

FRÉDÉRIC CHAPOTON

**Bigèbres différentielles graduées associées aux  
permutaoèdres, associaèdres et hypercubes**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 50, n° 4 (2000), p. 1127-1153

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_2000\\_\\_50\\_4\\_1127\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_4_1127_0)

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# BIGÈBRES DIFFÉRENTIELLES GRADUÉES ASSOCIÉES AUX PERMUTOÈDRES, ASSOCIAÈDRES ET HYPERCUBES

par Frédéric CHAPOTON

---

## Introduction.

On construit trois bigèbres dans la catégorie monoïdale symétrique des complexes de groupes abéliens. Chacune de ces bigèbres est liée à une famille de polytopes, qui sont respectivement les permutoèdres, les associaèdres ou polytopes de Stasheff et les hypercubes. Considérons d’abord les permutoèdres. Si  $m$  est un entier positif, le permutoèdre  $P_m$  peut être défini comme l’enveloppe convexe des points  $(\sigma(1), \dots, \sigma(m))$  de  $\mathbb{R}^m$ , où  $\sigma$  décrit le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_m$ . Dans la première partie de l’article, on rappelle la description de l’ensemble des faces de  $P_m$  (voir [Ton97]), puis on introduit la notion d’orientation d’une face.

On associe un  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{Perm}_m$  à l’ensemble des faces orientées de  $P_m$  et on note  $\text{Perm}$  la somme directe des  $\mathbb{Z}$ -modules  $\text{Perm}_m$ . On démontre le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — *Il existe sur  $\text{Perm}$  une structure de bigèbre au sens différentiel gradué. En oubliant la différentielle, la sous-bigèbre graduée  $\text{Perm}^0$  formée par les cellules de dimension zéro est l’algèbre de Hopf sur les groupes symétriques introduite par Malvenuto et Reutenauer [MR95].*

Dans la seconde partie de l’article, on introduit le  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{Perm}$ , puis les structures de produit, de coproduit et la différentielle sur  $\text{Perm}$

ainsi que deux involutions  $\flat$  et  $\sharp$ . La démonstration du théorème 1 forme le contenu de la troisième partie. On y prouve aussi les propriétés reliant les deux involutions au produit, au coproduit et à la différentielle.

La quatrième partie est consacrée aux associaèdres, aussi appelés polytopes de Stasheff. On renvoie, pour leur définition, à l'article original [Sta63], ou aux références dans [Ton97]. On convient de noter  $K_{m-1}$  le polytope de Stasheff de dimension  $m - 1$ , en accord avec [Zie95]. Les faces de  $K_{m-1}$  sont en bijection avec les arbres plans à  $m + 1$  feuilles. On associe un  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{Arb}_m$  à l'ensemble des faces orientées de  $K_{m-1}$  et on note  $\text{Arb}$  la somme directe des  $\mathbb{Z}$ -modules  $\text{Arb}_m$ . On définit une surjection  $\psi$  de l'ensemble des faces orientées de  $P_m$  vers l'ensemble des faces orientées de  $K_{m-1}$ , dont on déduit une surjection  $\Psi$  de  $\text{Perm}$  dans  $\text{Arb}$ , et donc une injection  ${}^t\Psi$  de  $\text{Arb}$  dans  $\text{Perm}$ . On identifie  $\text{Arb}$  à son image par  ${}^t\Psi$ ; on obtient alors le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — *Arb est une sous-bigèbre différentielle graduée de Perm. En oubliant la différentielle, la sous-bigèbre graduée  $\text{Arb}^0$  formée par les cellules de dimension zéro est l'algèbre de Hopf sur les arbres binaires plans introduite par Loday et Ronco [LR98].*

La cinquième partie est consacrée aux hypercubes. Si  $I$  est l'intervalle  $[-1, +1]$ , alors les faces de l'hypercube  $I^{m-1}$  sont en bijection avec les  $(m - 1)$ -uplets d'éléments de  $\{-1, 0, +1\}$ . On associe un  $\mathbb{Z}$ -module  $\text{Cub}_m$  à l'ensemble des faces orientées de  $I^{m-1}$  et on note  $\text{Cub}$  la somme directe des  $\mathbb{Z}$ -modules  $\text{Cub}_m$ . On définit une surjection  $\phi$  de l'ensemble des faces orientées de  $P_m$  vers l'ensemble des faces orientées de  $I^{m-1}$ , dont on déduit une surjection  $\Phi$  de  $\text{Perm}$  dans  $\text{Cub}$ , et donc une injection  ${}^t\Phi$  de  $\text{Cub}$  dans  $\text{Perm}$ . On identifie  $\text{Cub}$  à son image par  ${}^t\Phi$ ; on obtient alors le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.** — *Cub est une sous-bigèbre différentielle graduée de Perm, contenue dans Arb. En oubliant la différentielle, la sous-bigèbre graduée  $\text{Cub}^0$  formée par les cellules de dimension zéro est l'algèbre de Hopf des descentes introduite par Malvenuto et Reutenauer [MR95].*

La démonstration utilise l'involution  $\sharp$  : on montre que  $\text{Cub}$  est, dans  $\text{Perm}$ , l'intersection de  $\text{Arb}$  et de son image par  $\sharp$ .

Il convient ici de remarquer que ces constructions sont analogues à celles de [Cha00]. Plus précisément, on introduit dans [Cha00] trois bigèbres filtrées, dont les trois bigèbres graduées associées ressemblent

beaucoup aux trois bigèbres de cet article. En fait, les formules pour le produit et le coproduit ne diffèrent que par la présence de signes, de même que les injections entre les algèbres. Dans les bigèbres de [Cha00], toutes les constantes de structure dans la base naturelle sont positives.

## 1. Permutoèdres et orientations.

Soit  $m$  un entier strictement positif. Le permutoèdre  $P_m$  est l'enveloppe convexe de l'orbite du point  $(1, 2, \dots, m) \in \mathbb{R}^m$  sous l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_m$  agissant par permutation des coordonnées. C'est un polytope de dimension  $m - 1$ , dont les sommets sont en bijection avec les éléments de  $\mathfrak{S}_m$ . Plus généralement, les faces de  $P_m$  correspondent aux partitions ordonnées de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ . On représente une partition ordonnée de  $m$  en  $p$  parts par une matrice à  $m$  colonnes et  $p$  lignes, à coefficients 0 ou 1, telle que chaque colonne comprenne exactement un coefficient non nul et chaque ligne au moins un coefficient non nul. L'entier  $d = m - p$  est la dimension de la face de  $P_m$  correspondante. Dans le cas  $d = 0$ , on retrouve les permutations sous forme de matrices carrées, qui correspondent aux sommets de  $P_m$ . Voici un exemple, avec  $m = 5$  et  $d = 2$  :

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit  $F$  une face de  $P_m$ . On introduit l'ensemble  $S(F)$  des sous-matrices de la matrice de  $F$  qui sont de la forme suivante :

$$(2) \quad [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1],$$

c'est-à-dire un coefficient 1, puis une suite de zéros, éventuellement vide, puis un coefficient 1. En comptant les coefficients non nuls ligne par ligne puis colonne par colonne, on voit que le cardinal de  $S(F)$  est égal à  $d$ .

On introduit maintenant un autre point de vue. Soit

$$S = \{s_1, \dots, s_{m-1}\}$$

l'ensemble standard de réflexions simples du groupe de Coxeter  $\mathfrak{S}_m$ . On note  $\mathfrak{S}_{m,I}$  le sous-groupe parabolique associé à une partie  $I \subset S$ . Les faces du permutoèdre  $P_m$  sont aussi en bijection avec les paires  $(I, \bar{w})$ , où  $I \subset S$  et  $\bar{w} \in \mathfrak{S}_{m,I} \backslash \mathfrak{S}_m$  est la classe à droite d'un élément  $w$  de  $\mathfrak{S}_m$ .

La correspondance avec la description précédente est définie comme suit : étant donnée une paire  $(I, \bar{w})$ , on choisit un représentant  $w$  de la classe  $\bar{w}$ , que l'on regarde comme une matrice de permutation. On considère la relation d'équivalence sur les lignes engendrée par  $i \simeq i + 1$  si la réflexion  $s_i = (i, i + 1)$  est dans  $I$ . On peut définir une matrice aux lignes indexées par les classes d'équivalence, et contenant la somme des lignes correspondantes de la matrice de permutation. Cette matrice ne dépend que de la classe  $\bar{w}$  et ne contient qu'un élément non nul par colonne. C'est la matrice associée à la face  $(I, \bar{w})$ . Réciproquement, la matrice d'une face  $F$  détermine la paire  $(I, \bar{w})$  comme suit. L'ensemble  $S(F)$  est identifié à un sous-ensemble  $I$  de  $S$  par l'application suivante : on numérote les coefficients non nuls de la matrice de gauche à droite et de haut en bas, chaque élément de  $S(F)$  correspond alors à une paire d'entiers consécutifs entre 1 et  $m$ , à laquelle on associe la réflexion simple correspondante. On associe également à la matrice des représentants de la classe  $\bar{w}$  : on remplace chaque ligne par plusieurs lignes consécutives, en plaçant chaque coefficient non nul sur une ligne différente. On obtient l'unique représentant de longueur minimale, noté  $w_F$ , en plaçant, pour chaque ligne, les coefficients non nuls dans le même ordre de gauche à droite que de haut en bas. Voici le représentant de longueur minimale de l'exemple (1) :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les polytopes  $P_m$  sont simples, c'est-à-dire que pour toute face  $F$  de dimension  $d$  et pour tout sommet  $w$  de  $F$ , il y a exactement  $d$  arêtes de  $F$  qui passent par  $w$ . Pour se donner une orientation de  $F$ , il suffit donc de spécifier un sommet de  $F$  et un ordre modulo les permutations paires sur les arêtes de la face  $F$  issues de ce sommet. On peut sans restriction choisir le sommet  $w_F$ . Les arêtes de  $F$  issues de  $w_F$  sont indexées par les éléments de  $I$ , qui est canoniquement identifié à  $S(F)$ .

On a montré le lemme suivant :

LEMME 1. — *Il existe une correspondance naturelle entre les orientations d'une face  $F$  d'un permutoèdre et les orientations du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base  $S(F)$ .*

On appellera par la suite orientation de la face  $F$  la donnée d'un produit extérieur des vecteurs de base correspondant aux éléments de  $S(F)$ .

## 2. Définitions.

### 2.1. Définition du $\mathbb{Z}$ -module Perm.

On convient que le permutoèdre de rang  $m = 0$  est un point, noté  $\mid$ . On note Perm le  $\mathbb{Z}$ -module libre sur l'ensemble des paires  $(F, \text{or})$ , où  $F$  est une face d'un permutoèdre et «or» une orientation de  $F$ , modulo les relations

$$(F, \text{or}) = -(F, -\text{or}).$$

On considère indifféremment «or» comme un produit extérieur sur les éléments de  $S(F)$  ou sur les éléments de  $I$ . On munit Perm d'une double graduation par le rang  $m$  et la dimension  $d$ , et on note  $\text{Perm}_m^d$  la composante correspondante, qui est non nulle si et seulement si  $0 \leq d \leq m - 1$  ou  $m = d = 0$ .

On remarque que  $\text{Perm}^0$  admet pour base les sommets des permutoèdres, indexés par les éléments des groupes symétriques, pour lesquels il n'y a pas d'orientation à préciser.

### 2.2. Définition du produit.

Soient  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ ,  $(F', \text{or}') \in \text{Perm}_n^e$ , on pose  $p = m - d$ ,  $q = n - e$  et on note  $F \times F'$  la matrice à  $m + n$  colonnes et  $p + q$  lignes contenant  $F$  en haut à gauche,  $F'$  en bas à droite et 0 partout ailleurs. On note  $\text{Sh}(p, q)$  l'ensemble des battages de type  $(p, q)$  dans  $\mathfrak{S}_{p+q}$ . Soit  $\sigma \in \text{Sh}(p, q)$  un battage des lignes de  $F \times F'$ . Comme chaque ligne de  $F$  ou de  $F'$  correspond à une ligne de  $\sigma(F \times F')$ , on peut définir une bijection  $S(F) \sqcup S(F') \simeq S(\sigma(F \times F'))$  en identifiant une sous-matrice incluse dans une ligne de  $F$  ou de  $F'$  avec une sous-matrice de  $\sigma(F \times F')$ . On pose alors

$$(3) \quad (F, \text{or}) * (F', \text{or}') = \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p, q)} (\sigma(F \times F'), \text{or} \wedge \text{or}'),$$

où  $\text{or} \wedge \text{or}'$  est considéré comme une orientation de  $\sigma(F \times F')$  via la bijection définie ci-dessus.

PROPOSITION 1. — *La restriction de ce produit à  $\text{Perm}^0$  coïncide avec le produit défini par Malvenuto et Reutenauer.*

Preuve. — Comme les orientations n'interviennent pas, on obtient le produit comme une somme sur des battages :

$$F * F' = \sum_{\sigma \in \text{Sh}(m, n)} \sigma(F \times F'),$$

qui est bien le produit défini dans [MR95].  $\square$

### 2.3. Définition du coproduit.

Soit  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ , on pose  $p = m - d$ . Si  $0 \leq i \leq p$ , on note  $F_{\leq i}$  (resp.  $F_{> i}$ ) la matrice formée par les  $i$  premières lignes de  $F$  (resp. par les autres lignes) en supprimant les colonnes nulles, où on convient qu'une matrice à zéro ligne est l'élément  $|$  de  $\text{Perm}_0^0$ . Alors on a

$$S(F) = S(F_{\leq i}) \sqcup S(F_{> i}),$$

ce qui permet de considérer  $\text{or}$  comme un produit extérieur sur les éléments de  $S(F_{\leq i}) \sqcup S(F_{> i})$ . On pose

$$(4) \quad \Delta(F, \text{or}) = \sum_{i=0}^p \epsilon(i) (F_{\leq i}, \text{or}_{\leq i}) \otimes (F_{> i}, \text{or}_{> i}),$$

où le signe  $\epsilon(i)$  est celui du battage nécessaire pour réordonner « $\text{or}$ » en mettant à gauche les éléments de  $S(F_{\leq i})$  et à droite les éléments de  $S(F_{> i})$ , c'est-à-dire pour écrire  $\text{or} = \epsilon(i) \text{or}_{\leq i} \wedge \text{or}_{> i}$ .

PROPOSITION 2. — *La restriction de ce coproduit à  $\text{Perm}^0$  coïncide avec le produit défini par Malvenuto et Reutenauer.*

*Preuve.* — Comme les orientations n'interviennent pas, on obtient comme formule pour le coproduit :

$$\Delta(F) = \sum_{i=0}^p F_{\leq i} \otimes F_{> i},$$

qui est bien le coproduit défini dans [MR95]. □

COROLLAIRE 1. — *La sous-bigèbre graduée  $\text{Perm}^0$  obtenue en oubliant la différentielle est l'algèbre de Hopf sur les groupes symétriques définie par Malvenuto et Reutenauer dans [MR95].*

### 2.4. Définition de la différentielle.

On considère ici la différentielle

$$\partial : \text{Perm}_m^d \rightarrow \text{Perm}_m^{d+1},$$

transposée de la différentielle usuelle sur le complexe des cellules orientées d'un polytope; elle augmente la dimension de 1.

Soit  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ , on pose  $p = m - d$ . Soit  $1 \leq i \leq p - 1$ , on note  $D_i(F)$  la matrice obtenue en fusionnant les lignes  $i$  et  $i + 1$  de  $F$ . En numérotant toujours les coefficients non nuls de gauche à droite et de haut en bas, on note  $M(F, i)$  le numéro du dernier coefficient non nul de la ligne  $i$  de  $F$ . On a alors

$$S(D_i(F)) = S(F) \sqcup \{s_{M(F,i)}\}$$

comme parties de  $S$ . On pose

$$(5) \quad \partial(F, \text{or}) = \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{\ell(F) + \ell(D_i(F))} (D_i(F), s_{M(F,i)} \wedge \text{or}),$$

où  $\ell(F) = \ell(w_F)$  est la longueur de  $w_F$  dans le groupe de Coxeter  $(\mathfrak{S}_m, S)$ .

Cette définition de  $\partial$  coïncide avec la définition géométrique :

PROPOSITION 3. —  $(\text{Perm}_m^\bullet, \partial)$  s'identifie au complexe des cochaînes sur les faces du permutoèdre  $P_m$ . En particulier  $\partial$  est de carré nul.

Preuve. — Comparons le dual de  $(\text{Perm}_m^\bullet, \partial)$  au complexe des chaînes sur les faces du permutoèdre  $P_m$ . Il est clair que les faces qui apparaissent dans  $\partial(F, \text{or})$  sont toutes celles qui contiennent  $F$  dans leur bord. Il reste donc à comparer l'orientation du bord d'une face  $F$  induite par l'orientation de  $F$  et celle donnée par les formules ci-dessus. Ceci ne présente pas de difficulté. □

Comme le polytope  $P_m$  est homéomorphe à la boule de dimension  $m - 1$ , il résulte de cette proposition que l'homologie de ce complexe est un  $\mathbb{Z}$ -module libre de rang 1 concentré en dimension 0.

### 2.5. Définition des involutions.

On introduit maintenant deux involutions, dont l'une jouera un rôle dans la preuve du théorème 3 de l'introduction.

Symétrie droite-gauche  $\flat$ . — On note  $F^\flat$  la matrice obtenue en renversant l'ordre des colonnes de  $F$ . Comme parties de  $S$ ,  $S(F)$  et  $S(F^\flat)$  sont égales, donc on peut définir une orientation de  $F^\flat$  par

$$\text{or}^\flat = (-1)^{\ell(F) + \ell(F^\flat)} \text{or}.$$

On définit l'application  $\flat : \text{Perm} \rightarrow \text{Perm}$  par la formule

$$(6) \quad (F, \text{or})^\flat = (F^\flat, \text{or}^\flat).$$

C'est clairement une involution.



*Symétrie haut-bas*  $\sharp$ . — Soit  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ . On note  $F^\sharp$  la matrice obtenue en renversant l'ordre des lignes de  $F$  et  $\text{or}^\sharp$  le produit extérieur obtenu en substituant  $s_{m-i}$  à la place de chaque  $s_i$  dans «or». On définit l'application  $\sharp : \text{Perm} \rightarrow \text{Perm}$  par la formule

$$(7) \quad (F, \text{or})^\sharp = (F^\sharp, \text{or}^\sharp).$$

C'est clairement une involution.

### 3. Démonstration du premier théorème.

On va démontrer le théorème 1 de l'introduction. Si  $F$  est une face d'un permutoèdre, on note  $L(F)$  l'ensemble des lignes de  $F$  contenant au moins un élément de  $S(F)$ , et on l'ordonne de haut en bas. Si  $\ell \in L(F)$ , on désigne par  $\omega_\ell$  le produit extérieur des éléments de  $S(F)$  contenus dans la ligne  $\ell$  placés dans leur ordre de gauche à droite.

#### 3.1. Associativité du produit.

PROPOSITION 4. — Soient  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ ,  $(F', \text{or}') \in \text{Perm}_n^e$  et  $(F'', \text{or}'') \in \text{Perm}_u^f$ . On a

$$(8) \quad [(F, \text{or}) * (F', \text{or}')] * (F'', \text{or}'') = (F, \text{or}) * [(F', \text{or}') * (F'', \text{or}'')].$$

*Preuve.* — En posant  $p = m - d$ ,  $q = n - e$  et  $r = u - f$ , on obtient

$$[(F, \text{or}) * (F', \text{or}')] * (F'', \text{or}'') = \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p, q, r)} (\sigma(F \times F' \times F''), \text{or} \wedge \text{or}' \wedge \text{or}''),$$

où  $\text{or} \wedge \text{or}' \wedge \text{or}''$  est l'orientation de  $\sigma(F \times F' \times F'')$  obtenue par la bijection entre sous-matrices induite par le triple battage  $\sigma$ . On montre sans difficulté que  $(F, \text{or}) * [(F', \text{or}') * (F'', \text{or}'')]$  est égal à la même expression.  $\square$

#### 3.2. Coassociativité du coproduit.

PROPOSITION 5. — On a  $(\Delta \otimes \text{Id})\Delta = (\text{Id} \otimes \Delta)\Delta$ .

*Preuve.* — Soit  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$  et  $p = m - d$ . Quitte à remplacer  $(F, \text{or})$  par  $-(F, \text{or}) = (F, -\text{or})$ , on peut supposer que  $\text{or} = \wedge_{\ell \in L(F)} \omega_\ell$ . Dans ce cas, les signes qui apparaissent dans la formule (4) de définition du coproduit sont positifs et on a donc

$$(\Delta \otimes \text{Id})\Delta(F, \text{or}) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq p} (F_{\leq i}, \text{or}_{\leq i}) \otimes (F_{\leq j, > i}, \text{or}_{\leq j, > i}) \otimes (F_{> j}, \text{or}_{> j}).$$

On montre aisément que  $(\text{Id} \otimes \Delta)\Delta(F, \text{or})$  est égal à la même expression.  $\square$

**3.3. Compatibilité du produit et du coproduit.**

On munit Perm de la volte graduée  $\tau : \text{Perm} \otimes \text{Perm} \rightarrow \text{Perm} \otimes \text{Perm}$ , définie comme suit : si  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$  et  $(F', \text{or}') \in \text{Perm}_n^e$ , alors on pose

$$(9) \quad \tau((F, \text{or}) \otimes (F', \text{or}')) = (-1)^{de}(F', \text{or}') \otimes (F, \text{or}).$$

Le produit  $*$  et le coproduit  $\Delta$  sont compatibles :

PROPOSITION. — On a  $(\Delta \circ *) = (* \otimes *) (\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id}) (\Delta \otimes \Delta)$ .

Preuve. — Soient  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$  et  $(F', \text{or}') \in \text{Perm}_n^e$ , on pose  $p = m - d$  et  $q = n - e$ . On cherche à montrer une formule du type

$$\sum_{i=0}^{p+q} \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p,q)} \dots = \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q \sum_{\tau \in \text{Sh}(j,k)} \sum_{\tau' \in \text{Sh}(p-j,q-k)} \dots$$

On définit une bijection entre les ensembles de sommations de ces deux expressions : à une paire  $(\sigma, i)$ , on associe les entiers

$$j = \sup\{\ell \in [0, p] \mid \sigma(\ell) \leq i\}, \quad k = \sup\{\ell \in [0, q] \mid \sigma(\ell) \leq i\}.$$

Le battage  $\sigma$  définit par restriction des battages  $\tau$  et  $\tau'$ . Réciproquement la donnée de  $j, k, \tau$  et  $\tau'$  permet de reconstruire le battage  $\sigma$  et l'entier  $i = j + k$ . Les paires de matrices correspondant à des indices en relation par cette bijection sont identiques. Il reste à vérifier que les orientations coïncident.

On fixe maintenant une paire  $(i, \sigma)$  et son image  $(j, k, \tau, \tau')$  par cette bijection et on compare les orientations des deux termes correspondants. Comme la formule est bilinéaire, quitte à changer  $F$  ou  $F'$  en leur opposé, on peut supposer que  $F$  est orienté par  $\text{or} = \wedge_{\ell \in L(F)} \omega_\ell$  et  $F'$  par  $\text{or}' = \wedge_{\ell' \in L(F')} \omega_{\ell'}$ . On note

$$L_1 = \{\ell \in L(F) \mid \ell \leq j\}, \quad L_2 = \{\ell \in L(F) \mid \ell > j\},$$

$$L'_1 = \{\ell' \in L(F') \mid \ell' \leq k\}, \quad L'_2 = \{\ell' \in L(F') \mid \ell' > k\}.$$

On note  $N_2$  (resp.  $N'_1$ ) le nombre d'éléments de  $S(F)$  dans  $L_2$  (resp. de  $S(F')$  dans  $L'_1$ ). D'une part, la face  $\sigma(F \times F')$  est orientée par  $\bigwedge_{\ell \in L(F)} \omega_{\sigma(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L(F')} \omega_{\sigma(\ell')}$ , donc le terme correspondant à  $(\sigma, i)$  est orienté par

$$(-1)^{N_2 N'_1} \bigwedge_{\ell \in L_1} \omega_{\sigma(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L'_1} \omega_{\sigma(\ell')} \otimes \bigwedge_{\ell \in L_2} \omega_{\sigma(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L'_2} \omega_{\sigma(\ell')}.$$

D'autre part, le terme correspondant à  $(\tau, \tau', j, k)$  dans  $(\Delta \otimes \Delta)(F \otimes F')$  est orienté par

$$\bigwedge_{\ell \in L_1} \omega_\ell \otimes \bigwedge_{\ell \in L_2} \omega_\ell \otimes \bigwedge_{\ell' \in L'_1} \omega_{\ell'} \otimes \bigwedge_{\ell' \in L'_2} \omega_{\ell'}.$$

Par conséquent, dans  $(\text{Id} \otimes \tau \otimes \text{Id})(\Delta \otimes \Delta)(F \otimes F')$ , ce terme est orienté par

$$(-1)^{N_2 N'_1} \bigwedge_{\ell \in L_1} \omega_\ell \otimes \bigwedge_{\ell' \in L'_1} \omega_{\ell'} \otimes \bigwedge_{\ell \in L_2} \omega_\ell \otimes \bigwedge_{\ell' \in L'_2} \omega_{\ell'}.$$

Donc le terme correspondant à  $(\tau, \tau', j, k)$  est orienté par

$$(-1)^{N_2 N'_1} \bigwedge_{\ell \in L_1} \omega_{\tau(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L'_1} \omega_{\tau(\ell')} \otimes \bigwedge_{\ell \in L_2} \omega_{\tau'(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L'_2} \omega_{\tau'(\ell')}.$$

Via la bijection, on trouve la même orientation que précédemment, ce qui termine la démonstration. □

### 3.4. $\partial$ est une dérivation.

Si  $F \in \text{Perm}_m^d$ , on note  $\dim(F)$  la dimension  $d$  de  $F$ . Pour montrer que  $\partial$  est une dérivation de  $(\text{Perm}, *)$ , on aura besoin du lemme suivant :

LEMME 2. — Soient  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d, 1 \leq i < m-d, (F', \text{or}') \in \text{Perm}_n^e$  et  $1 \leq j < n-e$ . On note  $F_{i,i+1}$  (resp.  $F'_{j,j+1}$ ) la matrice formée par les colonnes non nulles de la sous-matrice des lignes  $i$  et  $i+1$  de  $F$  (resp.  $j$  et  $j+1$  de  $F'$ ). Si  $F_{i,i+1} = F'_{j,j+1}$ , alors on a

$$(-1)^{\ell(F) + \ell(D_i(F))} = (-1)^{\ell(F') + \ell(D_j(F'))}.$$

Preuve. — Si on note  $B(F)$  l'ensemble des matrices  $2 \times 2$  extraites de  $F$  qui sont de la forme

$$(\clubsuit) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

alors  $\ell(F) = \#B(F)$ . De plus  $B(D_i(F))$  contient exactement les éléments de  $B(F)$  qui ne sont pas extraits des deux lignes  $i$  et  $i+1$ . Donc  $\ell(F) - \ell(D_i(F))$  est le nombre de matrices  $2 \times 2$  de la forme  $(\clubsuit)$  extraites des deux lignes  $i$  et  $i+1$ . Ce nombre ne dépend que des colonnes non nulles dans la matrice formée par les lignes  $i$  et  $i+1$ , ce qui démontre le lemme. □

PROPOSITION 7. — Si  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$  et  $(F', \text{or}') \in \text{Perm}_n^e$ , alors on a

$$(10) \quad \partial((F, \text{or}) * (F', \text{or}')) = \partial(F, \text{or}) * (F', \text{or}') + (-1)^d(F, \text{or}) * \partial(F', \text{or}').$$

Preuve. — On pose  $p = m - d$  et  $q = n - e$ . Comme la formule à prouver est invariante par changement d'orientation, on peut supposer que  $\text{or} = \wedge_{\ell \in L(F)} \omega_\ell$  et  $\text{or}' = \wedge_{\ell' \in L(F')} \omega_{\ell'}$ . Par définition du produit, on a alors

$$(F, \text{or}) * (F', \text{or}') = \sum_{\sigma} (\sigma(F \times F'), \text{or}(\sigma)),$$

où  $\text{or}(\sigma) = \wedge_{\ell \in L(F)} \omega_{\sigma(\ell)} \wedge \wedge_{\ell' \in L(F')} \omega_{\sigma(\ell')}$ . Par conséquent, on a

$$(11) \quad \begin{aligned} \partial((F, \text{or}) * (F', \text{or}')) \\ = \sum_{i=1}^{p+q-1} \sum_{\sigma} \Xi_{\sigma}(i) (D_i(\sigma(F \times F')), s_{M(\sigma(F \times F'), i)} \wedge \text{or}(\sigma)), \end{aligned}$$

où  $\Xi_{\sigma}(i) = (-1)^{\ell(\sigma(F \times F')) + \ell(D_i(\sigma(F \times F')))}$ . On décompose la somme (11) selon les quatre cas suivants :

- 1)  $\sigma^{-1}(i) \leq p$  et  $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$ ;
- 2)  $\sigma^{-1}(i) > p$  et  $\sigma^{-1}(i+1) > p$ ;
- 3)  $\sigma^{-1}(i) > p$  et  $\sigma^{-1}(i+1) \leq p$ ;
- 4)  $\sigma^{-1}(i) \leq p$  et  $\sigma^{-1}(i+1) > p$ .

Considérons le cas 1). Comme  $\sigma$  est un battage, si on pose  $j = \sigma^{-1}(i)$  alors on a  $j + 1 = \sigma^{-1}(i + 1)$ . Soit  $\sigma'$  le  $(p - 1, q)$ -battage obtenu à partir de  $\sigma$  par fusion des lignes  $j$  et  $j + 1$  d'une part et des lignes  $i$  et  $i + 1$  d'autre part. Réciproquement la paire  $(\sigma', j)$  détermine  $\sigma$  et  $i$ , et on a

$$D_i(\sigma(F \times F')) = \sigma'(D_j(F) \times F').$$

Par le lemme 2, on a

$$\Xi_{\sigma}(i) = (-1)^{\ell(F) + \ell(D_j(F))},$$

donc ce signe ne dépend que de  $j$ ; on le notera  $\Xi(j)$ . Soit  $N_j = \dim(F_{\leq j})$ , on a

$$s_{M(\sigma(F \times F'), i)} \wedge \text{or}(\sigma) = (-1)^{N_j} \bigwedge_{\ell \in L(D_j(F))} \omega_{\sigma'(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L(F')} \omega_{\sigma'(\ell')}.$$

La somme des termes correspondant au cas 1), indexée par  $(\sigma', j)$ , est donc égale à

$$\sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\sigma'} \Xi(j) \left( \sigma'(D_j(F) \times F'), (-1)^{N_j} \bigwedge_{\ell \in L(D_j(F))} \omega_{\sigma'(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L(F')} \omega_{\sigma'(\ell')} \right).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} (\partial(F, \text{or})) * (F', \text{or}') &= \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{\ell(F) + \ell(D_j(F))} (D_j(F), s_{M(F,j)} \wedge \text{or}) * (F', \text{or}') \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \Xi(j) (D_j(F), (-1)^{N_j} \bigwedge_{\ell \in L(D_j(F))} \omega_{\ell}) * (F', \text{or}') \\ &= \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{\sigma'} \Xi(j) \left( \sigma'(D_j(F) \times F'), (-1)^{N_j} \bigwedge_{\ell \in L(D_j(F))} \omega_{\sigma'(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L(F')} \omega_{\sigma'(\ell')} \right), \end{aligned}$$

ce qui montre que la somme des termes correspondant au cas 1) est égale à  $(\partial(F, \text{or})) * (F', \text{or}')$ .

Considérons le cas 2). Comme  $\sigma$  est un battage, si on pose  $j = \sigma^{-1}(i)$  alors on a  $j+1 = \sigma^{-1}(i+1)$ . Soit  $\sigma'$  le  $(p, q-1)$ -battage obtenu à partir de  $\sigma$  par fusion des lignes  $j$  et  $j+1$  d'une part et des lignes  $i$  et  $i+1$  d'autre part. Réciproquement la paire  $(\sigma', j)$  détermine  $\sigma$  et  $i$ , et on a  $D_i(\sigma(F \times F')) = \sigma'(F \times D_j(F'))$ . Par le lemme 2, on a  $\Xi_{\sigma}(i) = (-1)^{\ell(F') + \ell(D_j(F'))}$ , donc ce signe ne dépend que de  $j$ , on le notera  $\Xi'(j)$ . Soit  $N'_j = \dim(F'_{\leq j})$ , on a  $s_{M(\sigma(F \times F'), i)} \wedge \text{or}(\sigma) = (-1)^{N'_j + d} \bigwedge_{\ell \in L(F)} \omega_{\sigma'(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L(D_j(F'))} \omega_{\sigma'(\ell')}$ . La somme des termes correspondant au cas 2), indexée par  $(\sigma', j)$ , est donc égale à

$$\sum_{j=1}^{q-1} \sum_{\sigma'} \Xi'(j) \left( \sigma'(F \times D_j(F')), (-1)^{N'_j + d} \bigwedge_{\ell \in L(F)} \omega_{\sigma'(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L(D_j(F'))} \omega_{\sigma'(\ell')} \right).$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} (F, \text{or}) * \partial(F', \text{or}') &= \sum_{j=1}^{q-1} (-1)^{\ell(F') + \ell(D_j(F'))} (F, \text{or}) * (D_j(F'), s_{M(F',j)} \wedge \text{or}') \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} \Xi'(j) (F, \text{or}) * (D_j(F'), (-1)^{N'_j} \bigwedge_{\ell \in L(D_j(F'))} \omega_{\ell}) \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} \sum_{\sigma'} \Xi'(j) \left( \sigma'(F \times D_j(F')), (-1)^{N'_j} \bigwedge_{\ell \in L(F)} \omega_{\sigma'(\ell)} \wedge \bigwedge_{\ell' \in L(D_j(F'))} \omega_{\sigma'(\ell')} \right), \end{aligned}$$

ce qui montre que la somme des termes correspondant au cas 2) est égale à  $(-1)^d(F, \text{or}) * \partial(F', \text{or}')$ .

Montrons enfin que la somme totale des termes correspondant aux cas 3) et 4) est nulle. On a une bijection entre les indices du cas 3) et ceux du cas 4) : à toute paire  $(\sigma, i)$  du cas 3) correspond la paire  $(\sigma', i)$  du cas 4) où  $\sigma' = (i, i + 1) \circ \sigma$ . On a alors

$$D_i(\sigma(F \times F')) = D_i(\sigma'(F \times F')).$$

On fixe une paire  $(\sigma, i)$  d'indices du cas 3) et on note  $(\sigma', i)$  la paire correspondante d'indices du cas 4). Montrons que les signes des termes correspondant à  $(\sigma, i)$  et à  $(\sigma', i)$  sont opposés. Soit  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) le nombre de coefficients non nuls dans la ligne  $i$  (resp.  $i + 1$ ) de  $\sigma(F \times F')$ ; on a  $\Xi_\sigma(i) = 1$  et  $\Xi_{\sigma'}(i) = (-1)^{N_1 N_2}$ .

Montrons que  $\text{or}(\sigma) = (-1)^{N_1 N_2 - 1} \text{or}(\sigma')$ . Comme on a

$$(12) \quad \text{or}(\sigma) = s_{M(\sigma(F \times F'), i)} \wedge \Omega_1 \wedge \omega_i \wedge \Omega_2 \wedge \omega_{i+1} \wedge \Omega_3,$$

$$(13) \quad \text{or}(\sigma') = s_{M(\sigma'(F \times F'), i)} \wedge \Omega_1 \wedge \omega'_{i+1} \wedge \Omega_2 \wedge \omega'_i \wedge \Omega_3,$$

et que  $\omega_i$  et  $\omega'_{i+1}$  sont de même degré, ainsi que  $\omega'_i$  et  $\omega_{i+1}$ , il suffit de montrer que

$$(14) \quad s_{M(\sigma(F \times F'), i)} \wedge \omega_i \wedge \omega_{i+1} = (-1)^{N_1 N_2 - 1} s_{M(\sigma'(F \times F'), i)} \wedge \omega'_{i+1} \wedge \omega'_i.$$

Si  $\ell$  désigne la ligne obtenue par fusion des lignes  $i$  et  $i + 1$ , alors on a

$$\omega_i \wedge s_{M(\sigma(F \times F'), i)} \wedge \omega_{i+1} = \omega_\ell = \omega'_i \wedge s_{M(\sigma'(F \times F'), i)} \wedge \omega'_{i+1}.$$

Comme  $\omega_i$  et  $\omega'_{i+1}$  sont de degré  $N_1 - 1$  et  $\omega'_i$  de degré  $N_2 - 1$ , on obtient que

$$\begin{aligned} s_{M(\sigma(F \times F'), i)} \wedge \omega_i \wedge \omega_{i+1} &= (-1)^{N_1 - 1} \omega_\ell \\ &= (-1)^{N_1 + N_2} s_{M(\sigma'(F \times F'), i)} \wedge \omega'_i \wedge \omega'_{i+1} \\ &= (-1)^{N_1 + N_2 + (N_1 - 1)(N_2 - 1)} s_{M(\sigma'(F \times F'), i)} \wedge \omega'_{i+1} \wedge \omega'_i, \end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité (14). Ainsi, on obtient que les termes correspondant à  $(\sigma, i)$  et à  $(\sigma', i)$  diffèrent par le signe  $(-1)^{N_1 + N_2 + (N_1 - 1)(N_2 - 1) + N_1 N_2} = -1$ , ce qui montre que la somme des termes correspondant au cas 3) est opposée à celle des termes correspondant au cas 4). Ceci termine la preuve de la proposition. □

### 3.5. $\partial$ est une codérivation.

PROPOSITION 8. — On a  $\Delta \partial = (\partial \otimes \text{Id} + (-1)^{\dim \text{Id}} \text{Id} \otimes \partial) \Delta$ .

Preuve. — Soit  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ , on pose  $p = m - d$ . Soit  $1 \leq i \leq m - d - 1$ , on note  $\Theta_i(F)$  pour  $(-1)^{\ell(F) + \ell(D_i(F))}$ . Quitte à changer  $F$  en son opposé, on peut supposer que  $\text{or} = \wedge_{\ell \in L(F)} \omega_\ell$ . On a alors

$$\begin{aligned} \Delta \partial(F, \text{or}) &= \Delta \left( \sum_{i=1}^{m-d-1} \Theta_i(F) (D_i(F), s_{M(F,i)} \wedge \text{or}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m-d-1} \sum_{\ell \neq i} \epsilon(\ell) \Theta_i(F) (D_i(F)_{\leq \ell}, (s_{M(F,i)} \wedge \text{or})_{\leq \ell}) \\ &\quad \otimes (D_i(F)_{> \ell}, (s_{M(F,i)} \wedge \text{or})_{> \ell}), \end{aligned}$$

où  $\epsilon(\ell)$  est le signe défini par l'égalité

$$s_{M(F,i)} \wedge \text{or} = \epsilon(\ell) (s_{M(F,i)} \wedge \text{or})_{\leq \ell} \wedge (s_{M(F,i)} \wedge \text{or})_{> \ell}.$$

- Si  $\ell > i$ , alors

$$s_{M(F,i)} \wedge \text{or} = s_{M(F_{\leq \ell}, i)} \wedge \text{or}_{\leq \ell} \wedge \text{or}_{> \ell}$$

et donc  $\epsilon(\ell) = 1$ .

- Si  $\ell < i$ , alors

$$s_{M(F,i)} \wedge \text{or} = (-1)^{\dim(F_{\leq \ell})} \text{or}_{\leq \ell} \wedge s_{M(F_{> \ell}, i)} \wedge \text{or}_{> \ell},$$

d'où  $\epsilon(\ell) = (-1)^{\dim(F_{\leq \ell})}$ .

On obtient donc que

$$\begin{aligned} \Delta \partial(F, \text{or}) &= \sum_{i=1}^{m-d-1} \sum_{\ell > i} \Theta_i(F) (D_i(F_{\leq \ell}), s_{M(F_{\leq \ell}, i)} \wedge \text{or}_{\leq \ell}) \otimes (F_{> \ell}, \text{or}_{> \ell}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m-d-1} \sum_{\ell < i} \Theta_i(F) (-1)^{\dim(F_{\leq \ell})} (F_{\leq \ell}, \text{or}_{\leq \ell}) \\ &\quad \otimes (D_i(F_{> \ell}), s_{M(F_{> \ell}, i)} \wedge \text{or}_{> \ell}). \end{aligned}$$

Par le lemme 2, on a

$$\Theta_i(F) = \begin{cases} (-1)^{\ell(F_{\leq \ell}) + \ell(D_i(F_{\leq \ell}))} & \text{si } \ell > i, \\ (-1)^{\ell(F_{> \ell}) + \ell(D_i(F_{> \ell}))} & \text{si } \ell < i; \end{cases}$$

la proposition en découle. □

Ceci termine la démonstration du théorème 1 de l'introduction.

Les involutions sont compatibles à toutes les structures présentes :

PROPOSITION 9. — *On a les propriétés suivantes, au sens gradué :*

- $\flat$  et  $\sharp$  commutent.
- $\flat$  est un morphisme de complexe, un antimorphisme d'algèbre et un morphisme de cogèbre.
- $\sharp$  est un morphisme de complexe, un morphisme d'algèbre et un antimorphisme de cogèbre.

*Preuve.* — Les démonstrations ne présentent pas de difficultés et sont laissées au lecteur. □

## 4. La bigèbre différentielle des polytopes de Stasheff.

### 4.1. Polytopes de Stasheff et orientations.

Soit  $m$  un entier strictement positif. Comme [Zie95], on note  $K_{m-1}$  le polytope de Stasheff (aussi appelé associaèdre) de dimension  $m - 1$ , dont les sommets sont en bijection avec les arbres binaires plans à  $m + 1$  feuilles. On convient que « arbre plan » signifie arbre plan muni d'un sommet monovalent distingué appelé la racine et dont chaque sommet interne est au moins trivalent. Alors, les faces de  $K_{m-1}$  correspondent aux arbres plans à  $m + 1$  feuilles ; plus précisément, si  $p$  est le nombre de sommets internes, alors  $d = m - p$  est la dimension de la face de  $K_{m-1}$  correspondante. La figure 1 donne un exemple d'arbre plan avec  $m = 5$  et  $d = 1$ .

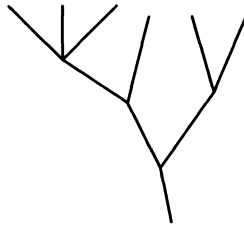


Figure 1. Exemple d'arbre plan

Soit  $T$  un arbre plan à  $m + 1$  feuilles et  $s$  un sommet interne de  $T$ , on appelle arêtes extrêmes de  $s$  la première arête à gauche et la dernière à droite parmi les arêtes entrantes de  $s$ . On introduit l'ensemble  $S(T)$  formé par l'union des arêtes non extrêmes de tous les sommets internes de  $T$ . Par abus, on désigne encore par  $T$  la face de  $K_{m-1}$  associée à l'arbre  $T$ .



On observe que la dimension  $d$  de cette face est égale au cardinal de  $S(T)$ . En orientant les arêtes en direction de la racine, on munit l'ensemble des sommets internes de  $T$  d'un ordre partiel, croissant des feuilles vers la racine.

On sait que les polytopes de Stasheff sont simples. Il suffit donc pour se donner une orientation d'une face  $T$  de  $K_{m-1}$  de spécifier un sommet de la face  $T$  et un ordre modulo les permutations paires sur les arêtes issues de ce sommet et contenues dans la face  $T$ . On peut sans restriction choisir pour chaque face  $T$  le sommet  $T^{\min}$  défini de la façon suivante : on remplace chaque sommet interne de l'arbre  $T$  ayant au moins trois arêtes entrantes par une succession de sommets internes binaires, chacun étant lié à la feuille de gauche du sommet interne suivant, voir la figure 2. Les arêtes de la face  $T$  issues de  $T^{\min}$  sont naturellement indexées par les éléments de  $S(T)$ . On appellera donc orientation de la face  $T$  la donnée d'une orientation du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base  $S(T)$ .

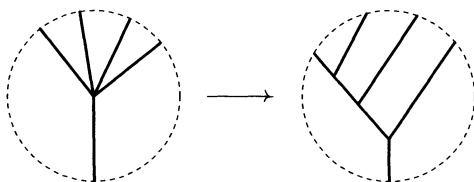


Figure 2. Définition de  $T^{\min}$

#### 4.2. Définition du sous $\mathbb{Z}$ -module Arb.

On convient que le polytope de Stasheff  $K_{-1}$  est un point, noté  $|$ . On note Arb le  $\mathbb{Z}$ -module libre sur l'ensemble des paires  $(T, \text{or})$ , où  $T$  est un arbre plan et or une orientation de  $T$ , modulo les relations  $(T, \text{or}) = -(T, -\text{or})$ . On munit Arb d'une double graduation par le rang  $m$ , qui est le nombre de feuilles moins 1, et la dimension  $d$ , et on note  $\text{Arb}_m^d$  la composante correspondante, qui est non nulle si et seulement si  $0 \leq d \leq m - 1$  ou  $m = d = 0$ .

Soit  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ , on dit que  $F$  est  $\psi$ -dégénérée s'il existe une matrice extraite de  $F$  de la forme

$$(15) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice de l'exemple (1) est  $\psi$ -dégénérée. On va définir une application

surjective  $\Psi : \text{Perm} \rightarrow \text{Arb}$ . On pose d'abord  $\Psi(|) = |$  et  $\Psi(F, \text{or}) = 0$  si  $F$  est  $\psi$ -dégénérée. Il reste à définir  $\Psi(F, \text{or})$  pour  $F$  non  $\psi$ -dégénérée.

On définit d'abord, par récurrence sur le nombre de lignes de  $F$  (supposée non  $\psi$ -dégénérée), un arbre  $\psi(F)$  ayant  $m + 1$  feuilles si  $F$  a  $m$  colonnes. Si  $F$  est la matrice  $[1 \dots 1]$  à  $m$  colonnes, alors  $\psi(F)$  est la corolle à  $m + 1$  feuilles. Soit maintenant  $F$  non  $\psi$ -dégénérée ayant  $m$  colonnes et au moins deux lignes. Soit  $N$  le nombre de coefficients non nuls de la première ligne de  $F$ . Comme  $F$  est non  $\psi$ -dégénérée et que chaque colonne de  $F$  est non nulle, ces coefficients sont placés dans  $N$  colonnes consécutives. On note  $F'$  la matrice obtenue en supprimant la première ligne de  $F$ , puis les  $N$  colonnes nulles. L'emplacement de ces colonnes détermine une séparation verticale de la matrice  $F'$ . En orientant de gauche à droite l'ensemble des séparations possibles et l'ensemble des feuilles de  $\psi(F')$ , ces deux ensembles étant de cardinal  $m - N + 1$ , on peut les identifier par l'unique bijection croissante, on obtient ainsi une feuille  $f$  de  $\psi(F')$ . On définit alors  $\psi(F)$  comme l'arbre obtenu par greffe sur la feuille  $f$  de  $\psi(F')$  d'une corolle à  $N + 1$  feuilles. Ceci termine la récurrence. Comme  $\psi(F')$  a  $m - N + 1$  feuilles,  $\psi(F)$  a bien  $m + 1$  feuilles.

L'application  $\psi$  a les propriétés suivantes. D'abord, on a une bijection  $\theta_F$  entre les sommets internes de  $\psi(F)$  et les lignes de  $F$ . La définition par récurrence de  $\psi(F)$  consiste en effet à greffer une corolle, donc ajouter à  $\psi(F')$  un sommet interne; on pose son image par  $\theta_F$  égale à la première ligne de  $F$ . En supposant déjà définie la bijection  $\theta_{F'}$ , la bijection  $\theta_F$  s'obtient alors en identifiant les autres lignes de  $F$  aux lignes de  $F'$  et les autres sommets internes de  $\psi(F)$  aux sommets internes de  $\psi(F')$ . De plus, pour tout sommet interne  $t$  de  $\psi(F)$ , en orientant de droite à gauche l'ensemble des sous-matrices  $[10 \dots 01]$  de  $\theta_F(t)$  et l'ensemble des arêtes non extrêmes du sommet interne  $t$  de  $\psi(F)$ , qui sont de même cardinal, on peut les identifier par l'unique bijection croissante. Il en résulte que  $\dim(F) = \dim(\psi(F))$  et que l'on peut considérer une orientation de  $F$  comme une orientation de  $\psi(F)$ . On peut donc poser  $\Psi(F, \text{or}) = (\psi(F), \text{or})$ , ce qui définit l'application  $\Psi : \text{Perm} \rightarrow \text{Arb}$  cherchée. On a montré au passage que  $\Psi$  préserve la double graduation de  $\text{Perm}$  et  $\text{Arb}$ .

On va décrire plus précisément les fibres de  $\psi$  et le noyau de  $\Psi$ . On remarque d'abord que si  $\psi(F) = \psi(F') = T$  et si  $t$  est un sommet interne de  $T$ , alors la ligne  $\theta_F(t)$  de  $F$  est identique à la ligne  $\theta_{F'}(t)$  de  $F'$ . Par ailleurs, si  $t'$  est greffé sur  $t$ , alors  $\theta_F(t')$  est en dessus de  $\theta_F(t)$ . On en déduit que les éléments  $F$  de  $\psi^{-1}(T)$  diffèrent seulement par la bijection  $\theta_F$ ,

laquelle doit être croissante pour l'ordre partiel naturel sur les sommets internes de  $T$  et l'ordre de haut en bas sur les lignes de  $F$ . Toutes ces bijections sont liées entre elles par des chaînes de transpositions de deux lignes consécutives qui sont  $\psi$ -admissibles, au sens suivant : il existe une colonne dont le coefficient non nul est en dessous des deux lignes et telle que les coefficients non nuls d'une des deux lignes soient tous à gauche et ceux de l'autre ligne tous à droite de cette colonne. Réciproquement, si  $F$  et  $F'$  diffèrent par une transposition  $\psi$ -admissible, alors  $\psi(F) = \psi(F')$ . On a donc montré la

PROPOSITION. — *Soit  $T$  un arbre plan.*

1) *La fibre  $\psi^{-1}(T)$  est indexée par les ordres totaux sur l'ensemble  $\text{Som}(T)$  des sommets internes de  $T$  qui étendent l'ordre partiel naturel.*

2) *Le noyau de  $\Psi$  est engendré par les éléments  $(F, \text{or})$  où  $F$  est  $\psi$ -dégénérée et par les éléments  $(F, \text{or}) - (F', \text{or})$  où  $F$  et  $F'$  sont non  $\psi$ -dégénérées et diffèrent par une transposition  $\psi$ -admissible.*

En identifiant  $\text{Perm}$  et  $\text{Arb}$  avec leurs duaux respectifs à l'aide de leurs bases naturelles, on considère l'application transposée de  $\Psi$  comme une injection de  $\text{Arb}$  dans  $\text{Perm}$  et l'on identifie désormais  $\text{Arb}$  à son image dans  $\text{Perm}$ .

PROPOSITION. — *La restriction de l'injection de  $\text{Arb}$  dans  $\text{Perm}$  aux 0-cellules coïncide avec l'injection de l'algèbre de Hopf des arbres binaires plans de Loday et Ronco dans l'algèbre de Hopf sur les groupes symétriques de Malvenuto et Reutenauer.*

*Preuve.* — L'orientation ne joue aucun rôle. On vérifie aisément que cette application est bien celle décrite en termes d'arbres à niveau et de permutations dans [LR98].  $\square$

### 4.3. Arb est un sous-complexe.

PROPOSITION 12. — *On a  $\partial(\text{Arb}) \subset \text{Arb}$ .*

*Preuve.* — Soient  $(T, \text{or}) \in \text{Arb}_m^d$  et  $p = m - d$ . On choisit un ordre total quelconque sur l'ensemble  $\text{Som}(T)$  des sommets internes de  $T$ . Quitte à remplacer  $(T, \text{or})$  par  $-(T, \text{or})$ , on peut supposer que  $\text{or} = \wedge_{t \in \text{Som}(T)} \omega_t$ , où le produit est pris dans l'ordre choisi sur  $\text{Som}(T)$  et  $\omega_t$  désigne le produit

extérieur des arêtes non extrêmes du sommet interne  $t$  dans leur ordre de gauche à droite. On a alors

$$(16) \quad (T, \text{or}) = \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} (F, \text{or}) = \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} (F, \wedge_{t \in \text{Som}(T)} \omega_{\theta_F(t)}),$$

et donc

$$(17) \quad \partial(T, \text{or}) = \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} (-1)^{\ell(F) + \ell(D_i(F))} (D_i(F), s_{M(F,i)} \wedge \bigwedge_{t \in \text{Som}(T)} \omega_{\theta_F(t)}).$$

On sépare cette somme selon que l'échange des lignes  $i$  et  $i + 1$  de  $F$  est ou non  $\psi$ -admissible. Dans la somme  $\psi$ -admissible, on regroupe les termes par paires dont les éléments diffèrent par échange des lignes  $i$  et  $i + 1$ . Soient  $i$  un entier et  $(F, F')$  fixés formant une telle paire. On a alors  $D_i(F) = D_i(F')$ , on va montrer que les signes des deux termes d'une paire sont opposés. Quitte à échanger  $F$  et  $F'$ , on peut supposer que les coefficients non nuls de la ligne  $i$  de  $F$  sont à gauche des coefficients non nuls de la ligne  $i + 1$ . Soit  $N_1$  (resp.  $N_2$ ) le nombre de coefficients non nuls dans la ligne  $i$  (resp.  $i + 1$ ) de  $F$ . Alors

$$(-1)^{\ell(F) + \ell(D_i(F))} = 1 \quad \text{et} \quad (-1)^{\ell(F') + \ell(D_i(F'))} = (-1)^{N_1 N_2}.$$

Par ailleurs, les orientations des termes  $F$  et  $F'$  diffèrent par  $(-1)^{N_1 N_2 + 1}$ , par un raisonnement similaire à celui utilisé en 3.5 pour montrer que  $\partial$  est une dérivation, donc les deux termes sont opposés. La somme  $\psi$ -admissible est donc nulle.

La seconde partie de la somme correspond au cas  $(F, i)$  non  $\psi$ -admissible. Notons  $t^1 = \theta_F^{-1}(i)$  et  $t^2 = \theta_F^{-1}(i + 1)$  les deux sommets internes de  $T$  correspondants. Alors  $t^1$  est greffé sur  $t^2$ , on note  $a$  l'arête qui les joint et  $D_a(T)$  l'arbre obtenu par contraction de l'arête  $a$  et fusion des sommets internes  $t^1$  et  $t^2$  en un seul sommet interne  $t'$ . On définit par contraction de  $\theta_F$  une bijection  $\theta_{F'}$  entre les sommets internes de  $D_a(T)$  et les lignes de  $F' = D_i(F)$ . Réciproquement l'arête  $a$  et la donnée d'un élément  $F'$  de la fibre  $\psi^{-1}(D_a(T))$  déterminent  $F$  et l'entier  $i$ . À l'aide du lemme 2, on voit que le signe  $(-1)^{\ell(F) + \ell(F')}$  ne dépend que de l'arête  $a$ ; on le notera  $\mu(a)$ . On peut donc écrire la somme non  $\psi$ -admissible comme

$$(18) \quad \sum_a \sum_{\psi(F') = D_a(T)} \mu(a) (F', s_{M(F,i)} \wedge \bigwedge_{t \in \text{Som}(T)} \omega_{\theta_F(t)}).$$

On fixe maintenant une arête  $a$  de  $T$  et on va montrer que la partie correspondante de la somme précédente est égale à  $\mu(a)(D_a(T), \text{or}_a)$ , pour une certaine orientation  $\text{or}_a$ . Pour cela on peut sans restriction choisir un ordre sur  $\text{Som}(T)$  qui commence par les deux sommets  $t^1$  et  $t^2$  de l'arête  $a$ . Cet ordre induit naturellement un ordre sur  $\text{Som}(D_a(T))$  qui commence par le sommet  $t'$ . Comme  $\omega_{\theta_F(t^1)} \wedge s_{M(F,i)} \wedge \omega_{\theta_F(t^2)} = \omega_{\theta_{F'}(t')}$ , on a

$$s_{M(F,i)} \wedge \bigwedge_{t \in \text{Som}(T)} \omega_{\theta_F(t)} = (-1)^N \bigwedge_{t \in \text{Som}(D_a(T))} \omega_{\theta_{F'}(t)},$$

où  $N$  est le nombre d'arêtes non extrêmes de  $t^1$ . On pose  $\text{or}_a = (-1)^N \bigwedge_{t \in \text{Som}(D_a(T))} \omega_t$ , ce qui donne le résultat voulu et termine la démonstration de la proposition. □

**4.4. Arb est une sous-algèbre.**

Soient  $(T_0, \text{or}_0), \dots, (T_r, \text{or}_r)$  des faces orientées de polytopes de Stasheff. On note  $V(T_0, \dots, T_r)$  la face correspondant à l'arbre obtenu par greffe sur une corolle à  $r + 1$  feuilles des arbres  $T_0, \dots, T_r$ , munie de l'orientation  $\text{or} = \omega_t \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_r$ , où  $\omega_t$  désigne le produit extérieur des arêtes non extrêmes du sommet  $t$  de la corolle et où on identifie les sommets internes des arbres  $T_0, \dots, T_r$  aux sommets internes correspondants de l'arbre greffé.

D'autre part, si  $F_0, \dots, F_r$  sont des faces non orientées de permutodres, on note  $W(F_0, \dots, F_r)$  la matrice définie comme suit : dans la matrice par blocs  $F_0 \times \dots \times F_r$ , on intercale entre chaque paire de blocs successifs une colonne dont le seul coefficient non nul est situé sur une dernière ligne supplémentaire, nulle dans les autres colonnes.

LEMME 3. — Soient  $(T_j, \text{or}_j) \in \text{Arb}_{m_j}^{d_j}$  et  $p_j = m_j - d_j$ , pour  $j = 0, \dots, r$ . Posons  $T = V(T_0, \dots, T_r) \in \text{Arb}_m^d$  et  $p = m - d$ . Alors on a

$$\begin{aligned} (19) \quad & \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} (F, \text{or}) \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p_0, \dots, p_r)} \sum_{F_0, \dots, F_r} ((\sigma \times 1)W(F_0 \times \dots \times F_r), \omega_p \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_r), \end{aligned}$$

où  $F_j$  décrit  $\psi^{-1}(T_j)$  pour  $j = 0, \dots, r$  et  $\sigma$  agit par battage des  $r + 1$  blocs de lignes correspondant aux matrices  $F_0, \dots, F_r$ .

*Preuve.* — La fibre  $\psi^{-1}(T)$  est indexée par les extensions linéaires de l'ordre partiel sur  $\text{Som}(T)$ . Un tel ordre détermine par restriction des extensions linéaires des ordres partiels sur  $\text{Som}(T_j)$  pour  $j = 0, \dots, r$ , ainsi qu'un battage des ensembles  $\text{Som}(T_j)$ . Réciproquement la donnée d'une extension linéaire de l'ordre partiel sur chaque  $\text{Som}(T_j)$  et d'un tel battage déterminent une extension linéaire de l'ordre partiel sur  $\text{Som}(T)$ . En explicitant cette bijection en termes de matrices, on obtient le résultat voulu.  $\square$

PROPOSITION 13. — Arb est une sous-algèbre de Perm.

*Preuve.* — Soient  $(T, \text{or}) \in \text{Arb}_m^d$  et  $(T', \text{or}') \in \text{Arb}_n^e$ . On note  $p = m - d$  et  $q = n - e$ . On va démontrer la proposition par récurrence sur  $p + q$ , qui est le nombre total de sommets internes de  $T$  et  $T'$ . C'est clair si  $p = 0$  ou  $q = 0$ . On peut donc supposer  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$  et, quitte à changer de signe, écrire  $T = V(T_0, \dots, T_r)$  avec  $(T_j, \text{or}_j) \in \text{Arb}_{m_j}^{d_j}$  et  $T' = V(T'_0, \dots, T'_s)$  avec  $(T'_j, \text{or}'_j) \in \text{Arb}_{n_j}^{e_j}$ . Par hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$(T_r, \text{or}_r) * (T', \text{or}') = \sum_{\alpha} (T_{\alpha}, \text{or}_{\alpha}) \quad \text{et} \quad (T, \text{or}) * (T'_0, \text{or}'_0) = \sum_{\beta} (T_{\beta}, \text{or}_{\beta}),$$

où  $(T_{\alpha}, \text{or}_{\alpha}) \in \text{Arb}_{m_{\alpha}}^{d_{\alpha}}$  et  $(T_{\beta}, \text{or}_{\beta}) \in \text{Arb}_{m_{\beta}}^{d_{\beta}}$ . On a d'abord

$$(20) \quad (T, \text{or}) * (T', \text{or}') = \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p,q)} \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} \sum_{F' \in \psi^{-1}(T')} (\sigma(F \times F'), \text{or} \wedge \text{or}').$$

On décompose cette somme selon que  $\sigma^{-1}(p+q) = p$  ou  $\sigma^{-1}(p+q) = p+q$ . Par le lemme 3, la somme pour  $\sigma^{-1}(p+q) = p$  s'écrit :

$$\sum_{F'} \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p,q)} \sum_{\tau \in \text{Sh}(p_0, \dots, p_r)} \sum_{F_0, \dots, F_r} (\sigma((\tau \times 1)W(F_0, \dots, F_r) \times F'), w_{\sigma(p)} \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_r \wedge \text{or}').$$

Par composition des battages, on transforme cette somme en

$$\sum_{F'} \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p_0, \dots, p_r, q)} \sum_{F_0, \dots, F_r} ((\sigma \times 1)W(F_0, \dots, F_r \times F'), w_{p+q} \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_r \wedge \text{or}').$$

Puis, en décomposant  $\sigma$  différemment, on transforme ceci en

$$\sum_{F_0, \dots, F_{r-1}} \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p_0, \dots, p_r + q)} \sum_{F', F_r} \sum_{\tau \in \text{Sh}(p_r, q)} ((\sigma \times 1)W(F_0, \dots, \tau(F_r \times F'), w_{p+q} \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_r \wedge \text{or}'))$$

Alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence, ceci devient

$$\sum_{\alpha} \sum_{F_0, \dots, F_{r-1}, F_{\alpha}} \sum_{\sigma \in \text{Sh}(p_0, \dots, p_{\alpha})} ((\sigma \times 1)W(F_0, \dots, F_{r-1}, F_{\alpha}), w_{p+q} \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_{\alpha}),$$

qui est égal, par définition, à

$$(21) \quad \sum_{\alpha} V(T_0, \dots, T_{r-1}, T_{\alpha}),$$

lequel est bien un élément de Arb. Par des manipulations similaires, mais qui font de plus intervenir les orientations, on montre que la somme pour  $\sigma^{-1}(p + q) = p + q$  est égale à la somme suivante, où  $N'$  désigne le nombre d'arêtes non extrêmes du sommet interne maximal de  $T'$ ,

$$(22) \quad \sum_{\beta} (-1)^{\dim(T)N'} V(T_{\beta}, T'_1, \dots, T'_r).$$

Ceci est bien un élément de Arb; la proposition est démontrée. □

### 4.5. Arb est une sous-cogèbre.

PROPOSITION 14. — Arb est une sous-cogèbre de Perm.

*Preuve.* — Soit  $(T, \text{or}) \in \text{Arb}_m^d$ . On pose  $p = m - d$ . On prouve la proposition par récurrence sur  $m$ . C'est clair si  $m = 0$ . On peut donc supposer, quitte à changer de signe, que  $T = V(T_0, \dots, T_r)$ . Par hypothèse de récurrence, pour  $j = 0, \dots, r$ , on peut écrire,

$$\Delta(T_j, \text{or}_j) = \sum_{\alpha_j} (T_{\alpha_j}^+, \text{or}_{\alpha_j}^+) \otimes (T_{\alpha_j}^-, \text{or}_{\alpha_j}^-).$$

On a d'abord

$$\begin{aligned} \Delta(T, \text{or}) &= \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} \Delta(F, \text{or}) \\ &= \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} (F, \text{or}) \otimes | + \sum_{F \in \psi^{-1}(T)} \sum_{i=0}^{p-1} \epsilon(i) (F_{\leq i}, \text{or}_{\leq i}) \otimes (F_{> i}, \text{or}_{> i}), \end{aligned}$$

où le signe  $\epsilon(i)$  est défini par l'égalité

$$\text{or} = \epsilon(i) \text{or}_{\leq i} \wedge \text{or}_{> i}.$$

Le premier terme est égal à  $(T, \text{or}) \otimes |$  qui appartient à  $\text{Arb} \otimes \text{Arb}$ . Par le lemme 3, le second terme se réécrit comme suit :

$$\sum_{\sigma \in \text{Sh}(p_0, \dots, p_r)} \sum_{F_0, \dots, F_r} \sum_{i=0}^{p-1} \epsilon(i) \left( ((\sigma \times 1)W(F_0, \dots, F_r))_{\leq i}, (w_p \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_r)_{\leq i} \right) \otimes \left( ((\sigma \times 1)W(F_0, \dots, F_r))_{> i}, (w_p \wedge \text{or}_0 \wedge \dots \wedge \text{or}_r)_{> i} \right).$$

Par découpage en deux du battage, ceci se transforme en

$$\sum_{i_0, \dots, i_r} \sum_{F_0, \dots, F_r} \sum_{\tau \in \text{Sh}(i_0, \dots, i_r)} \sum_{\tau' \in \text{Sh}(p_0 - i_0, \dots, p_r - i_r)} \Theta((F_j)_j, (i_j)_j) \epsilon(i_0) \cdots \epsilon(i_r) \left( \tau((F_0)_{\leq i_0} \times \cdots \times (F_r)_{\leq i_r}), (\text{or}_0)_{\leq i_0} \wedge \dots \wedge (\text{or}_r)_{\leq i_r} \right) \otimes \left( \tau'W((F_0)_{> i_0}, \dots, (F_r)_{> i_r}), \omega_p \wedge (\text{or}_0)_{> i_0} \wedge \dots \wedge (\text{or}_r)_{> i_r} \right),$$

où  $\epsilon(i_j)$  est défini par

$$\text{or}_j = \epsilon(i_j) \text{or}_{j \leq i_j} \wedge \text{or}_{j > i_j}$$

pour  $j = 0, \dots, r$  et  $\Theta((F_j)_j, (i_j)_j)$  est défini par

$$(\text{or}_0)_{\leq i_0} \wedge \dots \wedge (\text{or}_r)_{\leq i_r} \wedge \omega_p \wedge (\text{or}_0)_{> i_0} \wedge \dots \wedge (\text{or}_r)_{> i_r} = \Theta(i_0, \dots, i_r) \omega_p \wedge (\text{or}_0)_{\leq i_0} \wedge (\text{or}_0)_{> i_0} \wedge \dots \wedge (\text{or}_r)_{\leq i_r} \wedge (\text{or}_r)_{> i_r}.$$

On voit que  $\Theta((F_j)_j, (i_j)_j)$  ne dépend que des dimensions des  $(F_j)_{\leq i_j}$  et  $(F_j)_{> i_j}$ , ce qui permet d'écrire la somme, en utilisant l'hypothèse de récurrence, comme

$$\sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_r} \sum_{\tau \in \text{Sh}(i_0, \dots, i_r)} \sum_{\tau' \in \text{Sh}(p_0 - i_0, \dots, p_r - i_r)} \Theta(\alpha_0, \dots, \alpha_r) \left( \tau(F_{\alpha_0}^+ \times \cdots \times F_{\alpha_r}^+), \text{or}_{\alpha_0}^+ \wedge \dots \wedge \text{or}_{\alpha_r}^+ \right) \otimes \left( \tau'W(F_{\alpha_0}^-, \dots, F_{\alpha_r}^-), \omega_p \wedge \text{or}_{\alpha_0}^- \wedge \dots \wedge \text{or}_{\alpha_r}^- \right),$$

où  $\Theta(\alpha_0, \dots, \alpha_r)$  est égal à  $\Theta((F_j)_j, (i_j)_j)$  pour les indices qui se correspondent. Par définition, ceci est égal à

$$(23) \quad \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_r} \Theta(\alpha_0, \dots, \alpha_r) (T_{\alpha_0}^+, \text{or}_{\alpha_0}^+) * \cdots * (T_{\alpha_r}^+, \text{or}_{\alpha_r}^+) \otimes V(T_{\alpha_0}^-, \dots, T_{\alpha_r}^-),$$

qui appartient bien à  $\text{Arb} \otimes \text{Arb}$ . Ceci termine la démonstration. □

Ceci achève également la démonstration du théorème 2 de l'introduction.



#### 4.6. Arb et les involutions $\flat$ et $\sharp$ .

On observe que Arb est stable par  $\flat$ . En effet, il est aisé de voir que l'image par  $\flat$  de l'élément de Perm associé à un arbre  $T$  est l'élément de Perm associé à l'arbre  $T^\flat$  image de  $T$  par une réflexion du plan. On note Arb $^\sharp$  l'image de Arb par  $\sharp$  : c'est une sous-bigèbre différentielle graduée de Perm stable par  $\flat$ . Dans la section suivante, on considère l'intersection de Arb et de Arb $^\sharp$ .

### 5. Hypercubes.

#### 5.1. Hypercubes et orientations.

Soit  $m$  un entier strictement positif. On note  $I^{m-1}$  l'hypercube de dimension  $m-1$ , dont les sommets sont en bijection avec les  $(m-1)$ -uplets d'éléments de  $\{-1, 1\}$ . Plus généralement, les faces de  $I^{m-1}$  correspondent aux  $(m-1)$ -uplets d'éléments de  $\{-1, 0, 1\}$ . Soit  $C$  une face de  $I^{m-1}$ , on introduit l'ensemble  $S(C)$  des coefficients nuls de  $C$ . On remarque que le cardinal de  $S(C)$  est égal à la dimension  $d$  de la face  $C$ . On associe un graphe  $\Gamma(C)$  à une face  $C$  comme suit : les sommets de  $\Gamma(C)$  étant notés  $v_1, \dots, v_m$ , on lie  $v_i$  et  $v_{i+1}$  par une arête si  $C(i) = 0$ . On appelle segments de  $C$  les composantes connexes de  $\Gamma(C)$ . On se représente une face  $C$  comme sur la figure 3, en associant une montée à  $-1$  et une descente à  $+1$ .

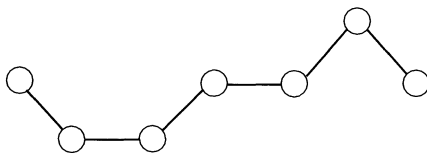


Figure 3. La face  $(+1, 0, -1, 0, -1, +1)$

Les hypercubes  $I^{m-1}$  sont clairement des polytopes simples. Pour se donner une orientation d'une face  $C$  de  $I^{m-1}$ , il suffit donc de spécifier un sommet de  $C$  et un ordre modulo les permutations paires sur les arêtes de  $C$  issues de ce sommet. On peut sans restriction choisir pour chaque face  $C$  le sommet  $C^{\min}$  défini de la façon suivante : on remplace chaque coefficient nul dans  $C$  par un coefficient 1. Les arêtes de  $C$  issues de  $C^{\min}$  sont naturellement indexées par les éléments de  $S(C)$ . On appellera donc orientation de la face  $C$  la donnée d'une orientation du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de base  $S(C)$ .

### 5.2. Définition du sous- $\mathbb{Z}$ -module Cub.

On convient que l'hypercube de rang  $m = 0$  est un point, noté  $|$ . On note Cub le  $\mathbb{Z}$ -module libre sur l'ensemble des paires  $(C, \text{or})$ , où  $C$  est une face d'un hypercube et or une orientation de  $C$ , modulo les relations

$$(C, \text{or}) = -(C, -\text{or}).$$

On munit Cub d'une double graduation par le rang  $m$  et la dimension  $d$ , et on note  $\text{Cub}_m^d$  la composante correspondante, qui est non nulle si et seulement si  $0 \leq d \leq m - 1$  ou  $m = d = 0$ .

Soit  $(F, \text{or}) \in \text{Perm}_m^d$ , on dit que  $F$  est  $\phi$ -dégénérée s'il existe une matrice extraite de  $F$  de la forme  $[1 \ 0 \ 1]$ . Les matrices non  $\phi$ -dégénérées sont donc celles dont les coefficients non nuls de chaque ligne sont placés dans des colonnes consécutives. Si  $F$  est une matrice non  $\phi$ -dégénérée, on note  $F(i)$  l'indice de la ligne de  $F$  contenant le coefficient non nul de la colonne  $i$  et on associe à  $F$  le  $(m - 1)$ -uplet  $\phi(F)$  défini, pour  $1 \leq i \leq m - 1$ , par

$$(24) \quad \phi(F)(i) = \begin{cases} +1 & \text{si } F(i + 1) > F(i), \\ 0 & \text{si } F(i + 1) = F(i), \\ -1 & \text{si } F(i + 1) < F(i). \end{cases}$$

L'application  $\phi$  a les propriétés suivantes. D'abord, on a une bijection  $\rho_F$  entre les segments de  $\phi(F)$  et les lignes de  $F$ . En effet, chaque ligne contient exactement une suite de coefficients non nuls consécutifs, ce qui correspond à une suite, maximale pour l'inclusion, de traits horizontaux consécutifs dans la représentation de  $C$  par montées et descentes, et donc à une composante connexe du graphe  $\Gamma(C)$ . De plus, pour tout segment  $c$  de  $\phi(F)$ , on a une bijection naturelle entre les sous-matrices  $[1 \ 1]$  de  $\rho_F(c)$  et les arêtes du segment  $c$  de  $\phi(F)$ . Il en résulte que  $\dim(F) = \dim(\phi(F))$  et que l'on peut considérer une orientation de  $F$  comme une orientation de  $\phi(F)$ . On peut maintenant définir une application surjective  $\Phi : \text{Perm} \rightarrow \text{Cub}$  comme suit : on pose  $\Phi(|) = |$ ,  $\Phi(F, \text{or}) = 0$  si  $F$  est  $\phi$ -dégénérée et  $\Phi(F, \text{or}) = (\phi(F), \text{or})$  si  $F$  est non  $\phi$ -dégénérée, où or est vu comme orientation de  $\phi(F)$  via la bijection entre les sous-matrices  $[1 \ 1]$  de  $F$  et les coefficients nuls de  $\phi(F)$ . Il est clair que  $\Phi$  préserve la double graduation de Cub et Perm.

On va décrire plus précisément les fibres de  $\phi$  et le noyau de  $\Phi$ . On remarque d'abord que si  $\phi(F) = \phi(F') = C$  et  $c$  est un segment de  $C$ , alors la ligne  $\rho_F(c)$  de  $F$  est identique à la ligne  $\rho_{F'}(c)$  de  $F'$ . On en déduit que

les éléments  $F$  de la fibre  $\phi^{-1}(C)$  diffèrent seulement par la bijection  $\rho_F$ . Toutes ces bijections sont liées entre elles par des chaînes de transpositions de deux lignes consécutives qui sont  $\phi$ -admissibles, au sens suivant : il existe une colonne dont le coefficient non nul est en dehors des deux lignes et telle que les coefficients non nuls d'une des deux lignes soient tous à gauche et ceux de l'autre ligne tous à droite de cette colonne. Réciproquement, si  $F$  et  $F'$  diffèrent par une transposition  $\phi$ -admissible, alors  $\phi(F) = \phi(F')$ . On a montré la

PROPOSITION 15. — *Le noyau de  $\Phi$  est engendré par les éléments  $(F, \text{or})$  où  $F$  est  $\phi$ -dégénérée et par les éléments  $(F, \text{or}) - (F', \text{or})$  où  $F$  et  $F'$  sont non  $\phi$ -dégénérées et diffèrent par une transposition  $\phi$ -admissible.*

En identifiant Perm et Cub avec leurs duaux respectifs à l'aide de leurs bases naturelles, on considère l'application transposée de  $\Phi$  comme une injection de Cub dans Perm et l'on identifie désormais Cub à son image dans Perm.

PROPOSITION 16. — *La restriction de l'injection de Cub dans Perm aux 0-cellules coïncide avec l'injection de l'algèbre de Hopf des descentes dans l'algèbre de Hopf sur les groupes symétriques de Malvenuto et Reutenauer.*

*Preuve.* — L'orientation ne joue aucun rôle. On vérifie aisément que cette application est bien celle décrite en termes de descentes de permutations dans [MR95] ou [LR98].  $\square$

### 5.3. Cub comme intersection.

PROPOSITION 17. — *On a  $\text{Cub} = \text{Arb} \cap \text{Arb}^\sharp$ . Par conséquent, Cub est une sous-bigèbre différentielle graduée de Perm stable par  $\sharp$  et  $\flat$ .*

*Preuve.* — On veut montrer que  $(\text{Im } {}^t\Psi) \cap (\text{Im } {}^t\Psi)^\sharp$  est égal à  $\text{Im } {}^t\Phi$ . En prenant les orthogonaux, et en identifiant  $\sharp$  avec sa transposée, ceci équivaut à  $\ker \Psi + \ker(\Psi \circ \sharp) = \ker \Phi$ . Tout d'abord, d'après la définition des notions de dégénérescence, on voit que  $F$  est  $\phi$ -dégénérée si et seulement si  $F$  ou  $F^\sharp$  est  $\psi$ -dégénérée. De même, il résulte de la définition des notions d'admissibilité que  $F$  et  $F'$  diffèrent par une transposition  $\phi$ -admissible si et seulement si  $F$  et  $F'$ , ou bien  $F^\sharp$  et  $F'^\sharp$ , diffèrent par une transposition  $\psi$ -admissible. La description des noyaux de  $\Psi$  et de  $\Phi$  donnée par les propositions 10 et 15 permet alors de conclure.

Ceci montre que  $\text{Cub} = \text{Arb} \cap \text{Arb}^\sharp$ . Le reste de la proposition, qui reprend l'énoncé du théorème 3 de l'introduction, résulte des propriétés de  $\text{Arb}$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [Cha00] F. CHAPOTON., Algèbres de Hopf des permutaoèdres, associaèdres et hypercubes, *Adv. in Math.*, 150 (2000), 264–275.
- [LR98] J.-L. LODAY & M.O. RONCO, Hopf algebra of the planar binary trees, *Adv. in Math.*, 139 (2) (1998), 293–309.
- [MR95] C. MALVENUTO & C. REUTENAUER, Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra, *J. Algebra*, 177 (3) (1995), 967–982.
- [Sta63] J.D. STASHEFF, Homotopy associativity of  $H$ -spaces. I, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 108 (1963), 275–292; *ibid.* 108 (1963), 293–312.
- [Ton97] A. TONKS, Relating the associahedron and the permutohedron, in *Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 33–36.
- [Zie95] G.M. ZIEGLER, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1995.

Manuscrit reçu le 30 août 1999,  
révisé le 20 décembre 1999,  
accepté le 11 février 2000.

Frédéric CHAPOTON,  
Université Pierre et Marie Curie  
Institut de Mathématiques  
U.M.R. 7586 du CNRS  
Case 82  
4, Place Jussieu  
75252 Paris, Cedex 05 (France).  
chapoton@math.jussieu.fr