

GENTIANA DANILA

**Sections du fibré déterminant sur l'espace
de modules des faisceaux semi-stables de
rang 2 sur le plan projectif**

Annales de l'institut Fourier, tome 50, n° 5 (2000), p. 1323-1374

http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_5_1323_0

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECTIONS DU FIBRÉ DÉTERMINANT SUR L'ESPACE DE MODULES DES FAISCEAUX SEMI-STABLES DE RANG 2 SUR LE PLAN PROJECTIF

par Gentiana DANILA

1. Introduction.

Soit M_n l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2, et classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$ sur le plan projectif complexe. On sait que M_n est une variété projective irréductible de dimension $4n - 3$.

Soit F un faisceau semi-stable de rang 2, et classes de Chern $c_1 = 0$, $c_2 = n$ sur le plan projectif. On dit que la droite H est de saut pour F si la restriction de F à H n'est pas triviale. On montre que ([LeP2], 4.1, [Bar1]) l'ensemble γ_F des droites de saut pour F est le support d'un faisceau cohérent Θ sur le plan projectif dual (l'espace des droites de \mathbb{P}_2). Ce faisceau est pur de dimension 1 et son support schématique est une courbe de degré n , appelée courbe des droites de saut de F . L'application qui associe à la classe de F la courbe γ_F définit un morphisme γ appelé morphisme de Barth $F \mapsto \gamma_F$:

$$\gamma : M_n \rightarrow \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n))) = \mathbb{P}_N.$$

Le fibré déterminant de Donaldson sur M_n , noté \mathcal{D} , est isomorphe à l'image réciproque $\gamma^*(\mathcal{O}(1))$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_N}(1)$ par γ . On en déduit un morphisme non nul γ^* sur les espaces de sections globales :

$$\gamma^* : \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^* \rightarrow \mathrm{H}^0(M_n, \mathcal{D})$$

si on tient compte du fait que $H^0(\mathbb{P}_N, \mathcal{O}(1)) \simeq H^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^*$.

Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Si $2 \leq n = c_2 \leq 19$, l'application linéaire canonique*

$$\gamma^* : H^0(\mathbb{P}_2^*, \mathcal{O}(n))^* \rightarrow H^0(M_n, \mathcal{D})$$

est un isomorphisme.

Cet énoncé répond partiellement à une question posée par A. Beauville, selon laquelle γ^* serait un isomorphisme pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il fournit des exemples pour la conjecture de "Dualité étrange" de Le Potier ([LeP3]), qu'on va énoncer (pour plus de détails voir [D2]).

Le groupe structurel de l'algèbre de Grothendieck $K(\mathbb{P}_2)$ des classes de faisceaux algébriques cohérents sur \mathbb{P}_2 , s'identifie à \mathbb{Z}^3 par l'application

$$\begin{aligned} \phi : K(\mathbb{P}_2) &\rightarrow \mathbb{Z}^3 \\ [F] &\mapsto (r(F), c_1(F), \chi(F)) \end{aligned}$$

qui associe à la classe du faisceau F son rang, sa première classe de Chern, et sa caractéristique d'Euler-Poincaré. La formule $\langle c, u \rangle = \chi(c \cdot u)$ définit une forme quadratique sur $K(\mathbb{P}_2)$. Soient c et u deux classes dans $K(\mathbb{P}_2)$, orthogonales pour cette forme quadratique. On suppose $r(c) > 0$, $r(u) = 0$ et $c_1(u) > 0$. Soient M_c et M_u les espaces de modules des faisceaux semi-stables sur \mathbb{P}_2 de classe c et respectivement u . Sur chacun de ces espaces il existe un fibré inversible canonique \mathcal{D}_u et respectivement \mathcal{D}_c , appelé fibré déterminant. Alors le fibré produit tensoriel externe $\mathcal{D}_u \boxtimes \mathcal{D}_c$ sur $M_c \times M_u$ a une section canonique $\sigma_{c,u}$, qui fournit une application linéaire

$$D_{c,u} : H^0(M_u, \mathcal{D}_c)^* \rightarrow H^0(M_c, \mathcal{D}_u)$$

appelée morphisme de dualité étrange. Remarquons que le groupe $SL(3)$ agit sur \mathbb{P}_2 . Il agit ainsi sur les espaces de modules M_c, M_u , et sur les fibrés déterminants $\mathcal{D}_c, \mathcal{D}_u$. Le morphisme $D_{c,u}$ est un morphisme de $SL(3)$ -représentations.

CONJECTURE (J. Le Potier). — *Si M_c est non-vide alors le morphisme de dualité étrange est un isomorphisme.*

Le théorème 1.1 est le cas particulier de la conjecture pour les valeurs $c = (2, 0, 2 - n)$ et $u = (0, 1, 0)$. En effet, l'espace de modules M_u s'identifie dans ce cas à \mathbb{P}_2 , le fibré déterminant \mathcal{D}_c s'identifie à $\mathcal{O}(n)$, le fibré \mathcal{D}_u

coïncide avec le fibré de Donaldson \mathcal{D} , et l'application $D_{c,u}$ s'identifie à l'application γ^* .

Avant d'esquisser la démonstration du théorème 1.1 on remarque que, comme les deux membres sont des représentations de $SL(3)$, et que le premier est une représentation irréductible, le morphisme est injectif, puisque équivariant et non nul. Il suffit donc de calculer la dimension du membre de droite pour conclure. Il suffit en outre de se placer dans le cas $n \geq 3$, puisque pour $n = 0$, l'espace M_n est réduit à un point, pour $n = 1$, il est vide, et pour $n = 2$, γ est un isomorphisme [Bar2].

La structure de la démonstration est la suivante. On se fixe un entier positif ℓ . On introduit la notion de système cohérent, qui consiste à considérer en même temps que le faisceau F , un sous-espace vectoriel Γ de son espace de sections $H^0(F)$. La dimension de Γ donne l'ordre du système cohérent. À l'aide de résultats de Min He ([He]) sur les espaces de modules de systèmes cohérents $(\Gamma, F(\ell))$ d'ordre 1, dont le faisceau sous-jacent est de rang 2, et de classes de Chern $c_1 = 2\ell, c_2 = n + \ell^2$, on se ramène au paragraphe 3, pour n compris entre $\ell(\ell - 1)$ et $(\ell + 1)(\ell + 2)$, à l'étude de l'espace des sections d'un fibré vectoriel $S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ sur un ouvert U du schéma de Hilbert $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ des sous-schémas finis de longueur $m = n + \ell^2$. Si $\Xi \subset \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ est le sous-schéma universel, \mathcal{I} est le faisceau d'idéaux associé, $\text{pr}_1 : \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, $\text{pr}_2 : \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ sont les deux projections, le faisceau algébrique cohérent \mathcal{R} est défini par $\mathcal{R} = R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{I}(2\ell - 3))$. Ce faisceau est localement libre en dehors du fermé de Brill-Noether B des schémas $Z \in \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ tels que $h^0(I_Z(2\ell - 3)) \neq 0$. On note U l'ouvert complémentaire de B . La codimension de B est supérieure ou égale à 2, donc les résultats de cohomologie locale nous permettent de passer de $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ à U pour le calcul d'un espace de sections. Le fibré \mathfrak{d} est le fibré déterminant sur le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$. Il admet une interprétation en termes du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{P}_2^m \\ & & \downarrow \mathfrak{S}_m \\ \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) & \xrightarrow{HC} & \mathfrak{S}^m(\mathbb{P}_2) \end{array}$$

où \mathfrak{S}_m désigne le quotient par le groupe symétrique \mathfrak{S}_m et HC le morphisme de Hilbert-Chow, qui associe à un schéma fini son cycle support. Alors

$$\mathfrak{d} = HC^*(\mathcal{O}(1, 1, \dots, 1)^{\mathfrak{S}_m}).$$

On désigne par E l'espace de sections $H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$. Au paragraphe 4

on montre que $S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ admet sur U une résolution par un complexe $K^{-i} = \Lambda^i S^k E \otimes S^{\ell-i}(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$ pour $i = 0, \dots, \ell$, où $k = 2\ell - 3$, et $\mathcal{O}(k)^{[m]}$ est défini par $\mathcal{O}(k)^{[m]} = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes \text{pr}_2^*(\mathcal{O}(k)))$. Par conséquent, la suite spectrale $E_1^{p,q} = H^q(K^p)$ admet pour aboutissement en degré 0 l'espace $H^0(S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$. Le tableau suivant représente les termes $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale :

$H^\ell(V_\ell)$					$q = \ell$
$H^{\ell-1}(V_\ell)$	$H^{\ell-1}(V_{\ell-1} \otimes L^{[m]})$				$q = \ell-1$
\vdots	\vdots	\ddots			\vdots
$H^1(V_\ell)$	$H^1(V_{\ell-1} \otimes L^{[m]})$	\dots	\dots	$H^1(S^\ell L^{[m]} \otimes \mathfrak{d})$	$q = 1$
$H^0(V_\ell)$	$H^0(V_{\ell-1} \otimes L^{[m]})$	\dots	$H^0(V_1 \otimes S^{\ell-1} L^{[m]})$	$H^0(S^\ell L^{[m]} \otimes \mathfrak{d})$	$q = 0$
$p = -\ell$	$p = -\ell + 1$	\dots	$p = -1$	$p = 0$	

où $L^{[m]} = (\mathcal{O}(k)^{[m]})$ et $V_i = \Lambda^i S^k E \otimes \mathfrak{d}$. On réduit ainsi le calcul de la dimension de l'espace de sections $H^0(M_n, \mathcal{D})$ au calcul de la dimension des espaces de cohomologie $H^q(U, S^\ell L^{[m]} \otimes \mathfrak{d})$. Un argument facile de cohomologie locale permet de remplacer, au moins pour $q = 0$, l'ouvert U par l'ouvert $\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$ des schémas finis ayant au plus un point multiple, qui soit double, soit les schémas dont le cycle correspondant est $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ou $2x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_m$ avec x_i distincts.

Le théorème suivant ramène ce calcul, sur $\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$, à un calcul sur l'ouvert $S_*^m(\mathbb{P}_2)$ des cycles de l'espace symétrique $S^m(\mathbb{P}_2)$ de la forme $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ou $2x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_m$ avec x_i distincts. Le théorème est valable sur une surface algébrique quasi-projective lisse X et pour un faisceau localement libre L sur X . On note comme ci-dessus $L^{[m]} = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_\Xi \otimes \text{pr}_2^*(L))$ le fibré tautologique sur $\text{Hilb}^m(X)$ associé au fibré L . Pour un faisceau inversible A sur X on introduit aussi sur $S^m(X)$ le fibré $\mathfrak{d}_m^A = (A \boxtimes A \cdots \boxtimes A)^{\mathfrak{S}_m}$ analogue au fibré \mathfrak{d} de ci-dessus. On note encore \mathfrak{d}_m^A son image réciproque sur $\text{Hilb}^m(X)$ par le morphisme de Hilbert-Chow $HC : \text{Hilb}^m(X) \rightarrow S^m(X)$. On note $\text{Hilb}_*^m(X)$ et $S_*^m(X)$ comme ci-dessus. On note X_*^m l'image réciproque de l'ouvert $S_*^m(X)$ par l'application quotient $\mathfrak{S}_m : X^m \rightarrow S^m(X)$. On note $p_i : X^m \rightarrow X$ la i -ème projection

et $p_{ij} = (p_i, p_j) : X^m \rightarrow X \times X$. On note Δ la diagonale de $X \times X$ et on note L_Δ le faisceau de support Δ qui correspond à L par l'isomorphisme de X avec Δ . On note $W = \bigoplus_{i=1}^m p_i^* L$, $\mathcal{L} = \bigoplus_{i < j} p_{i,j}^*(L_\Delta)$. On considère les faisceaux en algèbres graduées $\text{Sym } W = \bigoplus_{k \geq 0} S^k W$, $\text{Sym } \mathcal{L} = \bigoplus_{k \geq 0} S^k \mathcal{L}$. Soit I le faisceau en idéaux gradués, noyau du morphisme $\text{Sym } W \rightarrow \text{Sym } \mathcal{L}$. On note $I^\ell \subset \text{Sym } W$ la puissance ℓ -ième du faisceau I . Le groupe $G = \mathfrak{S}_m$ agit sur l'algèbre $\text{Sym } W$ et sur l'idéal I et on peut définir les quotients $(\text{Sym } W)^G$ et $(I^\ell)^G$, faisceaux gradués sur $S_*^m(X)$. On prouve au paragraphe 4.3 le théorème :

THÉORÈME 1.2.

(i) Il existe une inclusion canonique $HC_*(S^\ell(L^{[m]})) \hookrightarrow (S^\ell W)$ sur $S_*^m(X)$, dont l'image est exactement $(I^\ell)_\ell^G$, partie homogène de degré ℓ de $(I^\ell)^G$.

(ii) $R^i HC_*(S^\ell(L^{[m]}))|_{S_*^m X} = 0$ pour $i > 0$.

La démonstration utilise la description de la variété $\text{Hilb}_*^m(X)$ comme quotient par le groupe symétrique \mathfrak{S}_m de l'éclaté de la variété X_*^m selon les diagonales $\Delta_{ij} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{P}_{2*}^m | x_i = x_j\}$ pour $i < j$.

Le théorème précédent réduit le calcul des groupes de cohomologie $H^q(\text{Hilb}_*^m(X), S^\ell L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A)$ au calcul des groupes de cohomologie $H^q(S_*^m(X), (I^\ell)_\ell \otimes \mathfrak{d}_m^A)^{\mathfrak{S}_m}$. On utilise la filtration $F^k \text{Sym } W = I^k \text{Sym } W$ induite par les puissances de l'idéal I , restreinte en degré ℓ , pour approcher le groupe $H^q(S_*^m(X), (I^\ell)_\ell \otimes \mathfrak{d}_m^A)^{\mathfrak{S}_m}$ du groupe connu $H^q(S^m(X), S^\ell W \otimes \mathfrak{d}_m^A)^{\mathfrak{S}_m}$. On obtient dans les cas $\ell = 2, 3$ les groupes $H^0(S_*^m(X), (I^\ell)_\ell \otimes \mathfrak{d}_m^A)^{\mathfrak{S}_m}$ et $H^1(S_*^m(X), (I^\ell)_\ell \otimes \mathfrak{d}_m^A)^{\mathfrak{S}_m}$ comme noyau, respectivement conoyau, d'opérateurs différentiels explicites entre certains espaces de sections. Dans les cas $\ell = 0, 1$ ces calculs pour les groupes $H^0(S_*^m(X), (I^\ell)_\ell \otimes \mathfrak{d}_m^A)^{\mathfrak{S}_m}$ et $H^1(S_*^m(X), (I^\ell)_\ell \otimes \mathfrak{d}_m^A)^{\mathfrak{S}_m}$ sont plus faciles, et on dispose de méthodes de calcul des groupes $H^q(\text{Hilb}^m(X), S^\ell L^{[m]} \otimes \mathfrak{d}_m^A)$ pour tout $q \geq 0$. Le cas $\ell = 0$ (lemme 4.1) est une conséquence du théorème de Kawamata-Viehweg ([CKM]). Le cas $\ell = 1$ fait l'objet de l'article [D1].

Le résultat final dans le cas $X = \mathbb{P}_2$ s'énonce ainsi :

THÉORÈME 1.3. — On a sur $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$:

- i) $H^0(\mathfrak{d}) = S^m E$ et $H^q(\mathfrak{d}) = 0$ pour $q > 0$;
- ii) $H^0(\mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}) = S^{2\ell-2} E \otimes S^{m-1} E$ et $H^q(\mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}) = 0$ pour $q > 0$;

iii) la $SL(3)$ -représentation $H^0(S^2(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ est isomorphe à la représentation $(S^{2k+1}E \otimes S^{m-1}E) \oplus (\text{Ker } k \otimes S^{m-2}E)$ où $\text{Ker } k$ est le noyau de la multiplication $S^2(S^{k+1}E) \rightarrow S^{2k+2}E$; on a $H^1(S^2(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}) = 0$;

iv) la $SL(3)$ -représentation $H^0(S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ est isomorphe à la représentation $S^{10}E \otimes S^{m-1}E \oplus \text{Ker}(\tilde{D}) \oplus \text{Ker } \tilde{\nu}$, où

$$\begin{aligned} \tilde{D} : S^7E \otimes S^4E \otimes S^{m-2}E &\rightarrow S^{10}E \otimes E \otimes S^{m-2}E \\ \tilde{\nu} : S^3(S^4E) \otimes S^{m-3}E &\rightarrow S^8E \otimes S^4E \otimes S^{m-3}E \end{aligned}$$

sont des opérateurs explicites.

Ces données suffisent pour le calcul de $H^0(U, S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$ pour $\ell = 2, 3$. On est ainsi en mesure de calculer la dimension de l'espace $H^0(M_n, \mathcal{D})$, dans le cas où $n \leq 19$. Pour étendre ce résultat au cas $n \geq 20$, on a besoin d'étendre le théorème d'annulation de la cohomologie supérieure des fibrés $S^\ell(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$ sur le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ et d'améliorer la méthode utilisée pour le calcul de $H^0(S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$, afin de réussir à calculer $H^0(S^\ell(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$, pour $\ell > 3$.

2. Préliminaires.

Notations : Le corps de base est \mathbb{C} . Pour un espace vectoriel V nous noterons $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif des droites de V et $\mathbb{P}_\bullet(V)$ l'espace projectif de Grothendieck des espaces vectoriels quotients de dimension 1.

2.1. Calculs d'invariants.

On considère un ensemble fini I muni d'une action transitive d'un groupe fini G . Soit Y une variété sur laquelle G agit à gauche. Considérons pour chaque $i \in I$ un fibré L_i sur Y de façon qu'on ait un isomorphisme canonique $h_g : L_{g^{-1}(i)} \simeq g^*(L_i)$ pour tout $i \in I$ et $g \in G$, et pour tous $g, g' \in G$, $h_g \circ h_{g'} = h_{gg'}$. En particulier pour tout g dans $\text{Stab}\{i\}$, le stabilisateur de i , on a $g^*(L_i) \simeq L_i$. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_{g^{-1}(i)} & \xrightarrow{h_g} & L_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

On considère les espaces vectoriels de sections $M_i = H^0(L_i)$, et la somme directe $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ (espace vectoriel des familles $s = (s_i)_i$ avec $s_i \in M_i$).

L'isomorphisme h_g induit un isomorphisme $\lambda_g : M_i \rightarrow M_{g(i)}$ en posant pour $x \in Y$

$$\lambda_g(s)(x) = h_g s(g^{-1}(x)).$$

On peut facilement vérifier que $\lambda_{gg'} = \lambda_g \lambda_{g'}$. En particulier, ceci fournit une action à gauche du stabilisateur de i sur M_i . On définit aussi une action à gauche de G sur M en posant $g(s)_i = \lambda_g(s_{g^{-1}(i)})$. Le lemme suivant utilisé au paragraphe 4.3 et démontré dans [D1] est l'ingrédient essentiel des calculs d'invariants sur X^m :

LEMME 2.1. — Soit $i \in I$. La projection $\text{pr}_i : M \rightarrow M_i$ induit un isomorphisme $M^G \rightarrow M_i^{\text{Stab}\{i\}}$.

2.2. Le gradué d'un produit tensoriel.

On considère deux faisceaux algébriques \mathcal{F} et \mathcal{G} sur une variété algébrique Z , munis de filtrations décroissantes \mathcal{F}_i et \mathcal{G}_j , telles que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$. On pose $\text{gr}_i \mathcal{F} = \mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i+1}$. Il s'agit de démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.2. — Si

$$\text{Tor}_1(\text{gr}_i(\mathcal{F}), \text{gr}_j(\mathcal{G})) = 0$$

pour tous i et j alors pour la filtration associée sur $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ on a un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{i+j=k} \text{gr}_i \mathcal{F} \otimes \text{gr}_j \mathcal{G} \rightarrow \text{gr}_k(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}).$$

Preuve. — Le problème étant local on peut se placer sur un ouvert affine, spectre d'un anneau A . La donnée de \mathcal{F} et \mathcal{G} sur $\text{Spec } A$ est équivalente à la donnée de deux A -modules filtrés M et N . On se ramène à montrer que si

$$\text{Tor}_1(\text{gr}_i M, \text{gr}_j N) = 0$$

pour tous i et j alors pour la filtration naturelle de $M \otimes N$ on a un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{i+j=k} \text{gr}_i M \otimes \text{gr}_j N \rightarrow \text{gr}_k(M \otimes N).$$

On peut supposer que la filtration de M est finie. Le résultat découle par récurrence sur k . □

Dans les conditions dans lesquelles on va l'appliquer, les hypothèses de ce lemme sont satisfaites trivialement :

LEMMA 2.3. — Soient X et Y deux variétés algébriques munies des faisceaux algébriques \mathcal{F} et \mathcal{G} . Alors

$$\underline{\mathrm{Tor}}_1^{\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_Y}(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X \boxtimes \mathcal{G}) = 0.$$

2.3. Représentations irréductibles de $\mathrm{SL}(E)$.

On se servira pour le calcul de $H^0(S^3(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ des propriétés suivantes, qui constituent un court résumé de l'étude présentée dans [FH].

À chaque représentation du groupe $\mathrm{SL}(3)$ on peut associer l'ensemble de ses poids, qui sont les valeurs propres pour l'action du tore maximal \mathfrak{h} de $\mathfrak{sl}(3)$. Ces poids sont des formes linéaires sur \mathfrak{h} . On peut décrire $\mathfrak{h}^* = \mathbb{C}[L_1] \oplus \mathbb{C}[L_2] \oplus \mathbb{C}[L_3]/(L_1 + L_2 + L_3)$, où

$$L_i \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} = a_i, \text{ pour tout élément } \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

En choisissant un ordre sur les L_i , par exemple $L_1 > L_2 > L_3$, on trouve que le poids dominant de n'importe quelle représentation irréductible doit être de la forme $aL_1 + bL_2 + cL_3$ avec $a \geq b \geq c$.

DÉFINITION 2.4. — On dénote par $S^{a,b,c}E$ la représentation irréductible de $\mathrm{SL}(3)$ de plus haut poids $aL_1 + bL_2 + cL_3$ avec $a \geq b \geq c$.

Parfois on note aussi cette représentation $S^\lambda E$ où λ est la partition (a, b, c) . Comme c est superflu puisque $L_1 + L_2 + L_3 = 0$, on préfère l'écriture réduite $S^\lambda E$ avec $\lambda = (a - c, b - c)$.

Faits 2.5.

i) Il est démontré dans [FH], prop. 12.11, que cette représentation est engendrée par les images successives du vecteur de plus haut poids par les matrices $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 3$ avec un seul terme non nul $e_{ij} = 1$ au-dessus de la diagonale.

ii) Il existe une autre interprétation de $S^\lambda E$ en termes de la représentation standard $E = \mathbb{C}^3$ de $\mathrm{SL}(3)$ (voir [FH], prop. 15.15). En particulier il n'y a pas de confusion, puisque $S^a E$ est la puissance symétrique de E .

Le théorème 6.3 de [FH] nous donne la dimension de cette représentation :

$$\dim S^\lambda E = (a - b + 1) \left(\frac{a - c + 2}{2} \right) (b - c + 1).$$

La formule de Pieri permet de calculer le produit tensoriel d'une représentation irréductible et d'une puissance symétrique. On a

$$S^\lambda E \otimes S^\mu E = \sum_{\substack{\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i-1} \\ |\mu| = |\lambda| + p}} S^\mu E$$

où la partition λ est renotée $(\lambda_i)_i$ et $|\lambda| := \sum_i \lambda_i$.

Par exemple

$$(1) \quad S^8 E \otimes S^4 E = S^{12} E + S^{11,1} E + S^{10,2} E + S^{9,3} E + S^{8,4} E.$$

Par une analyse directe on peut trouver la décomposition de n'importe quelle représentation . Par exemple, d'après le programme Lie [LiE], la décomposition du pléthysme $S^3(S^4 E)$ est donnée par

$$(2) \quad S^3(S^4 E) = S^{12} E + S^{10,2} E + S^{9,3} E + S^{8,4} E + S^{6,6} E + S^{7,4,1} E + S^{8,2,2} E + S^{6,4,2} E + S^{4,4,4} E.$$

2.4. Contractions.

PROPOSITION 2.6. — Soit F un espace vectoriel. Soient a et b deux entiers positifs, tels que $a \geq b$. Alors le morphisme canonique (appelé par [FH] morphisme de contraction, p. 83)

$$c : S^a F \otimes S^b F \rightarrow S^{a+1} F \otimes S^{b-1} F$$

défini par $y \otimes x_1 \cdots x_b \mapsto \sum_i y x_i \otimes x_1 \cdots \check{x}_i \cdots x_b$ est surjectif, de noyau $S^{a,b} F$.

Preuve. — À cause de la décomposition de Pieri en somme directe de facteurs irréductibles, il suffit de montrer la surjectivité. Il suffit encore de montrer que l'image de c contient les tenseurs de la forme $x^{a+1} \otimes y^{b-1}$. Mais cela résulte des formules

$$\begin{aligned} c(x^a \otimes xy^{b-1}) &= x^{a+1} \otimes y^{b-1} + (b-1)x^a y \otimes xy^{b-2}, \\ c(x^{a-1} y \otimes x^2 y^{b-2}) &= 2x^a y \otimes xy^{b-2} + (b-2)x^{a-1} y^2 \otimes x^2 y^{b-3}, \\ c(x^{a-2} y^2 \otimes x^3 y^{b-3}) &= 3x^{a-1} y^2 \otimes x^2 y^{b-3} + (b-3)x^{a-2} y^3 \otimes x^3 y^{b-2}, \dots, \\ c(x^{a-b+1} y^{b-1} \otimes x^b) &= bx^{a-b+2} y^{b-1} \otimes x^{b-1}. \quad \square \end{aligned}$$

2.5. Le noyau et le conoyau du morphisme ν .

Le morphisme ν est le morphisme canonique

$$\nu : S^3(S^4E) \rightarrow S^8E \otimes S^4E$$

induit par l'application linéaire $stu \mapsto st \otimes u + su \otimes t + ut \otimes s$, où $s, t, u \in S^4E$.

LEMME 2.7. — *Le morphisme ν n'est ni injectif, ni surjectif. Son conoyau est $S^{11,1}E$ et son noyau est isomorphe à*

$$S^{6,6}E + S^{7,4,1}E + S^{8,2,2}E + S^{6,4,2}E + S^{4,4,4}E.$$

Preuve du lemme. — En tenant compte des décompositions (1), (2), il suffit de prouver que la restriction de ν à $S^{12}E + S^{10,2}E + S^{9,3}E + S^{8,4}E$ à valeurs dans $S^{12}E + S^{10,2}E + S^{9,3}E + S^{8,4}E$ est bijective. Soit V_1 l'espace des vecteurs propres de poids $8L_1 + 4L_2$ dans $S^{12}E$ et de même V_2, V_3, V_4 dans $S^{10,2}E, S^{9,3}E, S^{8,4}E$. D'après [FH] $\dim V_i \geq 1$. Puisque par l'application ν , le sous-espace V_i est envoyé dans le sous-espace V_i , il suffit de prouver que :

a) $\dim V_i = 1$

b) ν est bijective sur $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

On regarde les poids de S^4E . Ils sont donnés par des sommes de 4 poids de E , soit : $4L_i, 3L_i + L_j, 2L_i + 2L_j, 2L_i + L_j + L_k$, avec i, j, k deux à deux distincts et variant de 1 à 3. Les poids de $S^3(S^4E)$ sont donnés par des sommes de 3 poids α, β, γ de S^4E . On écrit $\alpha + \beta + \gamma$ sous la forme $mL_1 + nL_2 + pL_3$ avec $m+n+p = 12$. Si on veut obtenir $\alpha + \beta + \gamma = 8L_1 + 4L_2$ on a $m - p = 8, n - p = 4$ donc $m + n - 2p = m + n + p = 12$ donc $p = 0$. On ne se sert donc pas des poids qui font apparaître L_3 . Il y a exactement 4 façons d'obtenir $8L_1 + 4L_2$:

$$4L_1 + 4L_1 + 4L_2 \text{ qui correspond au vecteur propre } \omega_1 = (e_1^4)^2(e_2^4),$$

$$4L_1 + 3L_1 + L_2 + 3L_2 + L_1 \text{ qui correspond au vecteur propre } \omega_2 = (e_1^4)(e_1^3e_2)(e_1e_2^3),$$

$$4L_1 + 2L_1 + 2L_2 + 2L_1 + 2L_2 \text{ qui correspond au vecteur propre } \omega_3 = (e_1^4)(e_1^2e_2^2)^2,$$

et

$$3L_1 + L_2 + 3L_1 + L_2 + 2L_1 + 2L_2 \text{ qui correspond au vecteur propre } \omega_4 = (e_1^3e_2)^2(e_1^2e_2^2).$$

Cela prouve a). On vérifie que $\nu(\omega_i)$ sont indépendants. Cela prouve b). \square

COROLLAIRE 2.8. — *Le morphisme $\tilde{\nu} : S^3(S^4E) \otimes S^{m-3}E \rightarrow S^8E \otimes S^4E \otimes S^{m-3}E$ défini par $\tilde{\nu} = \nu \otimes \text{id}$ n'est ni injectif, ni surjectif. Son conoyau est $S^{11,1}E \otimes S^{m-3}E$ et son noyau est isomorphe à*

$$(S^{6,6}E + S^{7,4,1} + S^{8,2,2}E + S^{6,4,2}E + S^{4,4,4}E) \otimes S^{m-3}E.$$

Preuve du corollaire. — Comme $\tilde{\nu} = \nu \otimes \text{id}$, par le lemme 2.7 on obtient le résultat. \square

3. Systèmes cohérents.

Le but de cette section est de montrer comment on peut ramener le calcul du nombre de sections du fibré déterminant de Donaldson à un calcul de sections d'un faisceau localement libre sur un ouvert du schéma de Hilbert. La méthode repose sur un résultat de Min He, qui l'utilisait pour calculer les nombres de Donaldson [He]. On commence par quelques généralités sur les systèmes cohérents.

3.1. Systèmes cohérents *a*-semi-stables.

On désigne par $K(\mathbb{P}_2)$ l'algèbre de Grothendieck des classes de faisceaux algébriques cohérents sur \mathbb{P}_2 , ou ce qui revient au même, des classes de fibrés vectoriels algébriques sur \mathbb{P}_2 . Cette algèbre est engendrée par la classe η du faisceau structural d'une droite. En tant que groupe abélien, elle est isomorphe à \mathbb{Z}^3 , un isomorphisme étant donné par le rang r , la classe de Chern c_1 et la caractéristique d'Euler-Poincaré χ . Elle est munie de la forme quadratique entière non dégénérée définie par

$$2r\chi + c_1^2 - r^2.$$

La notion d'orthogonalité utilisée par la suite est relative à cette forme quadratique.

Une classe de Grothendieck $a \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ est dite *positive* si le polynôme de Hilbert de a est positif. Étant donné un faisceau algébrique cohérent F sur \mathbb{P}_2 , on désigne par $c(F)$ la classe de Grothendieck de F dans $K(\mathbb{P}_2)$.

DÉFINITION 3.1. — *Un système cohérent sur \mathbb{P}_2 est un couple $\Lambda = (\Gamma, F)$ où F est un faisceau cohérent, et Γ un sous-espace vectoriel de $H^0(F)$. L'ordre du système cohérent est la dimension de l'espace vectoriel Γ .*

Soit $a \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ une classe de Grothendieck strictement positive. À un système $\Lambda = (\Gamma, F)$ on associe la classe de Grothendieck $c_a(\Lambda) \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ définie par

$$c_a(\Lambda) = \dim \Gamma \cdot a + c(F).$$

La catégorie des systèmes cohérents n'est pas une catégorie abélienne, mais elle se plonge dans une catégorie abélienne (la catégorie des systèmes algébriques) qui a suffisamment d'injectifs. On ne considère ici que des systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F)$ dont le faisceau F sous-jacent est de rang $r > 0$. Ce rang sera aussi appelé le rang du système cohérent.

DÉFINITION 3.2. — *On dit qu'un système cohérent $\Lambda = (\Gamma, F)$ est a -semi-stable si*

(i) *le faisceau F est sans torsion;*

(ii) *pour tout sous-faisceau cohérent $F' \subset F$ de rang $r' > 0$ on a dans $K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$:*

$$\frac{c_a(\Lambda')}{r'} \leq \frac{c_a(\Lambda)}{r},$$

où Λ' est le système cohérent $\Lambda' = (\Gamma', F')$ défini par $\Gamma' = \Gamma \cap H^0(F')$.

Dans le cas particulier où c est de rang 2, et $\dim \Gamma = 1$, seul cas utile dans la suite, l'inégalité (ii) signifie que pour tout sous-faisceau cohérent $F' \subset F$ de rang 1 on a

$$c(F') \leq \begin{cases} \frac{1}{2}(c(F) - a) & \text{si } \Gamma \subset H^0(F') \\ \frac{1}{2}(c(F) + a) & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2. L'espace de modules $\text{Syst}_a(c, k)$.

Soit $c \in K(\mathbb{P}_2)$ une classe de Grothendieck fixée et k un entier ≥ 0 ; il existe un espace de modules grossier de systèmes cohérents a -semi-stables $\Lambda = (\Gamma, F)$ tels que $c(F) = c$, et $\dim \Gamma = k$: c'est une variété projective qui sera notée $\text{Syst}_a(c, k)$. Lorsque a varie, la structure de l'espace de modules grossier $\text{Syst}_a(c, k)$ change au passage de certaines valeurs de a appelées valeurs critiques.

3.3. Valeurs critiques.

Soit F un faisceau algébrique cohérent de rang 2, de classes de Chern c_1 et c_2 sur le plan projectif. On désigne par η la classe dans $K(\mathbb{P}_2)$ du faisceau structural d'une droite. Ainsi, les faisceaux considérés ont pour classe de Grothendieck

$$c(F) = 2 + c_1\eta + \left(\frac{c_1(c_1 + 1)}{2} - c_2\right)\eta^2.$$

Soit $\ell > 0$ un entier, fixé dans toute la suite. Les faisceaux cohérents F de rang $r = 2$ et de classes de Chern $c_1 = 2\ell$, et $c_2 = n + \ell^2$ ont alors pour classe de Grothendieck

$$c(\ell) = 2 + 2\ell\eta + (\ell(\ell + 1) - n)\eta^2.$$

On considère l'espace de modules $S_a = \text{Syst}_a(c(\ell), 1)$ des classes de S -équivalence de systèmes cohérents a -semi-stables $\Lambda = (\Gamma, F)$, d'ordre 1, où F est un faisceau cohérent de classe de Grothendieck $c(F) = c(\ell)$. Si cet espace de modules est non-vide, une section de F donne une inclusion du faisceau trivial dans F , et donc l'inégalité

$$0 < a \leq c(\ell) - 2 = 2\ell\eta + (\ell(\ell + 1) - n)\eta^2.$$

DÉFINITION 3.3. — *Les valeurs critiques pour la famille d'espaces de modules de systèmes cohérents S_a sont les classes $a \in K(\mathbb{P}_2) \otimes \mathbb{Q}$ pour lesquelles il existe des systèmes cohérents strictement semi-stables relativement à a .*

Les valeurs critiques sont en nombre fini. On peut en fait les calculer explicitement, mais on n'aura pas besoin de cela dans la suite.

3.4. Les résultats de Min He.

Étant donnée une valeur critique a , on désigne par a_- et a_+ des classes de Grothendieck > 0 encadrant a et telles que dans l'intervalle $]a_-, a_+[$, a soit la seule valeur critique. On désigne par $a_{\max} = c(\ell) - 2$ la plus grande valeur critique. Pour $a > a_{\max}$, l'espace de modules S_a est vide.

THÉORÈME 3.4 (Min He). — *On suppose $n \geq \ell(\ell - 1)$ et $n \geq 3$.*

(i) *L'espace de modules S_a est une variété irréductible, normale, de dimension $\delta = 3n + \ell(\ell + 3) - 2$.*

(ii) Si a est une valeur critique distincte de a_{\max} , on dispose de morphismes surjectifs

$$\begin{array}{ccc}
 S_{a_-} & \dashrightarrow & S_{a_+} \\
 \searrow \pi_- & & \swarrow \pi_+ \\
 & S_a &
 \end{array}$$

Au-dessus de l'ouvert des points stables de S_a ces morphismes sont des isomorphismes. L'image réciproque du fermé Σ des points strictement semi-stables $\Sigma_- = \pi_-^{-1}(\Sigma)$ (resp. $\Sigma_+ = \pi_+^{-1}(\Sigma)$) est le fermé des points a_+ -instables (resp. a_- -instables). Les fermés $\Sigma, \Sigma_-, \Sigma_+$ sont de codimension ≥ 2 .

(iii) Si a n'est pas valeur critique, il existe un système cohérent universel $\Lambda = (\mathcal{V}, \mathcal{F})$ paramétré par S_a .

Ainsi, S_{a_+} s'obtient à partir de S_{a_-} en remplaçant le fermé Σ_- par le fermé Σ_+ des points a_- -instables.

3.5. L'espace de modules $S_{a_{\max_-}}$.

On suppose ici que $n \geq \ell(\ell - 1)$ et $n \geq 3$.

L'espace de modules $S_{a_{\max}}$ s'identifie au schéma de Hilbert des sous-schémas finis de longueur $n + \ell^2$ de \mathbb{P}_2 , $\text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$. En effet, la condition de semi-stabilité nous assure que le conoyau du morphisme d'évaluation $\Gamma \otimes \mathcal{O} \rightarrow F$ est sans torsion. On connaît la description de tels faisceaux sur \mathbb{P}_2 . Ils s'écrivent comme $I_Z(c_1)$ où I_Z est l'idéal d'un sous-schéma fini Z de longueur c_2 de \mathbb{P}_2 . De plus l'extension

$$0 \rightarrow \Gamma \otimes \mathcal{O} \rightarrow F \rightarrow I_Z(2\ell) \rightarrow 0$$

donne une filtration de Jordan-Hölder pour F , puisque $a = a_{\max}$. Le schéma Z est dans ce cas de longueur $n + \ell^2$. L'application qui associe à F le sous-schéma Z correspondant donne l'identification désirée.

Dans le cas où $a = a_{\max_-}$ on dispose encore d'une extension

$$0 \rightarrow \Gamma \otimes \mathcal{O} \rightarrow F \rightarrow I_Z(2\ell) \rightarrow 0$$

soit d'une extension non-triviale de systèmes cohérents

$$0 \rightarrow \Lambda' \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda'' \rightarrow 0$$

où $\Lambda'' = (0, I_Z(2\ell))$, et $\Lambda' = (\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2})$. Réciproquement, pour a voisin de a_{\max} , une telle extension non-triviale définit un système cohérent a -semi-stable. Pour déterminer $S_{a_{\max_-}}$ il s'agit donc de paramétrer les extensions non-triviales de ce type.

Mais pour un sous-schéma Z , ces extensions sont paramétrées par

$$\mathbb{P}(\text{Ext}^1(I_Z(2\ell), \mathcal{O})) = \mathbb{P}_\bullet(\mathbb{H}^1(I_Z(2\ell - 3))).$$

La variété $S_{a_{\max_-}}$ va donc s'identifier à un fibré en espaces projectifs associé à un faisceau algébrique cohérent sur $\text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$ qui ait pour fibre en Z , $\mathbb{H}^1(I_Z(2\ell - 3))$. On obtient le

THÉOREME 3.5. — Soit $\Xi \subset \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ le sous-schéma universel, et \mathcal{I} le faisceau d'idéaux associé. Considérons le faisceau algébrique cohérent $\mathcal{R} = R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{I}(2\ell - 3))$. Alors

$$S_{a_{\max_-}} = \mathbb{P}(\mathcal{R}).$$

Ce faisceau \mathcal{R} est localement libre de rang

$$\chi(\mathcal{O}_Z) - \chi(\mathcal{O}(2\ell - 3)) = n + 1 - (\ell - 1)(\ell - 2)$$

en dehors du fermé de Brill-Noether B des $Z \in \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$ tels que $h^0(I_Z(2\ell - 3)) \neq 0$.

LEMME 3.6.

- i) La codimension du fermé B est supérieure ou égale à 2ℓ .
- ii) La codimension de l'image réciproque de B dans $\mathbb{P}(\mathcal{R})$ est au moins $n - \ell(\ell - 1) + 2$.

Preuve du lemme. — Pour un entier s tel que $0 < s \leq 2\ell - 3$ soit A_s l'ensemble des schémas Z vérifiant $h^0(I_Z(s)) \neq 0$. On commence par démontrer que $\text{codim } A_s \leq n + \ell^2 - 1 + \frac{1}{2}(s + 1)(s + 2)$. Soit $\mathbb{P}\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s))$ l'espace des courbes de degré s dans \mathbb{P}_2 . On considère la variété d'incidence $\text{Inc} = \{(Z, C) \mid Z \subset C\} \subset \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s))$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Inc} & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{P}\mathbb{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s)) \\ p_1 \downarrow & & \\ \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2) & & \end{array}$$

On sait d'après Ellingsrud et Strømme (dans [He], lemme 4.9, en utilisant [ES], th. 1.1 et cor. 1.2), que si C est une courbe de \mathbb{P}_2 , même non-réduite, le sous-schéma de $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ des points $Z \subset C$ est de dimension m . Donc la dimension des fibres de p_2 est égale à $n + \ell^2$. Alors $\dim \text{Inc} \leq n + \ell^2 - 1 + \frac{1}{2}(s + 1)(s + 2)$. D'un autre côté la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{H}^0(I_Z(s)) \rightarrow \mathbb{H}^0(\mathcal{O}(s)) \rightarrow \mathbb{H}^0(\mathcal{O}_Z)$$

prouve que A_s est l'image de Inc par p_1 . On déduit $\dim A_s \leq n + \ell^2 - 1 + \frac{1}{2}(s + 1)(s + 2)$. Pour $s = 2\ell - 3$ on obtient pour $B = A_{2\ell-3}$, $\dim B \leq n + 3\ell^2 - 3\ell$. Donc $\text{codim } B \geq n - \ell^2 + 3\ell$, et alors $\text{codim } B \geq 2\ell$ si $n \geq \ell(\ell - 1)$. Ceci prouve i).

Pour démontrer ii) prenons un schéma ponctuel Z et considérons une droite d qui évite le support de Z . On obtient les suites exactes

$$0 \rightarrow I_Z(s - 1) \xrightarrow{d} I_Z(s) \rightarrow \mathcal{O}_d(s) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H^0(I_Z(s - 1)) \rightarrow H^0(I_Z(s)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_d(s)) \rightarrow H^1(I_Z(s - 1)) \rightarrow H^1(I_Z(s)) \rightarrow 0 .$$

Il résulte $A_{s-1} \subset A_s$ et $h^1(I_Z(s)) \leq h^1(I_Z(s-1))$ pour tout s . On note $B_s = A_s \setminus A_{s-1}$. Pour $Z \in B_s$ la fibre en Z du morphisme $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \rightarrow \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$ est de dimension $h^1(I_Z(2\ell-3)) \leq h^1(I_Z(s-1)) = n + \ell^2 - 1 + \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$. On obtient ainsi une majoration de la dimension de l'image réciproque de B_s par

$$\left(n + \ell^2 + \frac{1}{2}(s + 1)(s + 2) - 1 \right) + \left(n + \ell^2 - \frac{1}{2}s(s + 1) - 1 \right)$$

c'est-à-dire

$$2(n + \ell^2) + s - 1.$$

L'assertion résulte en utilisant la majoration $s \leq 2\ell - 3$. □

On note π le morphisme canonique de $S_{a_{\max}}$ dans $\text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$.

3.6. Le morphisme $f : S_\epsilon \rightarrow M_c$.

On désigne par M_c l'espace de modules des faisceaux semi-stables de classe de Grothendieck c . Ici c est de rang 2, $c_1 = 0$ et $c_2 = n$ donc $M_c = M_n$. Considérons une classe de Grothendieck $\epsilon > 0$ inférieure à la plus petite valeur critique. Si $\Lambda = (\Gamma, F)$ est un système cohérent ϵ -stable, le faisceau F sous-jacent est semi-stable. Par suite, on obtient un morphisme $f : S_\epsilon \rightarrow M_c$ qui associe à la classe du système cohérent (Γ, F) la classe du faisceau $F(-\ell)$.

THÉORÈME 3.7. — *Si $3 \leq n < (\ell + 1)(\ell + 2)$, le morphisme $f : S_\epsilon \rightarrow M_c$ est surjectif; de plus, on a $f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon}) = \mathcal{O}_{M_c}$.*

Preuve. — Si F est un faisceau stable de classe c , la condition $n < (\ell + 1)(\ell + 2)$ signifie que $\chi(F(\ell)) > 0$ et par suite on peut considérer

les systèmes cohérents $\Lambda = (\Gamma, F(\ell))$ avec $\Gamma \subset H^0(F(\ell))$. Ces systèmes cohérents sont obligatoirement ϵ -stables. Il en résulte que la fibre de f au-dessus du point défini par F est isomorphe à l'espace projectif (des droites) $\mathbb{P}(H^0(F(\ell)))$. Le morphisme f est par suite surjectif au-dessus de l'ouvert $U \subset M_c$ des faisceaux stables et il vérifie $f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon})|_U = \mathcal{O}_U$. Par conséquent f est surjectif. Considérons la décomposition de Stein du morphisme $f : S_\epsilon \rightarrow M' = \text{Spec}(f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon})) \rightarrow M_c$. La variété S_ϵ est intègre, donc M' est intègre. Le morphisme birationnel $M' \rightarrow M_c$ est fini, et isomorphisme au-dessus de U . La variété M_c est normale. On déduit que le morphisme $M' \rightarrow M_c$ est un isomorphisme, c'est-à-dire que $f_*(\mathcal{O}_{S_\epsilon}) = \mathcal{O}_{M_c}$. \square

3.7. Le fibré déterminant.

Si a n'est pas valeur critique, on sait qu'il existe un système cohérent universel paramétré par l'espace de modules S_a . On l'écrit sous la forme $(\mathcal{V}, \mathcal{F}(\ell))$, où \mathcal{V} est un fibré inversible sur S_a , et \mathcal{F} une famille plate de faisceaux cohérents de classe c paramétrée par S_a . On peut donc, pour toute classe $u \in c^\perp$ dans $K(\mathbb{P}_2)$, de dimension 1, (l'orthogonal est pris relativement à la forme quadratique sur $K(\mathbb{P}_2)$) définir un fibré déterminant $\mathcal{D}_{a,u}$ sur S_a par la formule

$$\mathcal{D}_{a,u} = \lambda_{\mathcal{F}}(-u) = \det p_{1!}(\mathcal{F} \cdot p_2^*(-u)).$$

Dans cette formule p_1 et p_2 sont les projections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} S_a \times \mathbb{P}_2 & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{P}_2 \\ \downarrow p_1 & & \\ S_a & & \end{array}$$

et $\mathcal{F}(u) = \mathcal{F} \cdot p_2^*(u)$ désigne la classe (dans le groupe de Grothendieck $K(S_a \times \mathbb{P}_2)$) des classes de faisceaux algébriques cohérents plats sur S_a produit de la classe de \mathcal{F} par l'image réciproque de u par la projection p_2 . Le morphisme

$$p_{1!} : K(S_a \times \mathbb{P}_2) \rightarrow K(S_a)$$

est le morphisme qui associe à la classe d'un faisceau algébrique cohérent \mathcal{F} plat sur S_a la classe de

$$\sum_q (-1)^q R^q p_{1*}(\mathcal{F}).$$

Ces faisceaux de cohomologie sont les faisceaux de cohomologie d'un complexe fini de fibrés vectoriels $Rp_{1*}(\mathcal{F})$. Par la propriété universelle du

fibré déterminant, on a $f^*(\mathcal{D}_u) = \mathcal{D}_{\epsilon, u}$. Soit $\Xi \subset \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ le sous-schéma universel. Soit u la classe du faisceau $\mathcal{O}_H(-1)$, où H est une droite de \mathbb{P}_2 . On note

$$\mathfrak{d} = \lambda_{\mathcal{I}\Xi}(-u) = \lambda_{\mathcal{O}\Xi}(u)$$

le fibré déterminant sur $\text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$. Considérons l'ouvert U de ce schéma de Hilbert où le faisceau \mathcal{R} est localement libre. Cet ouvert est l'espace tout entier pour $\ell = 1$ et il a son complémentaire de codimension $\geq 2\ell$, pour ℓ supérieur à 1. Il est invariant sous l'action du groupe $\text{SL}(3)$.

THÉORÈME 3.8. — *Soit n un entier ≥ 3 . Soit ℓ un entier > 0 tel que $\ell(\ell - 1) \leq n < (\ell + 1)(\ell + 2)$. Alors on a un isomorphisme de $\text{SL}(3)$ -représentations*

$$H^0(M_c, \mathcal{D}) = H^0(U, S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}).$$

Preuve. — D'après le théorème 3.7, on a

$$H^0(M_c, \mathcal{D}) = H^0(S_\epsilon, \mathcal{D}_{\epsilon, u}).$$

Maintenant, d'après le résultat de Min He, les espaces de modules S_a sont des variétés normales : les espaces vectoriels de sections restent inchangés par restriction à un ouvert dont le complémentaire est de codimension ≥ 2 . Puisque les fermés $\Sigma, \Sigma_-,$ et Σ_+ du théorème 3.4 sont de codimension ≥ 2 on voit que la représentation $H^0(S_a, \mathcal{D}_{a, u})$ est indépendante de a . Il reste à voir ce qu'est cette représentation pour $a = a_{\max_-}$. Ceci résulte du calcul du fibré déterminant $\mathcal{D}_{a_{\max_-}, u}$ sur l'espace de modules $S_{a_{\max_-}}$.

LEMME 3.9. — *Soit \mathfrak{a} le fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{R})}(1)$ sur $\mathbb{P}(\mathcal{R})$. Alors*

$$\mathcal{D}_{a_{\max_-}, u} = \mathfrak{a}^{\otimes \ell} \otimes \pi^*(\mathfrak{d}).$$

Preuve du lemme. — Rappelons que $\Xi \subset \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ est le sous-schéma universel, \mathcal{I} le faisceau d'idéaux associé et \mathcal{R} est le faisceau algébrique cohérent $R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{I}(2\ell - 3))$. Considérons l'extension canonique sur $\mathbb{P}(\mathcal{R}) \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \boxtimes \mathcal{O}(-\ell) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow (\pi \times \text{id}_{\mathbb{P}_2})^*(\mathcal{I}(0, \ell)) \rightarrow 0$$

où $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{R}) \rightarrow \text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$ est le morphisme canonique. La classe u est celle du faisceau $\mathcal{O}_H(-1)$, où H est une droite de \mathbb{P}_2 . On a alors par changement de base

$$\mathcal{D}_{a_{\max_-}, u} = \mathfrak{a}^{\otimes \ell} \otimes \pi^*(\lambda_{\mathcal{O}\Xi}(u \otimes \mathcal{O}(\ell))).$$

Dans $K(\mathbb{P}_2)$, on a $[u \otimes \mathcal{O}(\ell)] - [u] = \ell \cdot \eta^2$. D'après [LeP2], prop. 2.9, $\lambda_{\mathcal{O}_{\Xi}}(u \otimes \mathcal{O}(\ell)) = \lambda_{\mathcal{O}_{\Xi}}(u)$. Le fibré inversible $\lambda_{\mathcal{O}_{\Xi}}(u)$ est le fibré déterminant \mathfrak{d} . Ceci démontre le lemme. \square

Il reste maintenant à enlever le fermé image réciproque du lieu de Brill-Noether B , qui est de codimension ≥ 2 , pour obtenir le résultat du théorème. \square

4. Sections de $S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ sur le schéma de Hilbert.

Le but de cette section est de terminer la démonstration du théorème 1.1. On supposera partout dans la suite que $n \geq 3$. On sait par le théorème 3.8 que pour $\ell(\ell - 1) \leq n < (\ell + 1)(\ell + 2)$, on a un isomorphisme $H^0(M_n, \mathcal{D}) = H^0(U, S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$ où U est l'ouvert du schéma de Hilbert $\text{Hilb}^{n+\ell^2}(\mathbb{P}_2)$ où le faisceau \mathcal{R} est localement libre. Cet ouvert a son complémentaire de codimension $\geq 2\ell$. Il est invariant sous l'action de $SL(3)$.

Lorsqu'il n'est pas spécifié, les produits tensoriels de faisceaux algébriques considérés sont des produits tensoriels sur le faisceau structural du schéma de base. Les fibrés vectoriels sont identifiés à des faisceaux localement libres de rang fini.

On va se concentrer maintenant sur ce nouvel espace de sections $H^0(U, S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$. On note $m = n + \ell^2$.

Soit $\Xi \subset \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ le sous-schéma universel, $\text{pr}_1 : \Xi \rightarrow \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ et $\text{pr}_2 : \Xi \rightarrow \mathbb{P}_2$ les deux projections, et \mathcal{I} le faisceau d'idéaux associé. Le faisceau \mathcal{R} est défini comme $\mathcal{R} = R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{I}(2\ell - 3))$. On note $k = 2\ell - 3$. En partant de la suite exacte fondamentale associée à Ξ sur $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$:

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_{\Xi} \rightarrow 0$$

tensorisée par $\text{pr}_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k))$ et restreinte à l'ouvert $U \times \mathbb{P}_2$ de $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \times \mathbb{P}_2$ on trouve la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}(k)|_{U \times \mathbb{P}_2} \rightarrow \mathcal{O}(k)|_{U \times \mathbb{P}_2} \rightarrow \mathcal{O}_{\Xi}(k)|_{U \times \mathbb{P}_2} \rightarrow 0.$$

Par image directe sur U par la projection pr_1 , on obtient une présentation $SL(3)$ -équivariante de \mathcal{R} sur U :

$$0 \rightarrow \text{pr}_{1*}(\mathcal{I}(k)) \rightarrow \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}(k)) \rightarrow \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi}(k)) \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow R^1 \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}(k)) \rightarrow 0.$$

Par définition de U on a $H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{I}_Z(k)) = 0$ pour les schémas $Z \in U$, donc par le théorème de semi-continuité on a une suite exacte de faisceaux

localement libres sur U :

$$(3) \quad 0 \rightarrow H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(k)) \otimes \mathcal{O}_U \rightarrow \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi}(k))|_U \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow 0.$$

On obtient par suite une résolution $SL(3)$ -équivariante de $S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ par le complexe de Koszul K^\cdot défini en degré i par $K^{-i} = \Lambda^i S^k E \otimes S^{\ell-i}(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$ pour $i = 0, \dots, \ell$ où $\mathcal{O}(k)^{[m]} = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi}(k))$, $E = H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$:

$$(4) \quad K^\cdot \rightarrow S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}.$$

Par suite la cohomologie de $S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$ se calcule à l'aide de la suite spectrale $E_1^{p,q} = H^q(K^p)$ dont l'aboutissement en degré 0 est $H^0(U, S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$.

Pour les faisceaux localement libres K^{-i} on va se placer indifféremment sur les restrictions à U ou sur $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ tout entier, puisqu'on s'intéresse seulement à la cohomologie de ces faisceaux jusqu'en degré ℓ ; comme le complémentaire de U est de codimension $\geq 2\ell$, celle-ci coïncide sur U avec la cohomologie sur tout $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ jusqu'en degré $2\ell - 2$, par les propriétés de la cohomologie locale ([Grot]). Pour $\ell = 1$, $U = \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$.

LEMME 4.1. — Pour $q > 0$, $H^q(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathfrak{d}) = 0$ et $H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathfrak{d}) = S^m E$.

Preuve du lemme. — Soit HC le morphisme de Hilbert-Chow, $HC : \text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2) \rightarrow S^m(\mathbb{P}_2)$ qui associe à un schéma fini Z le cycle $\sum_{x \in \mathbb{P}_2} lg Z_x x$ dans $S^m(\mathbb{P}_2)$, la puissance symétrique m -ième de \mathbb{P}_2 . Naturellement, l'espace $S^m(\mathbb{P}_2)$ est le quotient de la puissance m -ième \mathbb{P}_2^m de \mathbb{P}_2 par le groupe symétrique \mathfrak{S}_m . Il est constitué de cycles, combinaisons linéaires de points distincts x_i de \mathbb{P}_2 ,

$$\sum_{\sum_i \lambda_i = m} \lambda_i [x_i],$$

à coefficients $\lambda_i > 0$. Le support d'un schéma fini de longueur m est un tel cycle, si on tient compte des multiplicités des points. Le morphisme de Hilbert-Chow vérifie $HC_* \mathcal{O}_{\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)} = \mathcal{O}_{S^m(\mathbb{P}_2)}$ et (cf. [LeP2])

$$(5) \quad HC^*(\mathcal{O}(1, 1, \dots, 1)^{\mathfrak{S}_m}) = \mathfrak{d}.$$

Mais $S^m(\mathbb{P}_2)$ est à singularités rationnelles en tant que quotient d'une variété lisse par un groupe fini ([Bout]). Par suite $R^p HC_* \mathcal{O}_{\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)} = 0$ pour $p > 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} H^q(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathfrak{d}) &= H^q(S^m(\mathbb{P}_2), HC_*(\mathfrak{d})) \\ &= H^q(\mathbb{P}_2^m, \mathcal{O}(1, \dots, 1)^{\mathfrak{S}_m}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ S^m E & \text{si } q = 0. \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

Dans [D1], il est démontré que

$$H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}) = S^{2\ell-2}E \otimes S^{m-1}E$$

et que $H^q(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}) = 0$ pour $q > 0$. Comme annoncé dans l'introduction (th. 1.3), on montrera aussi que

$$H^1(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^2(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}) = 0$$

et on calculera

$$H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^2(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}) \text{ et } H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}).$$

On peut ainsi calculer

$$H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$$

pour $\ell = 1, 2, 3$. Pour aller plus loin on se heurte à des difficultés liées au calcul des $H^q(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^\ell(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ pour $q = 0, \ell > 3$ ou $q > 0, \ell > 1$.

Ceci limite le calcul du $H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^\ell \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d})$ à $\ell = 3$ ce qui restreint les valeurs de n à $n \leq 19$. On commence par remarquer que pour le calcul d'un espace de sections d'un fibré sur $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ on peut se placer sur un grand ouvert de $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, pourvu que cet ouvert ait un complémentaire de codimension au moins 2. Ceci est le cas pour l'ouvert $\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$ formé par les schémas avec au plus un point multiple, qui soit double, soit les schémas dont le cycle correspondant est $x_1 + x_2 + \dots + x_m$ ou $2x_1 + x_3 + x_4 + \dots + x_m$ avec x_i distincts. On note $S_*^m(\mathbb{P}_2)$ l'ouvert des cycles de cette forme. L'avantage d'utiliser $\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$ est qu'on peut le décrire comme quotient q de l'éclaté B de $\mathbb{P}_{2*}^m = p^{-1}(S_*^m(\mathbb{P}_2))$ (où $p : \mathbb{P}_2^m \rightarrow S^m(\mathbb{P}_2)$ est le quotient de \mathbb{P}_2^m sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_m) selon la réunion D des diagonales $\Delta_{ij} = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{P}_{2*}^m \mid x_i = x_j\}$ pour $i < j$, disjointes dans \mathbb{P}_{2*}^m . On note ρ cet éclatement. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{P}_{2*}^m \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ \text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2) & \xrightarrow{HC} & S_*^m(\mathbb{P}_2) . \end{array}$$

On montrera comment, à l'aide de cette description, on peut ramener les calculs de la cohomologie des fibrés sur $\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$ à des calculs des invariants de la cohomologie de certains faisceaux sur \mathbb{P}_{2*}^m . On utilise les mêmes notations $\text{Hilb}_*^m(X)$ et X_*^m pour une surface quelconque X .

4.1. Une filtration.

On introduit ici des notations et des résultats très utiles pour la suite. On va se placer dans le cadre général d'une variété algébrique lisse M , munie d'un fibré de rang r , W , et d'un fibré L sur une sous-variété lisse D de M . Dans les applications, la sous-variété D sera la réunion des diagonales $\cup_{i < j} \Delta_{ij} \subset X_*^m$. On note W_D la restriction de W à D .

On considère un morphisme surjectif $\epsilon : W \rightarrow L$. Le noyau de ce morphisme définit un faisceau sans torsion V . Ce morphisme induit un morphisme surjectif de fibrés en algèbres graduées

$$\text{Sym } \epsilon : \text{Sym } W = \bigoplus_{i \geq 0} S^i W \rightarrow \text{Sym } L = \bigoplus_{i \geq 0} S^i L,$$

noté encore ϵ . On note I le faisceau noyau.

Remarque 4.2. — Le faisceau I est engendré par V , donc I^k est engendré par $S^k V$.

Considérons la filtration $F^k \text{Sym } W = I^k \text{Sym } W$, pour $k \geq 0$; elle est compatible avec la graduation.

PROPOSITION 4.3. — Soit \mathcal{N} le fibré conormal de D dans M et K le noyau du morphisme canonique $\epsilon|_D$ (noté encore ϵ): $W_D \rightarrow L$. Le gradué associé à cette filtration $\text{gr}_p(\text{Sym } W) = I^p/I^{p+1}$ admet une filtration décroissante dont les gradués associés sont

$$(6) \quad \text{gr}_q(\text{gr}_p(\text{Sym } W)) = \text{gr}_q(I^p/I^{p+1}) = S^q \mathcal{N} \otimes S^{p-q} K[-p+q] \otimes \text{Sym } L$$

si $p \geq q \geq 0$ et 0 sinon.

Preuve. — Afin de décrire le gradué associé à cette filtration on va considérer $\text{Sym } W$ comme image directe du faisceau structural \mathcal{O}_{W^*} sur l'espace total du fibré dual W^* , par la projection canonique $p : W^* \rightarrow M$, et $\text{Sym } L$ comme image directe du faisceau structural \mathcal{O}_{L^*} sur l'espace total du fibré dual L^* , par la restriction de p à $L^* \subset W^*$, notée encore $p : L^* \rightarrow D$.

On désigne par W_D la restriction de W à D . Considérons les inclusions de variétés lisses

$$(7) \quad L^* \subset W_D^* \subset W^*$$

et désignons par \mathcal{I} l'idéal de L^* dans W^* , par \mathcal{J} l'idéal de W_D^* dans W^* , et par \mathcal{I}_D l'idéal de L^* dans W_D^* . On a une suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{r}$

$\mathcal{I}_D \rightarrow 0$ où r est le morphisme de restriction. On considère les filtrations de \mathcal{O}_{W^*} et $\mathcal{O}_{W_D^*}$ définies par les puissances des idéaux \mathcal{I} et \mathcal{I}_D .

Comme p est un morphisme affine, W^* est un schéma affine sur M , il y a une correspondance entre les faisceaux d'idéaux de \mathcal{O}_{W^*} et les idéaux de $\text{Sym } W$ donnée par $\mathcal{I} \mapsto p_*(\mathcal{I})$. L'idéal \mathcal{I} se correspond ainsi à I et \mathcal{I}^k à I^k . De cette façon, la filtration de $\text{Sym } W = p_*(\mathcal{O}_{W^*})$ définie par image directe coïncide avec la filtration définie par l'idéal $I = p_*(\mathcal{I})$ noyau du morphisme ϵ . Les fibrés conormaux correspondant aux inclusions (7) s'écrivent $\mathcal{N}_{L^*/W^*} = \mathcal{N}_{L^*/W^*}^* = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, $\mathcal{N}_{W_D^*/W^*} = \mathcal{N}_{W_D^*/W^*}^* = \mathcal{J}/\mathcal{J}^2$, $\mathcal{N}_{L^*/W_D^*} = \mathcal{N}_{L^*/W_D^*}^* = \mathcal{I}_D/\mathcal{I}_D^2$ et on a une suite exacte

$$(8) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N}_{W_D^*/W^*}^*|_{L^*} \rightarrow \mathcal{N}_{L^*/W^*} \rightarrow \mathcal{N}_{L^*/W_D^*} \rightarrow 0.$$

Le fibré conormal $\mathcal{N}_{W_D^*/W^*}^*|_{L^*}$ s'identifie à $p^*(\mathcal{N})$ et \mathcal{N}_{L^*/W_D^*} à $p^*(K)$. La suite (8) devient

$$(9) \quad 0 \rightarrow p^*(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow p^*(K) \rightarrow 0.$$

À partir de cette suite exacte on obtient une filtration décroissante du \mathcal{O}_{L^*} -module $S^p(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = \mathcal{I}^p/\mathcal{I}^{p+1} = \text{gr}_p(\mathcal{O}_{W^*})$ par des \mathcal{O}_{L^*} -modules

$$\begin{aligned} F^q(S^p \mathcal{N}_{L^*/W^*}) &= \text{Im}((\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)^{\otimes q} \otimes (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^{\otimes (p-q)} \rightarrow S^p(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)) \\ &= \text{Im}(\mathcal{J}^q \mathcal{I}^{p-q} \rightarrow \mathcal{I}^p/\mathcal{I}^{p+1}) \end{aligned}$$

si $p \geq q \geq 0$ et 0 sinon, de gradué associé

$$\text{gr}_q(S^p(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)) = S^q \mathcal{N}_{W_D^*/W^*} \otimes S^{p-q} \mathcal{N}_{L^*/W_D^*} = p^*(S^q \mathcal{N} \otimes S^{p-q} K)$$

si $p \geq q \geq 0$ et 0 sinon. Par application du foncteur image directe p_* qui est exact puisqu'il s'agit d'un morphisme affine, on obtient une filtration de $p_*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^{p+1}) = I^p/I^{p+1}$ dont le gradué en degré q est le $\text{Sym } L$ -module gradué fourni par la formule de projection

$$\text{gr}_q(I^p/I^{p+1}) = S^q \mathcal{N} \otimes S^{p-q} K[-p+q] \otimes \text{Sym } L$$

si $p \geq q \geq 0$ et 0 sinon. Pour comprendre le décalage qui apparaît dans la graduation de $p_*(p^*(S^q \mathcal{N} \otimes S^{p-q} K)) = S^q \mathcal{N} \otimes S^{p-q} K \otimes \text{Sym } L$ il faut comprendre l'action de \mathbb{C}^* sur le fibré conormal $\mathcal{N}_{L^*/W_D^*} = p^*(K)$ et sur le fibré conormal \mathcal{N} . L'action de \mathbb{C}^* sur L^* , W_D^* et W^* est par homothétie, d'où une action sur les trois fibrés normaux et respectivement conormaux. Sur M et D , et par conséquent sur \mathcal{N} , \mathbb{C}^* agit trivialement. Donc la composante homogène de degré i de $p_*(p^*(\mathcal{N}))$ est $\mathcal{N} \otimes \text{Sym}^i L$. Sur $\mathcal{N}_{L^*/W_D^*} = p^*(K)$, l'action est donnée par $\lambda \cdot (x, v) = (\lambda x, \lambda^{-1} v)$ pour $x \in L^*$ et $v \in K_{p(x)}$. Donc la composante homogène de degré i de $p_*(p^*(S^p K))$ est donnée par $S^p K \otimes \text{Sym}^{i-p} L$ si $i \geq p$. \square

Remarque 4.4. — Considérons maintenant un fibré inversible \mathcal{A} sur M . Alors on a un morphisme de Sym W -modules gradués

$$\mathcal{M} = \text{Sym } W \otimes \mathcal{A} \rightarrow \text{Sym } L \otimes \mathcal{A}$$

de noyau $I\mathcal{M}$. Considérons la filtration $I^k\mathcal{M}$. Cette filtration est compatible avec la graduation et le morphisme canonique

$$\Phi : S^k V|_D \otimes_{\mathcal{O}_D} \text{Sym } L[-k] \otimes \mathcal{A}|_D \rightarrow I^k \mathcal{M} / I^{k+1} \mathcal{M}$$

est un isomorphisme en degré $\geq k$.

4.2. Éclatement de M le long de D .

On considère l'éclatement $\rho : \widetilde{M} \rightarrow M$ de M le long de D , et les images réciproques \widetilde{W} et $\widetilde{\mathcal{L}}$ de W et \mathcal{L} par ρ : $\widetilde{W} = \rho^*(W)$, $\widetilde{\mathcal{L}} = \rho^*(\mathcal{L})$. On note \widetilde{V} le noyau du morphisme surjectif, noté encore ϵ , de \widetilde{W} dans $\widetilde{\mathcal{L}}$. Puisque le support de $\widetilde{\mathcal{L}}$ est un diviseur (le diviseur exceptionnel \mathbf{E}), \widetilde{V} est localement libre. De manière analogue, on considère le noyau \widetilde{I} de $\epsilon : \text{Sym } \widetilde{W} \rightarrow \text{Sym } \widetilde{\mathcal{L}}$, et la filtration \widetilde{I}^k de $\text{Sym } \widetilde{W}$.

LEMMA 4.5.

(i) *Le morphisme canonique $\rho^* : \text{Sym } W \rightarrow \rho_*(\text{Sym } \widetilde{W})$ induit un isomorphisme $I^k \xrightarrow{\sim} \rho_*(\widetilde{I}^k)$.*

(ii) *Les images directes $R^q \rho_*(\widetilde{I}^k)$ sont nulles pour $q > 0$.*

Preuve. — L'éclatement ρ vérifie $\rho_*(\mathcal{O}_{\widetilde{M}}) = \mathcal{O}_M$ et $R^q \rho_*(\mathcal{O}_{\widetilde{M}}) = 0$ pour $q > 0$, d'après le lemme 3.5 de [SGA], exposé VII. On a alors, par la formule de projection, un morphisme

$$\text{Sym } W \xrightarrow{\sim} \rho_*(\rho^* \text{Sym } W) = \rho_*(\text{Sym } \widetilde{W})$$

qui est un isomorphisme et de même pour $\text{Sym } \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \rho_*(\text{Sym } \widetilde{\mathcal{L}})$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & \text{Sym } W & \xrightarrow{\epsilon} & \text{Sym } \mathcal{L} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \\ 0 & \longrightarrow & \rho_*(\widetilde{I}) & \longrightarrow & \rho_*(\text{Sym } \widetilde{W}) & \xrightarrow{\rho_* \epsilon} & \rho_*(\text{Sym } \widetilde{\mathcal{L}}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

qui nous assure que $\rho_* \epsilon$ est surjectif et qu'il y a aussi un isomorphisme $I \xrightarrow{\sim} \rho_*(\widetilde{I})$. D'où un morphisme $I^k \rightarrow \rho_*(\widetilde{I}^k)$.

On suppose par récurrence que pour tout $i \leq k$ on a le résultat (pour $k = 0$ ceci est clair : $\text{Sym } W \xrightarrow{\sim} \rho_*(\text{Sym } \widetilde{W})$ et $R^q \rho_*(\text{Sym } \widetilde{W}) = 0$ pour

$q > 0$) et on va le prouver pour $k + 1$. On a un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I^{k+1} & \longrightarrow & I^k & \longrightarrow & I^k/I^{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow a & & \downarrow \sim, b & & \downarrow c \\
 0 & \longrightarrow & \rho_*(\tilde{I}^{k+1}) & \longrightarrow & \rho_*(\tilde{I}^k) & \xrightarrow{d} & \rho_*(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1}) \longrightarrow R^1\rho_*(\tilde{I}^{k+1}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

où b est un isomorphisme. On commence par prouver que c est un isomorphisme et que

$$R^q\rho_*(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1}) = 0$$

pour $q > 0$. On en déduira que d est surjectif d'où a sera un isomorphisme et $R^q\rho_*(\tilde{I}^{k+1}) = 0$ pour $q > 0$.

Mais on a construit dans la précédente section une filtration de chacun des faisceaux I^k/I^{k+1} et $\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1}$ de gradués connus. Ces faisceaux sont supportés par D et \mathbf{E} respectivement et le morphisme ρ en restriction à D s'écrit comme $\rho : \mathbf{E} = \mathbb{P}(\mathcal{N}_D^*) \rightarrow D$. Le noyau \tilde{K} de $\tilde{W}|_{\mathbf{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ s'identifie à l'image réciproque de K . Le fibré conormal à \mathbf{E} , $\mathcal{N}_{\mathbf{E}}$, est dans ce cas le fibré $\mathcal{O}(1)$ relatif sur cet espace projectif (on a pris le projectif de Grothendieck). La filtration \tilde{F}^j de $\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1}$ est de gradué

$$\text{gr}_j(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1}) = S^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}} \otimes S^{k-j}\tilde{K}[-k+j] \otimes \text{Sym } \tilde{\mathcal{L}}$$

si $k \geq j \geq 0$ et 0 sinon.

Comme

$$R^q\rho_*(\text{gr}_j(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1})) = R^q\rho_*(S^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}}) \otimes S^{k-j}K[-k+j] \otimes \text{Sym } \mathcal{L}$$

et que $\rho_*(S^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}}) = S^j\mathcal{N}_D$ et $R^q\rho_*(S^j\mathcal{N}_{\mathbf{E}}) = 0$ pour $q > 0$ on obtient une filtration $F^j = \rho_*(\tilde{F}^j)$ de $\rho_*(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1})$ de gradué

$$\rho_*(\text{gr}_j(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1})) = S^j\mathcal{N}_D \otimes S^{k-j}K[-k+j] \otimes \text{Sym } \mathcal{L} = \text{gr}_j(I^k/I^{k+1})$$

si $k \geq j \geq 0$ et 0 sinon, et telle que $R^q\rho_*(F^j) = 0$ si $q > 0$, pour tout j . En particulier pour $j = 0$ on obtient que $R^q\rho_*(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1}) = 0$ pour $q > 0$. Le morphisme c est compatible avec les filtrations et induit l'identité sur les gradués, d'où aussi l'isomorphisme $c : I^k/I^{k+1} \xrightarrow{\sim} \rho_*(\tilde{I}^k/\tilde{I}^{k+1})$. □

COROLLAIRE 4.6.

(i) *L'image de l'inclusion canonique $\phi : \rho_*(S^k\tilde{V}) \hookrightarrow S^k W$ est exactement $(I^k)_k$.*

(ii) *$R^q\rho_*(S^k\tilde{V}) = 0$ pour $q > 0$.*

Preuve. — Cela revient à écrire les résultats du lemme 4.5 en degré k en tenant compte de l'observation 4.2 et du fait que $S^k\tilde{\tau} : S^k\tilde{V} \hookrightarrow S^k\tilde{W}$ reste une inclusion, où $\tilde{\tau}$ est l'inclusion de \tilde{V} dans \tilde{W} . □

4.3. Calculs de cohomologie sur $\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$.

On appliquera ici les résultats des deux sections précédentes à notre situation particulière. On n'aura pas besoin ici de se placer sur le plan projectif. Les résultats restent valables sur une surface algébrique lisse quasi-projective quelconque X . La description de $\text{Hilb}_*^m(X)$ se fait alors exactement comme pour \mathbb{P}_2 , en utilisant l'éclatement B de X_*^m :

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\rho} & X_*^m \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ \text{Hilb}_*^m(X) & \xrightarrow{HC} & S_*^m(X). \end{array}$$

On considère plus généralement le fibré $L^{[m]}$ sur $\text{Hilb}^m(X)$ associé à un fibré L sur X ,

$$L^{[m]} = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi} \otimes \text{pr}_2^*(L))$$

où pr_1 et pr_2 sont les deux projections du schéma universel $\Xi \subset \text{Hilb}^m(X) \times X$ sur $\text{Hilb}^m(X)$ et respectivement X .

On garde les notations introduites juste avant la section 4.1 pour les diagonales D et Δ_{ij} de X_*^m . Sur B , le diviseur exceptionnel E se décompose en composantes disjointes $E = \bigcup_{i < j} E_{i,j}$. Alors le schéma universel $\Xi_B \subset B \times X$, paramétré par B , a m composantes irréductibles Ξ_i et la projection $\text{pr}_1 : \Xi_i \cap \Xi_j \rightarrow E_{i,j}$ est un isomorphisme. On en déduit une suite exacte sur $B \times X$:

$$(10) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\Xi_B} \rightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_{\Xi_i} \rightarrow \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}_{E_{i,j}} \rightarrow 0$$

et comme, par changement de base, $q^*(L^{[m]}) = \text{pr}_{1*}(\mathcal{O}_{\Xi_B} \otimes \text{pr}_2^*(L))$, on a, après tensorisation par $\text{pr}_2^*(L)$ de la suite (10) et image directe par pr_1 , une suite exacte sur B :

$$0 \rightarrow q^*(L^{[m]}) \rightarrow \bigoplus_i p_i^*(L) \rightarrow \bigoplus_{i < j} p_{i,j}^*(L_{\Delta}) \rightarrow 0$$

où p_i désigne aussi bien la i -ème projection $X_*^m \rightarrow X$ que sa composée avec $\rho : B \rightarrow X$; de même pour $p_{i,j} : X_*^m \rightarrow X \times X$ et $p_{i,j} : B \rightarrow X \times X$.

Le sous-schéma Ξ_i est l'image réciproque de la diagonale Δ de $X \times X$ par l'application (p_i, id_X) . Le fibré L_{Δ} est l'image réciproque de L par l'une des projections de la diagonale de $X \times X$ sur X , qui sont des isomorphismes.

Le fibré $\tilde{\mathcal{L}} = \bigoplus_{i < j} p_{i,j}^*(L_{\Delta})$ a pour support le diviseur exceptionnel E . Il est l'image réciproque par ρ du fibré $\mathcal{L} = \bigoplus_{i < j} p_{i,j}^*(L_{\Delta})$ sur X_*^m , dont le support est D .

On note aussi \widetilde{W} et W le fibré $\oplus_i p_i^*(L)$ sur B et sur X_*^m respectivement. On note $L_i = p_i^*(L)$ et $L_{ij} = p_{i,j}^*(L_\Delta)$. On se place maintenant dans la situation décrite au paragraphe 4.1. On prend pour M la variété X_*^m , $\widetilde{M} = B$, et le fibré $\widetilde{V} = q^*(L^{[m]})$. Le morphisme ϵ est :

$$\begin{aligned} W = \bigoplus_i L_i &\rightarrow \mathcal{L} = \bigoplus_{i < j} L_{ij} \\ (s_i)_i &\mapsto ((s_i - s_j)|_{\Delta_{ij}})_{i,j}. \end{aligned}$$

Il est surjectif. Comme dans 4.1, V désigne le noyau de ϵ . Le groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_m$ opère sur la situation. Toutes les filtrations qui interviennent sont invariantes sous l'action de G , et les morphismes sont G -équivariants. On munit $\mathcal{L} = \bigoplus_{i < j} L_{ij}$ de l'action de G par laquelle la transposition $\tau_{i,j}$ envoie les sections locales du fibré L_{ij} dans leurs opposées. C'est la seule action qui rend le morphisme ϵ équivariant. Ainsi \mathcal{L} n'a pas de sections locales \mathfrak{S}_m -invariantes, donc le faisceau des invariants \mathcal{L}^G sur $S_*^m(X)$ est nul. Le groupe G étant fini, la cohomologie du faisceau des invariants F^G sur $\text{Hilb}_*^m(X)$ (ou sur $S_*^m(X)$), où F est un G -faisceau algébrique cohérent sur B (ou sur X_*^m) s'identifie aux invariants de la cohomologie de F . Par suite le faisceau \mathcal{L} n'a pas de cohomologie \mathfrak{S}_m -invariante.

Le théorème suivant, annoncé dès l'introduction, nous montre comment on peut ramener le calcul de la cohomologie de $S^\ell(L^{[m]})$ sur $\text{Hilb}_*^m(X)$ à un calcul de cohomologie invariante sur X_*^m :

THÉORÈME 1.2.

(i) Il existe une inclusion canonique $HC_*(S^\ell(L^{[m]})) \hookrightarrow S^\ell W$ sur $S_*^m(X)$, dont l'image est exactement $(I^\ell)_\ell^G$, partie homogène de degré ℓ de $(I^\ell)^G$.

(ii) $R^i HC_*(S^\ell(L^{[m]}))|_{S_*^m X} = 0$ pour $i > 0$.

Preuve. — Le foncteur image directe invariante q_*^G est défini comme il suit : pour un faisceau F sur B , et un ouvert U de $\text{Hilb}_*^m(X)$, $q_*^G(F)(U) = (F(q^{-1}(U)))^G$, où $q^{-1}(U)$ est automatiquement un ouvert G -invariant de B . En utilisant les propriétés des variétés quotient par un groupe fini, on obtient $\mathcal{O}_B^G = q_*^G(\mathcal{O}_B) = \mathcal{O}_{\text{Hilb}_*^m(X)}$ d'où $q_*^G(S^\ell \widetilde{V}) = S^\ell(L^{[m]})$.

On en déduit que $HC_*(S^\ell(L^{[m]})) = HC_* q_*^G(S^\ell \widetilde{V}) = p_*^G \rho_*(S^\ell \widetilde{V})$ qui se plonge canoniquement dans $p_*^G(S^\ell W)$, avec $p_*^G((I^\ell)_\ell) = (I^\ell)_\ell^G$ pour image. Les morphismes p et q sont finis donc leurs images directes supérieures sont nulles. Par composition des foncteurs dérivés $RHC_*, Rp_*^G = p_*^G, R\rho_*$

et $Rq_*^G = q_*^G$ on trouve que

$$\begin{aligned} RHC_*(S^\ell(L^{[m]})) &= RHC_*(q_*^G(S^\ell\tilde{V})) = RHC_* \circ Rq_*^G(S^\ell\tilde{V}) \\ &= Rp_*^G \circ R\rho_*(S^\ell\tilde{V}) = p_*^G R\rho_*(S^\ell\tilde{V}) \end{aligned}$$

d'où la nullité des $R^i HC_*(S^\ell(L^{[m]}))$ pour $i > 0$ sur $S_*^m(X)$. \square

COROLLAIRE 4.7.

$$(i) \ H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^\ell(L^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = H^0(\mathbb{P}_2^m, (I^\ell)_\ell \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

$$(ii) \ H^q(\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2), S^\ell(L^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = H^q(\mathbb{P}_{2*}^m, (I^\ell)_\ell \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

pour $q > 0$.

Preuve. — Compte tenu du fait que $\mathfrak{d} = HC^*(\mathcal{O}(1, \dots, 1))^G$ il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} R^q HC_*(S^\ell(L^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) &= R^q HC_*(S^\ell(L^{[m]})) \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s)^G \\ &= ((I^\ell)_\ell \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \end{aligned}$$

si $q = 0$ et 0 sinon, et d'utiliser les propriétés de cohomologie locale pour (i) et la suite spectrale de Leray pour (ii). \square

COROLLAIRE 4.8. — *Le théorème 1.1 est vrai pour $n \leq 11$.*

Remarque 4.9. — La démonstration utilise le corollaire 5.8 qui sera démontré au paragraphe 5.4, mais nous préférons la donner ici pour motiver le travail fait dans la section 5.

Preuve du théorème 1.1 pour $n \leq 11$. — Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 4.10.

i) La $SL(3)$ -représentation $H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$ est isomorphe à $S^{k+s}E \otimes S^{m-1}(S^s E)$.

ii) On a pour $k + s \geq -2$ et $s \geq -2$,

$$H^1(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = 0.$$

On rappelle que $\mathcal{O}(k)^{[m]}$ a été défini dans la section 4, que \mathfrak{d} est le fibré déterminant sur $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$ défini par l'équation (5) et $E = H^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$ est la représentation standard de $SL(3)$.

Preuve.

i) On applique le corollaire 4.7 pour $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k)$. On tensorise la suite exacte $0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ par $\mathcal{O}(s, \dots, s)$ et on écrit la suite exacte de cohomologie invariante. On a vu que \mathcal{L} n'avait pas de cohomologie \mathfrak{S}_m -invariante. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^q(\mathbb{P}_2^m, V \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \\ &= \mathbf{H}^q(\mathbb{P}_2^m, \bigoplus_i \mathcal{O}(s, \dots, k + s, s, \dots, s))^G \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathbf{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(k + s)) \otimes \mathbf{S}^{m-1} \mathbf{H}^0(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(s)) & \text{si } q = 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathbf{S}^{k+s} E \otimes \mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{S}^s E) & \text{si } q = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ii) On trouve aussi

$$\mathbf{H}^q(\mathbb{P}_{2*}^m, V \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G = \mathbf{H}^q(\mathbb{P}_2^m, V \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

pour $q \leq 2$ (puisque le complémentaire de l'ouvert \mathbb{P}_{2*}^m dans \mathbb{P}_2^m est de codimension 4). Le membre de droite est nul pour $q > 0$, donc celui de gauche est nul pour $q = 1$ et $q = 2$. Par le corollaire 4.7 on obtient $\mathbf{H}^1(\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = 0$. Puisque la codimension du complémentaire de cet ouvert est égale à 2, la suite exacte de cohomologie à support donne l'annulation de $\mathbf{H}^1(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathcal{O}(k)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$. \square

Regardons le cas $\ell = 1$. À partir de la présentation (3) de \mathcal{R} , avec k remplacé par $2\ell - 3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $s = 1$ et $m = n + \ell^2 = n + 1$, on obtient $\mathcal{O}(-1)^{[m]} \simeq \mathcal{R}$ et

$$\dim H^0(\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}) = \dim H^0(\mathcal{O}(-1)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}) = \dim \mathbf{S}^n E = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Pour n tel que $3 \leq n \leq 6$, le théorème 3.8 permet donc de conclure.

LEMME 4.11.

i) La $\text{SL}(3)$ -représentation $\mathbf{H}^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathbf{S}^2(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$ est isomorphe au noyau du morphisme surjectif

$$\begin{aligned} & \mathbf{S}^{2k+s} E \otimes \mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{S}^s E) \oplus \mathbf{S}^2(\mathbf{S}^{k+s} E) \otimes \mathbf{S}^{m-2}(\mathbf{S}^s E) \\ & \xrightarrow{(0, \text{mult} \otimes \text{id})} \mathbf{S}^{2k+2s} E \otimes \mathbf{S}^{m-2}(\mathbf{S}^s E), \end{aligned}$$

où mult est la multiplication $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}^r E) \rightarrow \mathbf{S}^{2r} E$.

ii) On a pour $k \geq -1$ et $s \geq 0$,

$$\mathbf{H}^1(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), \mathbf{S}^2(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}) = 0.$$

Preuve. — Il faut calculer cette fois-ci $H^0(\mathbb{P}_2^m, (I^2)_2 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$. On regarde les suites exactes associées à la filtration de S^2W :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow I_2 \rightarrow S^2W \rightarrow \text{gr}_0(S^2W) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow (I^2)_2 \rightarrow I_2 \rightarrow \text{gr}_1(S^2W) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On sait que $\text{gr}_0(S^2W) = S^2\mathcal{L}$. On démontrera plus tard (cor. 5.8) que $\text{gr}_i(S^\ell W)$ n'a pas de cohomologie invariante si $\ell - i$ est impair.

En écrivant les suites exactes de cohomologie invariante, après avoir tensorisé par $\mathcal{O}(s, \dots, s)$, on obtient

$$H^q((I^2)_2 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \simeq H^q(I_2 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G, \forall q \geq 0,$$

et que $H^0(I_2 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$ est le noyau du morphisme

$$\text{mor} : H^0(S^2W \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \rightarrow H^0(S^2\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G.$$

À l'aide du lemme 2.1 ces espaces d'invariants se calculent aisément pour donner

$$\begin{aligned} H^0(S^2W \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G &= S^{2k+s}E \otimes S^{m-1}(S^sE) \oplus S^2(S^{k+s}E) \otimes S^{m-2}(S^sE) \\ H^0(S^2\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G &= S^{2k+2s}E \otimes S^{m-2}(S^sE). \end{aligned}$$

La composante de mor sur le second facteur est induite par le morphisme de restriction

$$H^0(\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2, \mathcal{O}(k+s) \boxtimes \mathcal{O}(k+s)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_D(2k+2s)).$$

Le morphisme mor est alors surjectif et on peut calculer la dimension de son noyau.

ii) L'espace $H^1((I^2)_2 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$ s'injecte dans $H^1(S^2W \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G = 0$: il est donc nul. On obtient donc aussi la nullité de $H^1(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^2(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$. \square

Passons ensuite au cas $\ell = 2$. À partir de la présentation (4) de $S^2\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$, et des annulations de la cohomologie supérieure obtenues, il résulte une suite exacte de représentations

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \Lambda^2 E \otimes H^0(\mathfrak{d}) \rightarrow E \otimes H^0(\mathcal{O}(1)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}) \rightarrow H^0(S^2(\mathcal{O}(1)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}) \\ \rightarrow H^0(U, S^2\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \dim H^0(U, S^2\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}) &= \dim S^3E \otimes S^{n+3}E \oplus S^2(S^2E) \otimes S^{n+2}E \\ &\quad - \dim S^4E \otimes S^{n+2}E - \dim E \otimes S^2E \otimes S^{n+3}E + \dim \Lambda^2 E \otimes S^{n+4}E. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\dim H^0(U, S^2\mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}) = 10 \binom{n+5}{2} + 21 \binom{n+4}{2} - 15 \binom{n+4}{2} - 18 \binom{n+5}{2} + 3 \binom{n+6}{2} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

On a ainsi démontré le théorème pour tout n tel que $3 \leq n \leq 11$. □

Les vraies difficultés apparaissent à partir de $\ell = 3$.

LEMME 4.12. — *La $SL(3)$ -représentation $H^0(\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2), S^3(\mathcal{O}(k)^{[m]})) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s}$ est isomorphe au noyau du morphisme*

$$\alpha : H^0(S^3W \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \rightarrow H^0(\text{gr}_1(S^3W) \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

et $H^1(\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2), S^3(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}^{\otimes s})$ à son conoyau.

Preuve. — On écrit à nouveau les suites associées à la filtration de S^3W :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow I_3 \rightarrow S^3W \rightarrow S^3\mathcal{L} \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow (I^2)_3 \rightarrow I_3 \rightarrow \text{gr}_1(S^3W) \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow (I^3)_3 \rightarrow (I^2)_3 \rightarrow \text{gr}_2(S^3W) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On a $S^3\mathcal{L} = \oplus_{i < j} L_{ij}^{\otimes 3}$. En tenant compte de l'action de \mathfrak{S}_m sur \mathcal{L} on obtient que $S^3\mathcal{L}$ n'a pas de cohomologie \mathfrak{S}_m -invariante. Comme on le verra dans le corollaire 5.8, $\text{gr}_2(S^3W)$ n'a pas de cohomologie invariante non plus. Les suites de cohomologie invariante associées nous fournissent

$$H^q((I^3)_3 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \simeq H^q((I^2)_3 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

pour $q \geq 0$ et

$$H^q(I_3 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \simeq H^q(S^3W \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

pour $q \geq 0$.

Alors l'espace recherché $H^0((I^3)_3 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$ s'obtient comme le noyau du morphisme

$$\alpha : H^0(S^3W \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G \rightarrow H^0(\text{gr}_1(S^3W) \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$$

et puisque $H^1(S^3W \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G = 0$, l'espace $H^1((I^3)_3 \otimes \mathcal{O}(s, \dots, s))^G$ s'obtient comme son conoyau. □

Le cas qui nous intéresse ici est bien sûr $s = 1$. Toute la suite sera consacrée à l'étude minutieuse du morphisme α , afin de déterminer son noyau.

Pour bien comprendre la situation, on examinera d'abord le cas $m = 2$, qui est essentiel pour pouvoir comprendre le cas m général, dans un premier temps sans tensoriser avec le fibré inversible $\mathcal{O}(1, \dots, 1)$.

5. Le noyau du morphisme α .

Dans les sections 5.1–5.5 suivantes on peut choisir X comme étant une surface lisse quasi-projective.

5.1. Le gradué $\text{gr}_1(\mathbb{S}^3W)$.

On se propose de décrire le gradué $\text{gr}_1(\mathbb{S}^3W)$, dans le cas $m = 2$, L fibré inversible sur X . Dans ce cas les ouverts indexés par un étoile coïncident avec les espaces entiers, D est la diagonale Δ de $X \times X$, $\mathcal{L} = L_D = L_\Delta$ et il n'y a pas de confusion si on le note toujours L . Ici $W = L_1 \oplus L_2$. Le gradué $\text{gr}_i(\text{Sym } W)$ est un $\text{Sym } L$ -module; pour $i = 0$, c'est l'algèbre $\text{Sym } L$. On a vu aussi que $\text{gr}_1(\text{Sym } W)$ est \mathcal{N}_D en degré 0 et V_D en degré 1.

Pour comprendre $\text{gr}_1(\mathbb{S}^k W)$ on regarde les $k + 1$ morphismes canoniques de $\mathbb{S}^k W|_D \rightarrow L^{\otimes k}$ qui sont construits de la manière suivante : on considère les deux morphismes canoniques $W|_D = L \oplus L \rightarrow L$ dont l'un, ϵ_+ , est donné par la matrice (id, id) et l'autre, ϵ_- , est donné par la matrice $(\text{id}, -\text{id})$; c'est le morphisme ϵ considéré au paragraphe 4.1. On obtient un isomorphisme $\epsilon : W|_D \rightarrow L \oplus L$ défini par (ϵ_+, ϵ_-) et par suite un isomorphisme

$$\mathbb{S}^k \epsilon : \mathbb{S}^k W|_D \rightarrow \mathbb{S}^k(L \oplus L) = L^{\otimes k} \oplus \dots \oplus L^{\otimes k}$$

dont la i -ème composante dans la somme directe est notée $\epsilon_{i, k-i}$. La dernière composante $\epsilon_{k,0}$ envoie $e_1^i e_2^{k-i}$ en $(-1)^{k-i} e^k$ avec pour $e, e_1 = p_1^*(e), e_2 = p_2^*(e)$ des repères locaux de L, L_1 et respectivement L_2 , et s'étend donc en un morphisme d'algèbres $\text{Sym } W \rightarrow \text{Sym } L$ qui n'est autre que le morphisme d'algèbres considéré auparavant, ϵ_- .

L'avant-dernière composante $\epsilon_{k-1,1}$ définit une dérivation $\text{Sym } W \rightarrow \text{Sym } L$ compatible avec la graduation. En degré k , $\epsilon_{k-1,1}$ envoie $e_1^i e_2^{k-i}$ sur $(i(-1)^{k-i} + (k-i)(-1)^{k-i-1})e^k$ et $\text{Sym } L$ est vu comme $\text{Sym } W$ -module par l'intermédiaire du morphisme ϵ_- . On vérifie alors que

$$\epsilon_{k-1,1}(xy) = \epsilon_{k-1,1}(x)\epsilon_-(y) + \epsilon_-(x)\epsilon_{k-1,1}(y)$$

et comme $\epsilon_-(I)=0$ on obtient que le noyau de $\epsilon_{k-1,1}$ contient $F^2(\text{Sym } W)=I^2\text{Sym } W$. Donc $\epsilon_{k-1,1}$ passe au quotient en une dérivation linéaire sur l'algèbre $\text{Sym } L$, notée encore $\epsilon_+ : \text{gr}_1(\text{Sym } W) \rightarrow \text{Sym } L$ qui est elle aussi compatible avec la graduation; cette propriété, jointe au fait qu'on connaît déjà ϵ_+ sur $V_D = \text{gr}_1(W)$, caractérise la dérivation ϵ_+ .

Le faisceau conormal à D , \mathcal{N}_D , est isomorphe au faisceau Ω^1 des formes différentielles sur X . Un tel isomorphisme s'obtient en associant à la différentielle df d'une fonction régulière sur un ouvert U de X , la section de \mathcal{N}_D définie par la classe $[f_2 - f_1]$ où $f_i = \text{pr}_i^*(f)$. L'image directe par p de la suite (9), écrite en degré k est (c'est un cas particulier de la proposition 4.3) :

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \otimes L^{\otimes k} \rightarrow \text{gr}_1(S^k W) \rightarrow K \otimes L^{\otimes(k-1)} \rightarrow 0$$

et comme ici $K \simeq L$ on obtient une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules

$$(11) \quad 0 \rightarrow \Omega^1 \otimes L^{\otimes k} \rightarrow \text{gr}_1(S^k W) \rightarrow L^{\otimes k} \rightarrow 0$$

où la première flèche se calcule de la manière suivante : pour $f \in \mathcal{O}(U)$ et $s \in H^0(U, L^{\otimes k})$,

$$df \otimes s \mapsto \frac{1}{2}[(f_2 - f_1)(s_1 + (-1)^k s_2)] = (-1)^k [(f_2 - f_1)s_2]$$

où s_i est la section de $S^k W$ sur $U \times U$ définie par $\text{pr}_i^*(s)$. La seconde flèche est ϵ_+ . En effet $\frac{1}{2}(s_1 + (-1)^k s_2)$ est une section de $S^k W$ dont l'image par ϵ_- est s (et c'est aussi le cas pour $(-1)^k s_2$).

5.2. Les opérateurs ∇ et Δ .

On considère l'opérateur \mathbb{C} -linéaire $\nabla : L^{\otimes k} \rightarrow \text{gr}_1 S^k W$ qui associe à une section s la classe $\nabla(s)$ de la section de $F^1 S^k W$ définie par $(-1)^k s_2 - s_1$; autrement dit

$$\nabla(s) = [(-1)^k s_2 - s_1] \text{ (on vérifie que } \epsilon_-(\nabla(s)) = 0\text{).}$$

$$\text{On a } \nabla(1) = [\text{pr}_2^* 1 - \text{pr}_1^* 1] = 0.$$

LEMME 5.1. — *Cet opérateur n'est pas linéaire, mais satisfait à la condition $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$ où f est une fonction régulière sur un ouvert $U \subset X$ et s est une section locale de $L^{\otimes k}$ sur U . Dans cette formule $\Omega^1 \otimes L^{\otimes k}$ est vu comme sous-module de $\text{gr}_1 S^k W$ par l'inclusion de la suite (11).*

Preuve. — Par définition :

$$\begin{aligned} \nabla(fs) &= [(-1)^k f_2 s_2 - f_1 s_1] = [(-1)^k (f_2 - f_1) s_2 + f_1 ((-1)^k s_2 - s_1)] \\ &= df \otimes s + f \nabla(s). \end{aligned} \quad \square$$

Ceci signifie que ∇ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1. Ce qu'on va utiliser c'est que $-\frac{\nabla}{2k}$ est une section \mathbb{C} -linéaire de ϵ_+ dans la suite (11), en vérifiant par un calcul direct que $-\frac{1}{2k} \epsilon_+(\nabla(s)) = s$.

Au passage on peut remarquer que ∇ se factorise en un morphisme \mathcal{O}_X -linéaire, $\bar{\nabla} : J^1 L^k \rightarrow \text{gr}_1(S^k W)$ ($J^1 L^k$ est le fibré des jets à valeurs dans $L^{\otimes k}$, avec sa structure naturelle de \mathcal{O}_X -module à gauche) qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega_X^1 \otimes L^{\otimes k} & \longrightarrow & J^1 L^k & \longrightarrow & L^{\otimes k} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \bar{\nabla} & \swarrow \nabla & \downarrow -2k \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_X^1 \otimes L^{\otimes k} & \longrightarrow & \text{gr}_1 S^k W & \longrightarrow & L^{\otimes k} \longrightarrow 0. \end{array}$$

Les deux flèches extrêmes sont des isomorphismes, donc la flèche du milieu est un isomorphisme. Cet isomorphisme induit en particulier, pour $k = 1$, un isomorphisme $J^1 L \rightarrow V_D$.

Considérons maintenant deux indices i et j tels que $i + j = k$. Soient $s \in H^0(U, L^{\otimes i})$ et $t \in H^0(U, L^{\otimes j})$ deux sections locales au-dessus du même ouvert U . On considère les sections s_k de $S^i W$ et t_k de $S^j W$ définies par image réciproque par pr_k (pour $k = 1, 2$) et la section de $\text{gr}_1 S^k W$:

$$D(s, t) = [(-1)^i s_2 t_1 - (-1)^j s_1 t_2].$$

Comme $\epsilon_-(D(s, t)) = 0$, la quantité entre crochets appartient à $F^1 S^k W$ et par conséquent la formule a un sens.

LEMME 5.2. — Soient s et t comme ci-dessus. On a dans $\text{gr}_1(\text{Sym } W)$, considéré comme $\text{Sym } L$ -module :

$$\begin{aligned} \nabla(st) &= \nabla(s)t + s\nabla(t) \\ D(s, t) &= \nabla(s)t - s\nabla(t). \end{aligned}$$

Preuve. — Compte tenu de la définition de l'homomorphisme $\epsilon_- : W|_D \rightarrow L$, on a dans $\text{Sym } W$:

$$\begin{aligned} (-1)^k \nabla(st) &= [s_2 t_2 - (-1)^k s_1 t_1] \\ &= [(s_2 - (-1)^i s_1) t_2 + (-1)^i s_1 (t_2 - (-1)^j t_1)] \\ &= (-1)^k (\nabla(s)t + s\nabla(t)). \end{aligned}$$

De même

$$(-1)^i [s_2 t_1 - (-1)^k s_1 t_2] = [(-1)^i (s_2 - (-1)^i s_1) t_1] - (-1)^j [s_1 (t_2 - (-1)^j t_1)]$$

compte tenu de la définition de la structure multiplicative dans l'algèbre bigraduée $\text{gr}(\text{Sym } W)$ et que

$$\text{gr}_0(\text{Sym } W) = \text{Sym } L,$$

ceci n'est autre que $\nabla(s)t - s\nabla(t)$. □

COROLLAIRE 5.3. — Soit $k = i + j$, et $\ell = i - j$. L'opérateur différentiel $(s, t) \mapsto -\ell\nabla(st) + kD(s, t)$ prend ses valeurs dans $\Omega^1 \otimes L^{\otimes k}$.

Ceci résulte du fait que $\epsilon_+(\nabla(s)) = -2ks$ si s est une section locale de $L^{\otimes k}$: parce que ϵ_+ est une dérivation, ceci entraîne en effet que $\epsilon_+(-\ell\nabla(st) + kD(s, t)) = 0$. □

5.3. Le morphisme $\alpha_2 : H^0(X \times X, S^k W)^\tau \rightarrow H^0(X, \text{gr}_1(S^k W))^\tau$.

On suppose k impair. Soit τ la transposition (12) et désignons par $H^0(S^k W)^\tau$ l'espace des sections de $H^0(S^k W)$ invariantes sous l'action de τ . Puisque dans le cas où k est impair, le gradué $\text{gr}_0(S^k W)$ n'a pas de cohomologie invariante (cor. 5.8), ces sections invariantes définissent des sections de $F^1 S^k W$, d'où le morphisme α_2 . En outre, les sections de $\text{gr}_1(S^k W)$ sont invariantes pour l'action de τ , puisque pour $k - 1$ pair, τ agit trivialement sur tous les gradués de sa filtration déduite de (6) (voir cor. 5.8). On a un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{i>j, i+j=k} H^0(L^{\otimes i}) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(L^{\otimes j}) \simeq H^0(S^k W)^\tau$$

donné par $s \otimes t \mapsto s_1 t_2 + s_2 t_1$ pour $s \in H^0(L^{\otimes i})$ et $t \in H^0(L^{\otimes j})$.

Désignons par $\mu : H^0(L^{\otimes i}) \otimes H^0(L^{\otimes j}) \rightarrow H^0(L^{\otimes k})$ la multiplication et considérons pour $k > 1$ le scindage de la suite (11) sur les sections globales :

$$H^0(\text{gr}_1 S^k W) \simeq H^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes k}) \oplus H^0(L^{\otimes k})$$

défini sur le premier facteur par l'inclusion canonique, et sur le deuxième facteur par la section $s \mapsto \nabla(s)$.

Si $s \in H^0(X, L^{\otimes i}) \otimes H^0(X, L^{\otimes j})$ on pose $\Delta_\ell(s) = D(s) - \frac{\ell}{k} \nabla \mu(s)$ pour $\ell = i - j$ et $i + j = k$. Pour $\ell = k$ on obtient que $\Delta_\ell(s) = 0$ puisque pour s décomposable en $m \otimes 1$, $\Delta_\ell(s) = \nabla(m) \cdot 1 - m \cdot \nabla(1) - \nabla(m) = 0$.

PROPOSITION 5.4. — *La matrice de α_2 dans ces décompositions est donnée par*

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & (-1)^{\frac{k+l}{2}} \Delta_\ell & \cdots & (-1)^{\frac{k+1}{2}} \Delta_1 \\ 2k & \cdots & -(-1)^{\frac{k+l}{2}} 2\ell\mu & \cdots & -(-1)^{\frac{k+1}{2}} 2\mu \end{pmatrix}.$$

Preuve. — On part d'une section $S \in H^0(S^k W)^\tau$ qui provient d'une section de $H^0(X, L^{\otimes i}) \otimes H^0(X, L^{\otimes j})$ avec $i + j = k$, $i - j = \ell$. Supposons aussi que $j \neq 0$ et que cette section se décompose en $s \otimes t$ avec $s \in H^0(L^{\otimes i})$ et $t \in H^0(L^{\otimes j})$. Alors S s'écrit dans $H^0(S^k W)^\tau$ comme $s_1 t_2 + t_1 s_2$ et son image par α_2 dans $H^0(\text{gr}_1 S^k W)$ est la classe $[s_1 t_2 + t_1 s_2]$ modulo $F^2 S^k W$.

Si i est pair et j impair, $[s_1 t_2 + t_1 s_2] = D(s, t)$ et la composante dans $H^0(L^{\otimes k})$ est $\epsilon_+(D(s, t))$. Mais $\epsilon_+(-\ell \nabla(st) + kD(s, t)) = 0$ donc $\epsilon_+(D(s, t)) = \frac{1}{k} \epsilon_+(\nabla(st)) = \frac{1}{k} \cdot (-2k\mu(s \otimes t)) = -2\ell\mu(s \otimes t)$. Si i est impair on obtient l'opposé. Si $\ell = k$ alors $j = 0$, $s \in H^0(L^{\otimes k})$ et son écriture dans $H^0(S^k W)^\tau$ est $s_1 + s_2$. Son image par α_2 est $[s_1 + s_2] = -\nabla(s)$ et $\epsilon_+(-\nabla(s)) = 2ks$. D'où la deuxième ligne de la matrice.

Pour trouver la composante dans $H^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes k})$ il suffit de soustraire l'image réciproque par la section $-\frac{1}{2k} \nabla$ du morphisme ϵ_+ de la composante dans $H^0(L^{\otimes k})$. Par exemple pour i pair on fait $D(s, t) - (-\frac{1}{2k} \nabla(\epsilon_+(D(s, t)))) = D(s, t) + \frac{1}{2k} \nabla(-2\ell st) = \Delta_\ell(S)$. Pour i impair on trouve l'opposé et pour $j = 0$: $-\nabla(s) + \frac{1}{2k} \nabla(2ks) = 0$, d'où la première ligne. \square

COROLLAIRE 5.5. — *Si $k = 3$, le noyau et le conoyau de α_2 sont isomorphes respectivement au noyau et au conoyau de l'opérateur linéaire*

$$3D - \nabla\mu : H^0(L^{\otimes 2}) \otimes H^0(L) \rightarrow H^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3}).$$

Preuve. — La matrice de α_2 s'écrit ici

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta_1 = D - \frac{1}{3} \nabla\mu \\ 6 & -2\mu \end{pmatrix}$$

ce qui conduit immédiatement à l'énoncé. \square

5.4. Généralisation à $\text{Hilb}^m(X)$.

Le cas général repose essentiellement sur le cas $m = 2$. Il faut considérer les invariants par rapport au groupe symétrique $G = \mathfrak{S}_m$ mais

on a donné dans les préliminaires, paragraphe 2.1, le procédé qui nous ramène à des calculs d'invariants plus aisés.

5.4.1. Description de $H^0(X_*^m, \text{gr}_1(S^k W))^G$. — Le faisceau $\text{gr}_1(\text{Sym } W)$ a pour support la diagonale D de X_*^m . Le groupe symétrique agit sur la situation. Soit U_{12} le complémentaire de la réunion des diagonales $\Delta_{i,j}$ pour $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$ dans X_*^m . Cet ouvert contient uniquement la diagonale $\Delta_{1,2} = \Delta \times X^{m-2} \cap X_*^m$. On note $W_{12} = (L_1 \oplus L_2)|_{U_{12}}$ et $W^{12} = (L_3 \oplus \dots \oplus L_m)|_{U_{12}}$ de sorte que $W|_{U_{12}} = (W_{12} \oplus W^{12})|_{U_{12}}$.

PROPOSITION 5.6. — On a

$$\text{gr}_k(\text{Sym } W)|_{\Delta_{12}} \simeq \bigoplus_{i+j=k} \text{gr}_i(\text{Sym } W_{12}) \otimes S^j W^{12}[-j].$$

Preuve. — Le produit tensoriel peut être vu comme un produit tensoriel sur \mathbb{C} , ou bien comme un produit tensoriel externe, si, plutôt qu'utiliser W_{12} et W^{12} on utilise $W'_{12} = L_1 \oplus L_2$ sur $X \times X$ et $W^{12'} = L_3 \oplus \dots \oplus L_m$ sur X^{m-2} . On a $W_{12} = \text{pr}_{12}^*(W'_{12})|_{U_{12}}$, $W^{12} = \text{pr}_{3\dots m}^*(W^{12'})|_{U_{12}}$ et $W'_{12} \boxtimes W^{12'} = W_{12} \otimes W^{12}$. La notation $S^j W^{12}[-j]$ signifie qu'on place $S^j W^{12}$ en degré j .

Le morphisme ε devient en restriction à U_{12} :

$$\varepsilon|_{U_{12}} : \text{Sym } W|_{U_{12}} \rightarrow \text{Sym } L|_{U_{12}} = \text{Sym } L_\Delta|_{\Delta_{12}}$$

et, puisque $\text{Sym } W|_{U_{12}} = \text{Sym } W_{12} \otimes \text{Sym } W^{12} = \text{Sym } W'_{12} \boxtimes \text{Sym } W^{12'}$, ce morphisme est aussi un produit tensoriel externe des morphismes

$$\varepsilon_{12} : \text{Sym } W'_{12} \rightarrow \text{Sym } L_\Delta$$

de noyau I_{12} , qui recopie la situation étudiée dans le cas où m était égal à 2, et

$$\varepsilon_{3\dots m} : \text{Sym } W^{12'} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{m-2}}$$

qui vaut l'identité en degré 0 et 0 en degré ≥ 1 , de noyau $(\text{Sym } W^{12'})_{\geq 1}$.

On filtre $\text{Sym } W'_{12}$ par les puissances de I_{12} et $\text{Sym } W^{12'}$ par les puissances de $(\text{Sym } W^{12'})_{\geq 1}$ qui sont égales aux $(\text{Sym } W^{12'})_{\geq j}$.

Le noyau de $\varepsilon|_{U_{12}}$ s'écrit alors comme

$$I = I_{12} \boxtimes \text{Sym } W^{12'} + \text{Sym } W'_{12} \boxtimes \text{Sym } W_{\geq 1}^{12'}$$

et sa puissance k -ième

$$I^k = \sum_{i+j=k} I_{12}^i \boxtimes \text{Sym } W_{\geq j}^{12'}.$$

On veut calculer I^k/I^{k+1} . Le calcul de ce gradué se fait à l'aide du lemme 2.2 du paragraphe préliminaire. La condition cohomologique d'annulation est vérifiée en vertu du lemme préliminaire 2.3.

On trouve

$$\text{gr}_k(\text{Sym } W)|_{\Delta_{12}} \simeq I^k/I^{k+1}|_{U_{12}} \simeq \bigoplus_{i+j=k} \text{gr}_i(\text{Sym } W_{12}) \otimes S^j W^{12}[-j]. \quad \square$$

COROLLAIRE 5.7. — *On a un isomorphisme*

$$\begin{aligned} & H^0(X_*^m, \text{gr}_k(\text{Sym } W))^G \\ & \simeq \bigoplus_{i+j=k} (H^0(X^2, \text{gr}_i(\text{Sym } W_{12}))^{\mathfrak{S}_2} \otimes H^0(X^{m-2}, S^j W^{12})^{\mathfrak{S}_{m-2}}[-j]). \end{aligned}$$

Preuve. — Appliquons le résultat du lemme 2.1 pour $M = H^0(X_*^m, \text{gr}_k(\text{Sym } W))$ et pour l'ensemble d'indices $I = \{\{i, j\} \mid 1 \leq i < j \leq m\}$ sur lequel G agit. Prenons $L_{1,2} = \text{gr}_k(\text{Sym } W)|_{U_{12}}$, calculé par la proposition 5.6, et $L_{i,j}$ le fibré similaire sur la diagonale Δ_{ij} : $\text{gr}_k(\text{Sym } W)|_{\Delta_{ij}}$. L'espace M^G s'obtient en prenant les invariants de $M_{1,2}$, pour le stabilisateur de $\{1, 2\}$, $\text{Stab}\{1, 2\} = \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{m-2}$. Le complémentaire de l'ouvert $\Delta_{i,j}$ dans $\Delta \times X^{m-2}$ est de codimension ≥ 2 , donc pour le calcul de l'espace des sections $H^0(\text{gr}_i(\text{Sym } W_{12}) \otimes S^j W^{12}[-j])$ on peut se placer sur $\Delta \times X^{m-2}$, où on applique le théorème de Künneth. Puisque \mathfrak{S}_2 n'agit pas sur ce qui provient de X^{m-2} et \mathfrak{S}_{m-2} n'agit pas sur ce qui provient de X^2 , on a

$$\begin{aligned} & H^0(\text{gr}_i(\text{Sym } W_{12}) \otimes S^j W^{12}[-j])^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{m-2}} \\ & = H^0(\text{gr}_i(\text{Sym } W_{12}))^{\mathfrak{S}_2} \otimes H^0(S^j W^{12})^{\mathfrak{S}_{m-2}}[-j] \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

COROLLAIRE 5.8. — *Pour $\ell - k$ impair, le faisceau $\text{gr}_k(S^\ell W)$ n'a pas de sections invariantes sous l'action de G .*

Preuve. — En effet $\text{gr}_i(S^\ell W_{12})$ n'a pas de sections invariantes sous l'action de \mathfrak{S}_2 si $\ell - i$ est impair puisque dans la filtration déduite de (6), aucun de ses gradués n'a des sections invariantes (\mathfrak{S}_2 agit par (-1) sur le fibré conormal de la diagonale dans $X \times X$ et sur L , et trivialement sur K donc par $(-1)^{2q+\ell-i}$ sur $\text{gr}_q(\text{gr}_i(S^\ell W_{12}))$). Mais

$$\text{gr}_k(S^\ell W) \simeq \bigoplus_{i+j=k} \text{gr}_i(S^{\ell-j} W_{12}) \otimes S^j W^{12}$$

et donc si $\ell - i - j = \ell - k$ est impair, $\text{gr}_i(S^{\ell-j} W_{12})$ n'a pas de sections invariantes sous l'action de G . On avait déjà utilisé ce corollaire dans les sections 4.3 et 5.3. □

Remarque 5.9. — Les démonstrations de la proposition 5.6 et du corollaire 5.8 n'utilisent pas les résultats des sections 4.3 et 5.3.

On a tout fait pour comprendre que pour ℓ impair

$$\begin{aligned}
 \text{H}^0(\text{gr}_1 \text{S}^\ell W)^G &= \text{H}^0(\text{gr}_1 \text{S}^\ell W_{12})^{\mathfrak{S}_2} \oplus \left[\text{H}^0(\text{gr}_0 \text{S}^{\ell-1} W_{12})^{\mathfrak{S}_2} \otimes \text{H}^0(W^{12})^{\mathfrak{S}_{m-2}} \right] \\
 (12) \quad &= \text{H}^0(J^1 L^{\otimes \ell}) \oplus \left[\text{H}^0(L^{\otimes(\ell-1)}) \otimes \text{H}^0(L) \right] \\
 &= \text{H}^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes \ell}) \oplus \text{H}^0(L^{\otimes \ell}) \oplus \text{H}^0(L^{\otimes(\ell-1)}) \otimes \text{H}^0(L).
 \end{aligned}$$

Les invariants de $\text{H}^0(X^m, \text{S}^\ell W)$ se calculent facilement mais l'écriture est lourde pour ℓ élevé. On préfère donc se limiter dans la suite au seul cas qui nous intéresse $\ell = 3$.

On a

$$\text{S}^3 W = \bigoplus_{i=1}^n L_i^{\otimes 3} \oplus \bigoplus_{i \neq j} (L_i^{\otimes 2} \otimes L_j) \oplus \bigoplus_{i < j < k} (L_i \otimes L_j \otimes L_k)$$

et la même proposition appliquée à $I = \{1, 2, \dots, m\}$ et les fibrés $L_i^{\otimes 3}$, ensuite à $I = \{(i, j)\}_{1 \leq i, j \leq m}$ et $L_{(i,j)} = L_i^{\otimes 2} \otimes L_j$ et finalement à $I = \{(i, j, k)\}_{1 \leq i < j < k \leq m}$ et $L_{\{i,j,k\}} = L_i \otimes L_j \otimes L_k$, nous prouve que

$$(13) \quad \text{H}^0(L^{\otimes 3}) \oplus [\text{H}^0(L^{\otimes 2}) \otimes \text{H}^0(L)] \oplus \text{S}^3 \text{H}^0(L) = \text{H}^0(X^m, \text{S}^3 W)^{\mathfrak{S}_m}$$

l'isomorphisme étant donné par

$$(s, t \otimes u, vzw) \mapsto \left(\sum_i s_i, \sum_{1 \leq i < j \leq m} (t_i u_j + t_j u_i), \sum_{i \neq j \neq k, i \neq k} v_i z_j w_k \right)$$

(naturellement $s_i = \text{pr}_i^*(s)$, et de même pour t_i, u_i, v_i, z_i, w_i).

En effet, comme $\text{H}^0(X^m, L_i^{\otimes 3}) = \text{H}^0(X, L^{\otimes 3})$ par la formule de Künneth (car $L_i = \text{pr}_i^* L \otimes (\otimes_{j \neq i} \text{pr}_j^* \mathcal{O}_X)$) toutes les sections de $L_i^{\otimes 3}$ sur X^m sont des images réciproques $\text{pr}_i^*(s)$ avec s section de $L^{\otimes 3}$ sur X . Comme $\text{H}^0(X^m, \bigoplus_{i=1}^m L_i^{\otimes 3})^{\mathfrak{S}_m} = \text{H}^0(X^m, L_1^{\otimes 3})^{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}}$ et que le stabilisateur de 1 n'agit pas sur $\text{pr}_1^*(s)$ on obtient que $\text{H}^0(X^m, L_1^{\otimes 3})^{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}} = \text{H}^0(X, L^{\otimes 3})$ et de manière analogue les autres termes dans la décomposition. Le terme $\text{S}^3 \text{H}^0(X, L)$ s'obtient puisqu'il faut considérer le stabilisateur de $\{1, 2, 3\}$ en tant qu'ensemble, c'est-à-dire $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}$ et

$$(\text{H}^0(X^m, L_1) \otimes \text{H}^0(X^m, L_2) \otimes \text{H}^0(X^m, L_3))^{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}} = \text{S}^3 \text{H}^0(X, L).$$

On dispose comme précédemment des opérateurs

$$\nabla : L^{\otimes \ell} \rightarrow \text{gr}_1(\text{S}^\ell W)$$

défini par $\nabla(s) = \sum_{i < j} \nabla_{ij}(s)$ et

$$D : \Gamma(U, L^{\otimes p}) \times \Gamma(U, L^{\otimes q}) \rightarrow \Gamma(U \times \dots \times U, \text{gr}_1(\text{S}^\ell W))$$

défini pour $p + q = \ell$ et U ouvert de X par $D(s, t) = \sum_{i < j} D_{ij}(s, t)$.

Ici ∇_{ij} et D_{ij} sont définis sur les ouverts U_{ij} contenant la seule diagonale Δ_{ij} exactement comme ∇ et D dans le cas $m = 2$, et jouissent des mêmes propriétés :

$$\nabla_{ij} : L^{\otimes \ell} \rightarrow \text{gr}_1 S^\ell W$$

est défini par $s \mapsto [-s_i + (-1)^\ell s_j]$ où $s_i = \text{pr}_i^*(s)$ et

$$D_{ij} : \Gamma(U, L^{\otimes p}) \times \Gamma(U, L^{\otimes q}) \rightarrow \Gamma((U \times \dots \times U) \cap U_{ij}, \text{gr}_1 S^\ell W)$$

est défini par $(s, t) \mapsto [(-1)^p s_i t_j - (-1)^q s_j t_i]$ où $t_i = \text{pr}_i^*(t)$.

La proposition qui suit est l'analogie de la proposition 5.4 :

PROPOSITION 5.10. — Dans les sommes directes (12) et (13), la matrice du morphisme canonique

$$\alpha_m : H^0(X^m, S^3 W)^G \rightarrow H^0(X^m, \text{gr}_1(S^3 W))^G$$

s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \Delta & 0 \\ 6 & -2\mu & 0 \\ 0 & 2 \text{id} & -2\nu \end{pmatrix}$$

où ν est le morphisme canonique $S^3 H^0(L) \rightarrow H^0(L^{\otimes 2}) \otimes H^0(L)$ induit par l'application linéaire $stu \mapsto st \otimes u + su \otimes t + ut \otimes s$. Dans ce contexte $\Delta = D - \frac{1}{3} \nabla \mu$.

Preuve. — Afin de calculer la première colonne de la matrice de α_m , considérons une section locale s de $L^{\otimes 3}$ sur un ouvert U . La section définie par $s_1 + s_2 + \dots + s_m$ est \mathfrak{S}_m -invariante. C'est une section \mathfrak{S}_m -invariante de $F^1 S^3 W$, ou bien une section $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{m-2}$ -invariante de $F^1 S^3 W|_{U_{12}} = F^1 S^3 W_{12} \oplus S^2 W_{12} \otimes W^{12} \oplus W_{12} \otimes S^2 W^{12} \oplus S^3 W^{12}$. Modulo $F^2 S^3 W|_{U_{12}}$ on obtient $[s_1 + s_2] \in \text{gr}_1(S^3 W_{12})$ (puisque $s_3 + \dots + s_m \in S^3 W^{12}$ qui est inclus dans $F^2 S^3 W|_{U_{12}}$).

Son image dans la décomposition de $H^0(\text{gr}_1 S^\ell W)^G$ est $(-\nabla(s), 0)$. Si on décompose encore $H^0(J^1 L^3) = H^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3}) \oplus H^0(L^{\otimes 3})$, d'après le résultat trouvé dans le cas $m = 2$, on obtient la première colonne de la matrice comme $(0, 6, 0)$.

Pour la deuxième colonne, considérons deux sections $s \in \Gamma(U, L^{\otimes 2})$ et $t \in \Gamma(U, L)$. La section définie par

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq m} (s_i t_j + s_j t_i) &= s_1 t_2 + s_2 t_1 + (s_1 + s_2)(t_3 + \\ &\dots + t_m) + (t_1 + t_2)(s_3 + \dots + s_m) + \sum_{3 \leq i < j \leq m} (s_i t_j + s_j t_i) \end{aligned}$$

est \mathfrak{S}_m -invariante. On procède comme auparavant. Modulo $F^2S^3W|_{U_{12}}$, il reste seulement les deux premiers termes de cette expression :

$$D_{12}(s, t) = [s_1t_2 + s_2t_1] \in \text{gr}_1 S^3W_{12}$$

et

$$[s_1 + s_2]t \in \text{gr}_1(S^2W_{12}) \otimes (W^{12})^{\mathfrak{S}^{-2}}.$$

La classe $[s_1 + s_2]$ modulo $F^2S^2W_{12} = S^2I_{12}$ est son image dans $S^2L_\Delta = L_\Delta^{\otimes 2}$ soit $2s$. Au total, en utilisant aussi la décomposition de $D(s, t)$ trouvée dans le cas $m = 2$ on obtient $(\Delta, -2\mu, 2 \text{id})$.

Finalement, la troisième colonne s'obtient en partant de trois sections s, t, u de L sur un ouvert U . La section $\sum_{i \neq j \neq k, i \neq k} s_i t_j u_k$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} & (s_1t_2 + s_2t_1)(u_3 + \dots + u_m) + (s_1u_2 + s_2u_1)(t_3 + \dots + t_m) \\ & + (t_1u_2 + t_2u_1)(s_3 + \dots + s_m) + \left[(s_1 + s_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} t_i u_j \right] \\ & + \left[(t_1 + t_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} s_i u_j \right] + \left[(u_1 + u_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} s_i t_j \right] \\ & + \sum_{3 \leq i \neq l \neq k \leq m, i \neq k} s_i t_j u_k \end{aligned}$$

et elle est \mathfrak{S}_m -invariante. La classe dans $\text{gr}_1 S^3W|_{U_{12}}$ de sa restriction à U_{12} est

$$\begin{aligned} & [(s_1t_2 + s_2t_1)(u_3 + \dots + u_m)] + [(s_1u_2 + s_2u_1)(t_3 + \\ & \dots + t_m)] + [(t_1u_2 + t_2u_1)(s_3 + \dots + s_m)] \end{aligned}$$

et chacune de ces composantes appartient à $S^2W_{12} \otimes W^{12}$. Le reste appartient à $F^2S^3W|_{U_{12}}$. Pour trouver leurs images dans $\text{gr}_0(S^2W_{12}) \otimes L$ on regarde les images de $s_1t_2 + s_2t_1$, $s_1u_2 + s_2u_1$ et $t_1u_2 + t_2u_1$ dans $L_\Delta^{\otimes 2}$ par le morphisme $S^2W_{12} \rightarrow L_\Delta^{\otimes 2}$. Or $s_i t_j \mapsto -st$. La troisième colonne s'écrit $(0, 0, -2\nu)$ où ν est le morphisme canonique $S^3H^0(L) \rightarrow H^0(L^{\otimes 2}) \otimes H^0(L)$ induit par l'application linéaire $stu \mapsto st \otimes u + su \otimes t + ut \otimes s$. \square

COROLLAIRE 5.11. — *Pour $m \geq 3$, l'espace vectoriel des sections $H^0(S^3(L^{[m]}))$ sur l'ouvert $\text{Hilb}_*^m(X)$ est isomorphe à $S^3H^0(L)$ et l'espace vectoriel de cohomologie $H^1(S^3(L^{[m]}))$ est isomorphe à $H^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3})$.*

Preuve. — Les espaces considérés sont le noyau et respectivement le conoyau du morphisme α_m . On va voir que le noyau et le conoyau du

morphisme α_m coïncident avec le noyau, respectivement le conoyau du morphisme :

$$\Delta\nu : S^3H^0(L) \rightarrow H^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3})$$

et que ce morphisme est nul. Mais si s est une section de L , on a $\nu(s^3) = 3s^2 \otimes s$ et l'image de cette classe par Δ est nulle : $3D(s^2, s) - \nabla(s^3) = 3\Delta(s^2)s - 3s^2\nabla(s) - \nabla(s^2)s - s^2\nabla(s) = 2\nabla(s^2)s - 4s^2\nabla(s) = 0$. Comme ces sections engendrent $S^3H^0(L)$, ceci prouve que le morphisme $\Delta\nu$ est nul.

En écrivant la condition d'appartenance au noyau de α_m pour un triplet $(a, b, c) \in H^0(X^m, S^3W)^G$ on déduit que $\text{Ker } \alpha_m \simeq \text{Ker } \Delta\nu \simeq S^3H^0(L)$.

D'un autre côté, on a $(a', b', c') \in \text{Im } \alpha_m \Leftrightarrow 2a' - \Delta c' \in \text{Im } \Delta\nu$ et donc $\text{coker } \alpha_m \simeq \text{coker } \Delta\nu$. Puisque $\Delta\nu$ est nul, $\text{coker } \alpha_m \simeq H^0(\Omega^1 \otimes L^{\otimes 3})$. \square

5.5. Introduction du fibré déterminant.

On considère un autre fibré inversible A sur X auquel est associé un fibré vectoriel $\mathcal{A} = \boxtimes_i A_i$ sur X^m et un fibré inversible quotient $\mathcal{A}/\mathfrak{S}_m$ sur $S^m X$. On désigne par \mathfrak{d}_m^A le fibré image réciproque de $\mathcal{A}/\mathfrak{S}_m$ sur $\text{Hilb}^m(X)$ par le morphisme de Hilbert-Chow $\text{Hilb}^m(X) \rightarrow S^m X$. Le problème est de déterminer l'espace vectoriel des sections de $S^3(\mathcal{O}(k)^{\otimes m}) \otimes \mathfrak{d}_m^A$. Le calcul des invariants de $H^0(S^3W \otimes \mathcal{A})$ est aisé. Il suffit d'appliquer plusieurs fois le lemme 2.1. On tient compte de $\text{Stab}\{1\} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}$, $\text{Stab}\{(12)\} = \text{id}_{(12)} \times \mathfrak{S}_{m-2}$ et $\text{Stab}\{1, 2, 3\} = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}$ et on obtient

$$\begin{aligned} H^0(S^3W \otimes \mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m} &= H^0(L_1^{\otimes 3} \otimes A_1 \otimes \dots \otimes A_m)^{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_{m-1}} \\ &\quad \oplus H^0(L_1^{\otimes 2} \otimes A_1 \otimes L_2 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_m)^{\text{id}_{(12)} \times \mathfrak{S}_{m-2}} \\ &\quad \oplus H^0(L_1 \otimes A_1 \otimes L_2 \otimes A_2 \otimes L_3 \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_m)^{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_{m-3}} \\ (14) \quad &= H^0(L^{\otimes 3} \otimes A) \otimes S^{m-1}(H^0(A)) \\ &\quad \oplus H^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes H^0(L \otimes A) \otimes S^{m-2}(H^0(A)) \\ &\quad \oplus S^3H^0(L \otimes A) \otimes S^{m-3}(H^0(A)). \end{aligned}$$

En restriction à l'ouvert U_{12} on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} J^1L^3 \otimes A^{\otimes 2} \boxtimes (A_3 \otimes \dots \otimes A_m) \oplus L_\Delta^2 \otimes A^{\otimes 2} \boxtimes \left(\bigoplus_{i \geq 3} L_i \otimes (A_3 \otimes \dots \otimes A_m) \right) \\ \xrightarrow{\cong} \text{gr}_1 S^3W \otimes \mathcal{A} \end{aligned}$$

qui est dû au fait que $\text{gr}_1(S^3W \otimes \mathcal{A}) = \text{gr}_1(S^3W) \otimes \mathcal{A}$. En utilisant le même lemme 2.1 et en tenant compte de $\text{Stab}\{3\} = \mathfrak{S}_{m-3}$ (il s'agit ici du

stabilisateur de 3 dans le groupe \mathfrak{S}_{m-2}) on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{H}^0(\text{gr}_1 S^3W \otimes \mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m} &= \mathbb{H}^0(\text{gr}_1 S^3W \otimes \mathcal{A}|_{U_{12}})^{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_{m-2}} \\
 &= [\mathbb{H}^0(J^1L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \otimes S^{m-2}(\mathbb{H}^0(A))] \\
 (15) \quad &\oplus [\mathbb{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathbb{H}^0(L_3 \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_m)^{\mathfrak{S}_{m-3}}] \\
 &= [\mathbb{H}^0(J^1L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \otimes S^{m-2}(\mathbb{H}^0(A))] \\
 &\oplus [\mathbb{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathbb{H}^0(L \otimes A) \otimes S^{m-3}(\mathbb{H}^0(A))].
 \end{aligned}$$

Remarque 5.12. — Une section rationnelle est une section régulière sur un ouvert partout dense. Donc ∇ et D se prolongent de manière évidente aux sections rationnelles du fibré $L^{\otimes k}$ et la formule $\nabla(sf) = df \otimes s + f\nabla(s)$ est vraie pour f fonction rationnelle sur X , et s section rationnelle de $L^{\otimes k}$.

PROPOSITION 5.13. — La matrice du morphisme canonique

$$\alpha : \mathbb{H}^0(S^3W \otimes \mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m} \rightarrow \mathbb{H}^0(\text{gr}_1 S^3W \otimes \mathcal{A})^{\mathfrak{S}_m}$$

dans les décompositions ci-dessus est de la forme

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nabla} & \tilde{D} & 0 \\ 0 & \rho & \tilde{\nu} \end{pmatrix}.$$

Les morphismes ρ et $\tilde{\nu}$ sont $\mathcal{O}(X)$ -linéaires et caractérisés par

$$\rho(s \otimes t \otimes a^{\otimes \mathbb{C}(m-2)}) = 2sa \otimes t \otimes a^{\otimes \mathbb{C}(m-3)}$$

lorsque $s \in \mathbb{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A)$, $t \in \mathbb{H}^0(L \otimes A)$ et $a \in \mathbb{H}^0(A)$,

$$\tilde{\nu} = -2\nu \otimes \text{id}_{S^{m-3}(\mathbb{H}^0(A))}$$

où ν est l'opérateur défini au 5.10 relatif à $L \otimes A$.

Enfin le morphisme \tilde{D} est caractérisé, pour s section rationnelle de $L^{\otimes 2}$, t section rationnelle de L et $a \in \mathbb{H}^0(A)$ tel que $sa \in \mathbb{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A)$ et $ta \in \mathbb{H}^0(L \otimes A)$, par la formule

$$\tilde{D}(sa \otimes_{\mathbb{C}} ta \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes \mathbb{C}(m-2)}) = D(s, t)a^2 \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes \mathbb{C}(m-2)}$$

et le morphisme $\tilde{\nabla} : \mathbb{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} S^{m-1}\mathbb{H}^0(A) \rightarrow \mathbb{H}^0(\text{gr}_1(S^3W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) \otimes_{\mathbb{C}} S^{m-2}\mathbb{H}^0(A)$ est caractérisé par

$$\tilde{\nabla}(sa \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes \mathbb{C}(m-1)}) = -\nabla(s)a^2 \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes \mathbb{C}(m-2)}$$

où s est une section rationnelle de $L^{\otimes 3}$ et $a \in \mathbb{H}^0(A)$ tel que $sa \in \mathbb{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A)$.

Remarque 5.14. — Les sections particulières qu'on a considérées pour décrire \tilde{D} et \tilde{V} sont des générateurs des espaces vectoriels sur lesquels sont définis ces morphismes. Comme les morphismes \tilde{D} et \tilde{V} existent ils sont caractérisés par l'image de ces générateurs. Puisqu'elles proviennent de morphismes bien définis, les images de ces générateurs, qui sont a priori des sections rationnelles, sont bien des sections régulières.

À partir des expressions données, on peut facilement déduire les expressions de \tilde{D} et \tilde{V} sur des sections de la forme

$$S \otimes_{\mathbb{C}} T \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)} = \frac{S}{a} \otimes_{\mathbb{C}} \frac{T}{a} \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$$

ou

$$S \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-1)} = \frac{S}{a} \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-1)}$$

en utilisant les propriétés des opérateurs ∇ et D , pour obtenir ensuite les expressions sur des sections générales par polarisation, comme dans la remarque 5.15. Ces expressions seront utilisées dans les lemmes 5.19 et 5.20.

Preuve. — Pour la première colonne soit $\gamma \in H^0(L^{\otimes 3} \otimes A) \otimes S^{m-1}H^0(A)$. D'après la remarque il suffit de traiter le cas où $\gamma = sa \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-1)}$ avec pour s une section rationnelle de $L^{\otimes 3}$ et $a \in H^0(A)$ tel que $sa \in H^0(L^{\otimes 3} \otimes A)$. Il suffit de prouver l'égalité de l'énoncé sur l'ouvert $U \times U \times \dots \times U$, U étant un ouvert de X où s est régulière et a est inversible. La section invariante de $S^3W \otimes A$ correspondante est alors

$$S = s_1 a_1 \otimes a_2 \cdots a_m + s_2 a_2 \otimes a_1 a_3 \cdots a_m + \cdots + s_m a_m \otimes a_1 \cdots a_{m-1}$$

où $s_i = \text{pr}_i^*(s)$ et $a_i = \text{pr}_i^*(a)$. Comme les fibrés considérés sont inversibles les produits tensoriels s'identifient aux produits symétriques et on peut écrire cette section comme $(s_1 + s_2 + \dots + s_m)a_1 a_2 \cdots a_m$. L'image de S dans $F^1 S^3 W \otimes A|_{U_{12}}$ sera alors $(s_1 + s_2)a_1 \cdots a_m + (s_3 + \dots + s_m)a_1 \cdots a_m$. Le deuxième terme appartient à $F^2 S^3 W \otimes A|_{U_{12}}$ et l'image du premier terme modulo $F^2 S^3 W_{12} \otimes A$ est $-\nabla(s)a_1 a_2 \otimes a_3 \cdots a_m$ dans $\text{gr}_1(S^3 W_{12}) \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_m$ soit $-\nabla(s)a^2 \otimes a_3 \cdots a_m$ dans $\text{gr}_1(S^3 W_{12}) \otimes A_{\Delta}^2 \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_m$ (car $A_1|_{\Delta_{12}} = A_2|_{\Delta_{12}} = A_{\Delta}$) ou encore $-\nabla(s)a^2 \otimes_{\mathbb{C}} a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$ dans $H^0(\text{gr}_1(S^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) \otimes_{\mathbb{C}} S^{(m-2)}H^0(A)$. D'où la première colonne de la matrice comme $(\tilde{V}, 0)$.

On procède de la même manière pour les autres colonnes. Soient $a \in H^0(A)$, s une section rationnelle de $L^{\otimes 2}$ et t une section rationnelle de L , telles que $sa \in H^0(L^{\otimes 2} \otimes A)$ et $ta \in H^0(L \otimes A)$. Partons d'une section de la forme $sa \otimes ta \otimes a^{\otimes_{\mathbb{C}}(m-2)}$ de $H^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(L \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} S^{m-2}H^0(A)$ comme dans l'énoncé. On se restreint à un ouvert $U \times U \times \dots \times U$, U étant

un ouvert de X où s et t sont régulières et a est inversible. La section invariante correspondante s'écrit

$$\left[(s_1 t_2 + s_2 t_1) \prod_i a_i \right] + \left[(s_1 + s_2) \sum_{i=3}^m t_i \prod_i a_i \right] + \left[(t_1 + t_2) \sum_{i=3}^m s_i \prod_i a_i \right] + \left[\sum_{3 \leq i < j \leq m} (s_i t_j + s_j t_i) \prod_i a_i \right].$$

Le premier terme appartient à $F^1 S^3 W_{12} \otimes \mathcal{A}$, le deuxième à $S^2 W_{12} \otimes W^{12} \otimes \mathcal{A}$, le troisième à $W_{12} \otimes S^2 W^{12} \otimes \mathcal{A}$, et le dernier à $S^3 W^{12} \otimes \mathcal{A}$, donc son image dans

$$\text{gr}_1 S^3 W_{12} \otimes A^2 \boxtimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m \oplus L_{\Delta}^{\otimes 2} \boxtimes L_3 \otimes A_3 \otimes \cdots \otimes A_m$$

est

$$D(s, t) a^2 \otimes a_3 \cdots a_m + 2s a^2 \otimes t_3 a_3 \cdots a_m$$

soit

$$D(s, t) a^2 \otimes a^{m-2} + 2S a \otimes T \otimes a^{m-3}$$

dans

$$[\mathbf{H}^0(J^1 L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \otimes S^{m-2}(\mathbf{H}^0(A))] \oplus [\mathbf{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathbf{H}^0(L \otimes A) \otimes S^{m-3}(\mathbf{H}^0(A))]$$

où $S = sa, T = ta$.

Soient $a \in \mathbf{H}^0(A)$, s, t, u des sections rationnelles de L telles que $sa, ta, ua \in \mathbf{H}^0(L \otimes A)$. On se restreint à un ouvert $U \times U \times \cdots \times U$, U étant un ouvert de X où s, t et u sont régulières et a est inversible. Si on part d'une section $sa \cdot ta \cdot ua \otimes a^{m-3}$ de $S^3 \mathbf{H}^0(L \otimes A) \otimes S^{m-3} \mathbf{H}^0(A)$, on obtient la section invariante :

$$\begin{aligned} & \left[(s_1 t_2 + s_2 t_1) \sum_{i=3}^m u_i \prod_i a_i \right] + \left[(s_1 u_2 + s_2 u_1) \sum_{i=3}^m t_i \prod_i a_i \right] \\ & + \left[(t_1 u_2 + t_2 u_1) \sum_{i=3}^m s_i \prod_i a_i \right] + \left[(s_1 + s_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} t_i u_j \prod_i a_i \right] \\ & + \left[(t_1 + t_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} s_i u_j \prod_i a_i \right] + \left[(u_1 + u_2) \sum_{3 \leq i \neq j \leq m} t_i s_j \prod_i a_i \right] \\ & + \left[\sum_{3 \leq i \neq j \leq m, i \neq k} s_i t_j u_k \prod_i a_i \right]. \end{aligned}$$

La classe dans $\text{gr}_1(S^3W \otimes \mathcal{A})|_{U_{12}}$ de sa restriction à U_{12} est

$$\begin{aligned} & [(s_1t_2 + s_2t_1)a_1a_2 \otimes (u_3 + \dots + u_m)a_3 \dots a_m] \\ & \quad + [(s_1u_2 + s_2u_1)a_1a_2 \otimes (t_3 + \dots + t_m)a_3 \dots a_m] \\ & \quad + [(u_1t_2 + u_2t_1)a_1a_2 \otimes (s_3 + \dots + s_m)a_3 \dots a_m] \end{aligned}$$

et chacune de ces composantes appartient à $\text{gr}_0(S^2W_{12} \otimes A) \otimes W^{12} \otimes A_3 \otimes \dots \otimes A_m$. Le reste est dans $F^2S^3W \otimes \mathcal{A}|_{U_{12}}$.

Comme on l'a déjà vu, l'image dans $H^0(U, L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes H^0(U, L \otimes A) \otimes S^{m-3}H^0(U, A)$ est $-2sata \otimes ua \otimes a^{m-3} - 2saua \otimes ta \otimes a^{m-3} - 2uata \otimes sa \otimes a^{m-3}$ donc si $S = sa, T = ta, U = ua, \tilde{\nu}$ associée à $STU \otimes a^{m-3} \mapsto -2(ST \otimes U \otimes a^{m-3} + SU \otimes T \otimes a^{m-3} + UT \otimes S \otimes a^{m-3})$, et la troisième colonne de la matrice s'écrit $(0, \tilde{\nu})$. □

Remarque 5.15. — Par polarisation on peut trouver l'expression de ρ sur des sections différentes, où \check{a}_i signifie qu'on omet le terme a_i de l'expression

$$\rho(S \otimes T \otimes a_3a_4 \dots a_m) = \frac{1}{m-2} \sum_{i=3}^m Sa_i \otimes T \otimes a_3 \dots \check{a}_i \dots a_m.$$

5.6. Sections de $S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}_m^{\mathcal{O}(1)}$.

On prend $L = \mathcal{O}(3)$, et $A = \mathcal{O}(1)$ sur $X = \mathbb{P}_2$. Alors

$$\begin{aligned} L^{\otimes 3} \otimes A &= \mathcal{O}(10) \\ L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2} &= \mathcal{O}(11) \\ L^{\otimes 2} \otimes A &= \mathcal{O}(7) \\ L \otimes A &= \mathcal{O}(4) \\ L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2} &= \mathcal{O}(8). \end{aligned}$$

On pose $E = H^2(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}(1))$. On a $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_m^{\mathcal{O}(1)}$. Pour nous $m = n + \ell^2 = n + 9$. Afin d'utiliser la proposition préliminaire 2.6, on doit supposer $m - 2 \geq 10$, c'est-à-dire $n \geq 3$. Mais les hypothèses du théorème 3.4 nous obligent à supposer $6 \leq n < 20$. Les calculs vont donner une nouvelle preuve du théorème 1.1 pour $6 \leq n \leq 11$ et une preuve du théorème 1.1 pour $12 \leq n \leq 19$.

On veut calculer le noyau du morphisme α :

$$\begin{aligned} & [\mathbf{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A) \otimes \mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{H}^0(A))] \\ & \quad \oplus [\mathbf{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes \mathbf{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathbf{S}^{m-2}(\mathbf{H}^0(A))] \\ & \quad \oplus [\mathbf{S}^3 \mathbf{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathbf{S}^{m-3}(\mathbf{H}^0(A))] \\ & \rightarrow [\mathbf{H}^0(J^1 L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathbf{S}^{m-2}(\mathbf{H}^0(A))] \\ & \quad \oplus [\mathbf{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A^{\otimes 2}) \otimes \mathbf{H}^0(L \otimes A) \otimes \mathbf{S}^{m-3}(\mathbf{H}^0(A))] \end{aligned}$$

donné par la matrice de la proposition 5.13 :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nabla} & \tilde{D} & 0 \\ 0 & \rho & \tilde{\nu} \end{pmatrix}.$$

Ici $\mathbf{H}^0(\Omega^1 \otimes L^3 \otimes A^{\otimes 2}) = \mathbf{S}^{10,1} E$ se calcule à partir de la suite exacte d'Euler. Le morphisme $\mathbf{H}^0(\text{gr}_1(\mathbf{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow \mathbf{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2}) = \mathbf{S}^{11} E$ est un morphisme surjectif puisque non nul et $\mathbf{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2})$ est une représentation irréductible, d'où un scindage de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{H}^0(\Omega^1 \otimes L^3 \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow \mathbf{H}^0(\text{gr}_1(\mathbf{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow \mathbf{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2}) \rightarrow 0.$$

Cela entraîne $\mathbf{H}^0(\text{gr}_1(\mathbf{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) = \mathbf{S}^{10} E \oplus E$.

Avant le résultat final on va donner deux lemmes préliminaires :

LEMME 5.16. — *Le morphisme D'*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(L \otimes A) = \mathbf{S}^7 E \otimes \mathbf{S}^4 E & sa \otimes ta & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}^0(\text{gr}_1(\mathbf{S}^3 W_{12}) \otimes A^{\otimes 2}) = \mathbf{S}^{10} E \otimes E & D(s, t)a^2 & \end{array}$$

est surjectif.

Preuve. — On a vu que $\epsilon_+(D(s, t)) = -2st$ donc $\epsilon_+(D(s, t)a^2) = -2sta^2$. Par suite le morphisme composé $\epsilon_+ \circ D'$ de $\mathbf{H}^0(L^{\otimes 2} \otimes A) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbf{H}^0(L \otimes A) = \mathbf{S}^7 E \otimes \mathbf{S}^4 E$ dans $\mathbf{H}^0(L^{\otimes 3} \otimes A^{\otimes 2}) = \mathbf{S}^{11} E$ est le morphisme de multiplication des sections, à une constante près. Il est par suite non nul.

Si on se place sur l'ouvert U défini par $X \neq 0, Y \neq 0$ et on considère les sections $s = Z^6, t = Z^3, a = X, fa = Y$ avec $f = \frac{Y}{X}$, comme

$$D'(sa \otimes tfa) = D(s, tf)a^2 = fD(s, t)a^2 - stdfa^2$$

et

$$D'(sfa \otimes ta) = D(fs, t)a^2 = fD(s, t)a^2 + stdfa^2,$$

on obtient que

$$D'(sfa \otimes ta - sa \otimes tfa) = 2stdfa^2.$$

Ces sections sont en effet globales et ceci montre que $D'(Z^6Y \otimes Z^3X - Z^6X \otimes Z^3Y)$ est non nul et appartient à $H^0(\Omega^1 \otimes L^3 \otimes A^{\otimes 2}) = S^{10,1}E$, vu comme sous-espace de $H^0(\text{gr}_1(S^3W) \otimes A^{\otimes 2})$. Le morphisme D' est donc non nul sur chacune des composantes irréductibles de la représentation $S^{10}E \otimes E$, donc il est surjectif. À partir des décompositions en sous-représentations irréductibles de $S^7E \otimes S^4E$ et $S^{10}E \otimes E$ on déduit que le noyau de D' est de la forme $S^{7,4}E + S^{8,3}E + S^{9,2}E$. \square

LEMME 5.17. — *L'image de $\text{Ker } \tilde{D}$ par le morphisme ρ est incluse dans l'image de $\tilde{\nu}$.*

Preuve. — On rappelle que $\tilde{D} = D' \otimes \text{id}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} S^7E \otimes S^4E \otimes S^{m-2}E & \xrightarrow{\rho} & S^8E \otimes S^4E \otimes S^{m-3}E \\ \downarrow c' \otimes \text{id} & & \downarrow c'' \otimes \text{id} \\ S^{10}E \otimes E \otimes S^{m-2}E & \xrightarrow{\rho'} & S^{11}E \otimes E \otimes S^{m-3}E \end{array}$$

dans lequel les flèches verticales c' et c'' sont les composées des contractions naturelles entre le premier et le second facteur, et les flèches horizontales ρ et ρ' sont des contractions entre le premier et le troisième facteur. Le noyau de c' est $S^{7,4}E + S^{8,3}E + S^{9,2}E$, égal au noyau de D' .

Il en résulte que $\rho(\text{Ker } D' \otimes \text{id})$ est contenu dans $\text{Ker}(c'' \otimes \text{id})$. Ce dernier noyau est (d'après la proposition 2.6)

$$(S^{10,2}E + S^{9,3}E + S^{8,4}E) \otimes S^{m-3}E$$

lequel est bien contenu dans l'image de $\tilde{\nu}$, d'après le lemme 2.8 de la section préliminaire. \square

PROPOSITION 5.18.

(i) *L'espace des sections $\text{Ker } \alpha = H^0(S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ est isomorphe à $\text{Ker}(\tilde{\nabla}, \tilde{D}) \oplus \text{Ker } \tilde{\nu}$.*

(ii) *Sur l'ouvert $\text{Hilb}_*^m(\mathbb{P}_2)$ considéré, $\text{coker } \alpha = H^1(S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$ est isomorphe à $\text{coker}(\tilde{\nabla}, \tilde{D}) \oplus \text{coker } \tilde{\nu}$.*

Preuve. — Cela revient à vérifier que dans la suite exacte du serpent associé au diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tilde{\nu} & & \downarrow \alpha & & \downarrow (\tilde{\nabla}, \tilde{D}) \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{E} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{E} & \longrightarrow & \mathfrak{D} \longrightarrow 0 \end{array}$$

avec $\mathfrak{A} = S^{10}E \otimes S^{m-1}E$, $\mathfrak{B} = S^7E \otimes S^4E \otimes S^{m-2}E$, $\mathfrak{C} = S^3(S^4E) \otimes S^{m-3}E$, $\mathfrak{D} = S^{10}E \otimes E \otimes S^{m-2}E$, $\mathfrak{E} = S^8E \otimes S^4E \otimes S^{m-3}E$, c'est-à-dire dans la suite :

$$0 \rightarrow \text{Ker } \tilde{\nu} \rightarrow \text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Ker } (\tilde{\nabla}, \tilde{D}) \xrightarrow{(0, \rho)} \text{coker } \tilde{\nu} \rightarrow \text{coker } \alpha \rightarrow \text{coker } (\tilde{\nabla}, \tilde{D}) \rightarrow 0$$

le morphisme de liaison $(0, \rho)$ est nul. Cela revient à vérifier que l'image de $\text{Ker } (\tilde{\nabla}, \tilde{D})$ par $(0, \rho)$ est contenue dans l'image de $\tilde{\nu}$.

On dispose également d'une suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Ker } \tilde{D} & \xrightarrow{\gamma} & \text{Ker } (\tilde{\nabla}, \tilde{D}) & \xrightarrow{\beta} & \mathfrak{A} \\ & & v & \mapsto & (0, v) & & \\ & & & & (u, v) & \mapsto & u. \end{array}$$

LEMME 5.19. — *Le morphisme β est surjectif.*

Preuve. — Il suffit de montrer que les éléments u de la forme $\omega^3 a \otimes a_2 \cdots a_m$ ont un antécédent par β , où $\omega \in H^0(L)$ et $a, a_2, \dots, a_m \in H^0(A)$ (on rappelle que $L = \mathcal{O}(3)$ et $A = \mathcal{O}(1)$ mais on préfère travailler ici avec les fibrés quelconques L et A de départ pour une meilleure compréhension) et ceci puisque sur \mathbb{P}_2 le morphisme naturel $S^3H^0(L) \otimes H^0(A) \otimes S^{m-1}H^0(A) \rightarrow H^0(L \otimes^3 A) \otimes S^{m-1}H^0(A)$ est surjectif et les éléments considérés engendrent $S^3H^0(L) \otimes H^0(A) \otimes S^{m-1}H^0(A)$. On prend $v = \sum_{i=2}^m (2\omega^2 a \otimes_{\mathbb{C}} \omega a_i + \omega^2 a_i \otimes_{\mathbb{C}} \omega a) \otimes a_2 \cdots \tilde{a}_i \cdots a_m$ et on remarque que $(u, -v) \in \text{Ker } (\tilde{\nabla}, \tilde{D})$ est une préimage de u par β . Rappelons que la notation \tilde{a}_i signifie qu'on omet le terme a_i de l'expression. On utilise les formules de $\tilde{\nabla}$ et \tilde{D} sur des sections différentes déduites de celles données dans l'énoncé de la proposition 5.13, par polarisation, comme dans les remarques 5.14 et 5.15 :

$$\tilde{\nabla}(f \otimes a_2 \cdots a_m) = \sum_{i=2}^m \nabla\left(\frac{f}{a_i}\right) a_i^2 \otimes a_2 \cdots \tilde{a}_i \cdots a_m$$

et

$$\tilde{D}(s \otimes t \otimes a_3 \cdots a_m) = \nabla\left(\frac{s}{t}\right) t^2 \otimes a_3 \cdots a_m$$

et le calcul nous donne que $\tilde{\nabla}(u) + \tilde{D}(-v) = \tilde{\nabla}(u) - \tilde{\nabla}(u) = 0$. □

LEMME 5.20. — *L'image par le morphisme $(0, \rho)$ de la préimage par β d'un élément de \mathfrak{A} est contenue dans l'image de $\tilde{\nu}$.*

Preuve. — Dans le lemme précédent on a trouvé un antécédent v pour chaque générateur de \mathfrak{A} . Comme deux antécédents d'un élément

u de \mathfrak{A} différent par un élément de $\text{Im } \gamma$, et que $(0, \rho)(\text{Im } \gamma) \subset \text{Im } \tilde{\nu}$ (lemme 5.17), il suffit de trouver un antécédent w par $\tilde{\nu}$ de la section $\rho(v) = \sum_{i \neq j} (2\omega^2 a a_j \otimes \omega a_i + \omega^2 a_i a_j \otimes \omega a) \otimes a_2 \cdots \check{a}_i \cdots \check{a}_j \cdots a_m$. On prend $w = \sum_{i \neq j} (\omega a \cdot \omega a_i \cdot \omega a_j) \otimes a_2 \cdots \check{a}_i \cdots \check{a}_j \cdots a_m$ et on vérifie bien que $\tilde{\nu}(w) = \rho(v)$. \square

Ceci montre que $(0, \rho)(\text{Ker } (\tilde{\nabla}, \tilde{D})) \subset \text{Im } \tilde{\nu}$. \square

5.7. Calcul final.

À partir des annulations de la cohomologie supérieure indiquées dans la démonstration du corollaire 4.8, remplacées dans la suite spectrale associée à la résolution (4) de $S^3 \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}$, on obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \Lambda^3(S^3 E) \otimes H^0(\mathfrak{d}) \rightarrow \Lambda^2(S^3 E) \otimes H^0(\mathcal{O}(3)^{[m]} \otimes \mathfrak{d}) \\ &\rightarrow S^3 E \otimes H^0(S^2(\mathcal{O}(3)^{[m]} \otimes \mathfrak{d})) \\ &\rightarrow H^0(S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]} \otimes \mathfrak{d})) \rightarrow H^0(S^3 \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Le résultat de la proposition 5.18 nous donne

$$\begin{aligned} \dim H^0(S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]} \otimes \mathfrak{d})) &= \dim \mathfrak{A} + \dim \text{Ker } \tilde{D} + \dim \text{Ker } \tilde{\nu} \\ &= \dim S^{10} E \otimes S^{n+8} E + \dim S^7 E \otimes S^4 E \otimes S^{n+7} E \\ &\quad - \dim S^{10} E \otimes E \otimes S^{n+7} E + \dim S^{n+6} E (\dim S^{6,6} E \\ &\quad + \dim S^{7,4,1} E + \dim S^{8,2,2} E + \dim S^{6,4,2} E + \dim S^{4,4,4} E). \end{aligned}$$

D'où, en utilisant les lemmes 4.1, 4.10, 4.11

$$\begin{aligned} \dim H^0(S^3 \mathcal{R} \otimes \mathfrak{d}) &= \dim H^0(S^3(\mathcal{O}(3)^{[m]} \otimes \mathfrak{d})) - 10(\dim S^7 E \otimes S^{n+8} E \\ &\quad + \dim S^2(S^4 E) \otimes S^{n+7} E - \dim S^8 E \otimes S^{n+7} E) \\ &\quad + 45 \dim S^4 E \otimes S^{n+8} E - 120 \dim S^{n+9} E \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

et cela pour tout n tel que $6 \leq n \leq 19$. On voit que dans ce cas on couvre aussi le résultat obtenu au corollaire 4.8 pour $\ell = 2$.

6. Conclusion.

Pour étendre les résultats ci-dessus au cas $n \geq 20$, on a besoin

1) d'étendre le théorème d'annulation de la cohomologie supérieure des fibrés $S^\ell(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d}$ sur le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$;

2) de faire intervenir $H^0(\text{gr}_i(S^\ell W) \otimes \mathfrak{d})$ (pour $i \geq 2$) pour le calcul de $H^0(S^\ell(\mathcal{O}(k)^{[m]}) \otimes \mathfrak{d})$, pour $\ell \geq 3$.

Remerciements. — Les explications détaillées de J. Le Potier et le soutien de N. Dan ont rendu possible ce texte. Une faute grave dans le texte initial m'a été signalée par C. Mourougane. Je les remercie, ainsi que D. Roessler et M. Brion, pour leur lecture patiente et les nombreuses corrections.

BIBLIOGRAPHIE

- [Bar1] W. BARTH, Some properties of rank-2 bundles on \mathbb{P}_n , *Math. Annalen*, 226 (1976), 125–150.
- [Bar2] W. BARTH, Moduli of vector bundles on projective plane, *Inventiones Math.*, 42 (1977), 63–91.
- [Bott] R. BOTT, Homogeneous vector bundles, *Ann. of Math.*, (2) 66 (1957), 203–248.
- [Bour] N. BOURBAKI, *Éléments de mathématiques*, fascicule VII, livre II, Algèbre, chapitre 3, Algèbre multilinéaire, Hermann (1958).
- [Bout] J. F. BOUTOT, Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs, *Invent. Math.*, 88 (1987), 65–68.
- [CKM] H. CLEMENS, J. KOLLAR and S. MORI, Higher Dimensional Complex Geometry, *Astérisque*, 166 (1988), page 52, thm.8.3.
- [D1] G. DANILA, Sur la cohomologie du fibré tautologique sur le schéma de Hilbert $\text{Hilb}^m(\mathbb{P}_2)$, Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu (avril 1999), e.print alg-geom/math/9904004, à paraître dans *Journal of Algebraic Geometry*.
- [D2] G. DANILA, Formule de Verlinde et dualité étrange sur le plan projectif, Thèse de l'Université Paris 7, novembre 1999.
- [Dema] J-P. DEMAILLY, Vanishing theorems for tensor power of an ample vector bundle *Invent. Math.*, 91, n° 1 (1988), 203–220.
- [ES] G. ELLINGSRUD and S. A. STRØMME, On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane, *Invent. Math.*, 87 (1987), 343–352.
- [FH] W. FULTON and J. HARRIS, *Representation Theory*, Springer-Verlag, 1996.
- [Grot] A. GROTHENDIECK, Local cohomology, *Lecture Notes Series*, 41 (1967).
- [Hart] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer-Verlag, 1977.
- [He] MIN HE, Espaces de modules de systèmes cohérents, *Int. J. of Maths.*, Vol 9, 5 (1998), 545–598.
- [LeP1] J. LE POTIER, Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques, *Complex projective Geometry*, London Mathematical Society, *Lecture Notes Series*, 179 (1992), 213–240.

- [LeP2] J. LE POTIER, Faisceaux semi-stables et systèmes cohérents, Proceedings de la Conference de Durham (juillet 1993), Cambridge University Press, 1995, 179–239.
- [LeP3] J. LE POTIER, Dualité étrange sur le plan projectif, Exposé donné à Luminy en décembre 1996.
- [LiE] M. A. A. van LEEUWEN, A. M. COHEN and B. LISSER, LiE, A Package for Lie Group Computations, Manual, included in the LiE software distribution, Computer Algebra Nederland, Amsterdam, 1992.
- [SGA] A. GROTHENDIECK, P. BERTHELOT et L. ILLUSIE, Séminaire de Géométrie Algébrique 6, Lecture Notes Series, 225 (1971).

Manuscrit reçu le 17 décembre 1999,
accepté le 14 janvier 2000.

Gentiana DANILA,
UMR 7586 du CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Case Postale 7012
2, Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05 (France).
gentiana@math.jussieu.fr

Adresse actuelle :
University of Warwick
Mathematics Institute
Coventy CV47AL (England).
gentiana@maths.warwick.ac.uk