(\mathcal{B}, i, i)$, $(\mathcal{B}', j, j)$ et (F, j, i). Pour que $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ soit une fusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, il faut et il suffit que $(\mathcal{F}, j, i)$ soit une sous-catégorie de $(\mathcal{C}^{\cdot}, I)$ et que

$$\mathcal{F}^{ji} = ((\mathcal{B}', j, j), (F, j, i), (\mathcal{B}, i, i))$$

soit une fusée de $((\mathcal{F}, j, i)^{\cdot}, <)$. Dans ce cas, $((\mathcal{F}, j, i)^{\cdot}, <)$ est une sous-catégorie semi-régulière de $((\mathcal{C}^{\cdot}, I), <)$.

Théorème 1. — *La classe $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ des fusées $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie pour la loi de composition définie par :*

$$(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}'_1).(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$$

si, et seulement si, $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; on a

$$(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <), \qquad (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).(\mathcal{B}, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}', \mathcal{B}', \mathcal{B}').(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

puisque $F.\mathcal{B} = F = \mathcal{B}'.F$. Soit $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Montrons que $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$ est une fusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. En effet, on a :

$$F'.F.\mathcal{B} = F'.F = \mathcal{B}'.F'.F.$$

Supposons $f \in F$, $f' \in F'$ et $\alpha(f') = \beta(f)$. Si $e \in \mathcal{B}_0$ et $e < \alpha(f)$, il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\alpha(f_1) = e$; comme

$$\beta(f_1) \in \beta(F) \subset \mathcal{B}'_0 \qquad \text{et} \qquad \beta(f_1) < \alpha(f'),$$

il existe $f'_1 < f'$ tel que $f'_1 \in F'$ et $\alpha(f'_1) = \beta(f_1)$, d'où

$$f'_1 . f_1 \in F'.F, \qquad f'_1 . f_1 < f'.f \qquad \text{et} \qquad \alpha(f'_1 . f_1) = e.$$

Démonstration analogue si $e'' < \beta(f'.f)$. — Soit $\bar{f} \in F$ et $\bar{f}' \in F'$, tels que $\alpha(\bar{f}') = \beta(\bar{f})$ et $\alpha(f) = \alpha(\bar{f})$. Il existe $f_1 < f$, $\bar{f}_1 < \bar{f}$ et $g' \in \mathscr{B}_\gamma^{\prime\cdot}$ tels que $f_1 = g'.\bar{f}_1$. Comme F′ est une fusée de $(\mathscr{C}^\cdot, <)$, il existe $f'_1 \in F'$ tel que $f'_1 < f'$ et $\alpha(f'_1) = \beta(g')$. D'après la proposition 1, les relations $f'_1 . g' \in F'.\mathscr{B}' = F'$, $\bar{f}' \in F'$ et $\alpha(g') < \alpha(\bar{f}')$ entraînent qu'il existe $f'' \in F'$, $\bar{f}'_1 \in F'$ et $g'' \in \mathscr{B}_\gamma^{\prime\prime\cdot}$ tels que $\bar{f}'_1 < \bar{f}'$, $f'' < f'_1 . g'$ et $f'' = g''.\bar{f}'_1$. Puisque $\alpha(\bar{f}'_1) \in \mathscr{B}'_0$ et $\alpha(\bar{f}'_1) < \beta(\bar{f}_1)$ il existe $\bar{f}_2 \in F$ tel que $\bar{f}_2 < \bar{f}_1$ et $\beta(\bar{f}_2) = \alpha(\bar{f}'_1)$ et il existe $g'_1 \in \mathscr{B}_\gamma^{\prime\cdot}$ vérifiant les conditions :

$$g'_1 < g' \qquad \text{et} \qquad \alpha(g'_1) = \alpha(\bar{f}'_1).$$

On en déduit :

$$\bar{f}'_1 . \bar{f}_2 < \bar{f}'.\bar{f}, \qquad g'_1 . \bar{f}_2 \in F,$$
$$g'_1 . \bar{f}_2 < g'.\bar{f}_1 = f_1 < f,$$
$$f''.g_1^{\prime -1} \in F' \qquad \text{et} \qquad f''.g_1^{\prime -1} < (f'_1 . g').g^{\prime -1} < f'.$$

Donc

$$(f''.g_1^{\prime -1}).(g'_1 . \bar{f}_2) \in F'.F, \qquad \bar{f}'_1 . \bar{f}_2 < \bar{f}'.\bar{f}$$

et

$$g''.(\bar{f}'_1 . \bar{f}_2) = (f''.g_1^{\prime -1}).(g'_1 . \bar{f}_2) < f'.f.$$

On montre de même que la condition duale est vérifiée. De plus si $e \in \mathscr{B}_0$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < e$; comme $\beta(f) \in \mathscr{B}'$, il existe $f' \in F'$ tel que $\alpha(f') < \beta(f)$ et il existe $f_1 \in F$ tel que $f_1 < f$ et $\beta(f_1) = \alpha(f')$; il en résulte $f'.f_1 \in F'.F$ et $\alpha(f'.f_1) < e$. Donc $(\mathscr{B}'', F'.F, \mathscr{B})$ est une fusée de $(\mathscr{C}^\cdot, <)$. Comme la loi de composition entre classes :

$$(F', F) \to F'.F$$

est associative, on en déduit que $\mathscr{F}(\mathscr{C}^\cdot, <)^\cdot$ est une catégorie. Nous identifions la classe des unités à la classe des fusées neutres de $(\mathscr{C}^\cdot, <)$ en identifiant $(\mathscr{B}, \mathscr{B}, \mathscr{B})$ avec $\mathscr{B}$.

Pour tout $f \in \mathscr{C}$, nous désignons par $f^>$ la classe des minorants de f.

Définition 4. — *Nous dirons que* $(\mathscr{C}^\cdot, <)$ vérifie la condition (C) *si, pour tout* $f \in \mathscr{C}$, *le triplet* $(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>)$ *est une fusée de* $(\mathscr{C}^\cdot, <)$.

Proposition 2. — *Supposons que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *vérifie la condition* (C) *et soit* $\mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}$ *la sous-classe de* $\mathcal{C}$ *obtenue en saturant par induction* $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ *dans* $(\mathcal{C}, <)$. *Alors* $(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}, \mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}, \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma})$ *est une fusée de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Démonstration. — $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ est une fusée neutre de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $\mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}$ est saturé par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Soient $g \in \mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}$ et $g' \in \mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}$ tels que $\alpha(g) = \alpha(g') = e$. Il existe $\gamma \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ et $\gamma' \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $g < \gamma$ et $g' < \gamma'$. Puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}, <)$ est semi-régulier, il existe $\gamma_1 \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ et $\gamma'_1 \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$\gamma_1 < \gamma, \qquad \gamma'_1 < \gamma' \qquad \text{et} \qquad \alpha(\gamma_1) = e = \alpha(\gamma'_1).$$

Comme $\gamma^{>}$ définit une fusée, il existe $g_1 < g$ et $\bar{\gamma} \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $\bar{\gamma} \cdot g_1 < \gamma_1$. Soit $\bar{\gamma}_1 \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ vérifiant $\bar{\gamma}_1 < \gamma'_1 \cdot \gamma_1^{-1}$ et $\alpha(\bar{\gamma}_1) = \beta(\bar{\gamma})$. Les relations :

$$\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma} \cdot g_1 < \gamma'_1 \cdot \gamma_1^{-1} \cdot \gamma_1 < \gamma', \qquad g' < \gamma'$$

et $$\alpha(\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma} \cdot g_1) = \alpha(g_1) < \alpha(g) = \alpha(g')$$

assurent, en vertu de la proposition 1 appliquée à la fusée déterminée par $\gamma'^{>}$, l'existence de $g'_1 < g'$ et de $\bar{\gamma}' \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$\bar{\gamma}' \cdot g'_1 < (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}) \cdot g_1.$$

Soit $\bar{\gamma}_2 \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$ tel que $\bar{\gamma}_2 < \bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}$ et $\beta(\bar{\gamma}_2) = \beta(\bar{\gamma}')$. On obtient :

$$\bar{\gamma}_2^{-1} \cdot \bar{\gamma}' \in \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma} \qquad \text{et} \qquad (\bar{\gamma}_2^{-1} \cdot \bar{\gamma}') \cdot g'_1 < (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma})^{-1} \cdot (\bar{\gamma}_1 \cdot \bar{\gamma}) \cdot g_1 < g.$$

Ainsi $\mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}$ est une fusée compatible à gauche avec $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$. Par dualité, on voit que $\mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}$ est une fusée compatible à droite avec $\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}$. Donc $(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}, \mathcal{C}^{\gtrless}_{\gamma}, \mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma})$ est une fusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée régulière telle que* $(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}, <)$ *soit un groupoïde ordonné semi-régulier.* Alors $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathrm{I}), <)$ est une catégorie ordonnée régulière.

Définition 5. — *On dira qu'une fusée* $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ *de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est* régulière *si la sous-catégorie* $(\mathcal{F}, j, i)$ *de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathrm{I})$ *correspondante est une sous-catégorie régulière de* $((\mathcal{C}^{\cdot}, \mathrm{I}), <)$.

Pour que la fusée $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ soit régulière, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

1) $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$ sont des sous-classes de $\mathcal{C}^{\cdot}_0$, saturées par intersection finie (c'est-à-dire contenant avec deux éléments leur intersection dans $(\mathcal{C}^{\cdot}_0, <)$ si celle-ci existe).

2) On a : $\mathcal{B}\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}'$, $\mathrm{F}\mathcal{B} \subset \mathrm{F}$ et $\mathcal{B}'\mathrm{F} \subset \mathrm{F}$.

Théorème 2. — *Soit* $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *la classe des fusées régulières de* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$. $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *est une sous-catégorie de* $\mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$. *Munie de la relation d'ordre*

$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ *si, et seulement si,* $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}'_1$ *sont des sous-catégories pleines saturées par induction de* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *respectivement et si* $F_1 \subset F$,

$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ *devient une catégorie* $\tilde{\Omega}^s$*-structurée assez régulière.*

Démonstration. — Soient

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <) \quad \text{et} \quad (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <).$$

Il en résulte $\mathcal{B} \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\mathcal{B}' \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Soient $f \in F$, $f' \in F'$ et $g \in \mathcal{B}$ tels que $(f'.f)g \in (F'.F)\mathcal{B}$. Puisque $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est supposée régulière, le pseudoproduit est associatif (proposition 5-2 [1]) et on a :

$$(f'.f)g = (f'\beta(fg)).(fg).$$

Les relations :

$$fg \in F\mathcal{B} \subset F$$

et

$$f'\beta(fg) \in F'\beta(F) \subset F'\mathcal{B}' = F'$$

entraînent $(f'.f)g \in F'.F$. Par suite $(F'.F)\mathcal{B} \subset F'.F$. Par dualité, on a $\mathcal{B}'(F'.F) \subset F'.F$. Donc $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$, de sorte que $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$.

— Montrons que la relation $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$ entraîne que F_1 est une sous-classe saturée par induction de F. En effet, soient $f_1 \in F_1$ et $f \in F$ tels que $f < f_1$; on a $\alpha(f) \in \mathcal{B}_1$ et $\beta(f) \in \mathcal{B}'_1$, car $\mathcal{B}_1$ est saturé par induction dans $(\mathcal{B}, <)$. Comme $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une catégorie ordonnée, on obtient :

$$f = \beta(f)(f_1\alpha(f)) \in \mathcal{B}'_1(F_1\mathcal{B}_1) \subset F_1.$$

Si $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, on trouve $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$. Supposons de plus $(\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}')$ dans

$$(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <).$$

Alors :

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1.F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B}).$$

Ainsi $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée.

— Soient $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, où $i \in I$. Soit $\mathcal{B}_I = \bigsqcup_{i \in I}^{\mathcal{B}} \mathcal{B}_i$ $\left(\text{resp. } \mathcal{B}'_I = \bigsqcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i\right)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ (resp. de $\mathcal{B}'$) ayant pour classe de ses unités la classe réunion des $\alpha(\mathcal{B}_i)$ (resp. des $\alpha(\mathcal{B}'_i)$), $i \in I$; alors $\mathcal{B}_I$ est saturé par induction dans $\mathcal{B}$ et c'est un sous-agrégat des $\mathcal{B}_i$. Soit F_I la classe des $f \in F$ qui sont majorés par un élément de $\mathcal{B}'_I . F_i . \mathcal{B}_I$, où $i \in I$. On a : $F_I \mathcal{B}_I = F_I = \mathcal{B}'_I F_I$. Pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_I)$ (resp. $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_I)$), il existe $i \in I$ et $f_i \in F_i$ tels que $\alpha(f_i) < e$ (resp. $\beta(f_i) < e'$). Comme F_I est saturée par induction dans F, $\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_I, F_I, \mathcal{B}_I)$ vérifie aussi l'axiome (F_3), de sorte que $\mathcal{A}$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$, majorée par $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$. Puisque $\mathcal{B}'_i$ est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $\bigsqcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i$, on en déduit $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < \mathcal{A}$, pour tout $i \in I$, et $\mathcal{A}$ est un sous-agrégat des $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$. Ainsi $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$ est une classe sous-inductive.

— Supposons $\mathcal{B}_1 \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\boldsymbol{\cdot}}_0$ et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$; soit $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$. On a :

$$F . \mathcal{B}_1 \subset F . \mathcal{B} = F \qquad \text{et} \qquad F . \mathcal{B}_1 \subset F . \alpha(\mathcal{B}_1),$$

d'où

$$F . \mathcal{B}_1 = F . \alpha(\mathcal{B}_1).$$

Soit $\mathcal{B}'$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}'$ ayant pour unités les $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $f \in F . \mathcal{B}_1$ pour lequel $\beta(f) < e'$. On a :

$$\mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}' . F . \mathcal{B}_1 = F . \mathcal{B}_1$$

et

$$F . \mathcal{B}_1 = \beta(F) . F . \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1,$$

c'est-à-dire $\mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1 = F . \mathcal{B}_1$. La classe $\mathcal{B}_1$ étant saturée par induction dans $\mathcal{B}$, la classe $F . \alpha(\mathcal{B}_1)$ est saturée par induction dans F et $F\alpha(\mathcal{B}_1) = F . \alpha(\mathcal{B}_1)$. Puisque $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ sont des sous-catégories pleines de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement, $(\mathcal{B}'_1, F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée régulière, qui est le pseudoproduit de $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ et de $\mathcal{B}_1$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$. De même si $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$, il existe un pseudoproduit $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ admettant $\mathcal{B}'_2$ pour unité à gauche. Ceci montre que $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée assez régulière, et par suite, en utilisant ce qui précède et la proposition 12-2 [1], une catégorie $\tilde{\Omega}^s$-structurée.

Remarques. — 1) Munie de la relation d'ordre définie par :

$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ si, et seulement si, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ sont des sous-catégories pleines saturées par induction de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement et si F_1 est une sous-classe saturée par induction de F,

la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ peut ne pas être $\tilde{\Omega}$-structurée.

2) Avec les hypothèses du théorème 2, $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ peut ne pas être une catégorie ordonnée.

3) Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est seulement une catégorie ordonnée assez régulière, alors $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ peut ne pas être une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée semi-régulière telle que $(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

THÉORÈME 3. — *$\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ admet une catégorie quotient strict* [2] *par la relation d'équivalence ρ :*

$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ *si, et seulement si, pour tout $f_i \in F_i$ il existe $f_j \in F_j$ tel que $f_j < f_i$, où $i, j = 1{,}2$ et $i \neq j$.*

Démonstration. — La relation ρ est évidemment symétrique et réflexive. Montrons qu'elle est transitive. En effet, supposons

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}).$$

Soit $f_i \in F_i$, où $i = 1{,}2$; il existe $f \in F$ tel que $f < f_i$ et il existe $f_j \in F_j$, $j = 1{,}2$, $j \neq i$, tel que $f_j < f$, d'où $f_j < f_i$ et :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}).$$

Par suite ρ est une relation d'équivalence.

— Montrons que si $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, on a

$$(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <),$$

où $F \cup F_1$ désigne la classe réunion de F et de F_1. Pour cela, prouvons que les conditions $f \in F$, $f_1 \in F_1$ et $\alpha(f) = \alpha(f_1)$ assurent l'existence de $h \in F \cup F_1$, de $h' \in F \cup F_1$ et de $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$h < f, \qquad h' < f_1 \qquad \text{et} \qquad h' = g'.h;$$

la propriété analogue si $\beta(f) = \beta(f_1)$ s'en déduira par dualité, et les autres conditions d'une fusée sont évidemment vérifiées.

Puisque $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, il existe $f' \in F$ tel que $f' < f_1$. Des relations $\alpha(f') \in \mathcal{B}$ et $\alpha(f') < \alpha(f)$, on déduit qu'il existe $f'' \in F$ tel que $f'' < f$ et $\alpha(f'') = \alpha(f')$. Par conséquent il existe aussi $h \in F$, $h' \in F$ et $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $h' = g'.h$, $h' < f'' < f$ et $h' < f' < f_1$, ce qui démontre l'affirmation précédente.

— Soit $\rho(F)$ la classe réunion des classes F_i telles que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

Si $f \in \rho(F)$ et $f' \in \rho(F)$, il existe F_i et F_j tels que $f \in F_i$ et $f' \in F_j$. D'après ce qui précède, il existe $h \in F_i \cup F_j \subset \rho(F)$ et $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que, si $\alpha(f) = \alpha(f')$:

$$h < f \qquad \text{et} \qquad g'.h < f'.$$

Il en résulte que $(\mathcal{B}', \rho(F), \mathcal{B})$ est une fusée. Cette fusée est équivalente à $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ et c'est le plus grand élément de la classe $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ mod ρ relativement à la relation d'ordre :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F.$$

L'application $\tilde{\rho}$:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \bmod \rho \to (\mathcal{B}', \rho(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de la classe quotient $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)/\rho$ sur une sous-classe de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

— Montrons que la relation d'équivalence ρ est compatible sur la classe multiplicative $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$, c'est-à-dire [2] que les relations :

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_2, F_2, \mathcal{B}_2)$$

et

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) \sim (\mathcal{B}''_2, F'_2, \mathcal{B}'_2)$$

entraînent $(\mathcal{B}''_1, F'_1.F_1, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}''_2, F'_2.F_2, \mathcal{B}_2)$. En effet, soit $i = 1,2$, $f_i \in F_i$, $f'_i \in F'_i$ et $f'_i.f_i \in F'_i.F_i$; il existe $f_j \in F_j$ tel que $f_j < f_i$, où $j = 1,2$ et $j \neq i$. Comme

$$\beta(f_j) \in \mathcal{B}' \qquad \text{et} \qquad \beta(f_j) < \alpha(f'_i),$$

il existe $f''_i < f'_i$, $f''_i \in F'_i$ tel que $\alpha(f''_i) = \beta(f_j)$. Il existe aussi $f'_j \in F'_j$ pour lequel $f'_j < f''_i$. Puisque $\alpha(f'_j) \in \mathcal{B}'$ et $\alpha(f'_j) < \beta(f_j)$, il existe $\bar{f}_j \in F_j$ tel que $\bar{f}_j < f_j$ et $\beta(\bar{f}_j) = \alpha(f'_j)$, d'où :

$$f'_j.\bar{f}_j \in F'_j.F_j \qquad \text{et} \qquad f'_j.\bar{f}_j < f'_i.f_i.$$

— La relation ρ n'identifiant pas deux unités différentes de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$, il existe [2] une catégorie quotient strict de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ par ρ. Cette catégorie admet pour classe de ses unités la classe des triplets $(\mathcal{B}, \rho(\mathcal{B}), \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une fusée neutre de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Nous désignerons par $\Phi\ (\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ la catégorie quotient strict de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ ayant pour support la classe $\tilde{\rho}(\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)/\rho)$.

Proposition 3. — *Soit* $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. *Si*

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

et si F *est une sous-classe saturée par induction de* F_1, *on a* $F = F_1$.

Démonstration. — Montrons que l'on a

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

modulo ρ, d'où résultera la proposition. Soit $f_1 \in F_1$; comme $\alpha(f_1) \in \mathcal{B}$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < \alpha(f_1)$; puisque $\alpha(f) \in \mathcal{B}$, il existe $f_1' \in F_1$ tel que $f_1' < f_1$ et $\alpha(f_1') = \alpha(f)$. Dans la fusée $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$, il existe $\bar{f}_1 \in F_1$, $\bar{f}_1' \in F_1$ et $g' \in \mathcal{B}_\gamma'^{\cdot}$ vérifiant :

$$\bar{f}_1 < f,\quad \bar{f}_1' < f_1' \qquad \text{et} \qquad \bar{f}_1' = g' . \bar{f}_1.$$

La classe F étant saturée par induction dans F_1, on a $\bar{f}_1 \in F$, d'où $\bar{f}_1' \in \mathcal{B}'.F = F$ et $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, car $\bar{f}_1' < f_1$.

Corollaire. — *Soient* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée assez régulière et* $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ *une fusée régulière de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. *On a*

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

si, et seulement si, les conditions $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *et* $F \subset F_1$ *entraînent* $F = F_1$.

En effet, supposons ces conditions vérifiées. Si

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

on a $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, d'après la démonstration du théorème 3. Mais par hypothèse il en résulte $F \cup F_1 = F$. Donc $F = \rho(F)$. Inversement, soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; soit $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $F \subset F_1$. Si $f \in F$ et $f_1 \in F_1$ sont tels que $f_1 < f$, on a :

$$f_1 = \beta(f_1)(f\alpha(f_1)) \in \mathcal{B}'(F\mathcal{B}) = F.$$

Par suite F est saturée par induction dans F_1 et le corollaire résulte de la proposition 3.

Nous supposons désormais que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie ordonnée régulière telle que* $(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}, <)$ *soit un groupoïde ordonné semi-régulier.*

Théorème 4. — $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ *admet une catégorie quotient strict relativement à la relation d'équivalence* ρ^r *induite par* ρ. *De plus la classe* $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)/\rho^r$ *est isomorphe à une sous-classe de* $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Démonstration. — Comme ρ est compatible et n'identifie pas deux unités distinctes de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$, il en est de même pour ρ^r et $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ admet une catégorie quotient strict par ρ^r. Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$ mod ρ^r on a $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ d'après la démonstration du théorème 3. Puisque

$$(F \cup F_1)\mathcal{B} \subset (F\mathcal{B} \cup F_1\mathcal{B}) \subset F \cup F_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}'(F \cup F_1) \subset F \cup F_1,$$

on trouve $(\mathcal{B}', F \cup F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Il en résulte que, si $\rho^r(F)$ désigne la classe réunion des F_i tels que

$$(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{modulo } \rho^r,$$

on a $(\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $(\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$ est le plus grand élément de la classe $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ mod ρ^r relativement à la relation d'ordre :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \quad \text{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F_2.$$

L'application $\tilde{\rho}^r$:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^r \to (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)/\rho^r$ sur une sous-classe de

$$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <).$$

Remarquons que si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, on peut avoir $\rho(F) \neq \rho^r(F)$.

Nous désignerons par $\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}$ la catégorie quotient strict de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ ayant pour support la classe

$$\tilde{\rho}^r(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)/\rho^r).$$

PROPOSITION 4. — *Supposons* $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. *On a* $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *si, et seulement si, la condition*

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B})$$

dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$ *entraîne* $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1$.

En effet, si la condition est vérifiée, on a $\mathrm{F} = \rho^r(\mathrm{F})$. Inversement, supposons $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}).$$

D'après la démonstration du théorème 2, F est une sous-classe saturée par induction de F_1. Une démonstration analogue à celle de la proposition 3 prouve que l'on a

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \quad \text{modulo } \rho^r,$$

d'où $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1$.

DÉFINITION 6. — *On appelle* fusée maximale de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une fusée régulière de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *appartenant à* $\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

THÉORÈME 5. — *La catégorie* $\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}$ *des fusées maximales de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, *munie de la relation d'ordre induite par*

$$(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <),$$

est une catégorie quasi-inductive régulière, qui est une catégorie quotient $\tilde{\Omega}^s$*-structurée de* $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$.

Démonstration. — Supposons $(\mathcal{B}_1', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$, c'est-à-dire (théorème 2) $\mathcal{B}_1'$ et $\mathcal{B}_1$ sont des sous-catégories pleines saturées par induction de $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ resp. et F_1 est une sous-classe de F; on sait qu'alors F_1 est saturée par induction dans F.

— Si $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, soit $f \in \mathrm{F}$; si $f_1 \in \mathcal{B}_0'.f^{>}.\mathcal{B}_0$ on a :

$$f_1 = \beta(f_1)(f\alpha(f_1)) \in \mathcal{B}'(\mathrm{F}\mathcal{B}) = \mathrm{F}.$$

— Montrons que la relation ρ^r est équivalente à la relation :

$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$ si, et seulement si, $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$ est une fusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

En vertu de la démonstration du théorème 4, il suffit de montrer que les conditions :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), \qquad (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

entraînent $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^r. En effet, soit $i = 1{,}2$ et $f_i \in F_i$; il existe $f_j \in F_j$, $j = 1{,}2$ et $j \neq i$, tel que $\alpha(f_j) < \alpha(f_i)$ et il existe $f'_i \in F_i$ tel que $\alpha(f'_i) = \alpha(f_j)$ et $f'_i < f_i$. Comme $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$ est une fusée, il existe $h \in F_1 \cup F_2$, $h' \in F_1 \cup F_2$ et $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$h < f_j, \qquad h' < f'_i \qquad \text{et} \qquad h' = g'.h.$$

La fusée $(\mathcal{B}', F_j, \mathcal{B})$ étant régulière, on a :

$$h \in \mathcal{B}'_0 . \overset{\succ}{f_j} . \mathcal{B}_0 \subset F_j,$$

d'où $h' \in \mathcal{B}'.F_j = F_j$. Par suite $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^r.

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Posons $F_1 = \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1$. Supposons que, pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$, il existe $f_1 \in F_1$ tel que $\alpha(f_1) < e$ et que, pour tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$, il existe $f'_1 \in F_1$ tel que $\beta(f'_1) < e'$ et montrons qu'alors $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée maximale. La classe

$$F_1 = \alpha(\mathcal{B}'_1) . F . \alpha(\mathcal{B}_1)$$

étant saturée par induction dans F, $(\mathcal{B}'_1\ F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Pour montrer que cette fusée est maximale, nous allons prouver que si on a $(\mathcal{B}'_1, K, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$, alors $(\mathcal{B}', \mathcal{B}'.K.\mathcal{B} \cup F, \mathcal{B})$ est une fusée. En effet, posons $K' = \mathcal{B}'.K.\mathcal{B}$ et $H = K' \cup F$. Soient $k \in K$ et $g \in \mathcal{B}$; si kg est défini, on a : $kg = (ke).(eg)$, où $e = \alpha(k) \cap \beta(g)$ et $eg \in \mathcal{B}$; $\mathcal{B}_1$ étant saturé par induction dans $\mathcal{B}$, on a $e \in \mathcal{B}_1$, d'où

$$ke \in K\mathcal{B}_1 \subset K \qquad \text{et} \qquad kg \in K.\mathcal{B}.$$

Il en résulte $K\mathcal{B} = K.\mathcal{B}$; de même $\mathcal{B}'K = \mathcal{B}'.K$, de sorte que l'on obtient :

$$K' = (\mathcal{B}'K)\mathcal{B}, \qquad K'\mathcal{B} = (\mathcal{B}'.K.\mathcal{B})\mathcal{B} \subset (\mathcal{B}'K)(\mathcal{B}\mathcal{B}) = K'$$

et

$$\mathcal{B}'K' \subset K', \qquad \text{d'où} \qquad H\mathcal{B} = H = \mathcal{B}'H.$$

Pour tout $e \in \mathcal{B}_0$, il existe $f \in \mathrm{F}$ tel que $\alpha(f) < e$ et pour tout $e' \in \mathcal{B}'_0$, il existe $f' \in \mathrm{F}$ tel que $\beta(f') < e'$. Soit $f \in \mathrm{F}$, $g'.k.g \in \mathrm{K}'$ et $\alpha(g) = \alpha(f)$, où $g \in \mathcal{B}$, $g' \in \mathcal{B}'$ et $k \in \mathrm{K}$. Il existe $f_1 \in \mathrm{F}_1$ tel que $f_1 < k$, d'où :

$$g'f_1g \in \mathcal{B}'(\mathrm{F}_1\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}'(\mathrm{F}\mathcal{B}) = \mathrm{F}\,;$$

comme $e = \alpha(g'f_1g) < \alpha(f)$, d'après la proposition 1 il existe $h \in \mathrm{F}$, $h' \in \mathrm{F}$ et $\gamma' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $h' = \gamma'.h$, $h < g'f_1g < g'.k.g$ et $h' < f$. Par dualité on en déduit que, si $f \in \mathrm{F}$, $g'.k.g \in \mathrm{K}'$ et $\beta(f) = \beta(g')$, il existe $h_1 \in \mathrm{F}$, $h'_1 \in \mathrm{F}$ et $\gamma \in \mathcal{B}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$h'_1 < g'.k.g, \qquad h_1 < f \qquad \text{et} \qquad h' = h_1.\gamma.$$

Supposons encore $g'.k.g \in \mathrm{K}'$ et soit $\bar{g}'.\bar{k}.\bar{g} \in \mathrm{K}'$, où $\bar{g} \in \mathcal{B}$, $\bar{g}' \in \mathcal{B}'$, $\bar{k} \in \mathrm{K}$ et $\alpha(g) = \alpha(\bar{g})$. D'après ce qui précède, on a

$$g'f_1g \in \mathrm{F}, \qquad (\bar{g}'.\bar{k}.\bar{g})e \in \mathrm{K}' \qquad \text{où} \qquad \alpha(g'f_1g) = e;$$

donc il existe $\bar{h} \in \mathrm{F}$, $\bar{h}' \in \mathrm{F}$ et $\bar{\gamma}' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que

$$\bar{h} < g'f_1g, \qquad \bar{h}' < \bar{g}'.\bar{k}.\bar{g} \qquad \text{et} \qquad \bar{h}' = \bar{\gamma}'.\bar{h}.$$

Dualement les conditions $k_1 \in \mathrm{K}'$, $k'_1 \in \mathrm{K}'$ et $\beta(k_1) = \beta(k'_1)$ assurent l'existence de $h_1 \in \mathrm{F}$, de $h'_1 \in \mathrm{F}$ et de $\gamma_1 \in \mathcal{B}^{\cdot}_{\gamma}$ tels que : $h'_1 < k'_1$, $h_1 < k_1$ et $h'_1 = h_1.\gamma_1$. Ceci prouve que $(\mathcal{B}', \mathrm{H}, \mathcal{B})$ est une fusée. La fusée $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ étant maximale, on en déduit $\mathrm{H} = \mathrm{F}$, c'est-à-dire $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$. Par suite on a : $\mathrm{F}_1 \subset \rho^r(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{F}$, d'où $\rho^r(\mathrm{F}_1) = \mathrm{F}_1$, car $\rho^r(\mathrm{F}_1) \subset \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1 = \mathrm{F}_1$. Ceci prouve que $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée maximale, majorée par $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$.

— Soit $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}', \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Comme pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ (resp. tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$), il existe

$$f' \in \mathrm{F}' \subset \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1$$

tel que $\alpha(f') < e$ (resp. $\beta(f') < e'$), on a aussi, d'après ce qui précède, $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Puisque

$$\mathrm{F}' \subset \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1,$$

il résulte de la proposition 4 que $\mathrm{F}' = \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1$. Par suite si $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, on a

$$(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$$

dans $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$ si, et seulement si, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ et $F_1 = \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1$. En particulier, on a $\bar{\rho}^r(\mathcal{B}_1) < \bar{\rho}^r(\mathcal{B})$ si, et seulement si, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont des fusées neutres régulières de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $\bar{\rho}^r(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, \rho^r(\mathcal{B}), \mathcal{B})$. Si $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$, on a $F_1 = \mathcal{B}' . F . \mathcal{B} = F$.

— Nous désignerons par $\bullet$ la loi de composition de la catégorie $\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}$ quotient de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$. Supposons

$$(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

et

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) < (\mathcal{B}''_1, F', \mathcal{B}')$$

dans $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$; on a :

$$(\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \bullet (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$$

et

$$(\mathcal{B}''_1, \rho^r(F'_1 . F_1), \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}''_1, F'_1, \mathcal{B}'_1) \bullet (\mathcal{B}'_1, F'_1, \mathcal{B}_1).$$

Comme $F'_1 . F_1 \subset \mathcal{B}''_1 . \rho^r(F' . F) . \mathcal{B}_1$ et que

$$(\mathcal{B}''_1, F'_1 . F_1, \mathcal{B}'_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <),$$

on trouve, en utilisant ce qui précède, $\mathcal{K} \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, où

$$\mathcal{K} = (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}''_1 . \rho^r(F' . F) . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1),$$

$\mathcal{K} \sim (\mathcal{B}''_1, F'_1 . F_1, \mathcal{B}_1)$, d'où

$$\mathcal{K} = (\mathcal{B}''_1, \rho^r(F'_1 . F_1), \mathcal{B}'_1) < (\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}).$$

On en déduit que $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ est une catégorie ordonnée.

— Supposons $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ pour tout $i \in I$. Soit $\tilde{\mathcal{B}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}$ ayant pour classe de ses unités la classe réunion des $\alpha(\mathcal{B}_i)$, où $i \in I$; comme $\mathcal{B}_i$ est saturé par induction dans $\mathcal{B}$, la classe $\tilde{\mathcal{B}}$ est saturée par induction dans $\mathcal{B}$ et on a $\mathcal{B}_i < \tilde{\mathcal{B}} < \mathcal{B}$; donc $\bar{\rho}^r(\tilde{\mathcal{B}})$ est le $\bar{\rho}^r(\mathcal{B})$-agrégat de la classe des $\bar{\rho}^r(\mathcal{B}_i)$. Posons $\tilde{\mathcal{B}}' = \bigsqcup_{i \in I}^{\mathcal{B}'} \mathcal{B}'_i$. Pour tout $e \in \tilde{\mathcal{B}}_0$ (resp. tout $e' \in \tilde{\mathcal{B}}'_0$), il existe i tel que $e \in \alpha(\mathcal{B}_i)$ (resp. $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_i)$) de sorte qu'il existe $f_i \in F_i \subset \tilde{\mathcal{B}}' . F . \tilde{\mathcal{B}}$ pour lequel $\alpha(f_i) < e$ (resp. $\beta(f_i) < e'$). Il résulte du début de la démonstration que l'on a :

$$\mathcal{A}_I = (\tilde{\mathcal{B}}', \tilde{\mathcal{B}}' . F . \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

et $\mathcal{A}_I < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$. La relation :

$$F_i = \mathcal{B}'_i . F . \mathcal{B}_i = \mathcal{B}'_i . \tilde{\mathcal{B}}' . F . \tilde{\mathcal{B}} . \mathcal{B}_i$$

entraîne $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < \mathcal{A}_I$, pour tout $i \in I$. On en déduit que $\mathcal{A}_I$ est le $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$-agrégat de la classe des $(\mathcal{B}'_i, F_i, B_i)$. Donc $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$ est une classe sous-inductive.

— Supposons $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$; soit $\alpha(\mathcal{B}'_1)$ la sous-classe de $\mathcal{B}'_0$ formée des $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $h \in F . \mathcal{B}_1$ vérifiant $\beta(h) < e'$. Soit $\mathcal{B}'_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}'$ ayant $\alpha(\mathcal{B}'_1)$ pour classe de ses unités; on a $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$. Pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < e$; on en déduit :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

et $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ est le pseudoproduit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})\mathcal{B}_1$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$. De même si $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$, il existe un pseudoproduit $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ ayant $\mathcal{B}'_2$ pour unité à gauche. Ceci prouve que $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ est une catégorie ordonnée assez régulière et par suite, en utilisant ce qui précède et le corollaire 2 de la proposition 12-2[1], une catégorie quasi-inductive.

— Soient $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et :

$$(\mathcal{B}''_1, K, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}')$$

dans $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Soit E' la classe des $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $f \in F$ et $f' \in F'$ vérifiant les conditions :

$$\alpha(f) \in \mathcal{B}_1, \qquad \beta(f') \in \mathcal{B}''_1 \qquad \text{et} \qquad \alpha(f') = \beta(f) < e'.$$

Si $e'' \in \mathcal{B}'_0$ et $e'' < e'$, on a : $h = (f'e'') . (e''f) \in F' . F$ et $h < f' . f$, d'où $e'' \in E'$. Par suite E' est une sous-classe saturée par induction de $\mathcal{B}'_0$ et la sous-catégorie pleine $\mathcal{B}'_1$ de $\mathcal{B}'$ ayant E' pour classe de ses unités est telle que l'on ait $\bar{\rho}^r(\mathcal{B}'_1) < \bar{\rho}^r(\mathcal{B}')$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Pour tout $e \in \mathcal{B}_1$, il existe $k \in K \subset \rho^r(F' . F)$ tel que $\alpha(k) < e$; comme

$$(\mathcal{B}'', F' . F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}'', \rho^r(F' . F), \mathcal{B}),$$

il existe $f \in F$ et $f' \in F'$ tels que $f' . f < k$, d'où $\alpha(f') \in E'$ et $\alpha(f) < e$. Donc

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

et

$$\mathcal{A}_1 < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

De même :

$$\mathcal{A}'_1 = (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}''_1 . F' . \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$$

et

$$\mathcal{A}'_1 < (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}').$$

De ce qui précède, il résulte : $\mathcal{A}'_1 \bullet \mathcal{A}_1 < (\mathcal{B}'', \rho^r(F'.F), \mathcal{B})$ et :

$$\mathcal{A}'_1 \bullet \mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}''_1, K, \mathcal{B}_1),$$

car ces deux fusées maximales ont même source $\mathcal{B}_1$, même but $\mathcal{B}''_1$ et sont majorées par $(\mathcal{B}'', \rho^r(F'.F), \mathcal{B})$. Ceci montre que $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\bullet}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière.

— Montrons que $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$ est une classe sous-inductive quotient de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$. En effet, soit $\overline{\rho}^r$ l'application :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \to (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B})$$

de

$$\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <) \qquad \text{sur} \qquad \Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <).$$

Supposons $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$. Comme $F_1 \subset \rho^r(F)$ on a, en vertu de ce qui précède :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . \rho^r(F) . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$$

et

$$\mathcal{A} < (\mathcal{B}', \rho^r(F), \mathcal{B}).$$

La condition $F_1 \subset \mathcal{B}'_1 . \rho^r(F) . \mathcal{B}_1$ entraînant $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \sim \mathcal{A}$, on a :

$$\mathcal{B}'_1 . \rho^r(F) . \mathcal{B}_1 = \rho^r(F_1)$$

et

$$\overline{\rho}^r(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) < \overline{\rho}^r(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}).$$

Soient $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ dans $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$, où $i \in I$; soit $(\tilde{\mathcal{B}}', F_I, \tilde{\mathcal{B}})$ le $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$-agrégat des $(\mathcal{B}'_i, F_i, \mathcal{B}_i)$ (voir théorème 2). Puisque $F_I \subset \tilde{\mathcal{B}}' . F . \tilde{\mathcal{B}}$, on obtient :

$$(\tilde{\mathcal{B}}', F_I, \tilde{\mathcal{B}}) \sim (\tilde{\mathcal{B}}', \tilde{\mathcal{B}}' . F . \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}),$$

ce qui signifie que $\overline{\rho}^r$ est une application quasi-inductive. La restriction de $\overline{\rho}^r$ à $\Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$ étant l'identité, la condition (q^s) (proposition 30, [2]) est vérifiée et $(\Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$ est une classe sous-inductive quotient de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$ en vertu de la même proposition. $\overline{\rho}^r$ définissant aussi la catégorie $\Phi^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\bullet}$ comme catégorie quotient strict de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\boldsymbol{\cdot}}$, on en déduit que

$(\Phi^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\bullet, <)$ est une catégorie quotient $\tilde{\Omega}^s$-structurée de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$.

Corollaire. — *Si* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *vérifie la condition* (C) (définition 4), *alors* $(\Phi^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\bullet, <)$ *admet une sous-catégorie ordonnée, isomorphe à une catégorie quotient de* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

Démonstration. — Pour tout $f \in \mathcal{C}$, désignons par $\tilde{f}$ la fusée maximale :

$$\bar{\rho}^r(\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>).$$

Si $f' \in \mathcal{C}$ et si $f'.f$ est défini, on a : $(f'.f)^> = (f'^>).(f^>)$, d'où : $\widetilde{(f'.f)} = \tilde{f}' \bullet \tilde{f}$. Si $f_1 < f$ dans $(\mathcal{C}, <)$, pour tout $f'_1 < f$ tel que : $\alpha(f'_1) < \alpha(f_1)$ et $\beta(f'_1) < \beta(f_1)$, on a $f'_1 < f_1$, d'où $\tilde{f}_1 < \tilde{f}$ dans $(\Phi^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$. Par suite la classe $\tilde{\mathcal{C}}$ des $\tilde{f}$, où $f \in \mathcal{C}$, est une sous-catégorie ordonnée de

$$(\Phi^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\bullet, <),$$

équivalente à la catégorie quotient de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ par la relation d'équivalence :

$f_1 \sim f_2$ si, et seulement si, $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$, $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ et si, pour tout $f'_i < f_i$, il existe $f'_j < f_j$ tel que $f'_j < f'_i$, où $i, j = 1{,}2$ et $j \neq i$.

Cas particuliers :

A) Supposons que $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ admette une plus petite unité notée 0. Une sous-catégorie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}^\cdot$ contenant 0 est une fusée neutre de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ si, et seulement si, $(\mathcal{B}^\cdot, <)$ et $(\mathcal{B}^\cdot_\gamma, <)$ sont des catégories semi-régulières. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des fusées neutres de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et F une sous-classe de $\mathcal{C}$ contenant 0. Pour que $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ soit une fusée de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$, il faut et il suffit que l'on ait $\mathcal{B}'.\mathrm{F} = \mathrm{F} = \mathrm{F}.\mathcal{B}$ et que, si $f \in \mathrm{F}$, $e \in \mathcal{B}_0$ et $e < \alpha(f)$ (resp. $e' \in \mathcal{B}'_0$ et $e' < \beta(f)$), il existe $f_1 \in \mathrm{F}$ tel que $f_1 < f$ et $\alpha(f_1) = e$ (resp. $\beta(f_1) = e'$). Si $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ est une telle fusée, $\rho(\mathrm{F})$ est la classe des $f \in \mathcal{B}'.\mathcal{C}.\mathcal{B}$ tels que, si $e \in \mathcal{B}_0$ et $e < \alpha(f)$ (resp. $e' \in \mathcal{B}'_0$ et $e' < \beta(f)$), il existe $f_1 < f$ pour lequel $\alpha(f_1) = e$ et $\beta(f_1) \in \mathcal{B}'$ (resp. $\beta(f_1) = e'$ et $\alpha(f_1) \in \mathcal{B}$).

Si $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ sont des fusées neutres régulières de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et si F est une sous-classe de $\mathcal{B}'.\mathcal{C}.\mathcal{B}$ contenant 0, $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ si, et seulement si, $\mathcal{B}'\mathrm{F} = \mathrm{F} = \mathrm{F}\mathcal{B}$;

dans ce cas, $\rho^r(F)$ est la classe des $f \in \mathcal{B}'.\mathcal{C}.\mathcal{B}$ tels que $\beta(f\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}'$ et $\alpha(\mathcal{B}'f) \subset \mathcal{B}$.

La classe des fusées régulières $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ telles que 0 n'appartienne ni à F, ni à $\mathcal{B}$, ni à $\mathcal{B}'$, est une sous-catégorie de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$, qui est pleine, saturée par induction et saturée pour la relation d'équivalence ρ^r.

B) Soit $\mathcal{C}^\cdot$ une catégorie; soit $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ la catégorie ordonnée régulière obtenue en munissant $\mathcal{C}^\cdot$ de la relation d'ordre (triviale) :

$$f' < f \quad \text{si, et seulement si,} \quad f' = f.$$

Soit $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ la catégorie des atlas de $\mathcal{C}^\cdot$ (voir [1], 1, dont nous reprenons les notations).

Proposition 5. *Les catégories* $\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$, $\mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$, $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ *et* $\Phi^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\bullet$ *sont identiques et* $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ (théorème 2-2[1]) *est une catégorie quasi-inductive identique à* $(\Phi^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\bullet, <)$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Si $e \in \mathcal{B}_0$, il existe $f \in F$ tel que $\alpha(f) < e$, d'où $\alpha(f) = e$ et $\mathcal{B}_0 = \alpha(F)$; de même $\mathcal{B}'_0 = \beta(F)$. Soient $f \in F$ et $f' \in F$ tels que $\alpha(f) = \alpha(f')$. Il existe $f_1 \in F$ et $g \in \mathcal{B}^\cdot_\gamma$ tels que $f_1 < f$ et $f_1 . g < f'$, c'est-à-dire $f_1 = f$ et $f.g = f'$. Donc F est un atlas de $\mathcal{C}^\cdot$. De plus les conditions $g \in \mathcal{B}$ et $\alpha(g) \in \mathcal{B}_0$ entraînent $g \in \mathcal{B}^\cdot_\gamma$, puisque $\mathcal{B}$ est un atlas. Donc $\mathcal{B} = \mathcal{B}^\cdot_\gamma$ et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est un atlas de $\mathcal{C}^\cdot$. — Inversement, soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$. Comme $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et F sont des sous-classes saturées par induction de $\mathcal{C}$, $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une fusée régulière de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Les conditions $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $F \subset F_1$ entraînent $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ d'après ce qui précède, d'où $F = F_1$, car $(\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot), <)$ est une catégorie ordonnée. Par suite $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ est une fusée maximale en vertu de la proposition 4. Il en résulte :

$$\overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot) = \mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <) = \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <) = \Phi^r(\mathcal{C}^\cdot, <).$$

2. Fusées strictes

Soit $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *une catégorie* $\tilde{\Omega}$*-structurée semi-régulière telle que* $(\mathcal{C}^\cdot_\gamma, <)$ *soit un groupoïde ordonné semi-régulier.*

DÉFINITION 1. — *On appelle* fusée stricte neutre de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *une sous-catégorie* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{C}^\cdot$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $(\mathcal{B}^\cdot, <)$ *et* $(\mathcal{B}^\cdot_\gamma, <)$ *sont des catégories semi-régulières.*

2) *Soient* $f \in \mathcal{B}$ *et* $f' \in \mathcal{B}$. *Si* $\alpha(f) = \alpha(f')$ (*resp.* $\beta(f) = \beta(f')$), *il existe* $f_1 \in \mathcal{B}$ *et* $g \in \mathcal{B}^\cdot_\gamma$ *tels que* $f_1 < f$, $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ *et* $g.f_1 < f'$ (*resp.* $f_1 < f$, $\beta(f_1) = \beta(f)$ *et* $f_1 . g < f'$).

DÉFINITION 2. — *Soit* $\mathcal{B}$ *une fusée neutre de* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$. *On appelle* fusée stricte à droite de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ compatible avec $\mathcal{B}$ *une sous-classe* F *de* $\mathcal{C}$ *vérifiant les conditions* (F_1) *et* (F_2) (définition 2-1) *et la condition:*

(F^s_3) *Soient* $f \in F$ *et* $f' \in F$. *Si* $\beta(f) = \beta(f')$, *il existe* $f_1 \in F$ *et* $g \in \mathcal{B}^\cdot_\gamma$ *tels que* $f_1 < f$, $\beta(f_1) = \beta(f)$ *et* $f_1 . g < f'$.

On appelle fusée stricte à gauche de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ compatible avec $\mathcal{B}$ *une fusée stricte à droite de* $(\mathcal{C}^*, <)$, *compatible avec* $\mathcal{B}$. *On appelle* fusée stricte de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *un triplet* $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B})$ *tel que* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *soient des fusées strictes neutres de* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *et* F *une fusée stricte à droite compatible avec* $\mathcal{B}$ *et une fusée stricte à gauche compatible avec* $\mathcal{B}'$.

Une fusée stricte (resp. stricte neutre) de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est aussi une fusée (resp. fusée neutre) de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

THÉORÈME 1. — *La classe* $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *des fusées strictes de* $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *est une sous-catégorie de* $\mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$, *qui admet une catégorie quotient strict par la relation d'équivalence* ρ^s:

$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$ *si, et seulement si, pour tout* $f_i \in F_i$ *il existe* $f_j \in F_j$ *tel que* $f_j < f_i$ *et* $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$, *où* $i, j = 1{,}2$, $i \neq j$, *et* $f'_j \in F_j$ *tel que* $f'_j < f_i$ *et* $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$.

La classe quotient $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)/\rho^s$ *est isomorphe à une sous-classe de* $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

Démonstration. — Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$, on a par définition $\mathcal{B} \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\mathcal{B}' \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Supposons de plus $(\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et montrons que $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$ est une fusée stricte. Comme $(\mathcal{B}'', F'.F, \mathcal{B})$ est une fusée d'après le théorème 1-1, il suffit de montrer que (F^s_3) est vérifié. Soient $f'.f \in F'.F$, $\bar{f}'.\bar{f} \in F'.F$, $f \in F'$, $f' \in F'$, $\bar{f} \in F$ et $\bar{f}' \in F'$ tels que $\alpha(f) = \alpha(\bar{f})$. Il existe $f_1 \in F$ et $g' \in \mathcal{B}'^\cdot_\gamma$ tels que $f_1 < f$, $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ et $\bar{f}_1 = g'.f_1 < \bar{f}$. Comme $\alpha(g') \in \mathcal{B}'$, il existe, en vertu de (F_1),

$f'_1 \in \mathrm{F}'$ tel que $f'_1 < f'$ et $\alpha(f'_1) = \alpha(g')$ et il existe $\bar{f}'_1 \in \mathrm{F}'$ tel que $\bar{f}'_1 < \bar{f}'$ et $\alpha(\bar{f}'_1) = \beta(g')$. Puisque $\bar{f}'_1 . g' \in \mathrm{F}'.\mathcal{B}' = \mathrm{F}'$, il existe $f'_2 \in \mathrm{F}'$ et $g'' \in \mathcal{B}''^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$f'_2 < f'_1, \qquad \alpha(f'_2) = \alpha(f'_1) \qquad \text{et} \qquad \bar{f}'_2 = g''.f'_2 < \bar{f}'_1 . g'.$$

Des relations :

$$f'_2 . f_1 \in \mathrm{F}'.\mathrm{F}, \qquad f'_2 . f_1 < f'.f,$$
$$g''.(f'_2 . f_1) = \bar{f}'_2 . f_1 = (\bar{f}'_2 . g'^{-1}) . \bar{f}_1$$

et

$$(\bar{f}'_2 . g'^{-1}) . \bar{f}_1 < \bar{f}'_1 . g' . g'^{-1} . \bar{f}_1 = \bar{f}'_1 . \bar{f}_1 < \bar{f}' . \bar{f},$$

on déduit que $\mathrm{F}'.\mathrm{F}$ est une fusée stricte à gauche, compatible avec $\mathcal{B}''$. Par dualité on en déduit que $\mathrm{F}'.\mathrm{F}$ est une fusée stricte à droite, compatible avec $\mathcal{B}''$. Donc $(\mathcal{B}'', \mathrm{F}'.\mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$.

— La relation ρ^s est évidemment symétrique et réflexive. Supposons :

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B}).$$

Soient $i, j = 1,2$, $i \neq j$ et $f_i \in \mathrm{F}_i$; il existe $f \in \mathrm{F}$ tel que $f < f_i$ et $\alpha(f_i) = \alpha(f)$; il existe aussi $f_j \in \mathrm{F}_j$ tel que $\alpha(f_j) = \alpha(f)$ et $f_j < f$, d'où $f_j < f_i$ et $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$. De même on construit $f'_j \in \mathrm{F}_j$ tel que $f'_j < f_i$ et $\beta(f'_j) = \beta(f_i)$. Par suite

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$$

et ρ^s est une relation d'équivalence. Remarquons que la classe d'équivalence de $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ modulo ρ^s est contenue dans la classe d'équivalence de $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ modulo ρ (théorème 3-1).

— Montrons que ρ^s est compatible sur la classe multiplicative $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$. Supposons $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$ et

$$(\mathcal{B}'', \mathrm{F}'_1, \mathcal{B}') \sim (\mathcal{B}'', \mathrm{F}'_2, \mathcal{B}').$$

Soit $f'_i . f_i \in \mathrm{F}'_i . \mathrm{F}_i$, où $i = 1,2$, $f_i \in \mathrm{F}_i$ et $f'_i \in \mathrm{F}'_i$. Soit $j = 1,2$, $j \neq i$; il existe $f_j \in \mathrm{F}_j$ tel que $\alpha(f_j) = \alpha(f_i)$ et $f_j < f_i$. Les relations $\beta(f_j) \in \mathcal{B}'$ et $\beta(f_j) < \alpha(f'_i)$ entraînent qu'il existe $f''_i \in \mathrm{F}'_i$ pour lequel $f''_i < f'_i$ et $\alpha(f''_i) = \beta(f_j)$; de plus il existe $f'_j \in \mathrm{F}'_j$ tel que $\alpha(f'_j) = \alpha(f''_i)$ et $f'_j < f''_i$. On en déduit :

$$f'_j . f_j \in \mathrm{F}'_j . \mathrm{F}_j, \qquad f'_j . f_j < f'_i . f_i$$

et

$$\alpha(f'_j . f_j) = \alpha(f'_i . f_i).$$

On construit de même $\bar{f}'_j . \bar{f}_j \in F'_j . F_j$ tel que $\bar{f}'_j . \bar{f}_j < f'_i . f_i$ et $\beta(\bar{f}'_j . \bar{f}_j) = \beta(f'_i)$. Par conséquent $(\mathcal{B}'', F'_1 . F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}'', F'_2 . F_2, \mathcal{B})$ et ρ^s est compatible sur $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$.

— Comme ρ^s n'identifie pas deux unités différentes de

$$\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot,$$

il existe une catégorie quotient strict $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot / \rho^s$.

— Montrons que si $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$, alors

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$$

est une fusée stricte, où $F_1 \cup F_2$ désigne la classe réunion de F_1 et F_2. D'après la démonstration du théorème 3-1, on a $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Soient $h \in F_1 \cup F_2$ et $h' \in F_1 \cup F_2$ tels que $\alpha(h) = \alpha(h')$ (le cas $\beta(h) = \beta(h')$ s'en déduit par dualité). Il existe $h_1 \in F_1$ et $h'_1 \in F_1$ tels que :

$$h_1 < h, \qquad h'_1 < h' \qquad \text{et} \qquad \alpha(h_1) = \alpha(h'_1) = \alpha(h).$$

Comme $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B})$ est une fusée stricte, il existe $\bar{h}_1 \in F_1$ et $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_\gamma$ vérifiant les conditions :

$$\bar{h}_1 < h_1 < h, \qquad \bar{h}'_1 = g' . \bar{h}_1 < h'_1 < h' \qquad \text{et} \qquad \alpha(\bar{h}_1) = \alpha(h_1).$$

Il en résulte que $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B})$ est une fusée stricte.

— Soit $\rho^s(F)$ la classe réunion des F_i tels que :

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^s.$$

La démonstration précédente montre aussi que l'on a

$$(\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B}) \in \mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$$

et

$$(\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}),$$

de sorte que l'application $\tilde{\rho}^s$:

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \text{ modulo } \rho^s \to (\mathcal{B}', \rho^s(F), \mathcal{B})$$

est une bijection de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)/\rho^s$ sur une sous-classe de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

Corollaire. — *$\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ admet pour sous-catégorie la classe $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ des fusées strictes $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ telles que $\alpha(\mathrm{F}) = \mathcal{B}_0$ et $\beta(\mathrm{F}) = \mathcal{B}'$. $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-classe saturée relativement à ρ^s.*

Démonstration. — Supposons $(\mathcal{B}'', \mathrm{F}', \mathcal{B}') \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Soit $e \in \alpha(\mathcal{B})$; il existe $f \in \mathrm{F}$ tel que $\alpha(f) = e$; comme $\beta(f) \in \mathcal{B}'_0$, il existe $f' \in \mathrm{F}'$ tel que $\alpha(f') = \beta(f)$ et on a $f'.f \in \mathrm{F}'.\mathrm{F}$ et $\alpha(f'.f) = e$. Donc $\alpha(\mathrm{F}'.\mathrm{F}) = \mathcal{B}_0$; de même $\beta(\mathrm{F}'.\mathrm{F}) = \mathcal{B}''_0$, de sorte que $(\mathcal{B}'', \mathrm{F}'.\mathrm{F}, \mathcal{B})$ appartient à $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$.
— Supposons $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^s. On a évidemment :

$$\alpha(\mathrm{F}_1) = \alpha(\mathrm{F}_2) \qquad \text{et} \qquad \beta(\mathrm{F}_1) = \beta(\mathrm{F}_2).$$

Par suite si $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$, on a aussi

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <).$$

Soit $(\mathcal{C}^\cdot, <)$ une catégorie ordonnée régulière telle que $(\mathcal{C}^\cdot_\gamma, <)$ soit un groupoïde ordonné semi-régulier.

Nous désignerons par $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ la classe des fusées strictes régulières de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$, c'est-à-dire la classe intersection de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et de $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Soit $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ la classe intersection de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et de $\mathcal{F}'^s(\mathcal{C}^\cdot, <)$ (corollaire du théorème 1).

Proposition 1. — *$\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-catégorie saturée par induction de $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$* (théorème 2-1), *dont $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-catégorie.*

Démonstration. — $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ sont évidemment des sous-catégories de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$. Supposons

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$$

et soit :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \qquad \text{dans} \qquad (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <).$$

Comme $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}'_1$ et F_1 sont des sous-classes saturées par induction de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et F respectivement, ce sont des fusées strictes de la sous-catégorie de $(\mathcal{C}^\cdot, \mathrm{I})$ correspondant à $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ (déf. 5-1) et par suite $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée stricte. Ainsi $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est saturée par induction dans la classe $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$.

THÉORÈME 2. — *$(\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ et $(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ sont des catégories $\tilde{\Omega}^s$-structurées assez régulières, la structure d'ordre étant celle induite par $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$.*

Démonstration. — Comme $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ est une sous-catégorie saturée par induction de $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$, $(\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}^s$-structurée assez régulière. — $(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée. Soient $i \in \mathrm{I}$ et

$$(\mathcal{B}'_i, \mathrm{F}_i, \mathcal{B}_i) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \qquad \text{dans} \qquad (\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <).$$

Il existe un $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$-agrégat $\mathcal{A}_\mathrm{I} = \left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}^{\mathcal{B}'}\mathcal{B}'_i,\ \mathrm{F}_\mathrm{I},\ \bigcup_{i\in\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}\mathcal{B}_i\right)$ dans $(\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$. Pour tout $e \in \alpha\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}\mathcal{B}_i\right)$ il existe $i \in \mathrm{I}$ et $f_i \in \mathrm{F}_i$ tel que $e = \alpha(f_i)$, d'où $f_i \in \mathrm{F}_\mathrm{I}$ et $\alpha(\mathrm{F}_\mathrm{I}) = \alpha\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}^{\mathcal{B}}\mathcal{B}_i\right)$. De même $\beta(\mathrm{F}_\mathrm{I}) = \alpha\left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}}^{\mathcal{B}'}\mathcal{B}'_i\right)$, de sorte que $\mathcal{A}_\mathrm{I} \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}^s$-structurée. — Soit

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_1 < \mathcal{B}.$$

Soit $\mathcal{B}'_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}'$ ayant pour unités les éléments de $\beta(\mathrm{F}.\mathcal{B}_1)$. Comme pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ il existe $f \in \mathrm{F}$ tel que $\alpha(f) = e$ on a $\alpha(\mathrm{F}.\mathcal{B}_1) = \alpha(\mathcal{B}_1)$. Par suite :

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$$

et $\mathcal{A}_1$ est le pseudoproduit $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})\mathcal{B}_1$ dans $(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$. De même si $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'$, on a $\mathcal{B}'_2(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) = (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}'_2.\mathrm{F}, \mathcal{B}_2)$, ce qui prouve que $(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}^s$-structurée assez régulière.

THÉORÈME 3. — *La relation d'équivalence* ρ^s (Théorème 1) *induit sur $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ la relation d'équivalence σ définie par :*

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$\alpha(\mathrm{F}_1) = \alpha(\mathrm{F}_2), \qquad \beta(\mathrm{F}_1) = \beta(\mathrm{F}_2)$$

et

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <).$$

$\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ *admet une catégorie quotient strict par* σ *et la classe quotient* $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)/\sigma$ *s'identifie à la sous-classe de* $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *formée des fusées strictes* $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ *telles que les relations:*

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <),$$
$$\alpha(\mathrm{F}_1) = \alpha(\mathrm{F}), \qquad \beta(\mathrm{F}_1) = \beta(\mathrm{F}) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{F} \subset \mathrm{F}_1$$

entraînent $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1$.

Démonstration. — D'après la démonstration du théorème 1, si $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B})$ et $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$ sont équivalentes modulo ρ^s, on a $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$. Inversement supposons

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma.$$

Soit $f_i \in \mathrm{F}_i$, où $i = 1,2$. Comme $\alpha(f_i) \in \alpha(\mathrm{F}_j)$, où $j = 1,2$ et $j \neq i$, il existe $f_j \in \mathrm{F}_j$ tel que $\alpha(f_i) = \alpha(f_j)$; comme

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$$

est une fusée stricte, il existe $h \in \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ et $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $g'.h \in \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$, $h < f_j$, $\alpha(h) = \alpha(f_i)$ et $g'.h < f_i$. La fusée $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_j, \mathcal{B})$ étant régulière, on a :

$$g'.h = g'.(\alpha(g')f_j)\alpha(h) \in \mathcal{B}'.\mathrm{F}_j = \mathrm{F}_j.$$

De même on construit $\bar{f}'_j \in \mathrm{F}_j$ tel que $\beta(\bar{f}'_j) = \beta(f_i)$ et $\bar{f}'_j < f_i$. Donc $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}_2, \mathcal{B})$ modulo ρ^s.

— Comme ρ^s est compatible sur $\mathcal{F}^s(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$, la relation d'équivalence σ est compatible sur $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ et il existe une catégorie quotient strict. Soit $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\sigma(\mathrm{F})$ la classe réunion des F_i tels que

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}_i, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma.$$

On a $(\mathcal{B}', \sigma(\mathrm{F}), \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et l'application $\tilde{\sigma}$:

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \text{ modulo } \sigma \to (\mathcal{B}', \sigma(\mathrm{F}), \mathcal{B})$$

est une bijection de $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)/\sigma$ sur une sous-classe de $\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

— Si $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \tilde{\sigma}(\overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)/\sigma)$ et si on a $(\mathcal{B}', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$,

$$\alpha(\mathrm{F}_1) = \alpha(\mathrm{F}), \qquad \beta(\mathrm{F}_1) = \beta(\mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} \subset \mathrm{F}_1,$$

alors $F_1 \cup F = F_1$ et on a $(\mathcal{B}', F_1 \cup F, \mathcal{B}) \in \bar{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$, de sorte que, d'après ce qui précède, on trouve

$$(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}),$$

d'où

$$\sigma(F_1) = \sigma(F) = F = F_1.$$

Inversement soit $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \bar{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$; supposons que les relations :

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \bar{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <),$$
$$\alpha(F) = \alpha(F_1), \qquad \beta(F) = \beta(F_1) \qquad \text{et} \qquad F \subset F_1$$

entraînent $F = F_1$. On a :

$$F \subset \sigma(F), \qquad \alpha(F) = \alpha(\sigma(F)) \qquad \text{et} \qquad \beta(F) = \beta(\sigma(F)),$$

par suite $F = \sigma(F)$ et $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \tilde{\sigma}(\bar{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)/\sigma)$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — *$\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ admet une catégorie quotient strict par la relation d'équivalence σ' induite par σ et qui est aussi définie par :*

$$(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \sim (\mathcal{B}', F_2, \mathcal{B})$$

si, et seulement si,

$$(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <).$$

La classe $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)/\sigma'$ est isomorphe à la classe $\Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)$ des fusées strictes $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ telles que les relations $(\mathcal{B}', F_1, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $F \subset F_1$ entraînent $F = F_1$.

En effet, si $(\mathcal{B}', F_i, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$, où $i = 1,2$, et si de plus $(\mathcal{B}', F_1 \cup F_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$, on a $\alpha(F_i) = \mathcal{B}_0 = \alpha(F_1 \cup F_2)$ et $\beta(F_i) = \mathcal{B}'_0$; par suite le corollaire résulte du théorème 3.

Nous désignerons par $\bar{\Phi}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\perp$ la catégorie quotient strict de $\bar{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ ayant pour support la classe $\tilde{\sigma}(\bar{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)/\sigma)$ et par $\Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)^\perp$ la catégorie quotient strict de $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ ayant pour support la classe $\tilde{\sigma}(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)/\sigma')$; nous munirons $\Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)$ de la relation d'ordre induite par $(\bar{\mathcal{F}}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$.

Définition 3. — *Un élément de $\Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)$ sera appelé* fusée maximale stricte de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$.

THÉORÈME 4. — $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$ *est une catégorie quasi-inductive régulière qui est une catégorie quotient* $\tilde{\Omega}^{s}$*-structurée de* $(\mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$.

Démonstration. — $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$ est une classe ordonnée quotient de la classe ordonnée $(\mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$ et on a

$$\bar{\sigma}(\mathcal{B}_1) < \bar{\sigma}(\mathcal{B})$$

si, et seulement si, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$, où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}$ sont des fusées neutres strictes et $\bar{\sigma}(\mathcal{B}) = (\mathcal{B}, \sigma(\mathcal{B}), \mathcal{B})$.

— Supposons $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$. Soit :

$$\mathrm{F}_1 = \mathcal{B}'_1 . \mathrm{F} . \mathcal{B}_1 = \alpha(\mathcal{B}'_1) . \mathrm{F} . \alpha(\mathcal{B}_1).$$

Supposons que, pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ (resp. tout $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$), il existe $f_1 \in \mathrm{F}_1$ tel que $\alpha(f_1) = e$ (resp. $\beta(f_1) = e'$). Montrons qu'alors on a : $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. En effet, on a

$$\alpha(\mathrm{F}_1) = \alpha(\mathcal{B}_1) \qquad \text{et} \qquad \beta(\mathrm{F}_1) = \beta(\mathcal{B}'_1).$$

Comme F_1 est une sous-classe saturée par induction de F, on a aussi $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Soit

$$(\mathcal{B}'_1, \mathrm{K}, \mathcal{B}_1) \sim (\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) \text{ modulo } \sigma'.$$

Une démonstration analogue à celle du théorème 5-1 prouve que $\mathcal{B}' . \mathrm{K} . \mathcal{B} = (\mathcal{B}'\mathrm{K})\mathcal{B}$. Nous allons montrer que $(\mathcal{B}', \mathrm{H}, \mathcal{B})$, où $\mathrm{H} = \mathcal{B}' . \mathrm{K} . \mathcal{B} \cup \mathrm{F}$, appartient à $\mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. On a :

$$\mathcal{B}_0 = \alpha(\mathrm{F}) \subset \alpha(\mathrm{H}) \subset \mathcal{B}_0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}'_0 = \beta(\mathrm{F}) \subset \beta(\mathrm{H}) \subset \mathcal{B}'_0;$$

par conséquent :

$$\alpha(\mathrm{H}) = \alpha(\mathrm{F}) = \mathcal{B}_0 \qquad \text{et} \qquad \beta(\mathrm{H}) = \mathcal{B}'_0.$$

Soient $f \in \mathrm{F}$, $k' = g' . k . g$, $k \in \mathrm{K}$, $g \in \mathcal{B}$, $g' \in \mathcal{B}'$ et $\alpha(g) = \alpha(f)$. Il existe $f_1 \in \mathrm{F}_1$ tel que $\alpha(f_1) = \alpha(k)$ et $f_1 < k$, d'où

$$(g'f_1) . g \in (\mathcal{B}'\mathrm{F}_1) . \mathcal{B} \subset \mathrm{F}.$$

Comme $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ est une fusée stricte, il existe $f' \in \mathrm{F}$ et $\gamma' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que $f' < f$, $\alpha(f') = \alpha(f)$ et $\gamma' . f' < (g'f_1) . g < k'$. Soit de plus $\bar{k}' = \bar{g}' . \bar{k} . \bar{g} \in \mathcal{B}' . \mathrm{K} . \mathcal{B}$, où $\bar{k} \in \mathrm{K}$ et $\alpha(g) = \alpha(\bar{g})$; on construit d'une manière analogue $(\bar{g}'\bar{f}_1) . \bar{g} \in \mathrm{F}$ tel que

$(\bar{g}'\bar{f}_1).\bar{g} < \bar{k}'$ et, d'après ce qui précède, il existe $\bar{f}' \in \mathrm{F}$ et $\bar{\gamma}' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$\bar{f}' < \bar{g}'\bar{f}_1\bar{g} < \bar{k}', \qquad \alpha(\bar{f}') = \alpha(g) \qquad \text{et} \qquad \bar{\gamma}'.\bar{f}' < \gamma'.f' < k'.$$

Par conséquent $(\mathcal{B}', \mathrm{H}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $\mathrm{H} = \mathrm{F}$, en vertu du corollaire du théorème 3. On en déduit $\mathrm{K} \subset \mathrm{F}$ et $\mathrm{F}_1 \subset \sigma(\mathrm{F}_1) \subset \mathrm{F}$. Par ailleurs, on a : $\sigma(\mathrm{F}_1) \subset \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1 = \mathrm{F}_1$, c'est-à-dire $\mathrm{F}_1 = \sigma(\mathrm{F}_1)$ et $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

— Supposons $(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$. Comme on a :

$$\mathrm{F}_1 \subset \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1, \qquad \alpha(\mathrm{F}_1) = \alpha(\mathcal{B}_1) \qquad \text{et} \qquad \beta(\mathrm{F}_1) = \beta(\mathcal{B}'_1),$$

le résultat précédent entraîne $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et, en vertu du corollaire du théorème 3, $\mathrm{F}_1 = \mathcal{B}'_1.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1$. De plus F_1 est saturé par induction dans F. En particulier, si $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'_1 = \mathcal{B}'$, on en déduit $\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}$. Une démonstration analogue à celle du théorème 5-1 montre que $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive assez régulière, le pseudoproduit $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})\mathcal{B}_1$, où $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$, étant égal à

$$(\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1),$$

en désignant par $\mathcal{B}'_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}'$ ayant $\beta(\mathrm{F}.\mathcal{B}_1)$ pour classe de ses unités.

— Enfin, supposons

$$(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), \qquad (\mathcal{B}'', \mathrm{F}', \mathcal{B}') \in \Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

et

$$(\mathcal{B}''_1, \mathrm{K}, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}'', \sigma(\mathrm{F}'.\mathrm{F}), \mathcal{B}) \quad \text{dans} \quad (\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <).$$

Soit E' la sous-classe de $\mathcal{B}'$ formée des $e' \in \mathcal{B}'_0$ tels qu'il existe $f \in \mathrm{F}$ et $f' \in \mathrm{F}'$ vérifiant les conditions :

$$\alpha(f') = \beta(f) = e', \qquad \alpha(f) \in \alpha(\mathrm{K}) \qquad \text{et} \qquad \beta(f') \in \beta(\mathrm{K}).$$

Cette sous-classe est saturée par induction dans $\mathcal{B}'_0$, puisque K est saturé par induction dans $\sigma(\mathrm{F}'.\mathrm{F})$. Soit $\mathcal{B}'_1$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}'$ ayant E' pour classe de ses unités. On a $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$. Soit $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$; il existe $k \in \mathrm{K}$ tel que $\alpha(k) = e$. Comme

$$\mathrm{K} \subset \sigma(\mathrm{F}'.\mathrm{F}),$$

il existe $f'.f \in \mathrm{F}'.\mathrm{F}$ tel que $f'.f < k$ et $\alpha(f) = e$. Par suite on obtient :

$$\mathcal{A} = (\mathcal{B}'_1, \mathrm{E}'.\mathrm{F}.\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \qquad \text{dans} \quad (\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <),$$

et

$$\mathcal{A}' = (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}''_1.\mathrm{F}.\mathrm{E}', \mathcal{B}'_1) < (\mathcal{B}'', \mathrm{F}', \mathcal{B}') \quad \text{dans} \quad (\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <).$$

Comme $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$ est une catégorie ordonnée, il en résulte :

$$(\mathcal{B}''_1, \mathrm{K}, \mathcal{B}_1) = \mathcal{A}' \perp \mathcal{A}.$$

Ainsi $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière.

— Une démonstration analogue à la fin de la démonstration du théorème 5-1 prouve que $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$ est une catégorie quotient $\tilde{\Omega}^s$-structurée de $(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$.

Définition 4. — *On dira que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ vérifie la condition (C^s) *si, pour tout* $f \in \mathcal{C}$, *le triplet* $(\beta(f)^{>}, f^{>}, \alpha(f)^{>})$ *est une fusée stricte de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Proposition 2. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est un groupoïde ordonné régulier,* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *vérifie la condition* (C^s).

En effet, soit $f \in \mathcal{C}$; si $f_1 < f$, $f_2 < f$ et $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$, on a $f_1^{-1}.f_2 < \alpha(f)$ et $f^{>}$ est un atlas de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, donc définit une fusée stricte, puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est régulier.

Proposition 3. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie sous-pré-inductive régulière,* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *vérifie la condition* (C^s).

En effet, soient $f \in \mathcal{C}$, $f_1 < f$, $f_2 < f$ et $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$. Il existe $f_1 \cap f_2$ et on a $\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2)$; donc

$$(\beta(f)^{>}, f^{>}, \alpha(f)^{>})$$

est une fusée stricte de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Théorème 5. — *Supposons que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *vérifie la condition* (C^s); *alors* $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$ *admet pour sous-catégorie régulière une catégorie* $c(\mathcal{C})^{\perp}$ *quotient strict de* $\mathcal{C}^{\cdot}$. *La classe* $\Sigma'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *des fusées maximales strictes* $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ *telles que* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *et* F *soient des sous-classes saturées par induction de* $\mathcal{C}$ *est une sous-catégorie pleine saturée par induction de* $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$.

Démonstration. — L'application :

$$f \to (\beta(f)^{>}, f^{>}, \alpha(f)^{>}), \qquad \text{où} \qquad f \in \mathcal{C},$$

identifie $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie de $\mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Comme la relation d'équivalence σ' n'identifie pas deux unités distinctes, l'application c :

$$f \to (\beta(f)^{>}, \sigma(f^{>}), \alpha(f)^{>})$$

définit une sous-catégorie $c(\mathcal{C})^{\perp}$ de $\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}$ comme catégorie quotient strict de $\mathcal{C}^{\cdot}$.

— Soient $f \in \mathcal{C}$, $f_1 \in \mathcal{C}$ et $f_1 < f$. Les relations :

$$h < \alpha(f), \qquad \alpha(h) < \alpha(f_1) \qquad \text{et} \qquad \beta(h) < \alpha(f_1)$$

entraînent $h = \beta(h)h\alpha(h) < \alpha(f_1)$, donc $\alpha(f_1)^{>}$ est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $\alpha(f)^{>}$; de même $\beta(f_1)^{>}$ est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $\beta(f)^{>}$. Par suite $c(f_1) < c(f)$ dans $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Soit $e \in \mathcal{C}_0$ tel que $e < \alpha(f)$; on a :

$$fe \in f^{>}e^{>}, \qquad \text{d'où} \qquad c(fe) = c(f)c(e).$$

— Montrons que si $f_i \in \mathcal{C}$, $i = 1{,}2$, on a $c(f_1) = c(f_2)$ si, et seulement si, $\alpha(f_1) = \alpha(f_2)$, $\beta(f_1) = \beta(f_2)$ et si, pour tout $f'_i < f_i$, il existe h et h' tels que : $h < f_i$, $h < f_j$, $h' < f_i$, $h' < f_j$, $\alpha(h) = \alpha(f'_i)$ et $\beta(h') = \beta(f'_i)$, où $j = 1{,}2$ et $j \neq i$. En effet, ces conditions sont vérifiées, si $c(f_1) = c(f_2)$. Inversement, supposons-les remplies ; soit $f'_i < f_i$. Il existe $f''_j < f_j$ tel que $\alpha(f''_j) = \alpha(f'_i)$ et $f''_j < f_i$; comme $f_i^{>}$ est une fusée stricte, il existe $h < f_i$ et $\gamma \in \beta(f_i)^{>}_{\gamma}$ tels que :

$$h < f'_i, \qquad \alpha(h) = \alpha(f'_i) \qquad \text{et} \qquad \gamma . h < f''_j,$$

d'où $h < \gamma^{-1}f''_j < f_j$. On construit de même $h' < f_j$ tel que $h' < f'_i < f_i$ et $\beta(h') = \beta(f'_i)$. Ainsi $c(f_1) = c(f_2)$. De plus soit $k < f'_i$ un majorant de h et de h' ; on a :

$$\alpha(f'_i) = \alpha(h) < \alpha(k) \qquad \text{et} \qquad \beta(f'_i) = \beta(h') < \beta(k),$$

d'où $\alpha(f'_i) = \alpha(k)$, $\beta(f'_i) = \beta(k)$ et, puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée, $f'_i = k$. Ceci démontre que f'_i est le f_i-agrégat de h et de h'. En particulier, il existe $f < f_1$ et $f' < f_1$ tels que $f_2 = f \bigcup^{f_2} f'$; dans ce cas, on a aussi $f_1 = f \bigcup^{f_1} f'$.

— Soit $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; supposons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ saturés par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Soit $f \in \mathrm{F}$ et $f' < f$ dans $(\mathcal{C}, <)$. On a $\beta(f') \in \mathcal{B}'$, $\alpha(f') \in \mathcal{B}$ et $f' = \beta(f')(f\alpha(f')) \in \mathcal{B}'(\mathrm{F}\mathcal{B}) \subset \mathrm{F}$, donc F est une sous-classe saturée par induction de $(\mathcal{C}, <)$. On en déduit que $\Sigma'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est la sous-catégorie pleine de $\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}$ ayant pour unités les fusées $(\mathcal{B}, \sigma(\mathcal{B}), \mathcal{B})$ telles que $\mathcal{B}$ soit une sous-catégorie de $\mathcal{C}^{\cdot}$, saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$.

— Soit $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \Sigma'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; si $(\mathcal{B}_1', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) < (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ dans $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_1'$ sont des sous-classes saturées par induction de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement et on a $(\mathcal{B}_1', \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1) \in \Sigma'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, donc $\Sigma'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une sous-classe saturée par induction de $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Enfin $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ est un sous-agrégat de la classe des $c(f)$, où $f \in \mathrm{F}$, si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont majorés dans $\mathcal{C}_0^{\cdot}$.

Remarque. — c ne définit pas un foncteur quasi-inductif de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ vers $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$, car, si $\mathrm{A} \subset \mathcal{C}$, on a seulement $c\left(\overset{f}{\bigsqcup} \mathrm{A}\right) > \overset{c(f)}{\bigsqcup} c(\mathrm{A})$.

Application aux catégories préinductives et aux groupoïdes ordonnés :

A) *Soit* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie préinductive régulière telle que* $(\mathcal{C}_{\gamma}^{\cdot}, <)$ *soit un groupoïde ordonné semi-régulier.* Si F est une sous-classe de $\mathcal{C}$, soit $\mathrm{F}^{<}$ la classe de ses majorants. Soit $\overline{\mathcal{C}}$ la classe des sous-classes F de $\mathcal{C}$ qui sont majorées et saturées par induction dans $(\mathcal{C}, <)$ et qui contiennent tout élément $f' \in \beta(\mathrm{F}).\mathcal{C}.\alpha(\mathrm{F})$ tel que $f' < \mathrm{F}^{>}$.

Théorème 6. — $c(\mathcal{C})^{\perp}$ (th. 5) *est équivalente à* $\mathcal{C}^{\cdot}$ *et la sous-classe* $\overline{\mathcal{C}}'$ *de* $\Sigma'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *formée des fusées majorées par un élément de* $c(\mathcal{C})$ *est une sous-catégorie saturée par induction de* $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$. *L'application* $\pi: (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \to \mathrm{F}$ *définit une équivalence de* $\overline{\mathcal{C}}'^{\perp}$ *sur une catégorie* $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$ *et* $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \subset)$ *est une catégorie inductive.*

Démonstration. — Soient $f \in \mathcal{C}$, $f' \in \mathcal{C}$ et $c(f) = c(f')$. D'après la démonstration du théorème 5, il existe $f_1 < f$ et $f_2 < f$ tels que :

$$f = f_1 \overset{f}{\bigsqcup} f_2 \qquad \text{et} \qquad f' = f_1 \overset{f'}{\bigsqcup} f_2.$$

Soit $\bar{f} = f \cap f'$; on a $f_1 < \bar{f}$ et $f_2 < \bar{f}$, d'où $f = f_1 \overset{\bar{f}}{\bigsqcup} f_2 = f'$. Par suite c est une bijection de $\mathcal{C}$ sur $c(\mathcal{C})$.

— Supposons $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) < c(f)$ et $(\mathcal{B}'', \mathrm{F}', \mathcal{B}') < c(f')$ dans $(\Sigma(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$. Soit $e = \beta(f) \cap \alpha(f')$; on a :

$$(\mathcal{B}'', \sigma(\mathrm{F}'.\mathrm{F}), \mathcal{B}) < c(f'e)_{\perp}\, c(ef),$$

de sorte que $\bar{\mathcal{C}}'$ est une sous-catégorie de $\Sigma(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\perp}$. Comme $\bar{\mathcal{C}}'$ est une sous-classe saturée par induction de $(\Sigma(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$, le couple $(\bar{\mathcal{C}}'^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive.

— Soit F une sous-classe de $\mathcal{C}$ majorée par $f \in \mathcal{C}$ et saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Posons :

$$\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = \alpha(\mathrm{F}).\alpha(f)^{>}.\alpha(\mathrm{F}) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}'_{\mathrm{F}} = \beta(\mathrm{F}).\beta(f)^{>}.\beta(\mathrm{F}).$$

$\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$ et $\mathcal{B}'_{\mathrm{F}}$ sont des sous-catégories de $\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}$, saturées par induction dans $(\mathcal{C}, <)$. Puisque $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$ vérifie la condition (C^s) d'après la proposition 3, $(\mathcal{B}'_{\mathrm{F}}, \mathrm{F}, \mathcal{B}_{\mathrm{F}})$ est une fusée stricte de $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$. Remarquons que, si $\bar{f}$ est un autre majorant de F, on a :

$$\mathcal{B}_{\mathrm{F}} = \alpha(\mathrm{F}).\alpha(f \cap \bar{f})^{>}.\alpha(\mathrm{F}) = \alpha(\mathrm{F}).\alpha(\bar{f})^{>}.\alpha(\mathrm{F}),$$

car $\alpha(f \cap \bar{f})^{>}$ est une sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^{>}$ et de $\alpha(\bar{f})^{>}$. Soit F′ la classe des $f' \in \beta(\mathrm{F}).\mathcal{C}.\alpha(\mathrm{F})$ tels que $f' < \mathrm{F}^{<}$; cette classe est majorée par f et saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$; d'après ce qui précède, $(\mathcal{B}'_{\mathrm{F}}, \mathrm{F}', \mathcal{B}_{\mathrm{F}})$ est aussi une fusée stricte de $(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$. Soit $f' \in \mathrm{F}'$; il existe $f_1 \in \mathrm{F}$ et $f_2 \in \mathrm{F}$ tels que

$$\alpha(f_1) = \alpha(f') \qquad \text{et} \qquad \beta(f_2) = \beta(f');$$

en posant :

$$h_1 = f' \cap f_1 \in \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad h_2 = f' \cap f_2 \in \mathrm{F},$$

on trouve :

$$h_1 < f', \qquad h_2 < f',$$
$$\alpha(h_1) = \alpha(f' \cap f_1) = \alpha(f') \cap \alpha(f_1) = \alpha(f')$$

et

$$\beta(h_2) = \beta(f').$$

Il s'ensuit :

$$(\mathcal{B}'_{\mathrm{F}}, \mathrm{F}', \mathcal{B}_{\mathrm{F}}) \sim (\mathcal{B}'_{\mathrm{F}}, \mathrm{F}, \mathcal{B}_{\mathrm{F}}) \bmod \sigma'.$$

Supposons de plus $(\mathcal{B}'_{\mathrm{F}}, \mathrm{F}'', \mathcal{B}_{\mathrm{F}}) \sim (\mathcal{B}'_{\mathrm{F}}, \mathrm{F}, \mathcal{B}_{\mathrm{F}}) \bmod \sigma'$. Soit

$f'' \in F''$. Il existe $f''_1 \in F$ et $f''_2 \in F$ tels que :

$$f''_1 < f'', \qquad f''_2 < f'', \qquad \alpha(f''_1) = \alpha(f''), \qquad \beta(f''_2) = \beta(f'').$$

Étant donné que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est ordonnée, ces relations entraînent :

$$f'' = f''_1 \overset{f''}{\bigcup} f''_2, \qquad \text{d'où} \qquad f'' \in F'.$$

Par suite $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F)$ est une fusée stricte maximale de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

— Si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \Sigma'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et si $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) < c(f)$, alors $\mathcal{B}$ est la sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^{>}$ ayant $\alpha(F)$ pour classe de ses unités et la classe F est majorée par f et saturée par induction. Il en résulte :

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \qquad \text{et de même} \qquad \mathcal{B}' = \mathcal{B}'_F,$$

de sorte que π est une bijection de $\bar{\mathcal{C}}'$ sur une classe de parties de $\mathcal{C}$. Soit F' la classe des $f' \in \beta(F).\,\mathcal{C}.\,\alpha(F)$ tels que $f' < F^{<}$; nous avons vu que l'on a $(\mathcal{B}'_F, F', \mathcal{B}_F) \sim (\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$. Puisque $(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F)$ est maximale, on en déduit $F = F'$, c'est-à-dire $F \in \bar{\mathcal{C}}$. Inversement, si $F \in \bar{\mathcal{C}}$, on a :

$$F = \pi(\mathcal{B}'_F, F, \mathcal{B}_F).$$

Donc π est une bijection de $\bar{\mathcal{C}}'$ sur $\bar{\mathcal{C}}$.

— Soit $\bar{\mathcal{C}}^{\perp}$ la catégorie image de $\bar{\mathcal{C}}'^{\perp}$ par π, dont la loi de composition est définie par :

$$F_1 \perp F = \text{classe des } f' \in \beta(F_1).\mathcal{C}.\alpha(F) \text{ tels que } f' < (F_1.F)^{<},$$
si, et seulement si, $\alpha(F_1) = \beta(F)$.

L'unité à droite $\alpha^{\perp}(F)$ de F est $\alpha(F).\alpha(f)^{>}.\alpha(F)$, son unité à gauche est $\beta^{\perp}(F) = \beta(F).\beta(f)^{>}.\beta(F)$, où f est un majorant quelconque de F. Soient $F_1 \in \bar{\mathcal{C}}$ et $F \in \bar{\mathcal{C}}$. Si $\pi^{-1}(F_1) < \pi^{-1}(F)$, on a $F_1 \subset F$; si $F_1 \subset F$, la catégorie $\mathcal{B}_{F_1}$ (resp. $\mathcal{B}'_{F_1}$) est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}'_F$), de sorte que $\pi^{-1}(F_1) < \pi^{-1}(F)$. Par suite π est un isomorphisme de $(\bar{\mathcal{C}}', <)$ sur $(\bar{\mathcal{C}}, \subset)$. En utilisant le fait que $(\bar{\mathcal{C}}'^{\perp}, <)$ est une catégorie quasi-inductive, on voit que $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, \subset)$ est une catégorie quasi-inductive régulière. Pour montrer que $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, \subset)$ est inductive, il suffit de prouver qu'elle est préinductive.

— Soient $F_1 \in \overline{\mathcal{C}}$ et $F_2 \in \overline{\mathcal{C}}$; désignons par K la classe intersection de F_1 et F_2. Soit $k \in \beta(K).\mathcal{C}.\alpha(K)$ tel que $k < K^<$. Pour tout majorant f_i de F_i, où $i = 1,2$, on a $k < f_i$, d'où $k \in F_i$. Donc $k \in K$, $K \in \overline{\mathcal{C}}$ et K est l'intersection de F_1 et F_2 dans $(\overline{\mathcal{C}}, \subset)$. Si de plus F_1 et F_2 sont majorés par un élément de $\overline{\mathcal{C}}$, il existe aussi $f \in \mathcal{C}$ tel que $F_1 < f$ et $F_2 < f$. Soit $e \in \alpha(F_1)$, $e \in \alpha(F_2)$; il existe $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ tels que $e = \alpha(f_1) = \alpha(f_2)$; puisque $f_1 < f$ et $f_2 < f$, on a :

$$\alpha(f_1 \cap f_2) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f_2) = e,$$

ce qui entraîne $e \in \alpha(K)$. Ceci montre que l'on a :

$$\alpha^{\perp}(F_1 \cap F_2) = \alpha^{\perp}(F_1) \cap \alpha^{\perp}(F_2).$$

De même $\beta^{\perp}(F_1 \cap F_2) = \beta^{\perp}(F_1) \cap \beta^{\perp}(F_2)$. Ainsi $(\overline{\mathcal{C}}^{\perp}, \subset)$ est une catégorie inductive régulière.

Corollaire. — *Si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie inductive, elle est isomorphe à $(\overline{\mathcal{C}}_1^{\perp}, \subset)$, où $\overline{\mathcal{C}}_1$ est la sous-catégorie pleine de $\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$ ayant pour unités les classes $B \in \overline{\mathcal{C}}$ telles que* $\cup (B \cap \mathcal{C}_0^{\cdot}) \in B$.

En effet, on a $\pi c(\mathcal{C}) \subset \overline{\mathcal{C}}_1$. Soit $F \in \overline{\mathcal{C}}_1$; comme F est majorée dans $(\mathcal{C}, <)$, elle admet un agrégat f et on a $\alpha(f) = \cup\, \alpha(F)$; la relation $\alpha(F) = \alpha^{\perp}(F) \cap \mathcal{C}_0^{\cdot}$ entraîne $\alpha(f) \in \alpha(F)$; de même $\beta(f) \in \beta(F)$. Donc

$$f \in \beta(F).\mathcal{C}.\alpha(F) \qquad \text{et} \qquad f < F^<.$$

Il en résulte $f \in F$, d'après la démonstration du théorème 6, d'où $F = f^>$.

B) *Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ un groupoïde ordonné régulier.* Soit $\mathcal{A}b^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ la classe des atlas réguliers de $\mathcal{C}^{\cdot}$, qui définit (théorème 3-2 [1]) un sous-groupoïde saturé par induction de $(\mathcal{A}b(\mathcal{C}^{\cdot})^{\cdot}, <)$.

Théorème 7. — *L'application:* $F \to (b(F), F, a(F))$ *est un isomorphisme de $(\mathcal{A}b^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ sur le groupoïde quasi-inductif régulier $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$; par suite $(\mathcal{A}b^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est un groupoïde quasi-inductif régulier; $\mathcal{C}^{\cdot}$ s'identifie à un sous-groupoïde régulier de $(\mathcal{A}b^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$.*

Démonstration. — On a évidemment $\mathcal{A}b^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <) \subset \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Supposons que l'on ait $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et montrons que dans ce cas $F \in \mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$. En effet, supposons $f \in F$ et $f_1 \in F$. Si $f_1 < f$ et $\alpha(f) = \alpha(f_1)$, on a $f.f_1^{-1} < \beta(f)$, $\alpha(f.f_1^{-1}) = \beta(f_1)$ et $\beta(f.f_1^{-1}) = \beta(f)$, d'où :

$$f.f_1^{-1} = \beta(f)\beta(f_1) \in \mathcal{B}',$$

car $\mathcal{B}'$ est une sous-catégorie régulière du groupoïde ordonné $(\mathcal{C}^\cdot, <)$. De même on trouve $f_1.f^{-1} \in \mathcal{B}'$, et par suite $f.f_1^{-1} \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$. Supposons de plus $f' \in F$ et $\alpha(f) = \alpha(f')$. Il existe $f_1 \in F$, $f'_1 \in F$ et $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$\alpha(f_1) = \alpha(f), \qquad f_1 < f, \qquad f'_1 < f' \qquad \text{et} \qquad f'_1 = g'.f_1;$$

on en déduit :

$$\begin{aligned} f_1 &= \beta(f_1)f\alpha(f_1) = \beta(f_1)f, \\ g'' &= (\beta(f')\beta(f'_1)).g'.(\beta(f_1)\beta(f)) \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma} \qquad \text{et} \qquad f' = g''.f, \end{aligned}$$

car :

$$g''.f = \beta(f')\beta(f'_1)g'\beta(f_1)\beta(f)f < \beta(f')g'f_1 = \beta(f')f'_1 < f',$$
$$\alpha(g''.f) = \alpha(f') \qquad \text{et} \qquad \beta(g''.f) = \beta(f').$$

Ceci montre que F est un atlas régulier de $\mathcal{C}^\cdot$. En particulier, si $g \in \mathcal{B}$ il existe $g' \in \mathcal{B}^{\cdot}_{\gamma}$ tel que $g'.\alpha(g) = g$, c'est-à-dire $g \in \mathcal{B}^{\cdot}_{\gamma}$ et $\mathcal{B}$ est un sous-groupoïde de $\mathcal{C}^\cdot$. Il en résulte $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \overline{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^\cdot)$ et, en vertu du théorème 1-1 [1], $\mathcal{B} = a(F)$ et $\mathcal{B}' = b(F)$. L'application $(\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \to F$ est donc une équivalence de $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ sur $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$.

— $(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ étant une catégorie ordonnée, puisque $(\mathcal{A}(\mathcal{C}^\cdot)^\cdot, <)$ est une catégorie ordonnée (corollaire 2 théorème 2-2 [1]), les conditions :

$$F \subset F_1, \qquad a(F_1) = a(F) \qquad \text{et} \qquad b(F_1) = b(F)$$

entraînent $F = F_1$; en tenant compte du corollaire du théorème 3, on en déduit que $(b(F), F, a(F))$ est une fusée stricte maximale. Ceci montre qu'il existe une bijection de $\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ sur $\Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)$ (et aussi sur $\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$). Il en résulte que les catégories

$$\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, \qquad \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot \qquad \text{et} \qquad \Sigma(\mathcal{C}^\cdot, <)^\perp$$

sont équivalentes et que la catégorie quasi-inductive

$$(\mathcal{A}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$$

est isomorphe à la catégorie quasi-inductive $(\Sigma(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\perp}, <)$. Enfin l'application : $f \to f^{>}$ est une équivalence de $\mathcal{C}^{\cdot}$ sur un sous-groupoïde de $\mathcal{A}^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$.

Corollaire. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est un groupoïde préinductif,* $(\mathcal{A}^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ *admet* $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, <)$ *pour sous-groupoïde inductif.*

En effet, $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie préinductive; d'après le théorème 6, $(\bar{\mathcal{C}}^{\perp}, <)$ est inductif et forme un sous-groupoïde de $(\mathcal{A}^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$.

3. Superfusées.

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie ordonnée régulière telle que* $(\mathcal{C}^{\cdot}_{\gamma}, <)$ *soit un groupoïde ordonné semi-régulier.* Nous désignerons par π l'application qui associe à une fusée $(\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B})$ de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ la classe F.

Définition 1. — *On appelle* superfusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *un triplet* $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; $\mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}'_1$ *sont des fusées neutres de* $\mathcal{C}^{\cdot}$; *on a* $\mathcal{B}_1 < \mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'_1 < \mathcal{B}'$ *dans* $(\mathcal{F}(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$.
2) *Pour tout* $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$ (*resp. tout* $e' \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$), *il existe*

$$f \in \mathcal{B}'_1 . \mathrm{F} . \mathcal{B}_1$$

tel que $\alpha(f) < e$ (*resp. que* $\beta(f) < e'$).

Soit $\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *la classe des superfusées de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Proposition 1. — *L'application* φ :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \to ((\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1 . \mathrm{F} . \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1), \mathcal{F})$$

est une bijection de $\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *sur la sous-classe de*

$$\mathcal{F}^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <) \times \mathcal{F}'^{r}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

formée des couples $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ *tels que* $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}$ *et* $\mathrm{F}_1 = \mathcal{B}'_1 . \pi(\mathcal{F}) . \mathcal{B}_1$, *où* $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, \mathrm{F}_1, \mathcal{B}_1)$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; posons :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', \mathrm{F}, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_1 = \mathcal{B}'_1 . \mathrm{F} . \mathcal{B}_1.$$

Puisque $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ sont saturées par induction dans $(\mathcal{B}, <)$ et $(\mathcal{B}', <)$ respectivement, F_1 est une sous-classe saturée par induction dans $(F, <)$ et on a $F_1 = \mathcal{B}'_1(F\mathcal{B}_1)$. Il en résulte, en posant $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$:

$$\mathcal{F}_1 \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}_1 < \mathcal{F} \quad \text{dans} \quad (\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <), <).$$

— Inversement, si $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ est un couple vérifiant les conditions de la proposition, alors $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ est évidemment une superfusée de $(\mathcal{C}^\cdot, <)$. La proposition 1 s'en déduit.

Soit I une classe d'indices contenant en particulier 1 et 2; soit $i \in I$, $j \in I$. Nous désignerons par $(\mathcal{F}, j, i)$ la sous-catégorie régulière de la catégorie ordonnée régulière $((\mathcal{C}^\cdot, I), <)$ réunion de $(\alpha(\mathcal{F}), i, i)$, $(\beta(\mathcal{F}), j, j)$ et $(\pi(\mathcal{F}), j, i)$, par $\mathcal{F}^{ji}$ la fusée régulière

$$((\beta(\mathcal{F}), j, j), (\pi(\mathcal{F}), j, i), (\alpha(\mathcal{F}), i, i)).$$

de $((\mathcal{F}, j, i)^\cdot, <)$.

Proposition 2. — *Soient* $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$ *et* $\mathcal{F}_1 = (\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)$. *Pour que l'on ait*

$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) \in \varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)),$$

il faut et il suffit que l'on ait $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$, $\mathcal{B}'_1 \subset \mathcal{B}'$ *et que* $\mathcal{F}_1^{21}$ *soit une fusée maximale de* $((\mathcal{F}, 2, 1)^\cdot, <)$.

En effet, les conditions sont évidemment suffisantes. Si on a $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) \in \varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <))$, d'après la démonstration du théorème 5-1, $\mathcal{F}_1^{21}$ est une fusée maximale de $((\mathcal{F}, 2, 1)^\cdot, <)$.

Théorème 1. — $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ *est une catégorie quasi-inductive régulière, la loi de composition étant définie par:*

$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}') . (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) = (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}' . \mathcal{F})$ *si, et seulement si,* $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}'_1$ *et* $\alpha(\mathcal{F}') = \beta(\mathcal{F})$,

et la relation d'ordre par:

$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}') < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ *si, et seulement si,* $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ *et si* $\mathcal{B}_2 < \mathcal{B}_1$ *et* $\mathcal{B}'_2 < \mathcal{B}'_1$ *dans* $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot_0, <)$.

Démonstration. — La loi de composition est celle induite sur $\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)$ par la catégorie $\mathcal{S}^\cdot$ produit du groupoïde de couples $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot_0 \times \mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot_0)^\perp$ associé à $\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot_0$ avec la catégorie

$\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$. La superfusée $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ admet $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1, \alpha(\mathcal{F}))$ et $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_1, \beta(\mathcal{F}))$ pour uniques unités à droite et à gauche respectivement. Soit aussi $(\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}')$ une superfusée. Posons :

$$F = \pi(\mathcal{F}), \qquad F' = \pi(\mathcal{F}'), \qquad F_1 = \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1$$

et

$$F'_1 = \mathcal{B}''_1 . F' . \mathcal{B}'_1.$$

On a : $F'_1 . F_1 \subset \mathcal{B}''_1 . F' . F . \mathcal{B}_1$. Pour tout $e \in \alpha(\mathcal{B}_1)$, il existe $f \in F_1$ tel que $\alpha(f) < e$; comme $\beta(f) \in \mathcal{B}'_1$, il existe $f' \in F'_1$ tel que $\alpha(f') < \beta(f)$. Puisque $\mathcal{F}$ est une fusée et que F_1 est saturée par induction dans $(F, <)$, on a :

$$\alpha(f')f \in F_1,$$

d'où

$$f' . (\alpha(f')f) \in F''_1 . F_1 \subset \mathcal{B}''_1 . \pi(\mathcal{F}' . \mathcal{F}) . \mathcal{B}_1.$$

Par suite la condition 2 de la définition 1 est vérifiée et

$$(\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}' . \mathcal{F})$$

est une superfusée. Ceci montre que $\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ est une sous-catégorie de $\mathcal{S}^\cdot$.

— $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est évidemment une catégorie ordonnée, puisque $(\mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est une catégorie ordonnée, d'après le théorème 3-2. Soit I une classe d'indices et soit

$$(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F}) < (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$$

pour tout $i \in I$ dans $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$. Il est évident que le triplet $\left(\bigcup_{i\in I}^{\mathcal{B}_1'} \mathcal{B}'_i, \bigcup_{i \in I}^{\mathcal{B}_1} \mathcal{B}_i, \mathcal{F}\right)$ est une superfusée, qui est l'agrégat de la classe $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F})_{i\in I}$ dans la classe ordonnée $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <), <)$. Il en résulte que $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot, <)$ est une catégorie quasi-inductive. Soient :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 < \mathcal{B}_1;$$

désignons par $\mathcal{B}'_2$ la sous-catégorie pleine saturée par induction de $(\mathcal{B}'_1, <)$ ayant pour unités les $e' \in \mathcal{B}'_1$ tels qu'il existe

$$f \in \pi(\mathcal{F}) . \mathcal{B}_2$$

tel que $\beta(f) < e'$. On a :

$$(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)$$

et $(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F})$ est le pseudoproduit $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2, \alpha(\mathcal{F}))$ dans $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$. De même, si $\mathcal{B}'_3 < \mathcal{B}'_1$, il existe un pseudoproduit

$$(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_3, \beta(\mathcal{F}))(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}),$$

à savoir la superfusée $(\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F})$, où $\mathcal{B}_3$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}_1$ ayant pour unités les $e \in \mathcal{B}_1$ tels qu'il existe $f \in \mathcal{B}'_3 . \pi(\mathcal{F})$ avec $\alpha(f) < e$. Ainsi $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive assez régulière. Enfin, si on a :

$$(\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{K}) < (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}') . (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}),$$

on trouve :

$$(\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{K}) = (\mathcal{B}''_2, \mathcal{B}'_2, \mathcal{F}') . (\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F}),$$

où $\mathcal{B}'_2$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}'_1$ ayant pour unités les e' tels qu'il existe $f \in \pi(\mathcal{F}) . \mathcal{B}_2$ et $f' \in \mathcal{B}''_2 . \pi(\mathcal{F}')$ vérifiant :

$$\beta(f) < e' \qquad \text{et} \qquad \alpha(f') < e'.$$

Donc $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est régulière.

Corollaire. — *φ définit un isomorphisme de $(\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ sur la catégorie quasi-inductive régulière $(\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <))^{\cdot}, <)$ dont la loi de composition est définie par :*

$$(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}') . (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) = ((\beta(\mathcal{F}'_1), \beta(\mathcal{F}'_1) . \pi(\mathcal{F}') . \pi(\mathcal{F}) . \alpha(\mathcal{F}_1), \alpha(\mathcal{F}_1)), \mathcal{F}' . \mathcal{F})$$
si, et seulement si, $\alpha(\mathcal{F}') = \beta(\mathcal{F})$ *et* $\alpha(\mathcal{F}'_1) = \beta(\mathcal{F}_1)$,

et la relation d'ordre par :

$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}) < (\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}')$ *si, et seulement si,* $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ *et* $\mathcal{F}_1 < \mathcal{F}'_1$ *dans* $(\mathcal{F}^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$.

En effet, ce corollaire se déduit du théorème 1 et de la proposition 1.

Remarque. — On peut démontrer directement que

$$(\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <))^{\cdot}, <)$$

est une catégorie quasi-inductive régulière en utilisant la remarque suivante : Si $(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}')$ et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F})$ sont deux éléments composables, la sous-catégorie pleine saturée par induction engendrée par la classe $\{(\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'), (\mathcal{F}_1, \mathcal{F})\}$ dans $\varphi(\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <))^{\cdot}$ est isomorphe à la catégorie quasi-inductive $(\Phi^r(\Gamma, <)^{\bullet}, <)$ où Γ est la sous-catégorie de $(\mathcal{C}^{\cdot}, \mathrm{I})$ engendrée par la classe

$$(\mathcal{F}, 2, 1) \cup (\mathcal{F}', 3, 2).$$

DÉFINITION 2. — *On dira qu'une catégorie ordonnée assez régulière* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ vérifie la condition (P) *si les axiomes suivants sont remplis :*

1) *Si* $f \in \mathcal{C}$, $E \subset \mathcal{C}_0^{\cdot}$ *et* $\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} E$, *on a* $f = \bigcup^{f} fE$.

2) *Si* $f \in \mathcal{C}$, $E' \subset \mathcal{C}_0^{\cdot}$ *et* $\beta(f) = \bigcup^{\beta(f)} E'$, *on a* $f = \bigcup^{f} E'f$.

Exemple. — Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ une catégorie ordonnée assez régulière telle que les conditions $f < g$ et $\alpha(f) = \alpha(g)$ (resp. et $\beta(f) = \beta(g)$) entraînent $f = g$; alors $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ vérifie la condition (P). En effet, si $\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} E$ et si, pour tout $e \in E$, g est un majorant de fe tel que $g < f$, on a :

$$e < \alpha(g) < \alpha(f), \qquad \text{d'où} \qquad \alpha(g) = \alpha(f),$$

et par suite $g = f = \bigcup^{f} fE$. De même la condition 2 est vérifiée dualement. En particulier cette propriété est vérifiée si $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est un groupoïde fonctoriellement ordonné [1].

Soit $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une catégorie sous-prélocale* [1] *régulière telle que* $(\mathcal{C}_{\gamma}^{\cdot}, <)$ *soit un groupoïde ordonné semi-régulier et que* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *vérifie la condition* (P). Si H est une sous-classe de $\mathcal{C}$ et K une partie de H, nous désignerons par $(\overline{K})_H$ la classe des h-agrégats des sous-classes de K, où $h \in H$. On dira que K est saturé par agrégation dans $(H, <)$ si on a :

$$(\overline{K})_H = K.$$

PROPOSITION 3. — *Soit* $H \subset \mathcal{C}$; *si* $K \subset H$ *est saturé par induction dans* $(H, <)$ *et si* H *est saturé par intersection finie, alors* $(\overline{K})_H$ *est saturé par induction dans* $(H, <)$. *Si* $K' \subset K \subset H$ *et si* K *est saturé par agrégation dans* $(H, <)$, *on a* $(\overline{K'})_K = (\overline{K'})_H$.

Démonstration. — Soit $h \in H$, $h = \bigcup^{h} A$, où $A \subset K$, et $h' \in H$ tel que $h' < h$. On a

$$h' = h' \cap h = h' \cap \left(\bigcup^{h} A\right) = \bigcup_{a \in A}^{h} (h' \cap a),$$

en utilisant l'axiome de distributivité [1], d'où $h' \in (\overline{K})_H$.

Si $K' \subset K \subset H$, on a $(\overline{K'})_K \subset (\overline{K'})_H$. Si de plus $(\overline{K})_H = K$ et si on a :

$$h = \bigcup^{h'} A, \qquad \text{où} \qquad A \subset K' \qquad \text{et} \qquad h' \in H,$$

on obtient $h \in (\overline{K})_H = K$ et $h = \bigcup^{h} A$, donc $h \in (\overline{K'})_K$ et $(\overline{K'})_K = (\overline{K'})_H$.

Définition 3. — *On appelle* (P)-superfusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *une superfusée* $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ *telle que l'on ait :*

$$\alpha(\mathcal{B}_1) = \overline{(\alpha(F_1))}_{\alpha(F)} \qquad \textit{et} \qquad \alpha(\mathcal{B}'_1) = \overline{(\beta(F_1))}_{\beta(F)},$$

où

$$F = \pi(\mathcal{F}) \qquad \textit{et} \qquad F_1 = \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1.$$

Soit $\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ la classe des (P)-superfusées de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Proposition 4. — *L'application* τ :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \to (\mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$$

est une bijection de $\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *sur la classe des couples* $(F_1, \mathcal{F})$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1) $\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

2) F_1 *est une partie de* F, *saturée par induction et agrégation dans* $(F, <)$.

3) *On a :* $\beta(F_1) . \mathcal{B}' . F_1 = F_1 = F_1 . \mathcal{B} . \alpha(F_1)$.

Démonstration. — Soit $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ une (P)-superfusée, où :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \in \mathcal{F}'^r(\mathcal{C}^{\cdot}, <) \qquad \text{et} \qquad F_1 = \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1.$$

D'après la proposition 1, $(\mathcal{B}'_1, F_1, \mathcal{B}_1)$ est une fusée majorée par $\mathcal{F}$, de sorte que la condition 3 est vérifiée et F_1 est saturé par induction dans $(F, <)$. Soit $f = \bigcup^{f} C$, où $C \subset F_1$. D'après la proposition 12-2 [1], on a :

$$\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} \alpha(C) \in \overline{(\alpha(F_1))}_{\alpha(F)} = \alpha(\mathcal{B}_1).$$

De même $\beta(f) \in \alpha(\mathcal{B}'_1)$, d'où $f \in \mathcal{B}'_1 . F . \mathcal{B}_1 = F_1$; ainsi la condition 2 est satisfaite. — Inversement, soit $(F_1, \mathcal{F})$ un couple vérifiant les conditions 1, 2 et 3; posons :

$$\mathrm{E} = (\overline{\alpha(\mathrm{F}_1)})_{\alpha(\mathrm{F})} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}' = (\overline{\beta(\mathrm{F}_1)})_{\beta(\mathrm{F})}.$$

Si $e \in \alpha(\mathrm{F}_1)$, $e' \in \alpha(\mathrm{F})$ et $e' < e$, il existe $f_1 \in \mathrm{F}_1$ tel que $\alpha(f_1) = e$; on a

$$f_1 e' \in \mathrm{F}\alpha(\mathrm{F}) = \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad \alpha(f_1 e') = e';$$

comme F_1 est saturé par induction dans $(\mathrm{F}, <)$, il en résulte $e' \in \alpha(\mathrm{F}_1)$. Ainsi $\alpha(\mathrm{F}_1)$ est saturé par induction dans $(\alpha(\mathrm{F}), <)$; par dualité, $\beta(\mathrm{F}_1)$ est saturé par induction dans $(\beta(\mathrm{F}), <)$. D'après la proposition 3, E et E′ sont aussi saturés par induction dans $(\alpha(\mathrm{F}), <)$ et $(\beta(\mathrm{F}), <)$ respectivement, car $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}'_0$ sont saturés par intersection finie. Par suite, la sous-catégorie pleine $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{B}^{\cdot}$ ayant E pour classe de ses unités est saturée par induction dans $(\mathcal{B}, <)$; de même $\mathcal{B}'_1 = \mathrm{E}'.\mathcal{B}'.\mathrm{E}'$ est une sous-catégorie pleine saturée par induction de $(\mathcal{B}'^{\cdot}, <)$ et $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F})$ est une superfusée de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Soit

$$f \in \beta(\mathrm{F}_1).\mathrm{F}.\alpha(\mathrm{F}_1).$$

Il existe $f_1 \in \mathrm{F}_1$ tel que $\alpha(f_1) = \alpha(f)$ et, puisque $\mathcal{F}$ est une fusée stricte, il existe $f'_1 \in \mathrm{F}$ et $g' \in \mathcal{B}'^{\cdot}_{\gamma}$ tels que :

$$\alpha(f'_1) = \alpha(f_1), \qquad f'_1 < f_1 \qquad \text{et} \qquad \overline{f}_1 = g'.f'_1 < f.$$

Comme $\beta(\mathrm{F}_1)$ est saturé par induction dans $(\beta(\mathrm{F}), <)$, on a :

$$f'_1 \in \mathrm{F}_1, \qquad \beta(g') \in \beta(\mathrm{F}_1) \qquad \text{et} \qquad g'.f'_1 \in \beta(\mathrm{F}_1).\mathcal{B}'.\mathrm{F}_1 = \mathrm{F}_1.$$

De même il existe $f_2 \in \mathrm{F}_1$ tel que $f_2 < f$ et $\beta(f_2) = \beta(f)$. On en conclut :

$$f = \overline{f}_1 \bigcup^{f} f_2 \in (\overline{\mathrm{F}}_1)_{\mathrm{F}} = \mathrm{F}_1,$$

car $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée. Montrons que l'on a $\mathrm{E}'.\mathrm{F}.\mathrm{E} \subset \mathrm{F}_1$. Soit $f \in \mathrm{E}'.\mathrm{F}.\mathrm{E}$. Il existe une sous-classe A saturée par induction dans $(\alpha(\mathrm{F}_1), <)$ et une sous-classe A′ saturée par induction dans $(\beta(\mathrm{F}_1), <)$ telles que :

$$\alpha(f) = \bigcup^{\alpha(f)} \mathrm{A} \qquad \text{et} \qquad \beta(f) = \bigcup^{\beta(f)} \mathrm{A}'.$$

Pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a

$$fa \in \mathrm{F} \qquad \text{et} \qquad \beta(fa) = \beta(fa) \cap \beta(f) = \bigcup_{a' \in \mathrm{A}'}^{\beta(f)} (\beta(fa) \cap a')$$

puisque $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est sous-prélocale. Par suite :

$$fa = \bigcup_{a' \in A'}^{f} (\beta(fa) \cap a')fa.$$

La relation : $(\beta(fa) \cap a')fa \in \beta(F_1).F.\alpha(F_1) \subset F_1$ entraîne :

$$fa \in (\overline{F}_1)_F = F_1,$$

d'où

$$f = \bigcup_{a \in A}^{f} fa \in F_1 \quad \text{et} \quad F_1 = E'.F.E.$$

Donc $(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et τ est une bijection.

Théorème 2. — *$\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une sous-catégorie de*

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot} \quad \text{et} \quad (\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$$

est une catégorie quasi-inductive régulière.

Démonstration. — Soit $S = (\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{F}) \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$; on a évidemment :

$$\alpha(S) \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <) \quad \text{et} \quad \beta(S) \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <).$$

Soit $S' = (\mathcal{B}''_1, \mathcal{B}'_1, \mathcal{F}') \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ tel que $S'.S$ soit défini. Soit :

$$\mathcal{F} = (\mathcal{B}', F, \mathcal{B}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}' = (\mathcal{B}'', F', \mathcal{B}');$$

posons :

$$F_1 = \mathcal{B}'_1.F.\mathcal{B}_1, \qquad F'_1 = \mathcal{B}''_1.F'.\mathcal{B}'_1$$

et

$$F'_1 \bullet F_1 = \mathcal{B}''.F'.F.\mathcal{B}_1.$$

On a :

$$\overline{(\alpha(F'_1 \bullet F_1))}_{\alpha(F)} \subset \overline{(\alpha(F_1))}_{\alpha(F)} = \alpha(\mathcal{B}_1).$$

Soit $e \in \alpha(F_1)$; il existe $f_1 \in F_1$ tel que $e = \alpha(f_1)$; comme

$$\beta(F_1) \subset \alpha(\mathcal{B}'_1) = \overline{(\alpha(F'_1))}_{\beta(F)},$$

il existe une sous-classe A' de F'_1 telle que $\beta(f_1) = \bigcup^{\beta(f_1)} \alpha(A')$; on peut supposer A' saturée par induction dans $(F', <)$; si $a' \in A'$, on a :

$$\alpha(a')f_1 \in F_1 \quad \text{et} \quad a'.(\alpha(a')f_1) \in F'_1.F_1.$$

D'après la condition (P), $f_1 = \bigcup^{f} \alpha(A')f_1$ par suite :

$$e = \bigcup_{a' \in A'}^{\alpha(f_1)} \alpha(a' . (\alpha(a')f_1)) \in \overline{(\alpha(F'_1 . F_1))}_{\alpha(F)}.$$

Donc $\overline{(\alpha(F'_1 \bullet F_1))}_{\alpha(F)} = \alpha(\mathcal{B}_1)$. De même

$$\overline{(\beta(F'_1 \bullet F_1))}_{\beta(F')} = \overline{(\beta(F'_1))}_{\beta(F')},$$

de sorte que l'on a $S'.S \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Donc $\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une sous-catégorie de $\mathcal{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ et $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est une catégorie ordonnée. Si de plus on a $\xi = (\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}) \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}_0$ et $\xi < \alpha(S)$, soit $\mathcal{B}'_2 = E'_2 . \mathcal{B}'_1 . E'_2$, où $E'_2 = \overline{(\beta(F . \mathcal{B}_2))}_{\beta(F)}$. Alors $(\mathcal{B}'_2, \mathcal{B}_2, \mathcal{F})$, est le pseudoproduit $S\xi$ dans $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$; dualement, il existe un pseudoproduit $\xi'S$ tel que $\beta(\xi'S) = \xi'$, si $\xi' < \beta(S)$. Si $S'' < S'.S$ et $S'' = (\mathcal{B}''_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F}'') \in \mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, on a :

$$S'' = (\mathcal{B}''_3, \mathcal{B}'_3, \mathcal{F}') . (\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_3, \mathcal{F}),$$

où

$$\mathcal{B}'_3 = E'_3 . \mathcal{B}' . E'_3, \ E'_3 = \overline{(E_3)}_{\beta(F)^>},$$

E_3 étant la classe intersection de $\beta(F . \mathcal{B}_3)$ avec $\alpha(\mathcal{B}''_3 . F')$. Donc $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est régulière.

— Supposons $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F}) < S$ dans $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$, pour tout $i \in I$, où I est une classe donnée. Soit E la sous-classe saturée par induction de $\mathcal{B}_0$ réunion des $\alpha(F_i)$, où $F_i = \mathcal{B}'_i . F . \mathcal{B}_i$, et $E_I = \overline{(E)}_{\alpha(F)}$; soit de même $E' = \cup\, \beta(F_i)$ et $E'_I = \overline{(E')}_{\beta(F)}$. Pour tout $i \in I$, on a : $\alpha(\mathcal{B}_i) \subset E_I$. Posons :

$$\mathcal{B}_I = E_I . \mathcal{B} . E_I \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}'_I = E'_I . \mathcal{B}' . E'_I.$$

Alors $(\mathcal{B}'_I, \mathcal{B}_I, \mathcal{F})$ est une (P)-superfusée, qui est un agrégat de la famille $(\mathcal{B}'_i, \mathcal{B}_i, \mathcal{F})_{i \in I}$ dans $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Ceci prouve que $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière.

Corollaire. — *La classe* $\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *des* (P)-*superfusées* $(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mu(f))$, *où* $f \in \mathcal{C}$ *et* $\mu(f) = (\beta(f)^>, f^>, \alpha(f)^>)$, *est une sous-catégorie saturée par induction de* $(\mathcal{J}'(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ *et par suite* $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ *est une catégorie quasi-inductive régulière.*

Proposition 5. — *L'application* τ' :

$$(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mu(f)) \to (\mathcal{B}'_1 . f^> . \mathcal{B}_1, f)$$

est une bijection de $\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ (corollaire th. 2) *sur la classe* $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *des couples* (F, f), *où* F *est une sous-classe de* $\mathcal{C}$ *majorée par* f, *saturée par induction et agrégation dans* $(f^{>}, <)$.

Démonstration. — $\tau'(\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}_1, \mu(f))$ vérifie les conditions indiquées d'après la proposition 4. Inversement, soit (F, f) un couple vérifiant ces conditions et montrons que $(F, \mu(f))$ vérifie la condition 3 de la proposition 4, d'où résultera la proposition 5, les conditions 1 et 2 de la proposition 4 étant évidemment satisfaites. Pour cela, montrons que les relations

$$f' < f, \qquad \alpha(f') \in \alpha(F) \qquad \text{et} \qquad \beta(f') \in \beta(F)$$

entraînent $f' \in F$. Il existe $f_1 \in F$ tel que $\alpha(f_1) = \alpha(f')$ et il existe $f_2 \in F$ tel que $\beta(f_2) = \beta(f')$. Comme $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est sous-préinductive, il existe $f'_1 = f_1 \cap f'$ et $f'_2 = f_2 \cap f'$ et on a :

$$f'_1 \in F, \quad f'_2 \in F, \quad \alpha(f'_1) = \alpha(f_1) \cap \alpha(f') = \alpha(f')$$

et

$$\beta(f'_2) = \beta(f'),$$

d'où $f' = f'_1 \overset{f}{\bigcup} f'_2$, et par suite $f' \in F$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 3. — τ' (prop. 5) *définit un isomorphisme de* $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ *sur la catégorie sous-inductive* $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ *dont la loi de composition est définie par :*

$$(F', f').(F, f) = (\overline{(F'.F)}_{(f'.f)^{>}}, f'.f) \ \textit{si, et seulement si,}$$

$$\alpha(f') = \beta(f) = e \qquad \textit{et} \qquad \overline{(\alpha(F'))}_{e^{>}} = \overline{(\beta(F))}_{e^{>}},$$

et la relation d'ordre par :

$$(F', f') < (F, f) \qquad \textit{si, et seulement si,} \qquad f' = f \qquad \textit{et} \qquad F' \subset F.$$

Démonstration. — D'après le corollaire du théorème 2, la catégorie $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ image de $\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$ par τ' a pour loi de composition :

$$(F', f').(F, f) = (\mathcal{B}'.f'^{>}.f^{>}.\mathcal{B}, f'.f) \text{ si, et seulement si,}$$

$$\alpha(f') = \beta(f) = e \qquad \text{et} \qquad \overline{(\alpha(F'))}_{e^{>}} = \overline{(\beta(F))}_{e^{>}},$$

où $\mathcal{B}$ (resp. où $\mathcal{B}'$) désigne la sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^{>}$

(resp. de $\beta(f')^{>}$) ayant $\overline{(\alpha(\mathrm{F}))}_{\alpha(f)^{>}}$ (resp. $\overline{(\beta(\mathrm{F}'))}_{\beta(f')^{>}}$) pour classe de ses unités. Posons $f'' = f'.f$. Puisque $(\mathcal{B}', \mathcal{B}, \mu(f''))$ est une (P)-superfusée en vertu du théorème 2, $\mathrm{F}'' = \mathcal{B}'.f'^{>}.f^{>}.\mathcal{B}$ est une sous-classe saturée par induction dans $(\mathcal{C}, <)$ et on a $\overline{(\mathrm{F}'.\mathrm{F})}_{f''^{>}} \subset \mathrm{F}''$. Inversement, soit $h \in \mathrm{F}''$; il existe une sous-classe E de $\alpha(\mathrm{F})$ telle que $\alpha(h) = \bigcup^{\alpha(f)} \mathrm{E}$ et, d'après la démonstration du théorème 2, pour tout $e \in \mathrm{E}$ il existe une sous-classe K_e de $\mathrm{F}'.\mathrm{F}$ telle que $e = \bigcup^{e} \alpha(\mathrm{K}_e)$. De même il existe une sous-classe E' de $\beta(\mathrm{F}')$ telle que $\beta(h) = \bigcup^{\beta(f')} \mathrm{E}'$ et, pour tout $e' \in \mathrm{E}'$, il existe une sous-classe ${}_{e'}\mathrm{K}$ de $\mathrm{F}'.\mathrm{F}$ telle que $e' = \bigcup^{e'} \beta({}_{e'}\mathrm{K})$. Si k est un élément de K_e (resp. de ${}_{e'}\mathrm{K}$), on a :

$$\alpha(k) = \alpha(h \cap k) \qquad (\text{resp. } \beta(k) = \beta(h \cap k)),$$

$k \cap h \in \mathrm{F}'.\mathrm{F}$. Par suite on peut supposer $\mathrm{K}_e < h$ et ${}_{e'}\mathrm{K} < h$. Il en résulte que h est le $(f'.f)$-agrégat de la classe réunion des classes K_e et ${}_{e'}\mathrm{K}$, où $e \in \mathrm{E}$ et $e' \in \mathrm{E}'$. Donc $h \in \overline{(\mathrm{F}'.\mathrm{F})}_{f''^{>}}$ et $\mathrm{F}'' = \overline{(\mathrm{F}'.\mathrm{F})}_{f''^{>}}$. Ceci prouve que l'on a :

$$(\mathrm{F}', f').(\mathrm{F}, f) = (\overline{(\mathrm{F}'.\mathrm{F})}_{f''^{>}}, f'').$$

Nous désignerons par α et β les applications source et but dans $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}$; on a : $\alpha(\mathrm{F}, f) = (\mathcal{B}, \alpha(f))$, où $\mathcal{B}$ est la sous-catégorie pleine de $\alpha(f)^{>}$ ayant $\overline{(\alpha(\mathrm{F}))}_{\alpha(f)^{>}}$ pour classe de ses unités.

— Soient $(\mathrm{F}, f) \in \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $(\mathrm{F}', f') \in \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Si

$$\tau'^{-1}(\mathrm{F}', f') < \tau'^{-1}(\mathrm{F}, f).$$

on a $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ et $f' = f$. Inversement, supposons $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ et $f' = f$. Comme F et F′ sont saturées par induction dans $(f^{>}, <)$ et que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est régulière, $\alpha(\mathrm{F}')$, et par suite $\overline{(\alpha(\mathrm{F}'))}_{\alpha(f)^{>}}$, est saturé par induction dans $(\alpha(f)^{>}, <)$; de même $\overline{(\beta(\mathrm{F}'))}_{\beta(f)^{>}}$ est saturé par induction dans $(\beta(f)^{>}, <)$. Par conséquent $\tau'^{-1}(\mathrm{F}', f') < \tau'^{-1}(\mathrm{F}, f)$ dans $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Ceci montre que la relation d'ordre indiquée est l'image de la relation d'ordre de $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$. Comme $(\mathcal{J}''(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière (corollaire th. 2), il en résulte que

$(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est une catégorie quasi-inductive régulière isomorphe. Pour montrer qu'elle est sous-inductive, il suffit de prouver qu'elle est aussi sous-préinductive.

— Soient $(F_1, f) \in \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $(F_2, f) \in \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Désignons par $F_1 \cap F_2$ la classe intersection de F_1 et F_2. Soit C une sous-classe de $F_1 \cap F_2$ ayant un f-agrégat f'. Comme $C \subset F_1$, on a $f' \in F_1$; de même $f' \in F_2$, d'où $\overline{(F_1 \cap F_2)}_{f>} = F_1 \cap F_2$ et $(F_1 \cap F_2, f)$ est l'intersection de (F_1, f) et de (F_2, f). Montrons que l'on a :

$$\alpha(F_1 \cap F_2, f) = \alpha(F_1, f) \cap \alpha(F_2, f).$$

Soit $e \in \alpha(F_1)$ et $e \in \alpha(F_2)$. Il existe $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$ tels que $\alpha(f_1) = \alpha(f_2) = e$; puisque $f_1 < f$ et $f_2 < f$ et que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-prélocale, on a $\alpha(f_1 \cap f_2) = e$ et

$$f_1 \cap f_2 \in F_1 \cap F_2.$$

Soit

$$e' \in (\overline{\alpha(F_1)})_{\alpha(f)>} \cap (\overline{\alpha(F_2)})_{\alpha(f)>}.$$

Il existe des sous-classes C_1 et C_2 de F_1 et F_2 resp. telles que :

$$e' = \bigcup^{e'} \alpha(C_1) \qquad \text{et} \qquad e' = \bigcup^{e'} \alpha(C_2).$$

D'après l'axiome de distributivité, e' est aussi un sous-agrégat de la classe formée des $c_1 \cap c_2$, où $c_1 \in \alpha(C_1)$ et $c_2 \in \alpha(C_2)$. Comme $c_1 \cap c_2 \in \alpha(F_1) \cap \alpha(F_2)$ on trouve $e' \in (\overline{\alpha(F_1 \cap F_2)})_{\alpha(f)>}$; par suite α définit une application sous-préinductive [1]. Pour une raison analogue, β définit une application sous-préinductive, de sorte que $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est une catégorie sous-inductive régulière.

Théorème 4. — $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ *admet une catégorie sous-inductive régulière* $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ *pour quotient* [2] *relativement à la relation d'équivalence* ν : $(F, f) \sim (F, f')$ *si, et seulement si, il existe* $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ *tel que :*

$$\tilde{f} < f, \qquad \tilde{f} < f' \qquad \text{et} \qquad F < \tilde{f}.$$

De plus $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ *est une catégorie sous-locale admettant une sous-catégorie régulière isomorphe à* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Démonstration. — ν est une relation symétrique et réflexive. Supposons :

$$(\mathrm{F}, f') \sim (\mathrm{F}, f) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{F}, f) \sim (\mathrm{F}, \bar{f}').$$

Il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ et $\tilde{f}' \in \mathcal{C}$ tels que :

$$\tilde{f} < f, \quad \tilde{f} < f', \quad \mathrm{F} < \tilde{f}; \quad \tilde{f}' < f,$$
$$\tilde{f}' < \bar{f}' \quad \text{et} \quad \mathrm{F} < \tilde{f}',$$

de sorte que l'on a :

$$f'' = \tilde{f}' \cap \tilde{f} < f', \qquad f'' < \bar{f}' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F} < f'',$$

d'où $(\mathrm{F}, f') \sim (\mathrm{F}, \bar{f}')$. Ainsi ν est une relation d'équivalence. De plus on a : $(\overline{\mathrm{F}})_{\tilde{f}>} = (\overline{\mathrm{F}})_{f>} = \mathrm{F}$, c'est-à-dire $(\mathrm{F}, \tilde{f}) \subset \overline{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^\cdot, <)$, d'après la proposition 5.

— ν est compatible avec α et β. Si les composés :

$$(\mathrm{F}', f').(\mathrm{F}, f) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{F}', \bar{f}').(\mathrm{F}, \bar{f})$$

sont définis dans $\overline{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$, et si on a :

$$(\mathrm{F}, f) \sim (\mathrm{F}, \bar{f}) \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{F}', f') \sim (\mathrm{F}', \bar{f}'),$$

soient $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ et $\tilde{f}' \in \mathcal{C}$ tels que :

$$\tilde{f} < f, \quad \tilde{f} < \bar{f}, \quad \mathrm{F} < \tilde{f} \quad \text{et} \quad \tilde{f}' < f', \quad \tilde{f}' < \bar{f}', \quad \mathrm{F}' < \tilde{f}'.$$

Posons $e = \alpha(\tilde{f}') \cap \beta(\tilde{f})$ et $\mathrm{F}' \bullet \mathrm{F} = \overline{(\overline{\mathrm{F}'.\mathrm{F}})_{(f'.f)>}}$. On trouve

$$(\mathrm{F}' \bullet \mathrm{F}, f'.f) \sim (\mathrm{F}' \bullet \mathrm{F}, (f'e).(ef)) \sim (\mathrm{F}' \bullet \mathrm{F}, \bar{f}'.\bar{f}).$$

Donc ν est compatible sur $\mathfrak{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$.

— D'après la proposition 21 [2], il existe un graphe multiplicatif quotient [2] de $\overline{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ par ν, dont nous désignerons la loi de composition par $\bullet$, les applications source et but par $\alpha^\bullet$ et $\beta^\bullet$ respectivement. Soit $\bar{\nu}$ l'homomorphisme de $\overline{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\cdot$ sur $\mathrm{J}(\mathcal{C}^\cdot, <)^\bullet$ défini par : $(\mathrm{F}, f) \to (\mathrm{F}, f)$ mod ν. Supposons $(\mathrm{F}', f') \in \overline{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^\cdot, <)$, $(\mathrm{F}, f) \in \overline{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^\cdot, <)$ et $\alpha^\bullet(\bar{\nu}(\mathrm{F}', f')) = \beta^\bullet(\bar{\nu}(\mathrm{F}, f))$, c'est-à-dire $\bar{\nu}(\alpha(\mathrm{F}', f')) = \bar{\nu}(\beta(\mathrm{F}, f))$. Cette condition entraîne

$$\mathrm{E} = \overline{(\alpha(\mathrm{F}'))_{\alpha(f')>}} = \overline{(\beta(\mathrm{F}))_{\beta(f)>}}$$

et il existe $e \in \mathcal{C}_0^{\boldsymbol{\cdot}}$ tel que :

$$e < \alpha(f'), \qquad e < \beta(f) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E} < e.$$

Il en résulte :

$$(\mathrm{F}', f'e) \sim (\mathrm{F}', f') \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{F}, ef) \sim (\mathrm{F}, f).$$

Le composé $\mathrm{S} = (\mathrm{F}', f'e).(\mathrm{F}, ef)$ est défini dans $\bar{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\boldsymbol{\cdot}}$, de sorte que le composé $\bar{\nu}(\mathrm{F}', f') \bullet \bar{\nu}(\mathrm{F}, f)$ est défini dans $\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\bullet}$ et égal à $\bar{\nu}(\mathrm{S})$. Si de plus on a $(\mathrm{F}'', f'') \in \bar{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$ et

$$\alpha(\mathrm{F}'', f'') \sim \beta(\mathrm{F}', f'),$$

on obtient :

$$\bar{\nu}(\mathrm{F}'', f'') \bullet \bar{\nu}(\mathrm{S}) = (\nu(\mathrm{F}'', f'') \bullet \bar{\nu}(\mathrm{F}', f')) \bullet \bar{\nu}(\mathrm{F}, f).$$

Donc $\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\bullet}$ est une catégorie, qui est la catégorie quotient strict de $\bar{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\boldsymbol{\cdot}}$ par ν.

— Considérons sur $\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$ la relation :

N < N′ si, et seulement si, il existe $(\mathrm{F}, f) \in \mathrm{N}$ et $(\mathrm{F}', f) \in \mathrm{N}$ tels que $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}'$.

Cette relation est équivalente à la relation :

N < N′ si, et seulement si, il existe $(\mathrm{F}, f) \in \mathrm{N}$, $(\mathrm{F}', f') \in \mathrm{N}'$ et $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ tels que $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}'$, $\tilde{f} < f$, $\tilde{f} < f'$ et $\mathrm{F}' < \tilde{f}$,

puisque ces dernières conditions entraînent $(\mathrm{F}, \tilde{f}) \in \mathrm{N}$, $(\mathrm{F}', \tilde{f}) \in \mathrm{N}'$ et $(\mathrm{F}, f') \in \mathrm{N}$. Il s'ensuit que $\mathrm{N} < \mathrm{N}'$ est une relation d'ordre sur $\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)$. Supposons $\mathrm{N} < \mathrm{N}' = \bar{\nu}(\mathrm{F}', f')$. Il existe $(\mathrm{F}, f) \in \mathrm{N}$ et $(\mathrm{F}', f) \in \mathrm{N}'$ et on a $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}'$; il existe aussi $f'' \in \mathcal{C}$ tel que:

$$f'' < f', \qquad f'' < f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}' < f''.$$

On en déduit $(\mathrm{F}, f'') \in \mathrm{N}$ et $(\mathrm{F}', f'') \in \mathrm{N}'$, ce qui a pour conséquence $(\mathrm{F}, f') \in \mathrm{N}$. Ceci prouve :

$$((\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <), \nu, (\bar{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)) \in \tilde{\Omega}''$$

(voir [1]). Donc ν vérifie l'axiome (q^s) (prop. 30 [2]) et, en vertu de la proposition 30 [2], $(\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$ est une classe sous-inductive quotient de $(\bar{\mathfrak{J}}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <), <)$. On en conclut, en utilisant le théorème 23 [2], que $(\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\boldsymbol{\cdot}}, <)^{\bullet}, <)$ est une catégorie sous-inductive.

— Soit $N = \bar{\nu}(F, f)$; si $(F_1, f) < (F, f)$ et $(F_2, f) < (F, f)$ dans $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$, et si $\bar{\nu}(F_1, f) = \bar{\nu}(F_2, f)$, on a $F_1 = F_2$, ce qui signifie que la restriction de $\bar{\nu}$ à la classe des minorants de (F, f) est une bijection sur la classe des minorants de N dans

$$(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <).$$

Il en résulte que, si $A \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}_0$ et $A < \alpha^{\bullet}(N)$, il existe

$$(\mathcal{B}, \alpha(f)) \in A$$

tel que $(\mathcal{B}, \alpha(f)) < \alpha(F, f)$; alors $\bar{\nu}((F, f)(\mathcal{B}, \alpha(f)))$ est le pseudoproduit de N et de A dans $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ et $\alpha^{\bullet}(NA) = A$. De même si $A' < \beta^{\bullet}(N)$, il existe $A'N$ et on a $\beta^{\bullet}(A'N) = A'$. Enfin, si $N' \bullet N$ est défini et si $N'' < N' \bullet N$, il existe $(F', f') \in N'$ et $(F, f) \in N$ tels que $(F', f').(F, f)$ soit défini et il existe $(F'', f'') \in N''$ tel que :

$$(F'', f'') < (F', f').(F, f),$$

d'après ce qui précède. Puisque $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$ est régulière, on a :

$$(F'', f'') = (F'_1, f').(F_1, f),$$

où

$$F'_1 \subset F' \qquad \text{et} \qquad F_1 \subset F;$$

d'où :

$$N'' = N'_1 \bullet N_1, \qquad N'_1 = \bar{\nu}(F'_1, f') < N' \qquad \text{et} \qquad N_1 = \bar{\nu}(F_1, f) < N.$$

Ceci montre que $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ est une catégorie sous-inductive régulière quotient de $(\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\cdot}, <)$.

— L'application $\theta : f \to \bar{\nu}\ (f^{>}, f)$ identifie $\mathcal{C}^{\cdot}$ à une sous-catégorie régulière de $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$.

— Supposons $K_i = \bar{\nu}(F_i, f) \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, où $i \in I$. Puisque la classe des K_i, où $i \in I$, est majorée par $\theta(f)$ dans $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <), <)$, il existe $K = \bigsqcup_{i \in I}^{\theta(f)} K_i = \bar{\nu}(F, f)$, où $F = (\overline{H})_{f^{>}}$, en désignant par H la classe réunion des F_i. Soit $K' = \bar{\nu}(F', f') \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ tel que $K \cap K' = \bar{\nu}(G, \tilde{f})$ soit défini. On a :

$$(G, f) \sim (G, \tilde{f}) \sim (G, f') \qquad \text{et} \qquad G \subset F \cap F'.$$

Si C est une sous-classe de $F \cap F'$ admettant un sous-agrégat g, les relations $g \in (\overline{F'})_{f'>} = F'$ et $g \in (\overline{F})_{f>} = F$ entraînent $g \in F \cap F'$, d'où :

$$(\overline{F \cap F'})_{f>} = F \cap F' \qquad \text{et} \qquad G = F \cap F'.$$

De plus, pour tout $i \in I$, $K_i \cap K' = \bar{\nu}(F_i \cap F', f)$ est défini et il existe :

$$K'' = \bar{\nu}(F'', f) = \bigcup_{i \in I}^{\theta(f')} K_i \cap K'.$$

Si G' désigne la classe réunion des $F_i \cap F'$, où $i \in I$, on a :

$$F'' = (\overline{G'})_{f>} \subset F \cap F'.$$

Par ailleurs, soit $g' \in F \cap F'$. Il existe une sous-classe C' de H telle que $g' = \bigcup^{g'} C'$; pour tout $c' \in C'$, il existe $i \in I$ tel que $c' \in F_i \cap F' \subset G'$; donc $g' \in F''$ et $F \cap F' = F''$. Par conséquent : $K'' = K \cap K'$ et $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ est une catégorie sous-locale.

Corollaire. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie prélocale,*

$$(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$$

est une catégorie locale, isomorphe à la catégorie locale $(\overline{J}^{\bullet}, <)$, *où* $\overline{J}$ *est la classe des sous-classes de* $\mathcal{C}$ *qui sont majorées, saturées par induction et par agrégation dans* $(\mathcal{C}, <)$, *munie de la loi de composition :*

$$(F', F) \to (\overline{F'.F})_{\mathcal{C}} \quad \textit{si, et seulement si,} \quad (\overline{\alpha(F')})_{\mathcal{C}} = (\overline{\beta(F)})_{\mathcal{C}},$$

et de la relation d'ordre :

$$F_1 < F \quad \textit{si, et seulement si,} \quad F_1 \subset F.$$

Démonstration. — Soit $\nu(F, f) \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$. Si f' est un autre majorant de F, on a $F < f \cap f'$, car $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est prélocale, et

$$(\overline{F})_{f>} = (\overline{F})_{(f \cap f')>} = (\overline{F})_{f'>},$$

d'où

$$(F, f') \sim (F, f).$$

En tenant compte de la proposition 5, on voit que l'application

$$\lambda : \bar{\nu}(F, f) \to F \qquad \text{où} \qquad \bar{\nu}(F, f) \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$$

est une bijection de $J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ sur la classe $\overline{J}$. Comme toute sous-classe C de $J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ majorée par $\lambda^{-1}(F) \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est aussi majorée par $\theta(f)$, où f est un majorant de F dans $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$, $\lambda(C)$ admet pour agrégat l'élément $(\overline{C}')_{\mathcal{C}}$, où C' est la classe réunion des $F \in \lambda(C)$. Le corollaire s'en déduit.

Soit $\mathfrak{I}_l^u$ la catégorie des foncteurs inductifs entre catégories sous-prélocales, c'est-à-dire des foncteurs ordonnés vérifiant la condition U([1], p. 214), $((\Sigma^{\cdot}, <), \varphi, (\mathcal{C}^{\cdot}, <))$, tels que $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $(\Sigma^{\cdot}, <)$ soient des catégories sous-prélocales et que les conditions $f \in \mathcal{C}$, $f' < f$ et $f'' < f$ entraînent :

$$\varphi(f' \cap f'') = \varphi(f') \cap \varphi(f'').$$

Soit $\mathfrak{I}_l^s$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{I}_l^u$ ayant pour objets les catégories sous-locales. Soit $\mathfrak{I}_l$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{I}_l^s$ ayant pour objets les catégories locales.

THÉORÈME 5 *(Théorème de complétion).* — $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ *est une* $\mathfrak{I}_l^s$*-projection de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *dans* $\mathfrak{I}_l^u$ (voir [2]).

Démonstration. — Montrons que

$$\bar{\theta} = ((J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <), \theta, (\mathcal{C}^{\cdot}, <))$$

est un $\mathfrak{I}_l^s$-projecteur dans $\mathfrak{I}_l^u$. Pour cela, prouvons d'abord que $\bar{\theta} \in \mathfrak{I}_l^u$. En effet, si C est une sous-classe de $\mathcal{C}$ ayant un sous-agrégat f, la classe $\theta(C)$ admet $\theta(f)$ pour sous-agrégat. Si $f' < f$ et $f'' < f$, on a :

$$\theta(f' \cap f'') = \bar{\nu}((f' \cap f'')^{>}, f' \cap f'') = \theta(f') \cap \theta(f'').$$

donc $\bar{\theta} \in \mathfrak{I}_l^u$.

— Supposons $\Phi = ((\Sigma^{\cdot}, <), \varphi, (\mathcal{C}^{\cdot}, <)) \in \mathfrak{I}_l^u$ et $(\Sigma^{\cdot}, <) \in \mathfrak{I}_l^s$. Soit $\bar{\varphi}$ l'application :

$$\bar{\nu}(F, f) \to \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F), \qquad \text{où} \qquad \bar{\nu}(F, f) \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <).$$

Si $(F, f') \sim (F, f)$ modulo ν, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}$ tel que :

$$\tilde{f} < f', \qquad \tilde{f} < f \qquad \text{et} \qquad (F, \tilde{f}) \sim (F, f).$$

Par suite :

$$\bigsqcup^{\varphi(f)} \varphi(F) = \bigsqcup^{\varphi(\tilde{f})} \varphi(F) = \bigsqcup^{\varphi(f')} \varphi(F),$$

et l'application $\overline{\varphi}$ est bien définie. Montrons que $\overline{\varphi}$ définit un foncteur. En effet, comme Φ est un foncteur inductif, pour toute sous-classe F de $\mathcal{C}$, majorée par $f \in \mathcal{C}$, on a :

$$\bigsqcup^{\bar{f}} \varphi(F) = \bigsqcup^{\bar{f}} \varphi((\overline{F})_{f>}), \qquad \text{où} \qquad \bar{f} = \varphi(f).$$

Soit $N = \bar{\nu}(F, f) \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ et $A = \alpha^{\bullet}(N)$. On a :

$$A = \bar{\nu}(\mathcal{B}, e), \qquad \text{où} \qquad e = \alpha(f),$$
$$\mathcal{B} = E.\, e^{>}.E \qquad \text{et} \qquad E = \overline{(\alpha(F))}_{e>}.$$

Posons :

$$\bar{e} = \varphi(e) \qquad \text{et} \qquad \bar{e}' = \bigsqcup^{\bar{e}} \varphi(E).$$

D'après ce qui précède, on a :

$$\bar{e}' = \bigsqcup^{\bar{e}} \varphi(\alpha(F)) < \bigsqcup^{e} \varphi(\mathcal{B}) < \bar{e}.$$

De la relation :

$$\varphi(g) = \varphi(\beta(g).g.\alpha(g)) = \varphi(\beta(g)).\varphi(g).\varphi(\alpha(g)) < \bar{e}'\bar{e}\bar{e}' = \bar{e}',$$

où $g \in \mathcal{B}$, il résulte $\varphi(\mathcal{B}) < \bar{e}'$. Donc :

$$\bar{e}' = \bigsqcup^{\bar{e}} \varphi(\mathcal{B}) = \overline{\varphi}(A).$$

Comme :

$$\alpha(\overline{\varphi}(N)) = \alpha\left(\bigsqcup^{\varphi(f)} \varphi(F)\right) = \bigsqcup^{\bar{e}} \alpha(\varphi(F)) = \bigsqcup^{\bar{e}} \varphi(\alpha(F)) = \bar{e}',$$

on obtient : $\alpha(\overline{\varphi}(N)) = \overline{\varphi}(\alpha^{\bullet}(N))$. De même

$$\beta(\overline{\varphi}(N)) = \overline{\varphi}(\beta^{\bullet}(N)).$$

Soit $N' \in J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ tel que $\alpha^{\bullet}(N') = \beta^{\bullet}(N)$; on peut supposer qu'il existe $(F', f') \in N'$ tel que $(F', f').(F, f)$ soit défini; posons :

$$\bar{f} = \varphi(f), \qquad \bar{f}' = \varphi(f'), \qquad \bar{f}'' = \varphi(f'.f),$$
$$h = \overline{\varphi}(N), \qquad h' = \overline{\varphi}(N') \qquad \text{et} \qquad h'' = \overline{\varphi}(N' \bullet N).$$

On a :

$$h'' = \bigcup^{\bar{f}''} \varphi(F'.F) < \left(\bigcup^{\bar{f}'} \varphi(F')\right).\left(\bigcup^{\bar{f}} \varphi(F)\right) = h'.h.$$

D'après le début de la démonstration, on trouve :

$$\alpha(h'.\,h) = \alpha(h) = \bar{\varphi}(\alpha^{\bullet}(N)) = \bar{\varphi}(\alpha^{\bullet}(N' \bullet N)) = \alpha(h'')$$

et de même $\beta(h'.\,h) = \beta(h'')$. Il s'ensuit $h'.h = h''$, car $(\Sigma^{\cdot}, <)$ est ordonnée. Par suite $\bar{\varphi}(N' \bullet N) = \bar{\varphi}(N').\bar{\varphi}(N)$ et $\bar{\varphi}$ définit un foncteur.

— Supposons $K_i = \bar{\nu}(F_i, f) < \bar{\nu}(F, f)$, pour tout $i \in I$. Le $\bar{\nu}(F, f)$-agrégat K des K_i est égal à $\bar{\nu}((\bar{F}')_{f>}, f)$, où F' est la classe réunion des F_i, de sorte que :

$$\bar{\varphi}(K) = \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F') = \bigcup_{i \in I}^{\varphi(f)} \left(\bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_i)\right) = \bigcup_{i \in I}^{\bar{\varphi}(K)} \bar{\varphi}(K_i).$$

Enfin, on a :

$$\bar{\varphi}(K_1 \cap K_2) = \bar{\varphi}(\bar{\nu}(F_1 \cap F_2, f)) = \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_1 \cap F_2),$$

d'après la démonstration du théorème 4, et

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) = \left(\bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_1)\right) \cap \left(\bigcup^{\varphi(f)} \varphi(F_2)\right) = \bigcup_{f_i \in F_i}^{\varphi(f)} (\varphi(f_1) \cap \varphi(f_2)),$$

en vertu de l'axiome de distributivité dans $(\Sigma^{\cdot}, <)$. Puisque F_1 et F_2 sont majorés par f et que Φ est un foncteur inductif, on a :

$$\varphi(f_1) \cap \varphi(f_2) = \varphi(f_1 \cap f_2),$$

quels que soient $f_1 \in F_1$ et $f_2 \in F_2$. Par conséquent :

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) < \bar{\varphi}(K_1 \cap K_2)$$

et

$$\bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2) = \bar{\varphi}(K_1 \cap K_2),$$

car $\bar{\varphi}(K_1 \cap K_2) < \bar{\varphi}(K_1) \cap \bar{\varphi}(K_2)$. Ceci démontre que $\bar{\varphi}$ définit un foncteur inductif $\bar{\Phi} = ((\Sigma^{\cdot}, <), \bar{\varphi}, (J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <))$ tel que $\bar{\Phi}.\bar{\theta} = \Phi$.

— Soit $\bar{\Phi}_1$ un autre foncteur inductif de $(J(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ vers $(\Sigma^{\cdot}, <)$ tel que $\bar{\Phi}_1.\bar{\theta} = \Phi$. Soit $K = \bar{\nu}(F, f)$; comme K est le

$\bar{\nu}(\mathrm{F}, f)$-agrégat des éléments $\theta(f_i)$, où $f_i \in \mathrm{F}$, on doit avoir :

$$\bar{\Phi}_1(\mathrm{K}) = \bigcup^{\varphi(f)} \bar{\Phi}_1(\theta(\mathrm{F})) = \bigcup^{\varphi(f)} \varphi(\mathrm{F}) = \bar{\varphi}(\mathrm{K}),$$

ce qui entraîne $\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_1$. Donc $\bar{\theta}$ est un $\mathfrak{J}_l^s$-projecteur [2] et par suite $(\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ est une $\mathfrak{J}_l^s$-projection de $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ dans $\mathfrak{J}_l^u$.

Corollaire 1. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie sous-locale régulière,* $\bar{\theta}$ *est un isomorphisme de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *sur* $(\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$.

Ceci résulte de l'unicité, à un isomorphisme près, d'une $\mathfrak{J}_l^s$-projection (voir [2]).

Corollaire 2. — *Si* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ *est une catégorie prélocale régulière,* $(\mathrm{J}(\mathcal{C}^{\cdot}, <)^{\bullet}, <)$ *est une* $\mathfrak{J}_l$*-projection de* $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$.

Ce corollaire résulte du théorème 5 et du corollaire du théorème 4.

Remarque. — Le théorème 5 et le corollaire 2 de ce théorème admettent pour cas particuliers des théorèmes de complétion démontrés dans [2] et [3], dans lesquels $(\mathcal{C}^{\cdot}, <)$ est supposé être un groupoïde sous-local.

BIBLIOGRAPHIE

[0] Complétion des catégories ordonnées, *C.R.A.S.*, 257, 1963, p. 4110; Complétion des catégories sous-prélocales, *C.R.A.S.*, 259, 1964, p. 701.
[1] Catégories ordonnées, holonomie et cohomologie, *Ann. Fourier*, 14, 1 (1964), p. 205-268.
[2] Structures quotient, *Comm. Math. Helv.*, 1963, p. 219-283.
[3] Groupoïdes sous-inductifs, *Ann. Fourier*, 13, 2 (1963), p. 1-60.
[4] Espèces de structures locales, élargissement de catégories, *Séminaire Topologie et Géo. diff.* (Ehresmann), vol. III, 1961, Paris.

Manuscrit reçu en octobre 1964.

Charles Ehresmann,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris (5e).