Annales de l'institut Fourier

THANH-PHONG LE

Contribution à l'étude de la radiation gravitationnelle

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 2 (1964), p. 269-344
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_269_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 269-344.

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA RADIATION GRAVITATIONNELLE

par LE THANH-PHONG

Introduction

L'objet de notre travail est d'étudier le comportement asymptotique des espaces-temps de type II de la classification de Bel-Petrov. La théorie récente de la Radiation gravitationnelle se développe essentiellement par analogie avec le cas électromagnétique. Une théorie satisfaisante de la radiation électromagnétique a été élaborée (L. Mariot) partant de l'étude des discontinuités de la 2-forme représentant le champ, des propriétés algébriques de cette 2-forme et de la notion de radiation intrinsèque (locale). De l'analyse faite par F.A.E. Pirani, il apparaît qu'en Relativité Générale, le champ de gravitation est représenté par le tenseur de courbure. L'étude faite par A. Lichnérowicz des discontinuités de la double 2-forme de courbure R fait apparaître des analogies entre cette double 2-forme et la 2-forme champ électromagnétique. On peut dire que ces analogies proviennent des propriétés algébriques de R et des « équations d'ordre supérieur » auxquelles il satisfait (A. Lichnérowicz). Algébriquement, R est une double 2-forme symétrique, analogue à la 2-forme électromagnétique. Du point de vue différentiel, alors que la forme champ électromagnétique est astreinte aux équations de Maxwell ($d\xi = 0$, $\delta\xi = J$, où J est la 1-forme courant électricité); la double 2-forme R, elle, satisfait aux équations $d'R = 0$, $\delta'R = J'$, où $J' = d''r$ est la « différentielle extérieure » à droite du tenseur de Ricci, donc dépendant uniquement du tenseur de matière.

Dans la première partie, nous rappelons les principes fondamentaux de la Relativité Générale et nous développons le calcul différentiel extérieur pour les formes ainsi que pour les doubles-formes, les formes et doubles-formes vectorielles. Les notions de produit extérieur de formes, produits scalaire-extérieur de formes vectorielles (A. Frölicher et A. Nijenhuis) sont rappelées et étendues aux doubles formes. Les opérateurs de différentiation et de codifférentiation extérieures (à droite et à gauche) se définissent de façon naturelle.

La deuxième partie rappelle les éléments essentiels de la théorie de la radiation électromagnétique et de la radiation gravitationnelle, tout en apportant quelques résultats nouveaux. L'étude de l'endomorphisme $\overline{\mathrm{T}}$ associé au tenseur de Maxwell montre que $\overline{\mathrm{T}} = \rho^2 \mathrm{I}$, où ρ est un scalaire, ce qui conduit à distinguer deux cas selon que ρ est différent de zéro ou est nul. Dans le premier cas, celui du cas électromagnétique régulier, l'endomorphisme $h = \rho^{-1}\overline{\mathrm{T}}$ est involutif et définit par conséquent une Π-structure réelle; cette structure est « échangeable » avec la métrique. Étant donnée une telle structure, on peut associer à la 2-forme vectorielle de torsion S une certaine 3-forme (scalaire) H dont la donnée est équivalente à celle de S. Cela étant, nous montrerons que les équations de Maxwell-Rainich expriment simplement que la 3-forme H est cohomologue à zéro. Le raccord de ce résultat avec celui de J. A. Wheeler et de C. W. Misner se fait à l'aide du crochet de Jacobi généralisé (défini par A. Nijenhuis). Dans le cas du champ électromagnétique singulier ($\rho = 0$), il existe un champ de vecteurs isotropes Λ singulier pour la 2-forme ξ, c'est-à-dire dont le produit intérieur et extérieur par cette 2-forme sont nuls. Ce champ de vecteurs est à trajectoires géodésiques (L. Mariot) et satisfait à l'équation de I. Robinson; $(\theta(\Lambda)g, \theta(\Lambda)g) = (\delta\Lambda)^2$, $\theta(\Lambda)$ désignant la dérivation de Lie suivant Λ. Cette dernière équation apparaît comme une conséquence naturelle des équations de Maxwell, d'après le calcul extérieur développé dans la première partie.

Les propriétés algébriques de la double 2-forme de courbure conduisent à la classification bien connue de Bel-Petrov. L'analogie du champ gravitationnel avec le champ électromagnétique conduit L. Bel à introduire un tenseur du quatrième ordre qui généralise le tenseur de Maxwell au cas gravitationnel. Le vecteur de Poynting est le vecteur d'espace associé à ce tenseur et à une direction temporelle donnée. Un état de radiation gravitationnelle intrinsèque est définie par l'impossibilité d'annuler ce vecteur pour tout choix d'observateurs. Nous montrerons que ce vecteur est identique (à un facteur numérique près) au vecteur de Poynting défini à partir du tenseur du second ordre $\bar{t}$ construit par Pirani à partir du pseudo-tenseur d'impulsion-énergie du champ gravitationnel.

La troisième partie contient des résultats essentiels de notre travail. Nos résultats concernent les espaces-temps d'Einstein spéciaux de types II de la classification de Bel-Petrov. Le paragraphe 1 étudie les propriétés différentielles d'un tel espace-temps, un des résultats essentiels étant que le champ de vecteurs isotropes Λ canoniquement défini par le critère de L. Bel, est à trajectoires géodésiques et satisfait à l'équation de I. Robinson. Dans le second paragraphe quelques conséquences de l'équation de Robinson sont déduites, en utilisant l'identité de Ricci. Il y est démontré en particulier, qu'un espace-temps compact du vide admettant un champ de vecteurs isotropes à trajectoires géodésiques et satisfaisant à l'équation de Robinson est porteur d'ondes monochromatiques (au sens d'A. Avez). Notre résultat concernant le champ Λ dans les espaces-temps de types II, joint à ceux de R. K. Sachs pour les cas III, conduit naturellement à se demander si les cas II et III sont caractérisés par l'existence d'un champ de vecteurs isotropes à trajectoires géodésiques et satisfaisant à l'équation de I. Robinson. Nous démontrons cette proposition dans le cas où le champ est intégrable, et partiellement dans le cas général; plus précisément, nous montrerons que, dans le cas général (Λ non supposé intégrable), le champ Λ est un champ caractéristique du tenseur de courbure (: $\Lambda^2 \wedge (R \barwedge \underline{\Lambda}^2) = 0$). Le paragraphe 3 étudie la permanence de la classification de Bel-Petrov; nous la démontrons dans l'hypothèse où l'un des champs de vecteurs caractéristiques du tenseur de courbure est à trajectoires géodésiques. Ceci présente un certain intérêt, la classe des espaces-temps à vecteurs caractéristiques géodésiques étant plus large que la classe des espaces-temps de type II ou III. Le dernier paragraphe est consacré à l'étude du comportement asymptotique des espaces-temps de types II, dans l'hypothèse simplificatrice $d\Lambda = 0$. L'équation de propagation de $(\delta\Lambda)$ permet d'interpréter $r = -2/(\delta\Lambda)$ comme la distance parallaxiale (R. K. Sachs). Des équations scalaires obtenues dans le premier paragraphe et des équations qui s'en déduisent par application de l'identité de Ricci, nous montrerons que la double 2-forme forme de courbure admet la décomposition

$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

où les doubles 2-formes au second membre sont de type III_b, III_a et II respectivement. Leurs composantes dans un repère orthonormé se propageant par parallélisme le long des rayons tendent vers O comme $0(1/r)$, $0(1/r^2)$ et $0(1/r^3)$ respectivement.

Je prie M. Lichnérowicz de trouver ici le témoignage de ma profonde reconnaissance pour l'aide qu'il m'a toujours accordée. Ce travail n'aurait sans doute jamais vu le jour sans ses conseils éclairés et ses encouragements précieux.

M. Ehresmann a bien voulu accepter la présidence du jury de ma thèse et me proposer un sujet de seconde thèse. Qu'il veuille trouver ici l'expression de mes sincères remerciements.

Je voudrais remercier également M. Thiry qui a bien voulu se joindre à MM. Ehresmann et Lichnérowicz pour constituer le Jury de cette thèse.

Je ne saurais oublier M. Gouyon de la Faculté des Sciences de Toulouse qui m'avait orienté vers la Recherche et qui depuis n'a cessé de m'encourager dans cette voie. Je suis heureux de lui exprimer ici ma reconnaissance.

Enfin, je voudrais adresser mes vifs remerciements à L. Bel pour l'aide amicale qu'il a bien voulu m'apporter au début de mes recherches et pout l'intérêt constant qu'il porte à ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION 269

PREMIÈRE PARTIE

I. LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE 275
1. La variété espace-temps 275
2. Le système des équations d'Einstein 276

II. LE CALCUL DIFFÉRENTIEL EXTÉRIEUR 276
1. Produit extérieur 277
2. Produit scalaire extérieur 277
3. Dualité sur les formes et les doubles-formes 278
4. Différentiation et codifférentiation extérieures. Laplacien 280

DEUXIÈME PARTIE

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET CHAMP GRAVITATIONNEL

I. CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE 284
1. Forme électromagnétique et tenseur de Maxwell 284
2. Champ électromagnétique régulier 285
a) Propriétés algébriques 285
b) Propriétés différentielles 287
3. Champ électromagnétique singulier 290
a) Propriétés algébriques 290
b) Propriétés différentielles 291

II. CHAMP GRAVITATIONNEL 293
1. Propriétés algébriques de la double 2-forme de courbure. 293
2. Équations d'ordre supérieur 295
3. Tenseur de Bel 296
4. Classification de Bel-Petrov 297

III. VECTEURS DE POYNTING EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE 300
1. Tenseur de Pirani 300
2. Identité des vecteurs de Poynting $P(\overline{T})$ et $P(\overline{t})$ 302

TROISIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES ESPACES-TEMPS DE TYPES II

I. Propriété différentielles des espaces-temps de types II 305

1. Préliminaires et notations 305
2. Équations scalaires déduites des équations d'ordre supérieur .. 307
3. Conséquences des équations de champ 312

II. Sur l'équation de Robinson 316

1. Quelques conséquences de l'équation de Robinson 316
2. Sur le champ de vecteurs isotropes géodésiques satisfaisant à l'équation de Robinson 319
   A) $C(F; F) = C(^*F; F) = O$ 320
   B) $R(F; G) = R(^*F; G) = O$ 327

III. Sur la permanence de la classification de Bel-Petrov 330

1. Notations et rappels sur la classification de Bel-Petrov 330
1. Permanence des cas C.I. 331
2. Permanence des cas III 333
3. Permanence de III_b 334

IV. Comportement asymptotique des espaces-temps de types II ... 335

1. La notion de distance parallaxiale 335
2. Comportement asymptotique des espaces-temps de types II ... 336

Bibliographie 342

PREMIÈRE PARTIE

I. LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1. La variété espace-temps.

La variété espace-temps de la Relativité générale est une variété différentiable de dimension 4, orientable, munie d'un ds^2 de type hyperbolique normal : en chaque point de la variété, le ds^2 peut être à la forme

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (\omega^i)^2$$

où les $\omega^\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3)$ sont des formes de Pfaff locales linéairement indépendantes. Ceci définit une réduction du groupe structural de l'espace fibré tangent $T(V_4)$ au groupe de Lorentz. Une connexion dans l'espace fibré réduit s'appelle une connexion euclidienne. La connexion (pseudo-)riemannienne est l'unique connexion euclidienne à torsion nulle. C'est de cette connexion qu'il s'agira dans toute la suite.

La donnée du ds^2 est équivalente à celle d'une forme quadratique $g(X, Y)$ sur l'espace vectoriel tangent en chaque point de la variété. g étant donnée une fois pour toute, nous noterons pour simplifier :

$$(X, Y) \underset{\text{déf}}{=\!=} g(X, Y).$$

La donnée de g détermine un isomorphisme entre $T_x(V_4)$ et sa duale. Par cet isomorphisme, on peut identifier ces deux espaces vectoriels : Une lettre comme X désignera soit un vecteur soit la 1-forme associée. Lorsqu'il y a risque de confusion, nous utilisons la notation $\underline{X}$ pour préciser qu'il s'agit d'un vecteur.

Un champ de vecteurs unitaires temporels $X((X. X) = 1)$

étant donné, l'application

$$h : Y \to Y - (X, Y)X$$

définit la projection d'espace. Son image est appelée espace associé à la direction définie par X au point considéré.

2. Le système des équations d'Einstein.

Nous désignerons par $\overline{R}$ le tenseur de courbure de la connexion pseudo-riemannienne : si X et Y sont deux vecteurs en x, $\overline{R}(X, Y)$ est un endomorphisme de $T_x(V_4)$. Le tenseur covariant associé par la métrique sera noté R. Nous désignerons par r et r_0 le tenseur de Ricci et la courbure scalaire respectivement.

Généralisant l'équation de Laplace-Poisson en théorie classique, Einstein est conduit par des considérations différentielles, à poser comme équations de champ restreignant le potentiel de gravitations (composantes de g), le système d'équations :

$$S \equiv r - \frac{1}{2}(r_0 - 2\lambda)g = \chi T$$

où λ est une constante (dite cosmologique), T, un tenseur symétrique du second ordre décrivant le schéma matériel considéré et χ un facteur numérique.

Nous nous bornerons dans ce travail la plupart du temps aux espaces d'Einstein et plus particulièrement à des espaces-temps du vide, sans constante cosmologique.

La théorie de la radiation gravitationnelle se développe essentiellement par analogie avec la théorie élaborée pour le champ électromagnétique. Nous résumons dans un paragraphe qui suit les résultats connus dans le cas électromagnétique, en simplifiant les notations et en apportant une contribution nouvelle à l'étude du champ électromagnétique régulier. Mais auparavant, nous allons fixer les notations du calcul différentiel extérieur.

II. LE CALCUL DIFFÉRENTIEL EXTÉRIEUR.

Dans la suite, par forme nous entendons toujours une forme extérieure, une forme non alternée sera appelée forme multilinéaire.

1. Produit extérieur.

Soient M_1 et M_2 deux modules, supposons donnée une application bilinéaire de $M_1 \times M_2$ dans un module M_3 :

$$m_1 \in M_1, \quad m_2 \in M_2 \rightarrow m_1 . m_2 \in M_3.$$

Si α est une p-forme à valeurs dans M_1, et β une q-forme à valeurs dans M_2, leur produit extérieur $\alpha \wedge \beta$ est une $(p + q)$-forme à valeurs dans M_3, définie par :

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}, \ldots, X_{p+q})$$
$$\Sigma\varepsilon(s)\alpha(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(p)}) . \beta(X_{s(p+1)}, \ldots, X_{s(p+q)})$$

où la sommation s'étend à toute permutation de $(1,2, \ldots, p+q)$ telle que $s(1) < s(2) < \cdots < s(p)$ et $s(p+1) < \cdots < s(p+q)$, $\varepsilon(s)$ désigne la signature de s et où les produits au second membre sont entendus au sens de l'application bilinéaire donnée.

Cas particuliers :

1) $M_1 = M_2 = M_3 = R$, $m_1 . m_2$ désignant le produit ordinaire de scalaires. On obtient le produit extérieur ordinaire des formes scalaires.

2) $M_1 = M_2 = M_3 = A$, l'algèbre des formes à valeurs scalaires, l'application bilinaire considérée étant

$$m_1 . m_2 = m_1 \wedge m_2.$$

Posons $A^{p,q} = A^p \otimes A^q$, un élément de $A^{p,q}$ sera appelé une double forme de bidegré (p, q). $A \otimes A$ devient alors une algèbre extérieure.

3) $M_1 = R$, $M_2 = M_3 = T_x(V)$, $m_1 . m_2$ désignant maintenant le produit d'un vecteur par un scalaire au sens usuel. On a ainsi défini le produit extérieur d'une forme scalaire par une forme vectorielle.

2. Produit scalaire-extérieur.

C'est une loi de composition qui, à une p-forme scalaire α et une q-forme vectorielle L, associe la $(p + q - 1)$-forme scalaire $\alpha \barwedge L$ définie par :

$$(\alpha \barwedge L)(X_1, \ldots, X_{p+q-1})$$
$$= \Sigma\varepsilon(s)\alpha(L(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(q)}), X_{s(q+1)}, \ldots, X_{s(q+p-1)})$$

où s et la sommation ont la même signification que dans **1**.

Si X est un vecteur, $\alpha \barwedge X$ n'est autre que le produit intérieur de α par X, soit $i(X)\alpha$.

En remplaçant dans la formule de définition précédente la forme scalaire par une p-forme vectorielle M, on définit la $(p + q - 1)$-forme vectorielle $M \barwedge L$.

En particulier, si L et M sont des endomorphismes, $L \barwedge M$ n'est autre que l'endomorphisme composé.

Si α est une p-forme scalaire, nous désignons par $\underline{\alpha}$ la $(p\text{-}1)$-forme vectorielle associée par la métrique :

$$(X_1, \underline{\alpha}(X_2, \ldots, X_p)) = \alpha(X_1, \ldots, X_p).$$

De même $\underline{S}$ désignera la double-forme vectorielle associée à la double forme S. Le produit scalaire-extérieur s'étend de façon naturelle aux double-formes.

3. Dualité sur les formes et les double-formes.

Si α et β sont deux formes, nous désignerons par (α, β) leur produit scalaire. F étant une forme, $e(F)$ désignera le produit extérieur (à gauche) par F. Son transposé métrique sera noté $i(F)$: $(i(F)\alpha, \beta) = (\alpha, e(F)\beta)$ pour toutes formes α et β telles que $\deg \alpha - \deg \beta = \deg F$. Rappelons que si X est une 1-forme $i(X)$ est une antidérivation sur l'algèbre extérieure des formes scalaires. La variété étant supposée orientée, si ω^α est une cobase directe, le produit extérieur

$$\eta = \omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3$$

est l'élément de volume.

L'existence de l'élément de volume permet de définir l'opérateur $*$ sur les formes

$$\text{(II, 3.1)} \qquad *F \underset{\text{déf}}{=\!=} i(F)\eta.$$

Compte tenu de la signature de la métrique et de la dimension de la variété :

$$\text{(II, 3.2)} \qquad **F = -(-1)^p F, \qquad \text{où} \qquad p = \deg F.$$

La définition se généralise immédiatement à des formes à valeurs dans un module quelconque. En particulier, une double forme de bidegré (p, q) pouvant être considérée comme une p-forme à valeurs dans A^q et comme une q-forme à valeurs dans A^p, on peut définir sa duale à gauche $*S$ et sa duale à droite $S*$ ou $\underset{D}{*}S$.

Entre les opérateurs de multiplication intérieure et extérieure par une 1-forme, on a les relations duales :

$$\text{(II, 3.3)} \qquad i(X) = -*e(X)*, \qquad e(X) = *i(X)*.$$

En considérant une double-forme soit comme une forme à gauche, soit comme une forme à droite, on peut définir les opérateurs $e'(X)$, $i'(X)$ et $e''(X)$, $i''(X)$ respectivement.

Soit S une double forme de bidegré $(p+1, q+1)$, nous désignons par $\mathcal{C}S$ la double forme de bidegré (p, q) définie à l'aide de deux bases duales (ω^α) et (X_α) par

$$\text{(II, 3.4)} \qquad (\mathcal{C}S)(X_1, \ldots, X_p; X_{p+1}, \ldots, X_{p+q}) \\ = \sum_\alpha S(\underline{\omega}^\alpha, X_1, \ldots, X_p; X_\alpha, X_{p+1}, \ldots, X_{p+q})$$

(dans cette relation le ; permet d'indiquer les degrés à droite et à gauche explicitement, nous conserverons cette notation dans la suite).

Une application R-linéaire de $A \otimes A$ dans elle-même sera dite de bidegré (r, s) si elle associe à toute (p, q) double forme une $(p+r, q+s)$ double forme. Si D_1 et D_2 sont de bidegrés respectifs (p_1, q_1) et (p_2, q_2) leur crochet sera par définition :

$$\text{(II, 3.5)} \qquad [D_1, D_2] = D_1D_2 - (-1)^{p_1p_2+q_1q_2}D_2D_1.$$

Avec ces définitions, on établit aisément les relations de commutation :

$$\text{(II, 3.6)} \qquad [\mathcal{C}, e'(X)] = i''(X), \qquad [\mathcal{C}, e''(X)] = i'(X)$$

et

$$\text{(II, 3.7)} \qquad [\mathcal{C}, i'(X)] = 0, \qquad [\mathcal{C}, i''(X)] = 0.$$

Nous introduisons d'autre part les opérateurs de transfert à droite et à gauche T_D et T_L (E. Calabi), qui à toute (p, q) double-forme font correspondre une $(p-1, q+1)$ double-forme T_DS et une $(p+1, q-1)$ double-forme T_LS. Ces doubles formes étant définies par les relations

$$\text{(II, 3.8)}_D \qquad (T_DS)(X_1, \ldots, X_{p-1}; X_p, \ldots, X_{p+q}) \\ = \Sigma\varepsilon(s)S(X_1, \ldots, X_{p-1}, X_{s(p)}; X_{s(p+1)}, \ldots, X_{s(p+q)})$$

$$\text{(II, 3.8)}_L \qquad (T_LS)(X_1, \ldots, X_{p+1}; X_{p+2}, \ldots, X_{p+q}) \\ = \Sigma\varepsilon(s)S(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(p)}; X_{s(p+1)}, X_{p+2}, \ldots, X_{p+q}).$$

Ces opérateurs sont en fait duaux de l'opérateur $\mathcal{C}$ par rapport à $\underset{D}{*}$ et $*$. De façon précise, on a, pour toute double forme de bidegré (p, q) :

$$\text{(II, 3.9)} \quad T_D = -(-1)^p \underset{D}{*} \mathcal{C} \underset{D}{*}, \qquad T_L = (-1)^p * \mathcal{C} *.$$

La double forme S sera dite primitive à droite (resp. à gauche) si $T_D S = 0$ (resp. si $T_L S = 0$). En particulier, une double 1-forme ou une double 2-forme primitive à droite ($\Longleftrightarrow$ primitive à gauche) est symétrique. S sera appelée primitive si elle est primitive à droite et à gauche.

4. Différentiation et codifférentiation extérieures. Laplacien.

La donnée d'une connexion linéaire permet de définir, pour tout champ de vecteurs X l'opérateur de différentiation covariante ∇_X le long de X. ∇ définit une loi de dérivation sur les champs de tenseurs, c'est-à-dire qu'on a :

$$1. \qquad \nabla_{X+Y} = \nabla_X + \nabla_Y, \qquad \nabla_{fX} = f\nabla_X$$

f: fonction différentiable.

$$2. \qquad \nabla_X(fu) = f\nabla_X . u + (X.f)u,$$

pour tout champ de tenseurs u.

Soit S une forme multilinéaire à valeurs dans un module M, sur lequel opèrent les ∇_X, on appelle dérivée de Lie de S relative à X (et à la loi de dérivation considérée), la forme multilinéaire de même degré p définie par :

$$\text{(II, 4.1)} \quad (\theta_X . S)(X_1, \ldots, X_p) = \nabla_X . S(X_1, \ldots, X_p) - \sum_{\alpha=1}^{p} S(X_1, \ldots, [X, X_\alpha], \ldots, X_p).$$

Le produit intérieur $i(X)$ par un vecteur d'une forme à valeur dans un module se définit comme pour une forme scalaire.

Cela étant, on démontre (cf. J. L. Koszul) qu'il existe sur l'algèbre des formes à valeurs dans le module considéré un opérateur de différentiation extérieure d, de degré $+1$, satisfaisant à la relation

$$\text{(II, 4.2)} \qquad \theta_X = i(X)d + di(X).$$

L'opérateur d est unique et déterminé pour toute p-forme à valeurs dans M par :

$$(\text{II, } 4.3) \quad (dS)(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{\alpha=1}^{p+1} (-1)^{\alpha+1} \nabla_{X_\alpha}.S(X_1, \ldots, \hat{X}_\alpha, \ldots, X_{p+1}) + \sum_{\alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta} S([X_\alpha, X_\beta], X_1, \ldots, \hat{X}_\alpha, \ldots, \hat{X}_\beta, \ldots, X_{p+1})$$

où le signe ^ placé au-dessus d'un vecteur signifie que ce terme est omis. L'opérateur d est une (anti-) dérivation.

Les définitions précédentes se réduisent dans le cas des formes scalaires aux définitions usuelles de dérivation de Lie $\theta(X)$ et de différentiation extérieure. La relation (II, 4.2) se réduit alors à la relation de H. Cartan.

Nous avons vu que l'opérateur $*$ s'étend aux formes à valeurs dans un module quelconque. On peut donc définir l'opérateur de codifférentiation extérieure :

$$(\text{II, } 4.4) \qquad \delta = * \, d \, *.$$

Pour une connexion métrique, on a les relations :

$$(\text{II, } 4.5) \qquad d = \sum_\alpha e(\omega^\alpha) \nabla_{X_\alpha}, \qquad \delta = -\sum_\alpha i(\omega^\alpha) \nabla_{X_\alpha}$$

(ω^α) et (X_α) désignant toujours deux bases duales quelconques; la première relation est valable pour une connexion sans torsion quelconque, la seconde s'en déduit par dualité entre les produits intérieurs et extérieurs.

En considérant une double forme comme une forme à gauche et à droite respectivement, on peut définir les opérateurs de dérivations et de codifférentiations extérieures, d', δ' et d'', δ''. Pour une connexion métrique, il est clair que la différentiation covariante suivant un champ de vecteurs commute avec $\mathcal{C}$; il résulte par conséquent des relations (II, 3.6) et (II, 3.7) les suivantes :

$$(\text{II, } 4.6) \qquad [\mathcal{C}, d'] = -\delta'', \qquad [\mathcal{C}, d''] = -\delta'$$

$$(\text{II, } 4.7) \qquad [\mathcal{C}, \delta'] = 0, \qquad [\mathcal{C}, \delta''] = 0.$$

Considérons maintenant le cas particulier des formes à valeurs scalaires. L'opérateur δ n'est pas une dérivation par rapport au produit extérieur, néanmoins, nous allons établir des relations simples dans le cas où δ opère sur les formes simples, ces relations nous seront très utiles tant dans le cas électromagnétique que dans le cas gravitationnel.

1) Si X est une 1-forme et f, une fonction, nous avons :

$$\text{(II, 4.8)}_1 \qquad \delta(fX) = f(\delta X) - X.f$$

il suffit en effet de revenir à la définition initiale de δ.

2) Si X et Y sont deux 1-formes (ou champs de vecteurs), la codifférentielle de la 2-forme $X \wedge Y$ est donnée par :

(II, 4.8)$_2$

$$\delta(X \wedge Y) = (\delta X)Y - (\delta Y)X - [X, Y]$$

(dans cette relation, le crochet $[X, Y]$ représente au second membre la 1-forme associée au champ de vecteurs crochet des champs de vecteurs X et Y.)

Preuve. Des relations de définition de δ, de la dualité entre les produits intérieurs et extérieurs, de la relation de H. Cartan et enfin de la relation de commutation $[\theta(X), i(Y)] = i([Y, Y])$, il résulte qu'on a successivement :

$$\begin{aligned}
\delta(X \wedge Y) &= *d*e(Y)Y \\
&= - *di(X)*Y \\
&= - *\theta(X)*Y + i(X)d*Y \\
&= - *\theta(X)i(Y)\eta - *e(X)*d*Y \\
&= - *i(Y)\theta(X)\eta - [X, Y] - X(\delta Y)
\end{aligned}$$

or $\theta(X)\eta = \mathrm{di}(X)\eta = d*X = -*(\delta X)$, on en déduit que le premier terme au second membre de la dernière égalité est égal à $Y(\delta X)$. La relation est ainsi prouvée.

3) La relation précédente est « duale » de la relation donnant la valeur de la différentielle d'une 1-forme pour les champs de vecteurs X et Y. Cette dualité et la relation (II, 4.3) suggèrent la validité de la relation :

$$\begin{aligned}
\text{(II, 4.8)}_p \quad & \delta(X_1 \wedge X_2 \wedge \cdots \wedge X_p) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha+1}(\delta X_\alpha)X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_\alpha \cdots \wedge X_p \\
&+ \sum_{\alpha<\beta} (-1)^{\alpha+\beta}[X_\alpha, X_\beta]X_1 \wedge \cdots \wedge \hat{X}_\alpha \cdots \wedge \hat{X}_\beta \wedge \cdots \wedge X_p
\end{aligned}$$

ce qu'on peut démontrer par récurrence, en utilisant la relation de commutation entre la dérivation de Lie et le produit intérieur de la même façon que précédemment.

La relation (II, 4.8)$_1$ apparaît comme un cas particulier de la relation précédente.

Remarques. — 1) l'opérateur $i(X)$ se définit de façon naturelle sur les formes multilinéaires :

$$(i(X)S)(X_1, \ldots, X_{p-1}) = S(X, X_1, \ldots, X_{p-1}).$$

La relation (II, 4.5) permet de définir l'opérateur de codifférentiation pour toute forme multilinéaire, et même pour tout champ de tenseurs.

2) Avec la généralisation précédente, on voit que δ coïncide avec δ' sur $A^{p,q}(p > 0)$, et avec δ'' sur $A^{0,p}$. De même, d' (resp. d'') se réduit à d sur $A^{p,0}$ (resp. sur $A^{0,p}$).

3) Posons, par analogie avec le cas des structures kahleriennes :

$$\Delta_2 = d'\delta' + \delta'd' + d''\delta'' + \delta''d''.$$

On vérifie facilement sur les relations de commutations (II, 4.6) et (II, 4.7) que Δ_2 commute avec $\mathcal{C}$. Δ_2 commute d'autre part avec $*$ et $\underset{D}{*}$, comme on le voit immédiatement. Il résulte qu'il commute également avec T_L et T_D.

L'opérateur Δ_2 ne se réduit pas dans le cas des formes au Laplacien de Rham $\Delta = d\delta + \delta d$. Posons $\Delta_0 = \delta D$, où D est défini sur les formes multilinéaires par

$$(DS)(X, X_1, \ldots, X_p) = (\nabla_X . S)(X_1, X_2, \ldots X_p)$$

(il convient de distinguer D et la dérivation covariante ordinaire ∇, qui est déterminée par une relation analogue, au premier membre, X serait placé à la dernière place au lieu de la première). Cela étant, on voit que sur les formes (considérées par exemple comme éléments de $A^{0,p}$) :

$$\Delta = \Delta_2 - \Delta_0.$$

Le même calcul que celui qui donne l'expression explicite des composantes du Laplacien d'une forme en termes de Δ_0 et des tenseurs de Ricci et de Riemann avec une légère modification, montre que $\Delta_2 - \Delta_0$ coïncide avec le Laplacien généralisé de A. Lichnérowicz, sur les double-formes.

DEUXIÈME PARTIE

CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET CHAMP GRAVITATIONNEL

I. Champ électromagnétique.

Dans cette partie, nous rappelons les résultats connus sur le champ électromagnétique, en apportant une contribution à l'étude de la signification de l'équation de Maxwell-Rainich pour le champ électromagnétique régulier. Le calcul différentiel extérieur développé dans la première partie permet une étude simple du champ électromagnétique singulier, et de démontrer en particulier l'équation de Robinson dans ce cas.

1. Forme électromagnétique et tenseur de Maxwell.

En Relativité Générale, le champ électromagnétique est décrit par une 2-forme (à valeurs scalaires) ξ satisfaisant aux équations de Maxwell :

$$(\mathrm{I},\ 1.1) \qquad d\xi = 0, \qquad \delta\xi = \mathrm{J}$$

où J est la 1-forme champ électrique, nulle dans des domaines ne contenant pas de la matière chargée. La 2-forme ξ est de plus restreinte aux équations d'Einstein :

$$(\mathrm{I},\ 1.2) \qquad r - \frac{1}{2}(r_0 - 2\lambda)g = \mathrm{T}$$

où T est le tenseur de Maxwell, c'est-à-dire le tenseur covariant (double 1-forme) associé à l'endomorphisme $\overline{\mathrm{T}}$, lequel est défini à partir de la 2-forme ξ et de sa duale par :

$$(\mathrm{I},\ 1.3) \qquad \overline{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(\underline{\xi} \barwedge \underline{\xi} + (\underline{*\xi}) \barwedge (\underline{*\xi}))$$

En utilisant l'expression explicite de la co-différentiation extérieure en termes des différentiations covariantes, on peut montrer que, ξ_1 et ξ_2 étant deux 2-formes quelconques, on a :

$$\text{(I, 1.4)} \quad \delta(\underline{\xi_1} \barwedge \underline{\xi_2} + (\underline{*\xi_1}) \barwedge (\underline{*\xi_2})) = \underline{\delta\xi_1} \barwedge \underline{\xi_2} + \underline{\xi_1} \barwedge \underline{\delta\xi_2} + \underline{\delta(*\xi_1)} \barwedge (\underline{*\xi_2}) + (\underline{*\xi_1}) \barwedge \underline{\delta(*\xi_2)}.$$

Cette relation reste valable pour des 2-formes à valeurs dans un module quelconque sur lequel opère les différentiations covariantes. Cette remarque nous sera utile dans le cas gravitationnel.

Revenons au cas électromagnétique, la 2-forme de champ étant fermée, sa duale est cofermée, la relation précédente donne donc :

$$\text{(I, 1.5)} \qquad \delta\overline{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(\underline{\delta\xi} \barwedge \underline{\xi} + \underline{\xi} \barwedge \underline{\delta\xi}) = \underline{\delta\xi} \barwedge \underline{\xi}$$

soit, compte tenu de la deuxième équation de Maxwell :

$$\text{(I, 1.6)} \qquad \delta\overline{\mathrm{T}} = \mathrm{J} \barwedge \underline{\xi}.$$

En particulier, le tenseur de Maxwell est conservatif dans le vide électromagnétique.

L'étude algébrique du champ électromagnétique est basée sur l'identité :

$$\text{(I, 1.7)} \qquad \underline{\xi_1} \barwedge \underline{\xi_2} - (\underline{*\xi_2}) \barwedge (\underline{*\xi_1}) = -(\xi_1, \xi_2)\mathrm{I}$$

valable pour toutes 2-formes ξ_1 et ξ_2, I désignant l'endomorphisme identité.

L'identité précédente permet de déterminer les puissances scalaires extérieures de l'endomorphisme associé à une 2-forme, on obtient en particulier (H. S. Ruse, cf. J. Plebanski)

$$\text{(I, 1.8)} \quad \overline{\mathrm{T}}^2 = \rho^2\mathrm{I} \qquad \text{où} \qquad \rho^2 = (\xi, \xi)^2 + (\xi, *\xi)^2.$$

On est ainsi conduit à distinguer deux cas :

1) $\rho \neq 0$, le champ électromagnétique est dit régulier;

2) $\rho = 0$, le champ électromagnétique est dit singulier.

2. Champ électromagnétique régulier.

a) *Propriétés algébriques*. Posons $\overline{\mathrm{T}} = \rho h$, il résulte que h est un endomorphisme de carré identité. Des équations d'Einstein, il résulte que h jouit des propriétés suivantes :

$$\text{(I, 2.1)} \qquad \operatorname{Tr} h = 0,$$

$$\text{(I, 2.2)} \qquad h^2 = I,$$

$$\text{(I, 2.3)} \qquad r(X, Y) = (hX, Y)$$

pour tous champs de vecteurs X et Y,

r étant une double 1-forme symétrique, on a :

$$\text{(I, 2.4)} \qquad (hX, Y) = (X, hY)$$

autrement dit, h est échangeable avec la métrique; du caractère involutif de h, il résulte que cette dernière équation est encore équivalente à :

$$\text{(I, 2.4)}' \qquad (hX, hY) = (X, Y).$$

La donnée de h définit une Π_R-structure (ou structure presque-produit réel). Les deux 2-plans propres de h sont supplémentaires et en fait orthogonaux au sens de la métrique, d'après (I, 2.4). L'un des deux 2-plans est donc orienté dans le temps, l'autre dans l'espace. En prenant $\rho > 0$, on voit que pour avoir une densité d'énergie positive, il faut que le 2-plan propre correspondant à la valeur propre $+1$ soit orienté dans le temps. Ce 2-plan coupe le cône de lumière suivant deux directions isotropes, sur lesquelles nous pouvons choisir deux vecteurs Λ et M de façon à avoir $(\Lambda, M) = 1$. Soient X et Y deux vecteurs d'espace correspondant à la valeur propre-1, normés : $(X, X) = (Y, Y) = -1$ et orthogonaux entre eux $(X, Y) = 0$.

Les vecteurs Λ, M, X et Y forment une base « quasi-orthonormée » de l'espace vectoriel tangent, adaptée à la Π_R-structure.

Posons :

$$\text{(I, 2.5)} \qquad G = \Lambda \wedge M, \qquad F = \Lambda \wedge X, \qquad *E = M \wedge X;$$

nous allons montrer que leurs duales sont définies par :

$$\text{(I, 2.5)}* \qquad *G = X \wedge Y, \qquad *F = \Lambda \wedge Y, \qquad E = M \wedge Y.$$

Étant données une base quasi-orthonormée Λ, M, X, Y définie comme précédemment les vecteurs $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda + M)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\Lambda - M)$ sont des vecteurs normés orientés dans le temps et dans l'espace respectivement, et forment avec X et Y une base orthonormée, il en résulte pour l'élément de volume l'expression :

$$\eta = -\Lambda \wedge M \wedge X \wedge Y; \tag{I, 2.6}$$

en se rapportant à la définition de $*$ et en utilisant le fait que si V et W sont deux vecteurs, on a $i(V \wedge W) = i(W)i(V)$, on déduit les relations (I, 2.5)$*$.

Les formes G, F et $*$E et leurs duales forment une base de A^2_x en chaque point x. Dans la suite G, F et $*$E désignent toujours de telles 2-formes asociées à une base quasi-orthonormée.

En décomposant la 2-forme ξ suivant une telle base, associée à la base quasi-orthonormée adaptée, on voit que :

$$\xi = \alpha G + \beta * G. \tag{I, 2.7}$$

Cette décomposition correspond au fait bien connu (cf. L. Mariot) que le champ électrique et le champ magnétique associés à une direction temporelle située dans le 2-plan propre -1, sont collinéaires. α et β sont des invariants de ξ définis par : $(\xi, \xi) = \alpha^2 - \beta^2$, $(\xi, *\xi) = 2\alpha\beta$.

b) *Propriétés différentielles.* Soit S le tenseur de torsion de la II_R-structure définie par h. On sait que ce tenseur est défini par :

$$4S = \frac{1}{2}[h, h]$$

où $[h, h]$ est le crochet de Nijenhuis de la 1-forme vectorielle h, introduit par A. Nijenhuis dans la théorie générale des dérivations et des algèbres de Lie graduées. C'est une 2-forme vectorielle dont la valeur pour deux champs de vecteurs V et W est donnée par :

$$\frac{1}{2}[h, h](V, W) = [hV, hW] + h^2[V, W] - h[hV, W] - h[V, hW].$$

Nous allons relier ce tenseur aux équations de Maxwell-Rainich du champ électromagnétique régulier.

Posons $\alpha + i\beta = \exp(-\varphi + i\psi)$, il vient, compte tenu des équations de Maxwell (cf. R. Debever 2) :

$$(\mathrm{M.\ R})_1 \qquad \begin{aligned} d\varphi &= *(\delta G \wedge *G + \delta * G \wedge G) \\ d\psi &= *(\delta G \wedge G - \delta * G \wedge * G) \underset{\text{déf}}{=} *H \end{aligned}$$

La première équation relie la norme ρ du tenseur de Ricci à la structure. Nous allons relier la 3-forme H au tenseur de torsion de la structure.

En termes de la base adaptée définie dans *a*), nous avons :

$$\begin{aligned} H(\Lambda, X, Y) &= (i(\Lambda)H)(X, Y) = -(\Lambda, \delta * G) \\ H(X, \Lambda, M) &= (i(X)H)(\Lambda, M) = -(X, \delta G) \end{aligned}$$

par suite, en utilisant les relations (II, 4.8) donnant la codifférentielle d'une forme simple, on voit que les seules composantes non nulles de H sont :

$$\begin{aligned} H(\Lambda, X, Y) &= (\Lambda, [X, Y]), \qquad & H(M, X, Y) &= (M, [X, Y]), \\ H(X, \Lambda, M) &= (X, [\Lambda, M]), \qquad & H(Y, \Lambda, M) &= (Y, [\Lambda, M]). \end{aligned}$$

Revenant à la définition de tenseur de torsion, il est immédiat que les seules composantes non nulles de S dans la base quasi-orthonormée adaptée sont données par

$$\begin{aligned} 4S(X, Y) &= 2(h + I)[X, Y], \\ 4S(\Lambda, M) &= 2(I - h)[\Lambda, M]; \end{aligned}$$

d'autre part h est échangeable avec la métrique et la base adaptée, il résulte que :

$$\begin{aligned} (\Lambda, S(X, Y)) &= (\Lambda, [X, Y]), \qquad & (M, S(X, Y)) &= (M, [X, Y]), \\ (X, S(\Lambda, M)) &= (X, [\Lambda, M]), \qquad & (Y, S(\Lambda, M)) &= (Y, [\Lambda, M]). \end{aligned}$$

De ces valeurs et de celles de H, on voit que la 3-forme H est définie à partir du tenseur de torsion par :

$$(\mathrm{I},\ 2.8) \qquad H(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{3} \Sigma \varepsilon(s)(X_{s(1)}, S(X_{s(2)}, X_{s(2)}))$$

où s est une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, satisfaisant à la condition $s(2) < s(3)$; X_1, X_2 et X_3 étant des vecteurs quelconques.

La donnée de H est équivalente à celle de S, pour une structure presque produit satisfaisant aux propriétés algébriques dans *a*).

Remarques. 1) C. W. Misner et J. A. Wheeler ont obtenu comme équation de Maxwell-Rainich la suivante :

$$(\mathrm{M.R})_2 \qquad \frac{\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla^{\beta}r^{\alpha}_{\ \rho}r^{\rho\gamma}}{r^{\rho\sigma}r_{\rho\sigma}} = (d\psi)_{\delta}$$

(on vérifie immédiatement que la complexion ψ définie par Misner et Wheeler est précisément la quantité ψ définie précédemment).

h étant involutif, le premier membre de l'équation précédente peut être remplacé par $\frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}\nabla^{\beta}h^{\alpha}_{\ \rho}h^{\rho\gamma}$.

Posons :

$$K^{\alpha}_{\ \beta\gamma} = \nabla_{\beta}h^{\alpha}_{\ \rho}h^{\rho}_{\ \gamma} - \nabla_{\gamma}h^{\alpha}_{\ \rho}h^{\rho}_{\ \beta}$$

et regardons ces quantités comme composantes d'une 2-forme vectorielle K. La valeur de cette forme vectorielle pour deux champs de vecteurs V et W est donnée par :

$$K(V, W) = (\nabla_{V}.h)h(W) - (\nabla_{W}.h)h(V)$$

or $\nabla_{X}.h = [\nabla_{X}, h]$, le crochet désignant le commutateur des applications, il en résulte pour K la valeur :

$$K(V, W) = [V, W] - h(\nabla_{V}.hW - \nabla_{W}.hV)$$

soit, en faisant apparaître le crochet de Jacobi généralisé :

$$K(V, W) = \frac{1}{2}[h, h](V, W) - ([\nabla_{hV}, h]W - [\nabla_{hW}, h]V).$$

Nous avons vu que h est échangeable avec la métrique, d'où $(Z, hW) = (W, hZ)$ ce qui donne par différentiation covariante suivant la direction du champ de vecteurs hV : $(Z, [\nabla_{hV}, h]W) = (W, [\nabla_{hV}, h]Z)$, il résulte que la somme obtenue par permutation circulaire de Z, V, W dans $(Z, [\nabla_{hV}, h]W)$ est symétrique par rapport à ces vecteurs, il vient par conséquent :

$$\Sigma\varepsilon(s)(X_{s(1)}, K(X_{s(2)}, X_{s(3)}) = 4\,\Sigma\varepsilon(s)(X_{s(1)}, S(X_{s(2)}, X_{s(3)})).$$

On voit par conséquent que $(\mathrm{M.R})_2$ est équivalente à $(\mathrm{M.R})_1$.

2) D'après la détermination de la 3-forme H en terme du tenseur de torsion, on voit que $H = 0$ si et seulement si $S = 0$. On retrouve le résultat de G. Rosen : les équations de Maxwell-Rainich sont intégrables si la II_R-structure est intégrable. La complexion est alors constante.

3. Champ électromagnétique singulier.

a) *Propriétés algébriques.*

Par définition, le champ est singulier si

$$\text{(I, 3.1)} \qquad (\xi, \xi) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\xi, *\xi) = 0.$$

La deuxième équation montre que ξ est une 2-forme simple, c'est-à-dire le produit extérieur de deux 1-formes $\xi = f(\Lambda \wedge X)$, le facteur scalaire f étant dépendant de la normalisation des champs de vecteurs Λ et X. En remplaçant ξ par cette expression dans la première équation, on peut montrer que l'un des champs de vecteurs doit être isotrope, l'autre, orienté dans l'espace. Cela découle des « inégalités de Schwarz » sous la forme donnée par A. Avez :

LEMME. — 1) *Si l'un des vecteurs* V *et* W *est orienté dans le temps, alors :*

$$(V, V)(W, W) \leqslant (V, W)^2$$

l'égalité n'étant atteinte que si les vecteurs sont collinéaires.

2) *La même conclusion est valable si les vecteurs* V *et* W *sont tous deux isotropes.*

3) *Si* V *et* W *sont tous deux orientés dans l'espace, alors :*

$$(V, V)(W, W) \geqslant (V, W)^2;$$

*l'égalité n'étant atteinte que si les vecteurs sont collinéaires (*1 *et* 3 *sont dus à Avez;* 2 *résulte du fait bien connu que deux vecteurs isotropes orthogonaux sont nécessairement collinéaires.)*

Pour montrer notre assertion, il suffit de remarquer que :

$$(V \wedge W, V \wedge W) = (V, V)(W, W) - (V, W)^2$$

et que V et W sont collinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul.

Nous pouvons supposer que Λ est isotrope, et d'autre part que X est normé. Il est clair que Λ et X sont orthogonaux. En complétant Λ et X en un repère quasi-orthonormé (Λ, M, X, Y), on voit immédiatement que $*\xi = \Lambda \wedge Y$, Y étant normé et orthogonal à Λ et X.

b) *Propriétés différentielles.*

Nous nous plaçons dans le cas du champ électromagnétique pur. Des équations de Maxwell il résulte le système d'équations :

$$(\text{I, } 3.2) \qquad (\Lambda, \delta F) = (\Lambda, \delta{*F}) = 0,$$
$$(\text{I, } 3.3) \qquad (X, \delta F) - (Y, \delta{*F}) = 0,$$
$$(\text{I, } 3.4) \qquad (Y, \delta F) + (X, \delta{*F}) = 0;$$

où nous avons posé, comme dans le cas électromagnétique régulier ainsi que dans toute la suite, $F = \Lambda \wedge X$ et par conséquent $*F = \Lambda \wedge Y$. En effet, le système des équations précédentes est valable pour la 2-forme ξ au lieu de F, or de la relation

$$\delta(fF) = f(\delta F) - i(df)F$$

et du fait que F est singulière (au même sens que pour ξ), on vérifie immédiatement que le système précédent est invariant par le changement $F \rightarrow fF$, il résulte par suite sa validité pour F.

De la relation (II, $4.8)_2$ donnant la codifférentielle d'un 2-forme simple, on voit que le système précédent est équivalent au suivant :

$$(\text{I, } 3.2)' \qquad (\Lambda, [\Lambda, X]) = (\Lambda, [\Lambda, Y]) = 0,$$
$$(\text{I, } 3.3)' \qquad (X, [\Lambda, X]) - (Y, [\Lambda, Y]) = 0,$$
$$(\text{I, } 3.4)' \qquad (X, [\Lambda, Y]) + (Y, [\Lambda, Y]) = 0.$$

Cela étant, rappelons que le fait que la torsion de la connexion considérée est nulle est équivalent au fait que, pour tous champs de vecteurs V et W, on a

$$[V, W] = \nabla_V.W - \nabla_W.V,$$

De ce fait et du fait que Λ est isotrope, on voit que les deux premières équations expriment que le champ de vecteurs Λ est à trajectoires géodésiques : $\nabla_\Lambda.\Lambda$ est proportionnel à Λ. On peut supposer la fonction f choisie de façon que le champ Λ correspondant satisfasse à l'équation :

$$(\text{I, } 3.2) \qquad \nabla_\Lambda.\Lambda = 0,$$

cela revient à rapporter les trajectoires du champ de vecteurs Λ au paramètre affine; par abus de language, nous dirons que le champ Λ est rapporté au paramètre affine s'il satisfait à l'équation précédente. Ce choix sera toujours supposé fait, et apporte de nombreuses simplifications.

Considérons maintenant les équations (I, 3.3)′ et (I, 3.4)′. Nous reconnaissons aux premiers membres des valeurs de la dérivée de Lie de la métrique suivant le champ de vecteurs Λ; d'après la formule définissant la dérivée de Lie (équation (II, 4.1) de la première partie) nous avons en effet :

$$(\theta(\Lambda)g)(X, X) = -2(X, [\Lambda, X]),$$
$$(\theta(\Lambda)g)(Y, Y) = -2(Y, [\Lambda, Y]),$$

et

$$(\theta(\Lambda)g)(X, Y) = -((Y, [\Lambda, X]) + (X, [\Lambda, Y])),$$

les équations précédentes s'écrivent donc :

$$\text{(I, 3.3)}'' \qquad (\theta(\Lambda)g)(X, X) - (\theta(\Lambda)g)(Y, Y) = 0,$$
$$\text{(I, 3.4)}'' \qquad (\theta(\Lambda)g)(X, Y) = 0.$$

Cela étant, complétons Λ, X et Y par un champ de vecteurs isotropes M de façon à obtenir une base quasi-orthonormée. En terme d'une telle base, le tenseur métrique s'exprimant par :

$$g = \Lambda \otimes M + M \otimes \Lambda - X \otimes X - Y \otimes Y.$$

Le champ Λ étant supposé rapporté au paramètre affine, nous avons $(\theta(\Lambda)g)(\Lambda, M) = 0$ par suite, en remarquant que $(\delta\Lambda) = -(g, \theta(\Lambda)g)$, il vient, compte tenu de l'expression précédente de la métrique :

$$\text{(I, 3.3)}''^{+} \qquad (\theta(\Lambda)g)(X, X) + (\theta(\Lambda)g)(Y, Y) = 2(\delta\Lambda).$$

On déduit de ce qui précède l'expression explicite de la dérivée de Lie de g suivant le champ Λ :

$$\theta(\Lambda)g = (\delta\Lambda)(X\otimes X + Y\otimes Y)$$
$$(\text{mod } \Lambda\otimes X + X\otimes\Lambda,\ \Lambda\otimes Y + Y\otimes\Lambda,\ \Lambda\otimes\Lambda)$$

d'où en prenant la norme, on obtient l'équation de Robinson :

$$\text{(R)} \qquad (\theta(\Lambda)g, \theta(\Lambda)g) = (\delta\Lambda)^2$$

ou, en posant par définition $\mathfrak{D}\Lambda = \theta(\Lambda)g$:

$$(\mathrm{R})' \qquad (\mathfrak{D}\Lambda, \mathfrak{D}\Lambda) = (\delta\Lambda)^2.$$

Nous reviendrons sur cette équation dans la troisième partie.

Les résultats pour le champ électromagnétique peuvent être résumés dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le champ électromagnétique est dit régulier si la quantité* $(\xi, \xi)^2 + (\xi, *\xi^2)$ *est différente de zéro. Il est dit singulier dans le cas contraire.*

1) La donnée du champ électromagnétique régulier définit une Π_R-structure échangeable avec la métrique. A la 2-forme vectorielle de torsion S est associée une 3-forme H définie par

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3) = \Sigma\varepsilon(s)(\mathrm{X}_{s(1)}, \mathrm{S}(\mathrm{X}_{s(2)}, \mathrm{X}_{s(3)}))$$

où la permutation s satisfait à $s(2) < s(3)$. La 3-forme H est cohomologue à zéro.

2) Dans le cas du champ électromagnétique singulier, il existe un champ de vecteurs isotropes à trajectoires géodésiques Λ, qui, rapporté au paramètre affine, satisfait à l'équation :

$$(\mathrm{R}') \qquad (\mathfrak{D}\Lambda, \mathfrak{D}\Lambda) = (\delta\Lambda)^2.$$

II. Champ gravitationnel.

1. Propriétés algébriques de la double 2-forme de courbure.

Pour une connexion linéaire sans torsion, on sait que le tenseur de courbure satisfait à la relation :

$$(\mathrm{II}, 1.1) \quad \overline{\mathrm{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}).\mathrm{Z} + \overline{\mathrm{R}}(\mathrm{W}, \mathrm{Z}).\mathrm{V} + \overline{\mathrm{R}}(\mathrm{Z}, \mathrm{V}).\mathrm{W} = 0$$

il en résulte que, pour une connexion métrique, la double 2-forme de courbure est primitive à droite ($\Longleftrightarrow$ à gauche) :

$$(\mathrm{II}, 1.2) \qquad \mathrm{T_D R} = 0 \quad (\Longleftrightarrow \mathrm{T_L R} = 0)$$

par suite c'est une double forme symétrique.

Nous avons vu d'autre part que les opérateurs $\mathrm{T_D}$ et $\mathrm{T_L}$ sont duaux de l'opérateur $\mathcal{C}$ par rapport aux opérateurs de dualité à gauche et à droite respectivement, il en résulte immédiatement que la double forme $*S$(resp. $S*$) est primitive à gauche (resp. à droite) si et seulement si $\mathcal{C}S = 0$. En particulier on a le résultat suivant, dû à L. Bel, en dimension 4 :

THÉORÈME. — *La double 2-forme* $*R$ *est primitive à gauche* ($\Longleftrightarrow$ *à droite) si et seulement si l'espace-temps est un espace d'Einstein spécial.*

D'autre part pour toute double 2-forme symétrique S (non nécessairement primitive), la relation suivante est valable sur la variété espace-temps (dimension 4), comme on peut le voir en se plaçant dans un repère quasi-orthonormé par exemple (C. Lanczos)

$$\text{(L)} \quad S + *S* = B \wedge g, \quad \text{où} \quad B = \mathcal{C}S - \frac{1}{4}(\mathcal{C}^2 S)g.$$

Afin de chercher la condition pour que $B \wedge g$ soit nul, nous prouvons d'abord le

LEMME. — *Pour toute double forme de bidegré (p, q), on a :*

(II, 1.3)

$$\mathcal{C}(S \wedge g) = (-1)^{p+q}(n - p - q)S + \mathcal{C}S \wedge g$$

g désignant toujours la métrique, n la dimension de la variété.

Preuve. — La relation à démontrer est trivialement satisfaite par les doubles 0-formes, c'est-à-dire les fonctions. Les multiplications extérieures à droites et à gauche par les 1-formes permettent d'engendrer toute l'algèbre $A \otimes A$. Supposons que toute double forme de bidegré (p, q) satisfasse à une relation de la forme :

$$\mathcal{C}(S \wedge g) = b_{p,q}S + \mathcal{C}S \wedge g, \quad b_{p,q} : \text{coefficient scalaire},$$

alors des relations de commutation entre la contraction $\mathcal{C}$ et les produits extérieurs par une 1-forme, on montre que toute $(p + 1, q)$-forme (resp. toute $(p, q + 1)$-forme) satisfait à une relation analogue avec

$$b_{p+1,q} = (-1)^{p+q} + b_{p,q} \quad (\text{resp. } b_{p,q+1} = (-1)^{p+q} + b_{p,q}).$$

La relation à démontrer en résulte par un calcul tout à fait élémentaire.

Corollaire. — *Si* B *est une double* 1-*forme, pour que* $B \wedge g$ *soit nul, il faut et il suffit que* B *le soit.*

Il résulte en effet du lemme que

$$\mathcal{C}(B \wedge g) = 2B + (\mathcal{C}B)g \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^2(B \wedge g) = 6\,\mathcal{C}B,$$

d'où immédiatement le corollaire.

La relation de Lanczos et le corollaire précédent donnent le résultat suivant (L. Bel).

Théorème. — *La duale à gauche et la duale à droite de la double* 2-*forme de courbure coïncident si et seulement si l'espace-temps est un espace d'Einstein.*

Remarque. — On sait que R peut être décomposé en tenseurs irréductibles (E. Cartan).

(C, 1.1)

$$R = C + \frac{1}{n-2} B \wedge g + \frac{r_0}{2n(n-1)} g \wedge g, \quad B \underset{\text{déf}}{=} r - \frac{1}{n} r_0 g,$$

où C est la double 2-forme de courbure conforme, associée au tenseur de courbure conforme par la métrique considérée. Notons en passant que cette décomposition résulte également par dualité de la décomposition de E. Calabi, appliquée à $*R$. Du lemme établi précédemment, on voit que

$$\text{(C, 1.2)} \qquad \mathcal{C}C = 0.$$

La double 2-forme C jouit donc de toutes les propriétés algébriques de la double 2-forme de courbure. En particulier, pour une variété-espace-temps on a la classification de Bel-Petrov (voir plus loin) pour C qui sera conforme invariante.

2. Équations d'ordre supérieur.

Avec les notations de la première partie, l'identité de Bianchi pour la courbure s'écrit sous la forme :

$$\text{(II, 1.1)} \qquad d''R = 0 \iff \text{(II, 1.1)}* \ \delta''{*R*} = 0$$

R étant une double forme symétrique, on peut écrire dans la relation précédente d' et δ' au lieu de d'' et δ''.

En appliquant l'opérateur $\mathcal{C}$ à ces équations et en tenant compte de la relation de commutation entre la différentiation extérieure (à droite) et la contraction, il vient :

(II, 1.2) $$\delta R = J$$

(II, 1.2)* $$\delta R_* = J_*, \qquad J \underset{\text{déf}}{=\!=} - d''r$$

(la notation δR_* ne présente pas d'ambiguïté, la codifférentiation à gauche commutant avec $\underset{D}{*}$).

Les équations précédentes sont formellement analogues aux équations de Maxwell pour le champ électromagnétique. Elles seront appelées équations d'ordre supérieur (A. Lichnérowicz) du champ gravitationnel.

Remarques 1) De la remarque finale de la première partie, on voit que la double 2-forme de courbure n'est pas harmonique en général, pour un espace-temps d'Einstein.

2) La différentiation extérieure à droite de (C, 1.1) donne :

(C, 2.1) $$d''C = \frac{1}{n-2} H \wedge g,$$

avec $$H \underset{\text{déf}}{=\!=} - d''r + \frac{1}{2(n-1)} d''r_0 \wedge g.$$

Or, on voit facilement que $\mathcal{C}H = \delta' s = 0$ (s désignant le tenseur d'Einstein) (cf. par exemple L. Eisenhart), par suite l'application de $\mathcal{C}$ à l'équation (C, 2.1) donne :

(C, 2.2) $$\delta' C = \frac{n-3}{n-2} H.$$

Si $H = 0$, C satisfait aux équations $d''C = 0$ et $\delta' C = 0$. C'est en particulier le cas des espaces d'Einstein (non nécessairement spécial). Il en résulte que les résultats qu'on obtient dans le cas d'un espace d'Einstein spécial en utilisant seulement l'identité de Bianchi s'étend immédiatement au cas d'un espace d'Einstein, à condition de remplacer R par la double 2-forme C.

3. Tenseur de Bel.

Les analogies algébriques entre la double 2-forme de courbure avec la 2-forme champ électromagnétique d'une part, et les analogies entre les équations d'ordre supérieur du champ gravitationnel avec les équations de Maxwell d'autre part, ont conduit L. Bel, et, indépendamment I. Robinson à introduire un tenseur d'ordre 4 généralisant le tenseur de Maxwell au cas gravitationnel. Avec nos notations, ce tenseur est défini par :

(II, 3.1)
$$\underline{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}(\underline{\mathrm{R}} \curlywedge \underline{\mathrm{R}} + \underline{*\mathrm{R}} \curlywedge \underline{*\mathrm{R}} + \underline{\mathrm{R}*} \curlywedge \underline{\mathrm{R}*} + \underline{*\mathrm{R}*} \curlywedge \underline{*\mathrm{R}*}).$$

Nous avons remarqué dans le cas électromagnétique, que la relation (I, 1.4) est valable pour toute forme à valeurs dans un module sur lequel opèrent les différentiations covariantes, il résulte que le tenseur T satisfait à la relation :

(II, 3.2)
$$\delta\underline{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}(\delta\underline{\mathrm{R}} \curlywedge \underline{\mathrm{R}} + \delta\underline{\mathrm{R}} \curlywedge \underline{\mathrm{R}} + \delta\underline{\mathrm{R}*} \curlywedge \underline{\mathrm{R}*} + \underline{\mathrm{R}*} \curlywedge \delta\underline{\mathrm{R}*})$$

compte tenu de l'identité de Bianchi. En particulier, le tenseur $\underline{\mathrm{T}}$ est conservatif pour un espace-temps d'Einstein.

Vecteur de Poynting.

Désignons par $\overline{\mathrm{T}}$ la 3-forme multilinéaire associée à $\underline{\mathrm{T}}$ par la métrique.

Soit u un vecteur unitaire temporel, h la projection d'espace associé (cf. la première partie), le vecteur de Poynting associé à cette direction est défini à partir de $\overline{\mathrm{T}}$ par :

(II, 3.3) $$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{T}}) = (h \curlywedge \overline{\mathrm{T}})(u, u, u)$$

$h \curlywedge \overline{\mathrm{T}}$ désignant simplement la composée des applications $\overline{\mathrm{T}}$ et $h.\mathrm{P}(\overline{\mathrm{T}})$ est un vecteur d'espace.

4. Classification de Bel-Petrov.

Les problèmes aux valeurs propres et aux vecteurs propres de la matrice associée à la double 2-forme de courbure dans l'espace des 2-formes (en chaque point de V_4), conduisent A. Z. Petrov et L. Bel à la classification résumée dans le diagramme suivant (R. Penrose), pour un espace-temps d'Einstein spécial :

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & \mathrm{I} \arrow[d] \\
 & \mathrm{II}_b \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{II}_a \arrow[d] \\
\mathrm{III}_a \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{III}_b \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Les divers cas de la classification peuvent être caractérisés par le critère suivant, dû à Bel :

Cas II_b. Il existe un champ de vecteurs (isotropes) Λ et un seul, satisfaisant aux relations :

$$(\mathrm{II},\ 4.1) \qquad R \barwedge \underline{\Lambda}^2 = 2\alpha\underline{\Lambda}^2, \qquad *R \barwedge \underline{\Lambda}^2 = 2\beta\Lambda^2$$

α et β étant des invariants de la double 2-forme de courbure. Λ^2 désigne ici le carré tensoriel de Λ, considéré comme double 1-forme.

Dans ce cas, il existe un repère quasi-orthonormé, ayant Λ pour l'un des vecteurs isotropes, par rapport auquel R admet la décomposition :

$$(\mathrm{II},\ 4.1)' \quad \begin{aligned} R = {} & \sigma(F\otimes F - *F\otimes *F) - \tau(*F\otimes F + F\otimes *F) \\ & + \alpha\gamma - \beta\eta + 3\alpha(G\otimes G - *G\otimes *G) \\ & - 3\beta(*G\otimes G + G\otimes *G). \end{aligned}$$

σ et τ étant des scalaires dépendant du choix de repère adapté, celui-ci étant défini à une normalisation près de Λ et de M, et à une rotation près des vecteurs X et Y dans leur 2-plans γ est la double 2-forme (symétrique) dont la duale à gauche (ou à droite) est l'élément de volume. Il est facile de vérifier que :

$$\gamma = \frac{1}{2} g \wedge g$$

et que la valeur de γ pour deux 2-formes est égale au produit scalaire de ces 2-formes.

Les invariants (R, R) et (R, *R) sont égaux, à un facteur numérique près, à $\alpha^2 - \beta^2$ et $2\alpha\beta$ respectivement. Ceci est analogue au cas électromagnétique régulier, avec les invariants (ξ, ξ) et $(\xi, *\xi)$.

Cas II_a. — Il existe deux champs de vecteurs (isotropes) Λ et M satisfaisant aux relations précédentes et aux relations analogues pour M, relations qui seront notées (II, 4.2).

On a la même décomposition de R avec $\sigma = \tau = 0$, le repère quasi orthonormé étant défini au même degré de liberté. Nous noterons (II, 4.2)′ cette décomposition.

Cas III_a. — Il existe un champ (unique) de vecteurs isotropes satisfaisant aux relations :

(II, 4.3) $$R \barwedge \underline{\Lambda}^2 = 0, \qquad *R \barwedge \underline{\Lambda}^2 = 0.$$

Il existe dans ce cas un repère quasi-orthonormé, défini aux mêmes degrés de libertés que dans les cas II; on a la décomposition suivante :

(II, 4.3)'
$$\begin{aligned} R = {} & \mu(F \otimes G + G \otimes F - *F \otimes *G - *G \otimes *F) \\ & - \nu(*F \otimes G + *G \otimes F + F \otimes *G + G \otimes *F), \end{aligned}$$

μ et ν étant des scalaires dépendant du choix du repère adapté.

Cas III_b. — Il existe un champ (unique) de vecteurs (isotropes) Λ satisfaisant à la relation suivante :

(II, 4.4) $$R \barwedge \underline{\Lambda} = 0 \quad (\Longleftrightarrow *R \barwedge \underline{\Lambda} = 0).$$

Il existe un repère par rapport auquel R admet la décomsition :

(II, 4.4)'
$$R = \sigma(F \otimes F - *F \otimes *F) - \tau(*F \otimes F + F \otimes *F)$$

le repère adapté étant défini à une rotation près autour de Λ.

Cas I. — Ce cas est caractérisé par l'exclusion des cas précédents. R. Debever a démontré qu'il existe quatre champs de vecteurs isotropes satisfaisant à la relation :

(II, 4.5) $$\Lambda^2 \wedge (R \barwedge \underline{\Lambda}^2) = 0.$$

Un tel champ de vecteurs sera appelé champ de vecteurs caractéristiques de la double forme de courbure.

Ceci étant rappelé, L. Bel a démontré que le vecteur de Poynting $P(\overline{T})$ ne peut s'annuler, avec un choix convenable d'observateur, c'est-à-dire du vecteur unitaire temporel u, que si l'espace-temps est de type I dans la classification précédente. Ceci conduit à considérer les cas II et III comme des cas radiatifs, si $P(\overline{T})$ peut s'interpréter comme représentant l'impulsion du champ gravitationnel. Ce résultat est concordant avec celui de F. A. E. Pirani, nous verrons dans le paragraphe suivant la raison de cette concordance.

III. Vecteurs de poynting en relativité générale.

Dans ce paragraphe nous utiliserons les coordonnées locales, avec des notations classiques. Les indices latins prendront, dans ce paragraphe exclusivement, des valeurs de 0 à 3. La convention de sommation d'Einstein sera itilisée. Nous désignons par Γ^i_{jk} les coefficients de la connexion (relatif à une carte locale).

1. Tenseur de Pirani.

Rappelons que le pseudo-tenseur d'impulsion énergie gravitationnelle apparaît quand on écrit, l'identité de conservation $\delta T = 0$ sous la forme de l'annulation d'une divergence ordinaire (dans une carte déterminée) :

$$\partial_j(T^j_i + t^j_i) = 0, \quad \partial_j \underset{\text{déf}}{=\!=} \partial/\partial_x j.$$

Le pseudo-tenseur t^j_i est défini (cf. par exemple J. Weber) par :

(III, 1.0)

$$t^j_i = L_G \delta^j_i - g_{rs,i}(\partial L_G/\partial g_{rs,j}), \quad g_{rs,j} \underset{\text{déf}}{=\!=} \partial_j g_{rs},$$

où L_G est le Lagrangien purement gravitationnel

$$L_G = \sqrt{-g}\, g^{st}(\Gamma^i_{sj}\Gamma^j_{ti} - \Gamma^i_{st}\Gamma^j_{ij}).$$

Le caractère non-tensoriel de t^j_i ne permet pas une interprétation physique directe satisfaisante. En particulier, même en Relativité restreinte, t^j_i peuvent avoir des valeurs non nulles dans un système non galiléen de coordonnées. On ne peut donc considérer t^j_i comme représentant l'impulsion énergie du champ gravitationnel en un point de l'espace-temps. En présence de gravitation, il n'est pas possible d'annuler les t^j_i dans tout un voisinage d'un événement, par un choix convenable de coordonnées. On est donc conduit à évaluer la moyenne de t^j_i sur une petite sphère dans l'espace associé à l'observateur et de caractériser la présence de la gravitation par la non nullité de cette moyenne.

Le système qui généralise localement le système de coordonnées galiléen est le système de coordonnées normales ayant pour l'origine le point considéré de l'espace-temps. Dans un tel système de coordonnées, les composantes de la métrique et de ses dérivées à l'origine sont données par :

$$a) \qquad (g_{ij}) = \eta_{ij} = (1, -1, -1, -1),$$
$$b) \qquad (g_{ij,k}) = 0,$$
$$c) \qquad (g_{ij,\,kl}) = \frac{1}{3}(R_{ik,\,jl} + R_{il,\,jk}).$$

Nous choisirons les coordonnées de façon que la ligne de coordonnée x^0 soit tangent à l'origine à la quadrivitesse de l'observateur.

La valeur moyenne des t_i^j (en coordonnées normales) sur une petite sphère dans l'espace associé à u est donnée par :

$$\text{(III, 1.1)} \qquad \bar{t}_i^j = t^j_{i,rs}(g^{rs} - u^r u^s) = t^j_{i,rs}h^{rs}.$$

Un calcul direct à partir de la relation (III, 1.0) donne :

(III, 1.2)
$$t_i^j = \frac{1}{8}(\delta_k^l\delta_i^j - 2\delta_i^l\delta_k^j)\sqrt{-g}\,S^{rspqkm}\,g_{rs,m}g_{pq,l},$$

où on a posé

$$S^{rspqkm} = g^{rs}U^{pqkm} + g^{km}U^{pqsr} - g^{rk}U^{pqsm} + g^{sk}U^{pqrm}$$

avec

$$U^{pqkm} = g^{pk}g^{qm} + g^{pm}g^{qk} - g^{pq}g^{km}.$$

En dérivant et en tenant compte du fait que les dérivées premières des potentiels s'annulent au point considéré, il résulte qu'au point considéré, on a

$$\text{(III, 1.3)} \qquad t_i^j = 0, \qquad t^j_{i,a} = 0,$$
$$t^j_{i,ab} = \frac{1}{8}(\delta_k^l\delta_i^j - 2\delta_i^l\delta_k^j)\sqrt{-g}(\delta_a^c\delta_q^d + \delta_b^c\delta_a^d)S^{rspqkm}g_{rs,mc}g_{pq,ld}.$$

Or les dérivées secondes des composantes de la métrique s'expriment en termes des composantes du tenseur de courbure par les relations c), on a d'après un calcul explicite :

$$\text{(III, 1.4)} \quad t^j_{i,ab} = \frac{1}{18}(\delta_k^l\delta_i^j - 2\delta_i^l\delta_k^j)(\delta_a^c\delta_b^d - \delta_b^c\delta_a^d) \times [(R^{kp,q}{}_c + R^{kq,p}{}_c)R_{lp,qd} - r_{mc}(R_l^{k,m}{}_d + R_l^{m,k}{}_d) - 2r_c^k r_{ld}].$$

Posons pour simplifier :

$$\text{(III, 1.5)} \qquad M_{ij,\,kl} = R_i^{r,\,s}{}_k R_{jr,\,sl} + R_i^{r,\,s}{}_l R_{jr,\,sk},$$

$$\text{(III, 1.6)} \qquad N_{ij,\,kl} = R_i^{r,\,s}{}_k R_{js,\,rl} + R_i^{r,\,s}{}_l R_{js,\,rk}.$$

Avec ces définitions, on a pour un espace-temps d'Einstein ($r = \lambda g$) :

$$\text{(III, 1.7)} \qquad t^j_{i,\,kl} = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\,\delta^j_i R^{rs,\,t}{}_k R_{rs,\,tl} - M^j_{i,\,kl} - N^j_{i,\,kl}\right) - 2\lambda^2(\delta^j_i g_{kl} - \delta^j_k g_{il} - \delta^j_l g_{ik}).$$

2. Identité des vecteurs de Poynting $P(\overline{T})$ et $P(\overline{t})$.

Nous avons vu dans le cas électromagnétique, que pour toutes 2-formes S_1 et S_2, on avait l'identité :

$$(\underline{S_1} \barwedge \underline{S_2}) - (\underline{*S_2} \barwedge \underline{*S_1}) = -(S_1, S_2)I.$$

Si k est un endomorphisme, nous désignons par $\tilde{k}$ son transposé métrique, c'est-à-dire l'endomorphisme défini par $(\tilde{k}(X), Y) = (X, k(Y))$ (sous forme de composantes $\tilde{k}^j_i = g_{jr}g^{is}k^r_s = k^i_j$). Avec cette notation, l'identité précédente s'écrit encore :

$$(\underline{S_1} \barwedge \underline{S_2}) - (\underline{*S_1} \barwedge \underline{S_2})^{\sim} = -(S_1, S_2)I$$

sous cette forme, l'identité est encore valable pour toutes 2-formes à valeurs dans un module quelconque, avec une loi de composition quelconque dans ce module. Si l'on prend des 2-formes à valeurs dans A^2, avec la loi de composition le produit tensoriel, on a l'identité, écrite sous formes de composantes :

$$\text{(III, 2.1)} \qquad (S_1)_{kl,}{}^j{}_s(S_2)_{mn,}{}^s{}_i - (S_1*)_{kl,\,i}{}^s(S_2*)_{mn,\,s}{}^j = -\frac{1}{2}(S_1)_{kl,}{}^{rs}(S_2)_{mn,\,rs}\delta^j_i.$$

En particulier, si l'on prend $S_1 = S_2 = R$, et qu'on se rappelle que pour un espace-temps d'Einstein, la duale à droite de R est égale à sa duale à gauche, il vient la relation :

(III, 2.2)

$$R_{kl,}{}^j{}_s R_{mn,}{}^s{}_i - (*R)_{kl,\,i}{}^s(*R)_{mn,\,s}{}^j = -\frac{1}{2}R_{kl,}{}^{rs}R_{mn,\,rs}\delta^j_i.$$

De cette relation, on déduit, en prenant les normes à gauche :

$$R^{rs,t}{}_k R_{rs,tl} = 6(R, R)g_{kl},$$

on peut donc écrire :

(III, 2.3) $t^j_{i,kl} = \frac{1}{9}$
$[9(R, R)\delta^j_i g_{kl} - 2\lambda^2(\delta^j_i g_{kl} - \delta^j_k g_{il} - \delta^j_l g_{ik}) - M^j_{i,kl} - N^j_{i,kl}]$.

Notons les relations :

$$g^{rs}M_{ij,rs} = 12(R, R)g_{ij} \qquad \text{et} \qquad g^{rs}N_{ij,rs} = 6(R, R)g_{ij},$$

la première relation est immédiate, la seconde s'obtient de (III, 2.2) en contractant i avec n et k avec i et en remarquant que R étant primitive, la contraction de sa duale est nulle. De ces relations, on voit que :

$$g^{rs}t^j_{i,rs} = 0 \bmod \mathrm{I}.$$

Cela étant, le vecteur de Poynting $P(\bar{t})$ associé à $\bar{t}$ et à la direction u est défini par $P(\bar{t}) = (h \wedge \bar{t})\,(u)$, soit, sous forme de composantes :

$$P^j(\bar{t}) = (\delta^j_i - u_i u^j)\bar{t}^i_r u^r.$$

Il est clair que les termes en I dans $\bar{t}$ donnent une contribution nulle au vecteur de Poynting. On a par conséquent :

(III, 2.4) $$P^j(\bar{t}) = \frac{1}{9}\,(M^j_{i,kl} + N^j_{i,kl})u^i u^k u^l.$$

Déterminons maintenant $P^j(\overline{T})$. Pour un espace d'Einstein, on a :

$$T^{i\ k}_{j,l} = \frac{1}{2}\,(R^{i\ k}_{r,s}R^{r\ s}_{j,l} - (*R)^{i\ k}_{r,s}(*R)^{r\ s}_{j,l}).$$

De la relation (III, 2.2) on déduit que :

(III, 2.5)
$$T^j_{i,kl} = -12(R, R)\delta^j_i g_{kl} + \frac{1}{2}M^j_{i,kl}.$$

par suite :

(III, 2.6) $$P^j(\overline{T}) = \frac{1}{2}M^j_{i,kl}u^i u^k u^l.$$

Pour montrer l'identité entre $P(\overline{T})$ et $P(\bar{t})$ il suffit donc de montrer que :

$$\sigma M^{j}_{i,\,kl} = \sigma N^{j}_{i,\,kl}$$

où σ désigne la sommation par permutation circulaire sur les indices i, k et l. Cette dernière relation se vérifie aisément sur les définitions de M et N.

THÉORÈME. — *Les vecteurs de Poynting* $P(\overline{T})$ *et* $P(\bar{t})$ *définis à partir du tenseur de Bel et du tenseur de Pirani respectivement, sont identiques (à un facteur scalaire sans dimension près).*

TROISIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES ESPACES-TEMPS DE TYPES II

I. Propriétés différentielles des espaces-temps de types II.

1. Préliminaires et notations.

Nous considérerons dans la suite exclusivement des vecteurs d'un repère quasi-orthonormé. Rappelons qu'un tel repère est défini par deux vecteurs isotropes Λ et M dont le produit scalaire est égal à l'unité, et de deux vecteurs unitaires d'espaces, normés, orthogonaux entre eux et aux deux vecteurs isotropes précédents. La métrique de l'espace-temps s'exprime en terme d'un tel repère par

$$(\text{I, 1.1}) \quad g = \Lambda \otimes \mathrm{M} + \mathrm{M} \otimes \Lambda - \mathrm{X} \otimes \mathrm{X} - \mathrm{Y} \otimes \mathrm{Y}.$$

Deux vecteurs quelconques d'un repère quasi-orthonormé seront dits quasi-orthogonaux.

Étant donnés trois vecteurs quasi-orthogonaux Z, V et W, nous poserons pour simplifier l'écriture

$$(\text{I, 1.2}) \qquad (\mathrm{V, Z, W}) = (\mathrm{V}, \nabla_{\mathrm{Z}}.\mathrm{W}).$$

Les vecteurs étant supposés quasi-orthogonaux, il résulte du caractère euclidien de la connexion (cf. II. 4.1 de la première partie), que le « coefficient de rotation » (V, Z, W) satisfait à la relation.

$$(\text{I, 1.3}) \qquad (\mathrm{V, Z, W}) = -(\mathrm{W, Z, V}).$$

D'autre part, la connexion étant sans torsion, on a de plus

$$(\text{I, 1.4}) \quad (\mathrm{Z, V, W}) - (\mathrm{Z, W, V}) = (\mathrm{Z}, [\mathrm{V, W}]).$$

Ces deux dernières relations caractérisent complètement les « coefficients de rotation » en termes de la métrique et des crochets de champs de vecteurs. Un calcul immédiat donne en effet :

(I, 1.5)
$$2(V, Z, W) = (V, [Z, W]) - (Z, [W, V]) + (W, [V, Z]).$$

En particulier, on peut noter les relations

$(I, 1.5)_1$
$$(V, V, W) = (V, [V, W])$$

$(I, 1.5)_2$
$$(V, W, Z) + (W, V, Z) = (V, [W, Z]) + (W, [V, Z]).$$

Remarque. — La relation (I, 1.5) peut être considérée comme un cas particulier de la suivante, valide pour tous champs de vecteurs Z, V et W.

$$\begin{aligned}2(V, \nabla_Z, W) = {} & Z.(V, W) - W.(Z, V) + V.(W, Z) \\ & + (V, [Z, W]) - (Z, [W, V]) + (W, [V, Z]).\end{aligned}$$

Cette dernière relation peut être utilisée pour définir la connexion métrique (J. L. Koszul).

Dans l'étude des espaces-temps d'un type déterminé de la classification de Bel-Petrov, nous utiliserons les décompositions de la double forme de courbure en terme des 2-formes de base associées du repère quasi-orthonormé adapté. Nous aurons besoin pour l'étude des propriétés différentielles des espaces-temps de types II en particulier les lemmes suivants :

LEMME 1. — *Si* F *et* G *sont deux* 2-*formes et* V *un champ de vecteurs, on a la relation :*

(I, 1.6) $$i(V)\delta(F\otimes G) = (V, \delta F)G + \nabla_{i(V)F}.G.$$

Preuve. — Il suffit d'utiliser l'expression explicite de la codifférentiation (généralisée) en terme de deux bases duales (ω^α) et (X_α). On a successivement

$$\begin{aligned}i(V)\delta(F\otimes G) &= - i(V)i(\omega^\alpha)\nabla_{X_\alpha}.(F\otimes G) \\ &= - i(V)i(\omega^\alpha)(\nabla_{X_\alpha}.F)\otimes G - i(V)i(\omega^\alpha)F\nabla_{X_\alpha}.G \\ &= (V, \delta F)G + i(\omega^\alpha)i(V)F\nabla_{X_\alpha}.G.\end{aligned}$$

Or, $(i(\omega^\alpha)i(V)F)X_\alpha = < \omega^\alpha, i(V)F > X_\alpha = i(V)F$, la correspondance $Z \to \nabla_Z$ étant d'autre part A^0-linéaire, la relation à démontrer en résulte.

Lemme 2. — *Si* f *est une fonction (de classe* C^1*),* V *un champ de vecteurs, on a*

$$\text{(I, 1.7)} \quad i(V)\delta(f\eta) = *(V \wedge df)$$
$$\text{(I, 1.7)}^* \quad i(V)\delta(f\gamma) = V \wedge df \; (\gamma = (1/2)g \wedge g).$$

Preuve. — L'élément de volume peut être considéré comme une forme (ordinaire) ou comme une double-forme de bidegré (p, q) (avec $p + q = 4$). En le considérant comme une forme différentielle, on a

$$\delta(f\eta) = *d*(f\eta) = -*df.$$

Par suite, compte tenu de la dualité entre le produit extérieur et le produit intérieur par une 1-forme, il vient

$$\begin{aligned} i(V)\delta(f\eta) &= *e(V) ** df \\ &= *e(V)\, df \end{aligned}$$

soit la première relation.

La seconde relation s'en déduit par dualité à droite, en considérant maintenant l'élément de volume comme une double 2-forme.

2. Équations scalaires déduites des équations d'ordre supérieur.

Nous nous placerons toujours dans le cas d'un espace-temps d'Einstein spécial. Pour un tel espace-temps, les deux systèmes d'équations d'ordre supérieur se réduisent à un seul système, soit $\delta R = 0$. Nous allons écrire ces équations en prenant les valeurs du premier membre pour les vecteurs du repère quasi-orthonormé.

Rappelons que dans les cas II, il existe un repère quasi-orthonormé par rapport auquel la double 2-forme de courbure admet la décomposition

$$\begin{aligned} \text{(II, 1.0)} \quad R = {} & \sigma(F \otimes F - *F \otimes *F) - \tau(*F \otimes F + F \otimes *F) \\ & + \alpha\gamma - \beta\eta + 3\alpha(G \otimes G - *G \otimes *G) \\ & - 3\beta(*G \otimes G + G \otimes *G). \end{aligned}$$

Nous poserons pour simplifier

(I, 2.1) $\hat{F} = F \otimes F - {*F} \otimes {*F}$

(I, 2.2) $\hat{G} = G \otimes G - {*G} \otimes {*G}$

la décomposition précédente s'écrit alors

(II, 1.0)′
$$R = \sigma \hat{F} - \tau * \hat{F} + \alpha\gamma - \beta\eta + 3\alpha\hat{G} - 3\beta * \hat{G}.$$

Nous écrirons successivement les équations $i(V)\delta R = 0$ avec V respectivement égal à Λ, M, X et Y du repère quasi-orthonormé adapté.

2. *a*) *Calcul de* $i(\Lambda)\delta R$. — De la définition de $F (= \Lambda \wedge X)$, il résulte que les produits intérieurs par Λ de F et de sa duale sont nuls, il résulte alors du lemme 1 qu'on a

(2*a*, 1) $i(\Lambda)\delta(\sigma\hat{F}) = \sigma[(\Lambda, \delta F)F - (\Lambda, \delta * F) * F]$

et la relation duale

(2*a*, 1)* $i(\Lambda)\delta(\tau * \hat{F}) = \tau[(\Lambda, \delta F) * F + (\Lambda, \delta * F)F]$.

Il résultent en particulier de ces équations que si $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ (on doit avoir alors $\sigma^2 + \tau^2 \neq 0$, si l'espace temps n'est pas supposé plat), c'est-à-dire si l'on est dans le cas III_b, alors $(\Lambda, \delta F) = (\Lambda, \delta * F) = 0$. En se référant à la démonstration faite dans le cas électromagnétique singulier, on voit que le champ de vecteurs Λ est à trajectoires géodésiques. On peut le rapporter au paramètre affine.

Supposons $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Du lemme 2 des préliminaires, on a

(2*a*, 2) $i(\Lambda)\delta(\alpha\gamma) = \Lambda \wedge d\alpha = (\Lambda . \alpha)G \quad (\text{mod. } F, * F)$,

(2*a*, 2)*
$$- i(\Lambda)\delta(\beta\eta) = - * (\Lambda \wedge d\beta) = - (\Lambda . \beta) * G \quad (\text{mod. } F, * F).$$

D'autre part, comme $i(\Lambda)G = i(\Lambda)(\Lambda \wedge M) = - \Lambda$, le lemme 1 donne

(2*a*, 3) $i(\Lambda)\delta(\alpha\hat{G})$
$$= \alpha\,[(\Lambda, \delta G)G - (\Lambda, \delta * G) * G - \nabla_\Lambda . G] - (\Lambda . \alpha)G.$$

La différentiation covariante étant une dérivation par rapport au produit tensoriel, c'est donc en particulier une dérivation pour la multiplication extérieure. En utilisant ce fait nous avons :

$$\begin{aligned}\nabla_\Lambda . * G = \nabla_\Lambda .(X \wedge Y) &= \nabla_\Lambda . X \wedge Y + X \wedge \nabla_\Lambda . Y \\ &= (\Lambda, \Lambda, X)E - (\Lambda, \Lambda, Y) * E \quad (\text{mod } F, * F).\end{aligned}$$

On en déduit par dualité et en remarquant que la différentiation covariante commute avec l'opérateur $*$

$$- \nabla_\Lambda . G = (\Lambda, \Lambda, X) * E + (\Lambda, \Lambda, Y)E \quad (\text{mod } F, * F).$$

Il vient par suite :

$$(2a, 4) \quad 3i(\Lambda)\delta(\alpha \hat{G}) = + 3\alpha(\Lambda, \Lambda, X) * E + 3\alpha(\Lambda, \Lambda, Y)E \quad (\text{mod } F, * F, G, * G).$$

$$(2a, 4)^* \quad - 3i(\Lambda)\delta(\beta * \hat{G}) = + 3\beta(\Lambda, \Lambda, X)E - 3\beta(\Lambda, \Lambda, Y) * E \quad (\text{mod } F, * F, G, * G).$$

Des équations obtenues précédemment, il résulte que les équations $i(\Lambda)\delta R = 0$ (mod F, $*$F, G, $*$G) s'écrivent sous la forme

$(I, 2.1)'_0$

$$\delta R(\Lambda ; \Lambda, X) = - 3\alpha(\Lambda, \Lambda, X) + 3\beta(\Lambda, \Lambda, Y) = 0.$$

$(I, 2.1)''_0$

$$\delta R(\Lambda ; \Lambda, Y) = - 3\beta(\Lambda, \Lambda, X) - 3\alpha(\Lambda, \Lambda, Y) = 0.$$

La quantité $\alpha^2 + \beta^2$ étant supposée non nulle, le système de ces deux dernières équations montre que le champ de vecteurs Λ est à trajectoires géodésiques (L. Bel). En le rapportant au paramètre affine, nous avons :

$\underline{(I, 2.1)_a}$ $$\nabla_\Lambda . \Lambda = 0.$$

Revenons maintenant aux équations $(2a, 2)$ et $(2a, 3)$. Ces équations permettent d'écrire les équations $i(\Lambda)\delta R = 0$ (mod F, $*$F, $*$E, E) sous la forme de deux équations scalaires :

$\underline{(I, 2.1)'_a}$

$$\delta R(\Lambda ; \Lambda, M) = 2\Lambda . \alpha - 3\alpha(\Lambda, \delta G) + 3\beta(\Lambda, \delta * G) = 0.$$

$\underline{(I, 2.2)''_a}$

$$\delta R(\Lambda \;\; X, Y) = 2\Lambda . \beta - 3\beta(\Lambda, \delta G) - 3\alpha(\Lambda, \delta, * G) = 0.$$

Ces équations régissent la loi de propagation des invariants α et β le long des rayons gravitationnels que constituent les trajectoires (géodésiques) du champ de vecteurs Λ.

Écrivons les équations

$$i(\Lambda)\delta R = 0 \quad (\text{mod } E, * E, G, * G).$$

Le champ Λ étant à trajectoires géodésiques, on a

$$i(\Lambda)\delta(\sigma\hat{F}) = i(\Lambda)\delta(\tau * \hat{F}) = 0;$$

Λ étant d'autre part « normalisé » par le paramètre affine, il vient

(2a, 5)

$$\begin{aligned} i(\Lambda)\delta(\alpha\hat{G}) &= -\nabla_\Lambda . G \quad (\text{mod } G, * G) \\ &= -(M, \Lambda, X)F - (M, \Lambda, Y) * F \quad (\text{mod } G, * G) \end{aligned}$$

(2a, 5)*

$$-i(\Lambda)\delta(\beta * \hat{G}) = +(M, \Lambda, X) * F - (M, \Lambda, Y)F \quad (\text{mod } G, {}^* G).$$

Comme on a de plus

$$(2a, 6) \quad i(\Lambda)\delta(\alpha\gamma) = -(X.\alpha)F - (Y.\alpha) * F \quad (\text{mod } G, * G)$$

$$(2a, 6)^* \quad -i(\Lambda)\delta(\beta\eta) = +(X.\beta) * F - (Y.\beta)F \quad (\text{mod } G, * G)$$

les équations à écrire sont

$\underline{(\mathrm{I}, 2.3)'_a}$

$$\delta R(\Lambda; M, X) = X.\alpha + Y.\beta + 3\alpha(M, \Lambda, X) + 3\beta(M, \Lambda, Y) = 0.$$

$\underline{(\mathrm{I}, 2.3)''_a}$.

$$\delta R(\Lambda; M, Y) = Y.\alpha - X.\beta - 3\beta(M, \Lambda, X) + 3\alpha(M, \Lambda, Y) = 0.$$

2. b) *Calcul de* (iM)δR. — On procède de la même façon que précédemment, le calcul étant presque identique, nous nous contenterons d'indiquer les résultats. Les relations en correspondance avec celles dans a seront numérotées de la même manière.

$\underline{(\mathrm{I}, 2.1)'_b}$

$$\begin{aligned} \delta R(M; M, X) = {} & 3\alpha(M, \delta * E) - 3\beta(M, \delta E) \\ & -X.\sigma + Y.\tau - \sigma[(M, \delta F) + (M, X, \Lambda) - (Y, Y, X)] \\ & +\tau[(M, \delta * F) + (M, Y, \Lambda) - (X, X, Y)] = 0 \end{aligned}$$

$\underline{(\mathrm{I}, 2.1)''_b}$

$$\begin{aligned} \delta R(M; M, Y) = {} & 3\beta(M, \delta * E) + 3\alpha(M, \delta E) \\ & + Y.\sigma + X.\tau \\ & + \sigma[(M, \delta * F) + (M, Y, \Lambda) - (X, X, Y)] \\ & + \tau[(M, \delta F) + (M, X, \Lambda) - (Y, Y, X)] = 0. \end{aligned}$$

Naturellement, si $\sigma^2 + \tau^2 = 0$, c'est-à-dire si l'espace-temps considéré est de type II_a, les équations précédentes permettent de conclure que le champ de facteurs M est également à trajectoires géodésiques.

$\underline{(I, 2.2)'_b}$

$$\delta R(M; \Lambda, M) = -[2M.\alpha + 3\alpha(M, \delta G) - 3\beta(M, \delta * G)] + \sigma[(X, X, \Lambda) - (Y, Y, \Lambda)] - \tau[(Y, X, \Lambda) + (X, Y, \Lambda)] = 0,$$

$\underline{(I, 2.2)''_b}$

$$\delta R(M; X, Y) = -[2M.\beta + 3\beta(M, \delta G) - 3\alpha(M, \delta * G)] + \sigma[(Y, X, \Lambda) + (X, Y, \Lambda)] + \tau[(X, X, \Lambda) - (Y, Y, \Lambda)] = 0.$$

Nous verrons qu'en fait les coefficients de σ et de τ dans les équation précédentes sont nulles en vertu d'autres équations scalaires déduites des équations d'ordre supérieur; de sorte qu'on a des équations exactement analogues à celles obtenues dans *a*).

Enfin les équations $i(M)\delta R = 0$ conduisent aux équations scalaires :

$\underline{(I, 2.3)'_b}$ $$\delta R(M; \Lambda, X) = X.\alpha - Y.\beta + 3\alpha(\Lambda, M, X) - 3\beta(\Lambda, M, Y) = 0.$$

$\underline{(I, 2.3)''_b}$

$$\delta R(M; \Lambda, Y) = Y.\alpha + X.\beta + 3\beta(\Lambda, M, X) + 3\alpha(\Lambda, M, Y) = 0.$$

2. *c-d*) *Calcul de* $i(X)\delta R$ *et de* $i(Y)\delta R$. — Les équations obtenues sont les suivantes :

$(I, 2.4)'_c$

$$\delta R(X; \Lambda, X) = \Lambda.\alpha - 3\alpha(Y, Y, \Lambda) - 3\beta(X, Y, \Lambda) = 0,$$

$(I, 2.4)'_c$

$$\delta R(X; \Lambda, Y) = \Lambda.\beta - 3\beta(Y, Y, \Lambda) + 3\alpha(X, Y. \Lambda) = 0;$$

$(I, 2.4)'_d$

$$\delta R(Y; \Lambda, Y) = \Lambda.\alpha - 3\alpha(X, X, \Lambda) + 3\beta(Y, X, \Lambda) = 0,$$

$(I, 2.4)''_d$

$$\delta R(Y; \Lambda, X) = \Lambda.\beta + 3\beta(X, X, \Lambda) + 3\alpha(Y, X, \Lambda) = 0;$$

Ces équations seront utilisées pour démontrer l'équation de Robinson pour le champ de vecteurs Λ.

Ensuite, nous avons :

$$(I, 2.5)'_c \quad \delta R(X; \Lambda, M) = -2Y.\beta + 3\beta(X, \delta * G) - 3\alpha(X, \delta G) = 0,$$

$$(I, 2.5)''_c \quad \delta R(X; X, Y) = \quad 2Y.\alpha - 3\alpha(X, \delta * G) - 3\beta(X, \delta G) = 0;$$

$$(I, 2.5)'_d \quad \delta R(X; \Lambda, M) = \quad 2X.\beta + 3\beta(Y, \delta * G) - 3\alpha(Y, \delta G) = 0,$$

$$(I, 2.5)''_d \quad \delta R(Y; X, Y) = \quad 2X.\alpha + 3\alpha(Y, \delta * G) + 3\beta(Y, \delta G) = 0;$$

En fait, nous verrons qu'en vertu des équations d'Einstein, ces équations sont des conséquences des équations $(I, 2.3)_{a,b}$. Finalement, on a les systèmes d'équations.

$$(I, 2.6)'_c \quad \begin{aligned} \delta R(X; M, X) = &-[\Lambda.\sigma + \sigma(X, \delta F)] + \tau[(X, \delta * F) - (X, \Lambda, Y)] \\ &+ [M.\alpha - 3\alpha(Y, Y, M) + 3\beta(X, Y, M)] = 0, \end{aligned}$$

$$(I, 2.6)''_c \quad \begin{aligned} \delta R(X; M, Y) = &\quad [\Lambda.\tau + \tau(X, \delta F)] + \sigma[(X, \delta * F) + (X, \Lambda, Y)] \\ &- [M.\beta - 3\beta(Y, Y, M) - 3\alpha(X, Y, M)] = 0; \end{aligned}$$

$$(I, 2.6)'_d \quad \begin{aligned} \delta R(Y; M, Y) = &\quad [\Lambda.\sigma + \sigma(Y, \delta * F)] + \tau[(Y, \delta F) + (X, \Lambda, Y)] \\ &+ [M.\alpha - 3\alpha(X, X, M) - 3\beta(Y, X, M)] = 0, \end{aligned}$$

$$(I, 2.6)''_d \quad \begin{aligned} \delta R(Y; M, X) = &\quad [\Lambda.\tau + \tau(Y, \delta * F)] - \sigma[(Y, \delta F) + (X, \Lambda, Y)] \\ &+ [M.\beta - 3\beta(X, X, M) + 3\alpha(Y, X, M)] = 0. \end{aligned}$$

Ces dernières équations ne sont pas totalement indépendantes des équations scalaires précédentes, en vertu des équations d'Einstein, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

3. Conséquences des équations de champ.

Comme nous l'avons signalé, les diverses équations scalaires obtenues dans 2. ne sont pas toutes indépendantes. Nous allons réduire le nombre de ces équations, en tenant compte du fait que la double 2-forme de courbure est primitive et en tenant compte de l'hypothèse $r = 0$. Nous avons vu que cette hypothèse est équivalente à l'hypothèse que la duale (à droite ou à gauche) de R est elle-même primitive.

Ces relations de commutation de $\mathcal{C}$ et de $\overset{*}{_{\mathrm{D}}}$ avec la codifférentiation (à gauche), d'une part, et de la dualité (à droite) entre $\mathcal{C}$ et T_D, d'autre part, il vient, compte tenu du caractère « primitif » de R et de $*$R :

$$\text{(I, 3.0)} \qquad T_D\delta R = 0, \qquad T_D\delta * R = 0.$$

De là résultent les conséquences suivantes :

1) *a*) $\delta R(\Lambda; X, Y) = \delta R(X; \Lambda, Y) - \delta R(Y; \Lambda, X)$

de plus, comme

$$\delta R(\Lambda; \Lambda, M) = \delta R * (\Lambda; X, Y) = \delta R * (X; \Lambda, Y) - \delta R * (Y; \Lambda, X)$$

ou encore

b) $\delta R(\Lambda; \Lambda, M) = - \delta R(X; \Lambda, X) + \delta R(Y; \Lambda, Y).$

Les équations $(\mathrm{I}, 2.2)_a$ sont donc conséquences des équations (I, 2.4). Mais vu la forme particulièrement simple des équations $(\mathrm{I}, 2.2)_a$, nous conservons ces équations et remplaçons par contre les équations (I, 2.4) par les deux équations :

$$\text{(I, 3.1)}_0' \quad \begin{aligned} \delta R(X; \Lambda, X) - \delta R(Y; \Lambda, Y) &\\ = 3\alpha[(X, X, \Lambda) - (Y, Y, \Lambda)]&\\ - 3\beta[(X, Y, \Lambda) + (Y, X, \Lambda)] &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{(I, 3.1)}_0'' \quad \begin{aligned} \delta R(X; \Lambda, Y) + \delta R(Y; \Lambda, X) &\\ = 3\beta[(X, X, \Lambda) - (Y, Y, \Lambda)]&\\ + 3\alpha[(X, Y, \Lambda) + (Y, X, \Lambda)] &= 0; \end{aligned}$$

La quantité $\alpha^2 + \beta^2$ étant supposée non nulle; il résulte de ce système, des relations $(\mathrm{I}, 1.5)_1$ du préliminaire, et de la démonstration déjà faite pour le cas électromagnétique singulier, que, rapporté au paramètre affine, le champ de vecteur Λ, satisfait à l'équation de I. Robinson :

$$\underline{\text{(I, 3.1)}} \qquad (\mathfrak{D}\Lambda, \mathfrak{D}\Lambda) = (\delta\Lambda)^2.$$

Remarque. — On peut vérifier directement les relations 1) *a* et *b* en remarquant que

$$\begin{aligned} (X, X, \Lambda) + (Y, Y, \Lambda) &= (\delta\Lambda) + (M, \Lambda, \Lambda) \\ &= (\delta\Lambda) - (\Lambda, [\Lambda, M]) \\ &= (\Lambda, \delta G) \end{aligned}$$

et que

$$(X, Y, \Lambda) - (Y, X, \Lambda) = -(\Lambda, [X, Y]) \\ = (\Lambda, * G).$$

2) De la même façon, on voit sur les équations (I, 3.0) que

a) $\delta R(M; X, Y) = \delta R(X; M, Y) - \delta R(Y; M.X)$

et

b) $\delta R(M; \Lambda, M) = \delta R(X; M, X) + \delta R(Y; M, Y)$

par suite des équations $(I, 2.2)_b$ résultent des équations (I, 2.6). On peut donc, tout en conservant les équations $(I, 2.2)_b$, substituer aux équations (I, 2.6) les suivantes :

$$\text{(I, 3.2)}' \quad \delta R(X; M, X) - \delta R(Y; M, Y) \\ = -[2\Lambda.\sigma + \sigma((X, \delta F) + (Y, \delta * F))] \\ + \tau[(X, \delta * F) - (Y, \delta F) - 2(X, \Lambda, Y)] \\ + 3\alpha[(X, X, M) - (Y, Y, M)] \\ - 3\beta[(X, Y, M) + (Y, X, M)] = 0.$$

$$\text{(I, 3.2)}'' \quad \delta R(X; M, Y) + \delta R(Y; M, X) \\ = [2\Lambda.\tau + \tau((X, \delta F) + (Y, \delta * F))] \\ + \sigma[(X, \delta * F) - (Y, \delta F) - 2(X, \Lambda, Y)] \\ - 3\beta[(X, X, M) - (Y, Y, M)] \\ + 3\alpha[(X, Y, M) + (Y, X, M)] = 0.$$

Des équations $(L, 3, 1)_0$, il résulte que si $\alpha^2 + \beta^2$ n'est pas nul, les coefficients de σ et de τ dans les équations $(I, 2.2)_b$ sont nuls, comme nous l'avions annoncé. Dans le cas contraire, c'est-à-dire dans le cas où l'espace temps est de type III_b, ces équations $(I, 2.2)_b$ montrent que le champ de vecteurs Λ satisfait à l'équation de Robinson.

3) Toujours des relations (I, 3.0), nous avons

a) $\delta R(X; \Lambda, M) = \delta R(M; \Lambda, X) - \delta R(\Lambda; M, X)$

et

b) $\delta R(X; X, Y) = \delta R(M; \Lambda, Y) + \delta R(\Lambda; M, Y)$.

De ces relations et des relations correspondantes pour Y, il résulte que les équations (I, 2.5) sont conséquences des équations $(I, 2.3)_{a,b}$; les deux systèmes d'équations sont donc équivalents. Nous conserverons le système d'équations (I, 2.3).

En définitive, nous avons 16 équations scalaires déduites des équations d'ordre supérieur. Ces équations ont été distinguées en soulignant le numérotage correspondant (les équations $(\mathrm{I}, 2.1)_a$ et $(\mathrm{I}, 3.1)$ étant doublement comptées). Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Les équations d'ordre supérieur s'expriment en terme du repère quasi-orthonormé adapté au cas II par* 16 *équations scalaires précitées. Le champ de vecteurs caractéristiques* Λ *est à trajectoires géodésiques et (rapporté au paramètre affine) satisfait à l'équation de I. Robinson.*

Remarques. — 1) Soit Z un champ de vecteurs isotropes à trajectoires géodésiques; nous le rapportons au paramètre affine. Λ étant isotrope, la relation $\nabla_\Lambda \Lambda = 0$ est équivalente à $i(\Lambda)\, d\Lambda = 0$, on peut donc écrire, dans un repère quasi-orthonormé ayant Λ comme un des vecteurs isotropes,

$$(\mathrm{I}, 3.3) \qquad d\Lambda = (d\Lambda, *\,\mathrm{G}) *\mathrm{G} \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{F}, *\,\mathrm{F})$$

d'où

$$(\mathrm{I}, 3.4) \qquad (d\Lambda, d\Lambda) = (d\Lambda, *\,\mathrm{G})^2$$

la norme de $d\Lambda$ est donc positive ou nulle; elle ne peut être nulle que si $d\Lambda = 0$ $(\mathrm{mod}\ \mathrm{F}, *\,\mathrm{F})$, c'est-à-dire si le champ Λ est intégrable : $\Lambda \wedge d\Lambda = 0$. D'un raisonnement dû à L. Mariot, il résulte que le paramètre affine peut alors être choisi de façon que $d\Lambda = 0$. Autrement dit :

PROPOSITION. — *Si un champ de vecteurs isotropes* Λ *est à trajectoires géodésiques, alors la norme de* $d\Lambda$ *est définie positive.*

Nous poserons

$$(\mathrm{I}, 3.4)' \qquad \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2} = (d\Lambda, *\,\mathrm{G}).$$

2) Le champ Λ étant toujours supposé rapporté au paramètre affine. Nous pouvons déterminer les quantités $(\Lambda, \delta\mathrm{G})$, $(\Lambda, \delta *\mathrm{G})$, dans les équations $(\mathrm{I}, 2.2)_a$ et les quantités

$$(\mathrm{X}, \delta\mathrm{F}) + (\mathrm{Y}, \delta *\mathrm{F})$$

et $(\mathrm{X}, \delta *\mathrm{F}) - (\mathrm{Y}, \delta\mathrm{F})$ en fonctions de la codifférentielle et de la codifférentielle du champ Λ. On a le

LEMME. — *Si le champ de vecteurs isotropes* Λ *est rapporté au paramètre affine, nous avons :*

$$(\mathrm{I}, 3.5) \qquad (\Lambda, \delta G) = (\delta\Lambda),$$

$$(\mathrm{I}, 3.5)' \qquad (\Lambda, \delta * G) = \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2};$$

et les relations :

$$(\mathrm{I}, 3.6) \quad (X, \delta F) + (Y, \delta * F) = -(\delta\Lambda)$$

$$(\mathrm{I}, 3.6)' \quad (X, \delta * F) - (Y, \delta F) = -\varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2} - 2(X, \Lambda, Y).$$

Preuve. — La première relations est immédiate. La seconde résulte du fait que $(\Lambda, \delta * G) = -(\Lambda, [X, Y]) = (d\Lambda, * G)$, et de $(\mathrm{I}, 3.4)''^{+}$. Les deux dernières se déduisent de ce que nous avons fait pour le cas du champ électromagnétique singulier. Nous avons en effet

$$\begin{aligned}(X, \delta F) + (Y, \delta * F) &= -2(\delta\Lambda) - [(X, [\Lambda, X]) + (Y, [\Lambda, Y])] \\ &= -2(\delta\Lambda) + (1/2)[(\theta(\Lambda)g)(X, X) + (\theta(\Lambda)g)(Y, Y)] \\ &= -(\delta\Lambda)\end{aligned}$$

en vertu de la relation $(\mathrm{I}, 3.3)''^{+}$ de la deuxième partie. La dernière égalité se démontre aisément en utilisant $(\mathrm{I}, 3.4)'$.

R. K. Sachs a démontré que dans les cas III, le champ de vecteurs caractéristiques du tensuer de courbure satisfait à l'équation de Robinson. Avec notre résultat concernant les cas II, on est naturellement conduit à se demander si les espaces temps de type II et III sont caractérisés par l'existence d'un champ de vecteurs isotropes, géodésiques satisfaisant à l'équation de Robinson. Nous allons démontrer cette proposition dans le cas où le champ de vecteurs est de plus supposé intégrable et partiellement dans le cas général.

II. Sur l'équation de I. Robinson.

1. Quelques conséquences de l'équation de Robinson.

Nous allons déduire de l'équation de Robinson la loi de propagation de la codifférentielle du champ Λ, il en résultera une implication globale dans le cas d'un espace-temps compact (sans bord).

Établissons d'abord quelques formules préliminaires. Nous avons vu dans la première partie la relation de commutation $[\mathcal{C}, d''] = -\delta'$, de cette relation, on déduit aisément

$$[\delta', d''] = -[\mathcal{C}, d''^2]$$

(rappelons que le premier membre désigne $\delta' d'' - d''\delta'$, et que de même le crochet au second membre désigne $\mathcal{C}d''^2 - d''^2\mathcal{C}$.) Sur les formes, le second membre se réduit à $-\mathcal{C}d''^2$; plus particulièrement, si Λ est une 1-forme, nous avons

$$[\delta', d'']\Lambda = \mathcal{C}i'(\Lambda)R = -i'(\Lambda)\mathcal{C}R$$

soit

$$\text{(II, 1.1)} \qquad [\delta', d'']\Lambda = -i'(\Lambda)r.$$

Nous aurons aussi besoin de la relation de commutation entre la codifférentiation (à gauche) et le produit intérieur à droite. Pour cela, on établit d'abord la relation suivante qui résulte du fait que d' est une antidérivation (à gauche).

$$\text{(II, 1.2)} \qquad [d', e''(\Lambda)]S = D\Lambda \wedge S, \qquad S \in A^{p,q}.$$

La relation cherchée s'en déduit alors par dualité (à droite et à gauche).

On a

$$\text{(II, 1.2)*} \qquad [\delta', i''(\Lambda)]S = -S \barwedge \underline{D\Lambda}.$$

Cela étant, soit Λ un champ de vecteurs à trajectoires géodésiques, supposé rapporté au paramètre affine, le champ de vecteurs étant de plus isotrope, nous pouvons remarquer qu'on a alors $i''(\Lambda)d''\Lambda = 0$; d'après la première des relations précédentes, on peut écrire :

$$\Lambda.(\delta\Lambda) = i''(\Lambda)d''\delta'\Lambda = +i''(\Lambda)\delta' d''\Lambda + r(\Lambda, \Lambda)$$

l'espace étant un espace d'Einstein, le dernier terme est nul. De la relation (II, 1.2)*, il vient alors :

$$\Lambda.(\delta\Lambda) = \delta'(i''(\Lambda)d''\Lambda) + (d''\Lambda \barwedge \underline{D\Lambda})$$

par suite, le premier terme du second membre étant nul et que $\underline{D\Lambda} = d'\Lambda_{(0,1)}$;

$$\Lambda.(\delta\Lambda) = 2(d''\Lambda_{(1,0)}, d'\Lambda_{(0,1)}).$$

Mais

$$-d\Lambda = d''\Lambda_{(1,0)} - d'\Lambda_{(0,1)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{D}\Lambda = d''\Lambda_{(1,0)} + d'\Lambda_{(0,1)}$$

par conséquent

$$2d''\Lambda_{(1,0)} = -d\Lambda + \mathfrak{D}\Lambda, \qquad 2d'\Lambda_{(0,1)} = \mathfrak{D}\Lambda + d\Lambda.$$

On en déduit la relation :

$$\text{(II, 1.3)} \qquad 2\Lambda.(\delta\Lambda) = (\mathfrak{D}\Lambda, \mathfrak{D}\Lambda) - (d\Lambda, d\Lambda).$$

Si le champ de vecteurs Λ satisfait de plus à la relation l'équation de Robinson, la relation précédente, s'écrit :

$$\text{(II, 1.4)} \qquad 2\Lambda.(\delta\Lambda) = (\delta\Lambda)^2 - (d\Lambda, d\Lambda).$$

De cette équation et de la proposition établie dans I, on déduit la

PROPOSITION. — *Soit Λ un champ de vecteurs isotropes à trajectoires géodésiques et satisfaisant à l'équation de Robinson. Si Λ est cofermé, il est fermé et par conséquent harmonique.*

Considérons maintenant le laplacien de Λ, de la définition même de ce laplacien, il vient

$$(\Lambda, \Delta\Lambda) = \Lambda.(\delta\Lambda) + (\Lambda, \delta d\Lambda).$$

De la dualité entre la différentiation extérieure et la codiférentiation extérieure, on a

$$(\Lambda, \delta\, d\Lambda) = (d\Lambda, d\Lambda) + \delta * (\Lambda \wedge * \, d\Lambda)$$

le deuxième terme du second membre est au signe près la codifférentielle de $i(\Lambda)\, d\Lambda = 0$, et est donc nul. Par suite, compte tenu de (II, 1.4)

$$\text{(II, 1.5)} \qquad 2(\Lambda, \Delta\Lambda) = (\delta\Lambda, \delta\Lambda) + (d\Lambda, d\Lambda)$$

et on a

PROPOSITION. — *Avec les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, le champ Λ est harmonique si et seulement s'il est fermé et cofermé. S'il est cofermé, il est fermé et par conséquent harmonique.*

Remarque. — L'équation (II, 1.5) peut s'obtenir à partir de la relation suivante, valide pour toute 1-forme :

(II, 1.6)
$$(1/2)\Delta(\Lambda, \Lambda) = (\Lambda, \Delta, \Lambda) - \sum_{\alpha} (\nabla_{X_\alpha}.\Lambda, \nabla.\Delta\omega^\alpha) + r(\Lambda, \Lambda)$$

(ω^α) et (X_α) désignant toujours deux bases duales. On peut prendre $(\omega^\alpha) = (\Lambda, M, X, Y)$ et $(X_\alpha) = (M, \Lambda, -X, -Y)$.

Supposons maintenant la variété espace-temps compacte (II, 1.5) donne alors par intégration

$$\text{(II, 1.7)} \qquad 2\langle\Lambda, \Delta\Lambda\rangle_V = \langle d\Lambda, d\Lambda\rangle_V + \langle\delta\Lambda, \delta\Delta\rangle_V$$

$\langle\ ,\ \rangle$ désignant le produit scalaire global. Mais, comme conséquence de la relation (II, 5.9) de la première partie, on a pour toute forme

$$\langle\Lambda, \Delta\Lambda\rangle_V = \langle\delta\Lambda . \delta\Lambda\rangle_V + \langle d\Lambda, d\Lambda\rangle_V.$$

De ces deux relations et du caractère défini positif des termes au second membre, on déduit que Λ est fermé et cofermé, donc harmonique. D'où

Proposition. — *Sur une variété d'espace-temps d'Einstein, compacte, tout champ de vecteurs isotropes satisfaisant à l'équation de Robinson est cofermé, donc fermé, donc harmonique.*

En particulier, les espaces-temps d'Einstein spécial, compacts, sont porteurs d'ondes monochromatiques (au sens d'Avez).

Formulée d'une autre façon, la proposition précédente implique que si $\delta\Lambda$ n'est pas partout nulle, la variété ne peut être compacte.

Remarque. — Il est facile de voir sur l'équation de Robinson que toute transformation infinitésimale conforme définie par le champ de vecteurs Λ est une isométrie infinitésimale (en dimension 4).

2. Sur le champ de vecteurs isotropes géodésiques satisfaisant à l'équation de Robinson.

Suivant A. Lichnérowicz, nous appellerons 2-forme singulière pour un champ de vecteurs Λ toute 2-forme F telle que

$$i(\Lambda)F = 0, \quad \text{et} \quad e(\Lambda)F = 0 \ (\Longleftrightarrow i(\Lambda)*F = 0, \quad e(\Lambda)*F = 0).$$

Le champ est alors nécessairement isotrope et la forme F, de la forme $F = \Lambda \wedge X$, oû X est un champ de vecteurs d'espace, orthogonaux à Λ. En effet, pour tout vecteur V, on a, F' désignant F ou $*F$:

$$0 = (\Lambda \wedge F, V \wedge F') = (F, i(\Lambda)(V \wedge F')) = (\Lambda, V)(F, F')$$

par suite $(F, F) = (F, *F) = 0$. On est dans la même situation que dans le cas électromagnétique singulier, la forme F est donc le produit extérieur d'un vecteur isotrope par un vecteur d'espace qui lui est orthogonal, par produit intérieur de F par Λ, il résulte que le vecteur isotrope ainsi défini est orthogonal et par conséquent proportionnel au vecteur Λ; d'où notre assertion.

Cette définition posée, un résultat de R. Debever peut être énoncé sous la forme du

Théorème. — *Si* S *est une double* 2-*forme primitive, ainsi que sa duale* S, *il existe en général quatre champs de vecteurs isotropes tels que* $S(F; F) = S(F; *F) = 0$, *pour toute* 2-*forme* F *singulière pour l'un de ces champs. Un tel champ est appelé champ de vecteurs isotropes caractéristiques de* S.

On voit facilement que les conditions

$$S(F; F) = S(F; *F) = 0$$

sont bien équivalentes à la relation $\Lambda^2 \wedge (S \barwedge \underline{\Lambda}^2) = 0$ de R. Debever.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

Théorème. — *Si un champ de vecteurs isotropes* Λ *est à trajectoires géodésiques et satisfait à l'équation de Robinson, il appartient à l'un des champs de vecteurs caractéristiques de la double* 2-*forme de courbure conforme. Si l'espace est un espace-temps du vide et si de plus le champ* Λ *est intégrable, alors l'espace-temps doit être de type II ou III dans la classification de Bel-Petrov.*

Démonstration.

A) $C(F; F) = C(F, *F) = 0$.

A.1) Nous avons vu, dans l'étude du champ électromagnétique singulier, que si un champ de vecteurs isotropes est tel que, dans un champ de repères quasi-orthonormés, on ait les relations

$$(\text{II}, 2.1) \qquad (\Lambda, [\Lambda, X]) = (\Lambda, [\Lambda, Y]) = 0,$$
$$(\text{II}, 2.2) \qquad (X, [X, \Lambda]) - (Y, [Y, \Lambda]) = 0,$$
$$(\text{II}, 2.3) \qquad (X, [Y, \Lambda]) + (Y, [X, \Lambda]) = 0,$$

alors le champ de vecteurs Λ est à trajectoires géodésiques et satisfait à l'équation de Robinson.

Ces conditions suffisantes sont également nécessaires. En effet, le champ Λ étant géodésique, rapportons-le au paramètre affine. Soit Λ, M, X, Y un repère quasi-orthonormé, nous avons remarqué, dans le cas électromagnétique singulier que

$$(\theta(\Lambda)g)(X, X) = 2(X, [X, \Lambda]), (\theta(\Lambda)g)(Y, Y) = 2(Y, [Y, \Lambda])$$
et $$(\theta(\Lambda)g)(X, Y) = (X, [Y, \Lambda]) + (Y, [X, \Lambda])$$

il vient par conséquent :

$$\begin{aligned}\theta(\Lambda)g = 2(X, [X, \Lambda])X \otimes X + 2(Y, [Y, \Lambda])Y \otimes Y \\ + [(X, [Y, \Lambda]) + (Y, [X, \Lambda])](X \otimes Y + Y \otimes X) \\ (\text{mod } \Lambda \otimes \Lambda, \Lambda \otimes X + X \otimes \Lambda, \Lambda \otimes Y + Y \otimes \Lambda)\end{aligned}$$

en prenant la norme des deux membres, on obtient

$$(\text{A}, 1.1) \quad \begin{aligned}(\mathfrak{D}\Lambda, \mathfrak{D}\Lambda) = 2[(X, [X, \Lambda])^2 + (Y, [Y, \Lambda])^2] \\ + [(X, [Y, \Lambda]) + (Y, [X, \Lambda])]^2\end{aligned}$$

d'autre part, de la relation $\nabla_\Lambda . \Lambda = 0$, et de l'expression de la métrique en terme du repère quasi-orthonormé, on déduit que

$$(\delta\Lambda, \delta\Lambda) = (g, \nabla\Lambda)^2 = [(X, X, \Lambda) + (Y, Y, \Lambda)]^2$$

soit encore

$$(\text{A}, 1.2) \quad (\delta\Lambda, \delta\Lambda) = [(X, [X, \Lambda]) + (Y, [Y, \Lambda])]^2$$

De cette relation et de la relation (A, 1.1) il vient alors

$$(\text{A}, 1.3) \quad \begin{aligned}(\mathfrak{D}\Lambda, \mathfrak{D}\Lambda) - (\delta\Lambda)^2 = [(X, [X, \Lambda]) \\ - (Y, [Y, \Lambda])]^2 + [(X, [Y, \Lambda]) + [(Y, [X, \Lambda])]^2.\end{aligned}$$

Notre assertion résulte immédiatement de là.

A.2). F désignant toujours la 2-forme $\Lambda \wedge X$ singulière pour associer au repère quasi-orthonormé, il a été démontré que le système des équations (II, 2.1)-(II, 2.3) est équivalent, équations par équations, au suivant

$$(\text{II}, 2.1)' \qquad (\Lambda, \delta F) = (\Lambda, \delta * F) = 0,$$
$$(\text{II}, 2.2)' \qquad (X, \delta F) - (Y, \delta * F) = 0,$$
$$(\text{II}, 2.3)' \qquad (X, \delta * F) + (Y, \delta F) = 0.$$

En utilisant le fait que le produit intérieur par une 1-forme est une anti-dérivation par rapport au produit extérieur de formes, on calcule facilement $i(\delta F)F$, $i(\delta F) * F$ et des 1-formes analogues obtenues en échangeant F et $*$ F; d'où par combinaisons linéaires convenable, on a

$$i(\delta F)F - i(\delta * F) * F = -[(X, \delta F) - (Y, \delta * F)]\Lambda + (\Lambda, \delta F)X + (\Lambda, \delta * F)Y,$$
$$i(\delta * F)F + i(\delta F) * F = -[(X, \delta * F) + (Y, \delta F)]\Lambda - (\Lambda, \delta * F)X + (\Lambda, \delta F)Y.$$

Il en résulte que les systèmes d'équations précédentes sont équivalents au système

$$(\text{II}, 2.4) \qquad i(\delta F)F - i(\delta * F) * F = 0$$
$$(\text{II}, 2.5) \qquad i(\delta * F)F + i(\delta F) * F = 0$$

ou encore, au système obtenu par dualité :

$$(\text{II}, 2.4)^* \qquad \delta F \wedge * F + \delta * F \wedge F = 0$$
$$(\text{II}, 2.5)^* \qquad \delta * F \wedge * F - \delta F \wedge F = 0.$$

La forme de ce système est analogue à celle du système écrit dans le cas électromagnétique régulier, avec les formes $G = (\Lambda \wedge M)$ et $* G = (X \wedge Y)$.

A.3) Des équations précédentes, on peut déduire quelques conséquences simples. En effet

a) Multiplions la première équation intérieurement par la 1-forme δF, et la seconde équation intérieurement par $\delta * F$, il vient respectivement les équations :

$$(\delta F, \delta F) * F + (\delta F, \delta * F)F - F \wedge i(\delta F) * F + \delta * F \wedge i(\delta F)F = 0;$$
$$(\delta * F, \delta * F) * F - (\delta * F, \delta F)F + F \wedge i(\delta * F)F - \delta * F \wedge i(\delta * F) * F = 0;$$

d'où par soustraction et, compte tenu des équations de départ, on obtient

$$\text{(II, 2.6)} \qquad \begin{aligned} (\delta F, \delta F) - (\delta * F, \delta * F) &= 0 \\ 2(\delta F, \delta * F) &= 0. \end{aligned}$$

b) Appliquons maintenant aux premiers membres des équations (II, 2.4)* et (II, 2.5)* l'opérateur de différentiation extérieure d. Comme conséquence de la première équation (seule), nous avons

$$d\delta F \wedge * F + d\delta * F \wedge F = \delta F \wedge d * F + \delta * F \wedge dF$$

soit

$$*(d\delta F, F) + *(\delta\, dF, F) = *(\delta F, \delta F) - *(\delta * F, \delta * F)$$

par suite, en se rappelant la définition de l'opérateur laplacien,

$$\text{(II, 2.8)} \qquad (F, \Delta F) = (\delta F, \delta F) - (\delta * F, \delta * F),$$

$$\text{(II, 2.9)} \qquad (F, \Delta * F) = 2(\delta F, \delta * F),$$

cette dernière équation étant de la même façon une conséquence de (II, 2.5)*.

c) De *a*/ et *b*/ il résulte qu'on a

$$\text{(II, 2.10)} \qquad (F, \Delta F) = (* F, \Delta F) = 0.$$

Remarque. — Dans le cas électromagnétique singulier, ces deux dernières équations peuvent se démontrer directement. La 2-forme champ électromagnétique étant fermée et cofermée donc harmonique, on a donc $(\xi, \Delta\xi) = (*\xi, \Delta\xi) = 0$. Or il est facile de voir que ces équations sont invariantes par le changement $\xi \to f'\xi$, où f' est une fonction de classe C^2 quelconque; on a en effet (cf. G. de Rham, Variétés différentiables, p. 129), pour toute forme ξ :

$$\Delta(f'\xi) = f'(\Delta\xi) + (\Delta f')\xi - 2\nabla_{df'}.\xi.$$

L'invariance annoncée résulte immédiatement du fait que la 2-forme ξ est singulière.

A.4) Les équations (II, 2.10) permettent de démontrer la première partie du théorème. Pour cela, notons que pour toute 2-forme F, on a la relation suivante (cf. A. Lichnérowiez, Géométrie des groupes de transformations, p. 4), qui est l'exacte analogue de la formule correspondante pour les 1-formes (la relation (II, 1.6)) :

$$\text{(II, 2.11)}\quad (1/2)\Delta(F, F) = (F, \Delta F) - \sum_{\alpha} (\nabla_{X_\alpha}.F, \nabla_{\omega^\alpha}.F) + 2Q(F; F)$$

où Q désigne la double 2-forme

$$Q = R - (1/2)(r \wedge g).$$

De plus, en dimension 4, la même démonstration que celle donnant la relation précédente montre la validité de la relation.

$$\text{(II, 2.11)*}\quad (1/2)\Delta(F, *F) = (*F, \Delta F) - \sum_{\alpha} (\nabla_{X_\alpha}.F, \nabla_{\omega^\alpha}.*F) + 2Q(*F; F).$$

Toujours en dimension 4, nous remarquons que $C = Q$ (mod γ), γ étant, rappelons-le, la double 2-forme $(1/2)(g \wedge g)$. Dans le cas considéré ici, la forme F est singulière, et la remarque précédente montre que

$$C(F; F) = Q(F; F), C(*F; F) = Q(*F; F).$$

Prenons maintenant $(X_\alpha) = (\underline{\Lambda}, \underline{M}, \underline{X}, \underline{Y})$ et

$$(\omega_\alpha) = (M, \Lambda, -X, -Y),$$

les relations (II, 2.11) et (II, 2.11)* s'écrivent alors :

$$\text{(II, 2.12)}\quad 2C(F; F) = 2(\nabla_\Lambda.F, \nabla_M.F) - (\nabla_X.F, \nabla_X.F) - (\nabla_Y.F, \nabla_Y.F),$$

$$\text{(II, 2.12)*}\quad 2C(*F; F) = 2\nabla_\Lambda.F, \nabla_G.*F) - (\nabla_X.F, \nabla_X.*F) - (\nabla_Y.F, \nabla_Y.*F).$$

Comme $\nabla_\Lambda.F = 0$ (mod $*F$) et que $\nabla_M.F = 0$ (mod E), le premier terme au second membre de la première relation est nul. D'autre part, des relations

$$\nabla_X.F = -(X, X, \Lambda)G + (Y, X, \Lambda)*G \quad (\text{mod } F, *F)$$
$$\nabla_Y.F = (Y, Y, \Lambda)^*G - (X, Y, \Lambda)G \qquad (\text{mod } F, *F)$$

on voit facilement, compte tenu des équations du premier système (II, 2.1)-(II, 2.3) que les deux termes restant au second membre de la première relation se détruisent. On a par conséquent :

$$\text{(II, 2.13)} \qquad C(F; F) = C(*F; F) = 0$$

la seconde égalité s'obtenant de façon analogue.

Le champ de vecteurs Λ est donc un champ de vecteurs isotropes caractéristiques de la double 2-forme de courbure conforme.

Remarque. — On peut démontrer directement le résultat précédent à partir de l'identité (de Ricci) suivante, valide pour tous champs de vecteurs différentiables V et W :

$$\text{(R.)} \quad \nabla_V . \nabla_W . - \nabla_W . \nabla_V . - \nabla_{[V,W]} . = \overline{R}(V, W).$$

Le champ de vecteurs Λ étant à trajectoires géodésiques (il sera rapporté au paramètre affine), on peut choisir un repère quasi-orthonormé (Λ, M, X, Y) se propageant par parallélisme le long des trajectoires du champ Λ. (Le choix de repère tel que $(X, \Lambda, Y) = 0$ serait suffisant.)

Avec ce choix de repère, nous aurons

$$(\text{Rep.})_1 \qquad (X, \Lambda, Y) = 0.$$
$$(\text{Rep.})_2 \qquad (M, \Lambda, X) = (M, \Lambda, Y) = 0.$$

Prenons dans l'identité de Ricci (R.), $V = \Lambda, W = X$ et appliquons les opérateurs au champ de vecteurs Λ, il vient

$$\nabla_\Lambda . \nabla_X . \Lambda = \nabla_{[\Lambda, X]} . + \overline{R}(\Lambda, X)\Lambda$$

en prenant le produit scalaire des deux membres par X, on en déduit

$$R(F; F) = (X, \nabla_{[\Lambda, X]} . \Lambda) - (X, \nabla_\Lambda . \nabla_X . \Lambda).$$

Mais avec le choix précédent de repère, le deuxième terme au second membre est égal à $\Lambda . (X, X, \Lambda)$, d'autre part, avec ce même choix, on a

$$\begin{aligned} [\Lambda, X] &= -(X, [\Lambda, X])X - (Y, [\Lambda, X])Y \quad (\text{mod } \Lambda) \\ &= (X, X, \Lambda)X + (Y, X, \Lambda)Y \qquad\qquad (\text{mod } \Lambda) \end{aligned}$$

il en résulte que

$$(a) \quad R(F; F) = -\Lambda . (X, X, \Lambda) + (X, X, \Lambda)^2 + (X, Y, \Lambda)(Y, X, \Lambda).$$

De la même façon, on obtient la relation qui s'en déduit en échangeant X et Y :

$$(b) \quad R(*F; *F) = -\Lambda.(Y, Y, \Lambda) + (Y, Y, \Lambda)^2 + (Y, X, \Lambda)(X, Y, \Lambda).$$

Cela étant, de la relation de C. Lanczos

$$R + *R* = (r - (1/4)r_0 g) \wedge g$$

il résulte immédiatement que

$$\begin{aligned} R - *R* &= 2(R - (1/2)r \wedge g) \quad (\text{mod } \gamma) \\ &= 2C \qquad\qquad\qquad (\text{mod } \gamma) \end{aligned}$$

Avec cette remarque, on déduit par soustraction des équations obtenues précédemment :

$$(\text{II}, 2.14) \quad -2C(F; F) = \Lambda.[(X, X, \Lambda) - (Y, Y, \Lambda)] - (\delta\Lambda)[(X, X, \Lambda) - (Y, Y, \Delta)].$$

L'identité de Ricci permet de montrer de même la relation

$$(\text{II}, 2.15) \quad -2C(F; *F) = \Lambda.[(X, Y, \Lambda) + (Y, X, \Lambda)] - (\delta\Lambda)[(X, Y, \Lambda) + (Y, X, \Lambda)]$$

qui est une conséquence des relations suivantes et de la relation de C. Lanczos :

$$(a)^* \quad -R(*F; F) = \Lambda.(Y, X, \Lambda) - (\delta\Lambda)(Y, X, \Lambda),$$
$$(b)^* \quad -R(F; *F) = \Lambda.(X, Y, \Lambda) - (\delta\Lambda)(X, Y, \Lambda).$$

2) Par addition des équations (a) et (b) membres à membres on a, dans le cas d'un espace-temps d'Einstein, la relation déjà obtenue

$$(\text{II}, 2.16) \quad 2\Lambda.(\delta\Lambda) = (\delta\Lambda, \delta\Lambda) - (d\Lambda, d\Lambda)$$

si le champ satisfait à l'équation de Robinson.

De même, en retranchant $(b)^*$ de $(a)^*$, il vient, toujours dans le cas d'un espace d'Einstein

$$(\text{II}, 2.17) \quad 2\Lambda.(d\Lambda, d\Lambda) = 2(\delta\Lambda)(d\Lambda)\,(d\Lambda, d\Lambda),$$

cette relation étant valide pour tout champ de vecteurs isotropes géodésiques; elle peut se démontrer directement en utilisant le fait que $d\Lambda = \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2} * G$ (mod F, $*$F), comme nous l'avions remarqué antérieurement.

En combinant les deux équations précédentes, on obtient

$$\text{(II, 2.18)}\quad \Lambda.[(\delta\Lambda, \delta\Lambda) + (d\Lambda, d\Lambda) = (\delta\Lambda)[(\delta\Lambda, \delta\Lambda) + (d\Lambda, d\Lambda)].$$

Cette dernière équation est importante dans l'étude du comportement asymptotique des espaces-temps de types II et III, sans faire l'hypothèse Λ intégrable (R. K. Sachs).

B) $R(F; G) = R(*F; G) = 0$. (Espace d'Einstein, Λ intégrable).

Dans cette partie, nous supposons que l'espace-temps est un espace d'Einstein spécial, nous faisons d'autre part l'hypothèse simplificatrice $d\Lambda = 0$.

Pour démontrer que l'espace-temps est de type II ou III, il suffit d'après le critère de L. Bel, de montrer que

$$R \barwedge \underline{\Lambda}^2 = 2\alpha\Lambda^2 \qquad \text{et} \qquad *R \barwedge \underline{\Lambda}^2 = 2\beta\Lambda^2,$$

où α et β sont des scalaires, nuls dans les cas III, il est aisé de vérifier que ces conditions sont équivalentes à

$$R(F; F) = R(*F; F) = 0; \quad R(F; G) = R(*F; G) = 0$$

dans un certain repère quasi-orthonormé ayant Λ comme un des vecteurs isotropes.

Nous choisirons le champ de repères comme précédemment.

De l'équation (II, 2.2) il résulte que

$$\text{(B.1)}\qquad 2(X, X, \Lambda) = 2(Y, Y, \Lambda) = (\delta\Lambda)$$

d'autre part l'équation (II, 2.3) avec l'hypothèse $d\Lambda = 0$ donnent

$$\text{(B.2)}\qquad (Y, X, \Lambda) = (X, Y, \Lambda) = 0.$$

Cela étant, différentions l'équation (II, 2.2) suivant le champ M, on obtient, en utilisant l'identité de Ricci :

$$\begin{aligned}\text{(B.3)}\quad -X.(\Lambda, M, X) &+ Y.(\Lambda, M, Y) \\ &+ (X, X, Y)(\Lambda, M, Y) - (Y, Y, X)(\Lambda, M, X) \\ &- (\Lambda, M, X)^2 - (\Lambda, M, Y)^2 \\ &+ (1/2)(\delta\Lambda)[(X, X, M) - (Y, Y, M)] = 0.\end{aligned}$$

Des simplifications dues au choix de repères, il résulte les équations de propagation

$$\text{(B.4)}\quad \Lambda.[(X, X, M) - (Y, Y, M)] = (1/2)(\delta\Lambda)[(X, X, M) - (Y, Y, M)]$$

et les équations

$$\text{(B.5)}\quad \begin{aligned} \Lambda.(X, X, Y) &= (1/2)(\delta\Lambda)(X, X, Y);\\ \Lambda.(Y, Y, X) &= (1/2)(\delta\Lambda)(Y, Y, X). \end{aligned}$$

D'autre part, du fait que Λ est à trajectoires géodésiques, on a

$$\text{(B.6)}\quad \Lambda.(\Lambda, M, X) = (1/2)(\delta\Lambda)(\Lambda, M, X) + R(F; G),$$
$$\text{(B.6)}'\quad \Lambda.(\Lambda, M, Y) = (1/2)(\delta\Lambda)(\Lambda, M, Y) + R(*F; G).$$

Compte tenu de ces équations, (B. 3) donnent par différentiation :

$$\begin{aligned} -\Lambda.X.(\Lambda, M, X) + \Lambda.Y.(\Lambda, M, Y) &\\ = (\delta\Lambda)[-X.(\Lambda, M, X) + Y.(\Lambda, M, Y)]&\\ \text{(a)}\qquad + [2(\Lambda, M, X) + (Y, Y, X)]R(F; G)&\\ - [2(\Lambda, M, Y) + (X, X, Y)]R(*F, G).& \end{aligned}$$

De plus, si l'on différentie (B.2) suivant Λ, l'identité de Ricci donne :

$$\text{(B.7)}\quad X.(\delta\Lambda) = 2R(F; G) + (\delta\Lambda)(M, X, \Lambda),$$
$$\text{(B.7)}'\quad Y.(\delta\Lambda) = 2R(*F; G) + (\delta\Lambda)(M, Y, \Lambda).$$

Les relations (B.6) donnent par conséquent, en différentiant suivant X :

$$\begin{aligned} X.\Lambda.(\Lambda, M, X) - Y.\Lambda.(\Lambda, M, Y)&\\ = ((\delta\Lambda)/2)[X.(\Lambda, M.X) - Y.(\Lambda, M, Y)]&\\ (b)\quad + (1/2)(\delta\Lambda)[(\Lambda, M, X)(M, X, \Lambda) - (\Lambda, M, Y)(M, Y, \Lambda)]&\\ + (\Lambda, M, X)R(F; G) - (\Lambda, M, Y)R(*F, G)&\\ + X.R(F; G) - Y.R(*F; G).& \end{aligned}$$

Des équations (a) et (b), on déduit par addition et en remarquant que $[\Lambda, X] = -(M, X, \Lambda) + (1/2)(\delta\Lambda)X$ et la relation analogue pour $[\Lambda, Y]$.

$$\begin{aligned} X.R(F; F) - Y.R(*F; G)&\\ = [3(\Lambda, M, X) - (M, X, \Lambda) + (Y, Y, X)]R(F; G)&\\ (c)\qquad - [3(\Lambda, M, Y) - (M, Y, \Lambda) + (X, X, Y)]R(*F; G).& \end{aligned}$$

Mais de l'identité de Bianchi, on peut déduire (par un calcul analogue à celui effectué dans III ci-dessous) la relation

$$\begin{aligned} X.R(F;G) - Y.R(*F;G) &= [4(\Lambda, M, X) - (M, X, \Lambda) + (Y, Y, X)]R(F;G) \\ (d) \qquad &- [4(\Lambda, M, Y) - (M, Y, \Lambda) + (X, X, Y)]R(*F;G). \end{aligned}$$

Par comparaison des relations (c) et (d), on obtient :

$$(e) \qquad (\Lambda, M, X)R(F;G) - (\Lambda, M, Y)R(*F;G) = 0$$

$$(f) \qquad (\Lambda, M, Y)R(F;G) + (\Lambda, M, X)R(*F;G) = 0,$$

cette dernière équation s'obtenant de la même façon en partant de (II, 2.3).

Les deux dernières équations montrent que

$$R(F;G) = R(*F;G) = 0,$$

ou $(\Lambda, M, X) = (\Lambda, M, Y) = 0$, mais dans ce dernier cas, les relations (B.6) montrent qu'on a encore $R(F;G)=R(*F;G)=0$.

Remarque. — L'hypothèse Λ intégrable n'est en fait qu'une hypothèse simplificatrice. La même méthode peut s'appliquer au cas où le champ Λ n'est plus supposé intégrable, les relations (B.2) seront à remplacer par

$$(B.2)' \quad 2(Y, X, \Lambda) = -2(X, Y, \Lambda) = \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}$$

il faudra faire intervenir l'équation (II, 2.17) de propagation de $(d\Lambda, d\Lambda)$.

La validité de la proposition ayant été démontrée récemment par J. N. Goldberg et R. K. Sachs, nous omettons la démonstration.

Remarque additionnelle. — Nous avons indiqué dans la première partie de la démonstration comment les équations (II, 2.10)

$$(F, \Delta F) = (*F, \Delta F) = 0$$

peuvent s'obtenir directement à partir des équations de Maxwell, dans le cas électromagnétique singulier. I. Robinson a démontré qu'étant donné un champ de vecteurs isotropes géodésiques satisfaisant à l'équation de Robinson, il existe un repère quasi-orthonormé tel que la 2-forme F correspondante est proportionnelle à une 2-forme fermée et cofermée. Pour un tel repère, on a (II, 2.10) directement.

III. Sur la permanence de la classification de Bel-Petrov.

Notations et rappels sur la classification de Bel-Petrov.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de démontrer que, dans l'hypothèse où l'un des champs de vecteurs isotropes caractéristiques de la double 2-forme de courbure est à trajectoires géodésiques, il y a permanence de la classification de Bel-Petrov.

Le champ de vecteurs isotropes caractéristiques Λ étant donné, nous le complétons en un champ de repères quasi-orthonormés (Λ, M, X, Y). Rappelons que nous avions posé

$$F = \Lambda \wedge X, \quad G = \Lambda \wedge M, \quad *E = M \wedge X$$

et que par conséquent

$$*F = \Lambda \wedge Y, \quad *G = X \wedge Y, \quad E = M \wedge Y.$$

Nous désignerons par $R^2(H; K)$ le carré du scalaire $R(H; K)$, valeur de R pour les 2-formes H et K.

Cela étant, nous noterons par $R_0, R_1, \ldots, R_5$ les relations suivantes

$$\begin{array}{lll}
(R_0\text{-}) & R^2(F; F) + R^2(F; *F) & = 0, \\
(R_1\text{-}) & R^2(F; G) + R^2(*F; G) & = 0, \\
(R_2\text{-}) & R^2(G; G) + R^2(*G; G) & = 0, \\
(R_3\text{-}) & R^2(F; *E) + R^2(*F; *E) & = 0, \\
(R_4\text{-}) & R^2(G; *E) + R^2(*G; *E) & = 0, \\
(R_5\text{-}) & R^2(*E; *E) + R^2(*E; E) & = 0.
\end{array}$$

Si $(R_i\text{-})$ est une relation $(\overline{R}_i\text{-})$ désignera sa négation.

Cela posé, le critère de Bel permet de traduire immédiatement la classification de Bel-Petrov à l'aide du diagramme suivant, où un espace-temps n'appartenant pas au type I sera dit de type (C.I)

$$(\mathrm{C.I}) : (R_0, R_1) \begin{cases} \mathrm{II} : (\overline{R}_2, \overline{R}_3, R_4) \begin{cases} \mathrm{II}_a : (\overline{R}_2, \overline{R}_3, R_4, R_5) \\ \mathrm{II}_b : (\overline{R}_2, \overline{R}_3, R_4, \overline{R}_5) \end{cases} \\ \mathrm{III} : (R_2, R_3) \begin{cases} \mathrm{III}_a : (R_2, R_3, \overline{R}_4, \overline{R}_5) \\ \mathrm{III}_b : (R_2, R_3, R_4, \overline{R}_5) \end{cases} \end{cases}$$

Notons d'abord que pour un espace d'Einstein spécial, les relations (R_2) et (R_3) sont équivalentes. En effet, R étant primitive (à droite), nous avons

$$\begin{aligned} R(G; *G) = R(\Lambda, M; X, Y) &= R(\Lambda, X; M, Y) - R(\Lambda, Y; M, X) \\ &= R(F; E) - R(*F; *F) \end{aligned}$$

l'espace étant un espace d'Einstein, $*R* = -R$, la relation précédente s'écrit par conséquent

$$\text{(III, 0.1)} \qquad 2R(F; E) = R(G : *G).$$

D'autre part, nous avons vu que pour un espace d'Einstein spécial, la duale de la double 2-forme de courbure est également primitive, on peut donc remplacer dans le calcul précédent R par sa duale, il vient alors :

$$\text{(III, 0.2)} \qquad -2R(*F; E) = R(G; G)$$

ce qui, avec la relation précédente, montre l'équivalence des relations (R_2) et (R_3).

Nous utiliserons l'identité de Bianchi sous la forme

$$(\overline{B}) \qquad \mathfrak{S}(\nabla_Z . \overline{R})(V, W) = 0,$$

où $\mathfrak{S}$ désigne la sommation par permutation circulaire sur les champs de vecteurs Z, V et W. Comme $\nabla_Z . g = 0$ pour tout champ de vecteurs Z, il résulte que la relation précédente s'écrit encore

$$(B) \qquad \mathfrak{S}(\nabla_Z . R)(V, W) = 0,$$

S(V, W) désignant la valeur à droite de la double 2-forme S pour les vecteurs V et W.

1. Permanence de (C, I).

Par le choix même du repère quasi-orthonormé, on a dans tous les cas la relation (R_0). Supposons qu'on ait (R_1) sur une hypersurface S partout orientée dans l'espace. Écrivons l'identité de Bianchi pour les champs de vecteurs Λ, X, Y du repère quasi-orthonormé, et prenons la valeur des deux membres de la relation ainsi obtenue pour la forme F, nous obtenons :

(III, 1.0)

$$(\nabla_\Lambda . R)(F; *G) = (\nabla_X . R)(F; *F) - (\nabla_Y . R)(F; F)$$

la différentiation covariante étant une dérivation le premier membre de cette équation peut s'écrire :

$$(\nabla_\Lambda . R)(F ; * F) = \Lambda . (R(F ; * G)) - R(* F ; \nabla_\Lambda . G) - R(* G ; \nabla_\Lambda . F) ;$$

le champ de vecteurs géodésiques Λ étant supposé rapporté au paramètre affine, on a $\nabla_\Lambda . G = \Lambda \wedge \nabla_\Lambda . M = 0$ (mod F, $* F$) par suite, compte tenu de la relation (R_1), $R(* F ; \nabla_\Lambda . G) = 0$. De même $\nabla_\Lambda . F = -(X, \Lambda, Y) * F$.

Par une rotation dans le 2-plan des vecteurs X, Y on peut supposer que $(X, \Lambda, Y) = 0$. En effet, par le changement $X + iY \to \exp(i\varphi)(X + iY)$, on voit facilement que

$$(X, \Lambda, Y) \to (X, \Lambda, Y) - \Lambda . \varphi .$$

On peut donc toujours choisir φ de façon que cette dernière quantité soit nulle. Nous supposons, dans le § 1, que ce choix a été fait. (On peut naturellement choisir le champ de repère comme dans II, mais le choix précédent suffit.)

Dans ces conditions, on a $\nabla_\Lambda . F = 0$, d'où $R(* G ; \nabla_\Lambda . F) = 0$. Le premier membre de (III, 1.0) est donc égal à $\Lambda . (R(F ; * G))$. La relation (R_0) étant satisfaite en dehors de l'hypersurface S, on obtient pour le second membre la relation

$$(\nabla_X . R)(F ; * F) - (\nabla_Y . R)(F ; F) = -2R(\nabla_X . F + \nabla_Y * F ; * F).$$

Or, comme nous avons noté dans II, A.4.

(III, 1.1)
$$\nabla_X . F = -(X, X, \Lambda)G + (Y, X, \Lambda) * G \quad (\text{mod } F, * F)$$

(III, 1.2)
$$\nabla_Y . * F = -(Y, Y, \Lambda)G - (X, Y, \Lambda) * G \quad (\text{mod } F, * F)$$

par suite :

$$\nabla_X . F + \nabla_Y . * F = -(\delta\Lambda)G - \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2} * G \ (\text{mod } F, * F)$$

compte tenu de la relation (R_0), il vient par conséquent

$$-2R(\nabla_X . F + \nabla_Y . * F ; * F) = 2(\delta\Lambda)R(* F ; G) + 2\varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(F ; G).$$

L'équation (III, 1.0) s'écrit donc, dans un champ de repères satisfaisant à la condition $(X, \Lambda, Y) = 0$;

(III, 1.3)
$$\Lambda . R(*F; G) - 2(\delta\Lambda)R(*F; G) - 2\varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(F; G) = 0.$$

Si on partait de $*R$ au lieu de R, on obtiendrait évidemment :

(III, 1.4)
$$\Lambda . R(F; G) - 2(\delta\Lambda)R(F; G) + 2\varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(*F; G) = 0.$$

Ces deux dernières équations montrent que si (R_1) est satisfaite sur l'hypersurface S, elle reste satisfaite dans un voisinage de S: la permanence de (C.I) est ainsi établie.

2. Permanence des cas III.

D'après 1, on a (R_0) et (R_1) dans un voisinage de l'hypersurface S. L'identité de Bianchi donne

$$\text{(III, 2.)} \quad (\nabla_\Lambda . R)(G; *G) = (\nabla_X . R)(*F; G) - (\nabla_Y . R)(F; G)$$

comme $\nabla_\Lambda . G = 0 \pmod{F, *F}$, on a compte tenu de (R_1) : $R(\nabla_\Lambda . G; *G) = R(G; \nabla_\Lambda . *G) = 0$, le premier membre de la relation précédente se réduit donc à $\Lambda . R(G; *G)$.

Toujours compte tenu de la validité de (R_1) dans un voisinage de S, nous avons

$$(\nabla_X . R)(*F; G) = -R(\nabla_X . *F; G) - R(*F; \nabla_X . G)$$

et

$$(\nabla_Y . R)(F; G) = -R(\nabla_Y . F; G) - R(F; \nabla_Y . G).$$

Des relations (III, 1.1), (III, 1.2) rappelés précédemment et des relations

(III, 2.1)
$$\nabla_X . G = (X, X, \Lambda) * E + (Y, X, \Lambda)E \quad \pmod{F, *F}$$

(III, 2.2)
$$\nabla_Y . G = (Y, Y, \Lambda)E + (X, Y, \Lambda) * E \quad \pmod{F, *F}$$

on déduit que le second membre de (III, 2.0) est donné par l'expression

$$\begin{aligned}(\nabla_X . R)(*F; G) - (\nabla_Y . R)(F; G) \\ &= (\delta\Lambda)R(G; *G) + \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(G; G) \\ &+ (\delta\Lambda)R(F; E) + \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(*F; E).\end{aligned}$$

En se rappelant la remarque préliminaire concernant l'équivalence des relations (R_2) et (R_3), on voit que (III, 2.0) s'écrit :

(III, 2.3)
$$\Lambda . R(G; * G) - 3(\delta\Lambda)R(G; * G) - 3\varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(G; G) = 0.$$

Naturellement, on a la même relation avec $* R$:

(III, 2.3)
$$\Lambda . R(G; G) - 3(\delta\Lambda)R(G; G) + 3\varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(G; * G) = 0.$$

Le champ de repères quasi-orthonormés utilisé ici n'est pas assujetti à la condition simplificatrice $(X, \Lambda, Y) = 0$. Les équations ainsi obtenues montrent que si R est de type III sur S, il reste de type III dans un voisinage de S.

Remarque. — Dans le cas d'un espace-temps de type II, les équations précédentes ne sont autres que les équations $(I, 2.2)_a$ déjà obtenues.

3. Permanence de III_b.

Dans un voisinage de l'hypersurface, la double 2-forme de courbure satisfait aux relations (R_0), (R_1) et (R_2) ou (R_3). Compte tenu de ces relations, l'équation

(III, 3.0)
$$(\nabla_\Lambda . R)(* G; * E) = (\nabla_X . R)(* F; * E) - (\nabla_Y . R)(F; * E)$$

déduite de l'identité de Bianchi, s'écrit, dans un champ de repères quasi-orthonormés satisfaisant à la condition $(X, \Lambda, Y) = 0$.

(III, 3.1)
$$\Lambda . R(G; E) - (\delta\Lambda)R(G; E) + \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(G; * E) = 0.$$

De même on a l'équation

(III, 3.2)
$$\Lambda . R(G; * E) - (\delta\Lambda)R(G; * E) - \varepsilon(d\Lambda, d\Lambda)^{1/2}R(G; E) = 0.$$

Ces équations assurent la permanence du cas III_b.

IV. Comportement asymptotique des espaces-temps de types II.

Dans ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse simplificatrice $d\Lambda = 0$, nous supposerons de plus que $\delta\Lambda < 0$.

1. La notion de distance paralaxiale.

La notion repose sur le lemme suivant de R. K. Sachs :

LEMME. — *Le paramètre affine r le long de chaque trajectoire du champ* Λ *peut être choisi de façon que*

$$r = -2/\delta\Lambda \tag{IV, 1.1}$$

et

$$(\Lambda, V) = 1, \tag{IV, 1.2}$$

où V *est un champ de vecteurs temporels quelconques se propageant par parallélisme le long de la trajectoire considérée.*

Preuve. — D'après l'équation de propagation de $(\delta\Lambda)$ qui se réduit, dans l'hypothèse $d\Lambda = 0$, à

$$2\Lambda.(\delta\Lambda) = (\delta\Lambda)^2$$

soit

$$\frac{d}{dr}(\delta\Lambda) = (1/2)(\delta\Lambda)^2$$

on montre par intégration de cette équation que le paramètre affine r peut être choisi de façon à satisfaire la condition (IV, 1.1). D'autre part, comme $d\Lambda = 0$, Λ est défini à une constante multiplicative (f) près. Le produit scalaire (Λ, V) étant constant le long de la trajectoire considérée, on peut choisir la constante (f) de façon à avoir (IV, 1.2). Le paramètre r se trouve alors uniquement déterminé.

Dans un espace-temps plat, le paramètre r représente la distance spatiale entre la source et le ligne droite de direction V passant par le point d'observation. (IV, 1.1) montre que cette distance peut être mesurée par la divergence des rayons, en corrigeant l'effet Doppler à l'aide de (IV, 1.2). Les mesures étant locales, on peut utiliser les conditions précédentes pour définir la distance paralaxiale en Relativité Générale.

2. Comportement asymptotique des espaces-temps de types II.

Revenons aux espaces-temps de types II étudiés dans le premier paragraphe. Rappelons que, par rapport à un repère quasi-orthonormé adapté, la double 2-forme de courbure admet la décomposition

(IV, 2.0)
$$R = \sigma\hat{F} - \tau * \hat{F} + \alpha\gamma - \beta\eta + 3\alpha\hat{G} - 3\beta * \hat{G};$$

où on a posé pour simplifier l'écriture

(IV, 2.1) $$\hat{F} \underset{\text{déf.}}{=} F \otimes F - *F \otimes *F,$$

(IV, 2.2) $$\hat{G} \underset{\text{déf.}}{=} G \otimes G - *G \otimes *G.$$

On sait d'autre part que le repère quasi-orthonormé adapté n'est défini qu'à une rotation près dans le 2-plan des vecteurs X et Y. On peut fixer les champs de vecteurs X, Y en imposant la condition $(X, \Lambda, Y) = 0$, comme nous l'avons noté dans le paragraphe III. Ce choix sera supposé fait dans tout ce qui suit.

Appliquons maintenant la différentiation covariante suivant le champ de vecteurs Λ à la double 2-forme de courbure. Pour le choix précédent de repère, nous avons vu que

$$\nabla_\Lambda . F = \nabla_\Lambda * F = 0,$$

et que d'autre part $\nabla_\Lambda . G = (M, \Lambda, X)F - (M, \Lambda, Y) * F$, par suite, on a l'expression suivante pour le covariant différentiel de R :

$$\nabla_\Lambda . R = (\Lambda . \sigma)\hat{F} - (\Lambda . \tau) * \hat{F} + (\Lambda . \alpha)\gamma \\ - (\Lambda . \beta)\eta + 3(\Lambda . \alpha)\hat{G} - 3(\Lambda . \beta) * \hat{G} - \varphi\hat{H} + \psi * \hat{H}$$

où $\hat{H}$ désigne le tenseur algébriquement de type III_a

(IV. 2.3) $$\hat{H} \underset{\text{déf.}}{=} F \otimes G + G \otimes F - *F \otimes *G - *G \otimes *F,$$

et où, d'autre part les scalaires φ et ψ sont définis par

(IV, 2.4) $$\varphi \underset{\text{déf.}}{=} -3[\alpha(M, \Lambda, X) + \beta(M, \Lambda, Y)],$$

(IV, 2.5) $$\psi \underset{\text{déf.}}{=} 3[\alpha(M, \Lambda, Y) - \beta(M, \Lambda, X)].$$

Or, nous avons vu que dans un espace-temps de type II, on avait les relations $(\mathrm{I}, 2.3)_a$, de ces relations, il résulte que

$$\text{(IV, 2.4)}' \qquad \varphi = \mathrm{X}.\alpha + \mathrm{Y}.\beta$$
$$\text{(IV, 2.5)}'' \qquad \psi = \mathrm{X}.\beta - \mathrm{Y}.\alpha.$$

Nous poserons pour simplifier dans la suite

$$\text{(IV, 2.6)} \qquad \mathrm{L}. \underset{\text{déf.}}{=} 2\nabla_\Lambda . - 3(\delta\Lambda)$$

L opérant sur les tenseurs et, en particulier, sur les fonctions.

Cela étant, les équations de propagation des invariants α et β qui s'écrivent avec ces notations $\mathrm{L}.\alpha = 0$, $\mathrm{L}.\beta = 0$, nous conduisent à écrire l'équation donnant $\nabla_\Lambda.\mathrm{R}$ sous la forme

$$\text{(IV, 2.7)} \qquad \mathrm{S} \underset{\text{déf.}}{=} \mathrm{L}.\mathrm{R} = (\mathrm{L}.\sigma)\hat{\mathrm{F}} - (\mathrm{L}.\tau) * \hat{\mathrm{F}} - 2\varphi\hat{\mathrm{H}} + 2\psi * \hat{\mathrm{H}},$$

La double 2-forme S ainsi définie est de type III (comme on peut le voir à l'aide du critère de L. Bel).

Nous aurons besoin de la loi de propagation des quantités φ et ψ définis précédemment; pour cela, nous établissons d'abord le

LEMME 1. — *Si f est une fonction satisfaisant à* $\mathrm{L}.f = 0$, *alors*

$$\text{(IV, 2.8)} \qquad 2\Lambda.(\mathrm{X}.f) = 4(\delta\Lambda)(\mathrm{X}, f) + 3f(\delta\Lambda)(\mathrm{M}, \Lambda, \mathrm{X}),$$
$$\text{(IV, 2.8)}' \qquad 2\Lambda.(\mathrm{Y}.f) = 4(\delta\Lambda)(\mathrm{Y}, f) + 3f(\delta\Lambda)(\mathrm{M}, \Lambda, \mathrm{Y}).$$

Preuve. — Notons d'abord qu'à l'aide de l'identité de Ricci, on peut établir la formule

$$\text{(IV, 2.9)} \qquad \mathrm{X}.(\delta\Lambda) = (\delta\Lambda)(\mathrm{M}, \mathrm{X}, \Lambda)$$

et la relation obtenue en y remplaçant X par Y.

Ceci étant, pour démontrer le lemme, écrivons :

$$\begin{aligned} 2\Lambda.(\mathrm{X}.f) &= 2[\Lambda, \mathrm{X}].f + 2\mathrm{X}(\Lambda.f) \\ &= 2[\Lambda, \mathrm{X}].f + 3(\delta\Lambda)\mathrm{X}.f + 3f\mathrm{X}(\delta\Lambda) \\ &\qquad\qquad (\text{comme } \mathrm{L}.f = 0) \end{aligned}$$

Mais $2[\Lambda, X] = 2(M, \Lambda, X)\Lambda + (\delta\Lambda)X$, par suite, en tenant compte de la relation (IV, 2.9) précédente, on a, après simplification immédiate la première relation à démontrer. La seconde s'obtient de la même manière.

Le lemme 1 permet de prouver le suivant

Lemme 2. — *Les quantités* $\varphi(= X.\alpha + Y.\beta)$ et

$$\psi(= X.\beta - Y.\alpha)$$

satisfont aux équations de propagation

$$\text{(IV, 2.10)} \qquad L.\varphi = 0; \quad L.\psi = 0.$$

Preuve. — On applique le lemme 1 aux quantités φ et ψ. En tenant compte de nouveau des relations $(I, 2.3)_a$ rappelées précédemment; le résultat s'obtient immédiatement.

Ces équations de propagation conduisent, de la même façon que précédemment, à écrire l'équation donnant le covariant différentiel de $S(= L.R)$ suivant le champ Λ sous la forme

$$\text{(IV, 2.11)} \qquad T \underset{\text{déf.}}{=} L.S = A.\hat{F} - B * \hat{F},$$

T étant maintenant une double 2-forme de type III_b, comme la forme du troisième membre l'indique. Dans cette équation, nous avons posé

$$\text{(IV, 2.12)} \quad A \underset{\text{déf.}}{=} L^2.\sigma - 8[\varphi(M, \Lambda, X) + \psi(M, \Lambda, Y)],$$

$$\text{(IV, 2.12)}' \quad B \underset{\text{déf.}}{=} L^2.\tau - 8[\varphi(M, \Lambda, Y) - \psi(M, \Lambda, X)].$$

Déterminons ces quantités A et B.

Des équations (I, 3.2) et (I, 3.2) et de la remarque finale de I, il résulte l'équation donnant la propagation de σ

$$\text{(IV, 2.13)} \quad 2\Lambda.\sigma - \sigma(\delta\Lambda) = 3\alpha[(X, X, M) - (Y, Y, M)] \\ + 3\beta[(X, Y, M) + (Y, X, M)] \underset{\text{déf.}}{=} \alpha\mu + \beta\nu.$$

De cette équation, on déduit, par différentiation, tout en faisant intervenir les équations de propagation de $(\delta\Lambda)$, de α et de β

$$(a) \quad L^2.\sigma = -(\delta\Lambda)L.\sigma - (\delta\Lambda)(\alpha\mu + \beta\nu) + 2(\alpha\Lambda.\mu + \beta\Lambda.\nu).$$

Pour obtenir $\Lambda.\mu$ et $\Lambda.\nu$, nous appliquons de nouveau l'identité de Ricci, un calcul analogue à celui effectué dans II, conduit aux équations suivantes :

$$(b) \quad \frac{2}{3}\Lambda.\mu - \left(\frac{\delta\Lambda}{3}\right)\mu = -2[(M, \Lambda, X)^2 - (M, \Lambda, Y)^2] \\ + 2(M, \Lambda, Y)(X, X, Y) \\ - (M, \Lambda, X)(Y, Y, X) \\ - 2X.(M, \Lambda, X) + 2Y(M, \Lambda, Y).$$

$$(b)' \quad \frac{2}{3}\Lambda.\nu - \left(\frac{\delta\Lambda}{3}\right)\nu = -4(M, \Lambda, X)(M, \Lambda, Y) \\ - 2(M, \Lambda, X)(X, X, Y) \\ + (M, \Lambda, Y)(Y, Y, X) - 2X.(M, \Lambda, Y) \\ - 2Y.(M, \Lambda, X).$$

En remplaçant ces expressions dans (a), et en faisant intervenir de nouveau les relations $(\mathrm{I}, 2.3)_a$ il résulte pour $L^2.\sigma$ l'expression

$$(\mathrm{IV}, 2.14) \quad L^2.\sigma + (\delta\Lambda)L.\sigma \\ = 8[\varphi(M, \Lambda, X) + \psi(M, \Lambda, Y)] \\ + 2[\varphi(Y, Y, X) + \psi(X, X, Y) + X.\varphi + Y.\psi].$$

On peut donc écrire A sous la forme

$$(\mathrm{IV}, 2.15) \quad A = -(\delta\Lambda)L.\sigma \\ + 2[\varphi(Y, Y, X) + \psi(X, X, Y) + X.\varphi + Y.\psi].$$

On a de même une expression analogue pour B.

Nous étudions maintenant la loi de propagation des quantités A et B. D'abord, de l'équation de propagation de $(\delta\Lambda)$, on vérifie immédiatement que pour toute fonction f, on a

$$L((\delta\Lambda)f) = (\delta\Lambda)(L.f + (\delta\Lambda)f),$$

en particulier

$$(c) \qquad L.((\delta\Lambda)L.\sigma) = (\delta\Lambda)(L^2.\sigma + (\delta\Lambda)L.\sigma).$$

Déterminons maintenant la loi de propagation du deuxième terme dans l'expression de A.

Le lemme 1 appliqué à φ et ψ, donne, par addition des relations ainsi obtenues :

$$2\Lambda.(X.\varphi + Y.\psi) = 4(\delta\Lambda)(X.\varphi + Y.\psi) \\ + 3(\delta\Lambda)[\varphi(M, \Lambda, X) - \psi(M, \Lambda, Y)]$$

d'autre part, de l'identité de Ricci, il vient, par un calcul simple

$$2\Lambda.(Y, Y, X) = (\delta\Lambda)[(M, \Lambda, X) + (Y, Y, X)]$$
$$2\Lambda.(X, X, Y) = (\delta\Lambda)[(M, \Lambda, Y) + (X, X, Y)].$$

De ces trois dernières équations, on déduit

$$\begin{aligned}2\Lambda.[\varphi(Y, Y, X) + \psi(X, X, Y) + X.\varphi + Y.\psi] &= 4(\delta\Lambda)[\varphi(Y.Y.X) + \psi(X.X.Y) + X.\varphi + Y.\psi]\\ &+ 4(\delta\Lambda)[\varphi(M, \Lambda, X) + \psi(M, \Lambda, Y)],\end{aligned}$$

par suite, on a, en vertu de la relation (IV, 2.14)

$$(c)' \quad 2L.[\varphi(Y, Y, X) + \psi(X, X, Y) + X.\varphi + Y.\psi] = (\delta\Lambda)(L^2.\sigma + (\delta\Lambda)L.\sigma).$$

Les équations (c) et (c') montrent par conséquent.

Lemme 3. — *Les quantités* A *et* B *satisfont aux équations :*

$$\text{(IV, 2.16)} \qquad L.A = 0, \quad \text{et} \quad L.B = 0.$$

(On démontrera de la même façon la seconde relation.)

Par suite, le tenseur T défini par (IV, 2.11) satisfait à l'équation de propagation.

$$\text{(IV, 2.17)} \qquad L.T = 0.$$

En résumé, nous avons démontré que

$$\text{(IV, 2.18)} \qquad \begin{aligned}2\nabla_\Lambda.R - 3(\delta\Lambda)R &= S,\\ 2\nabla_\Lambda.S - 3(\delta\Lambda)S &= T,\\ 2\nabla_\Lambda.T - 3(\delta\Lambda)T &= 0.\end{aligned}$$

Cela étant, pour tout tenseur H, nous poserons pour simplifier

$$\text{(IV, 2.19)} \qquad H^{(p)} \underset{\text{déf.}}{=} (\delta\Lambda)^p H,$$

p étant un entier relatif.

Avec cette définition, il résulte immédiatement de l'équation de propagation de $(\delta\Lambda)$ que si le tenseur H satisfait à une relation de la forme

$$2\nabla_\Lambda.H = 3(\delta\Lambda)H - K,$$

alors le tenseur $H^{(p)}$ satisfait à

$$2\nabla_\Lambda.H^{(p)} = (\delta\Lambda)[(3 + p)H^{(p)} + K^{(p-1)}].$$

Appliquant ce résultat aux tenseurs S et T définis précédemment on a :

(IV, 2.20) $$2\nabla_{\Lambda} T^{(-2)} = (\delta\Lambda) T^{(-2)}$$

(IV, 2.21) $$2\nabla_{\Lambda} . S^{(-2)} = 2(\delta\Lambda) S^{(-1)} + (\delta\Lambda) T^{(-2)}$$

d'où par addition, on obtient

(IV, 2.22) $$2\nabla_{\Lambda} . [S^{(-1)} + T^{(-2)}] = 2(\delta\Lambda)[S^{(-1)} + T^{(-2)}].$$

Le tenseur $S^{(-1)} + T^{(-2)}$ ainsi construit est évidemment de type III_a.

D'autre part, des équations de propagation de R, S et T, on déduit que si p et q désignent des coefficients numériques, on a

$$\begin{aligned} 2\nabla_{\Lambda} . [R + p(S^{(-1)} + T^{(-2)}] + qT^{(-2)}] \\ = 3(\delta\Lambda)[R + ((1 + 2p)/3) S^{(-1)} + ((2p + q)/3) T^{(-2)}]. \end{aligned}$$

Pour avoir aux deux membres le même tenseur, nous prendrons donc $p = 1$ et $q = -1/2$. On a alors

(IV, 2.23)
$$[2\nabla_{\Lambda} . - 3(\delta\Lambda)][R + (S^{(-1)} + T^{(-2)}) - (1/2) T^{(-2)}] = 0.$$

Les équations (IV, 2.20), (IV, 2.22) et (IV, 2.23) invitent à poser :

(IV, 2.24) $$\begin{aligned} R_1 &= (1/2)(\delta\Lambda)^{-2} T, \\ R_2 &= -((\delta\Lambda)^{-1} S + (\delta\Lambda)^{-2} T), \\ R_3 &= R + ((\delta\Lambda)^{-1} S + (\delta\Lambda)^{-2} T) - (1/2)(\delta\Lambda)^{-2} T. \end{aligned}$$

Les doubles 2-formes ainsi construites sont de types III_b, III_a et II respectivement et satisfont aux équations de propagation

(IV, 2.25) $$\begin{aligned} 2\nabla_{\Lambda} . R_1 &= (\delta\Lambda) R_1, \\ 2\nabla_{\Lambda} . R_2 &= 2(\delta\Lambda) R_2, \\ 2\nabla_{\Lambda} . R_3 &= 3(\delta\Lambda) R_3. \end{aligned}$$

Il vient alors la décomposition

(IV, 2.26) $$R = R_1 + R_2 + R^s.$$

Revenons maintenant à l'interprétation de $r = -2/(\delta\Lambda)$ comme distance paralaxiale. En prenant les composantes physiques de R dans un repère orthonormé ayant pour vecteur unitaire temporel le V considéré dans 1, et qui se propage par parallélisme le long des rayons (trajectoires du champ Λ), nous pouvons énoncer le résultat sous la forme du

Théorème. — *Dans les hypothèses précisées de* (1), *la double* 2-*forme de courbure d'un espace-temps d'Einstein spécial de type II admet la décomposition*

$$R = R_1 + R_2 + R_3, \tag{IV, 2.26}$$

où les doubles 2-*formes* R_1, R_2 *et* R_3 *sont respectivement du type* III_b, III_a *et* II; *leurs composantes physiques tendent vers* 0 *respectivement comme* $O(1/r)$, $O(1/r^2)$ *et* $O(1/r^3)$.

Notes. — La démonstration précédente a été faite après avoir pris connaissance de (S, 2), où Sachs indique la validité de la décomposition (IV, 2.26) sans hypothèses supplémentaires. Dans (L, 2), avec le même principe de décomposition, nous avons démontré la validité (IV, 2.26) sous quelques hypothèses supplémentaires. On peut montrer que deux de ces hypothèses, à savoir :

$$\Lambda.(M, \Lambda, X) = \Lambda.(M, \Lambda, Y) = 0,$$

sont effectivement satisfaites, moyennant le choix du champ de repères adaptés satisfaisant à $(X, \Lambda, Y) = 0$. On déduit en effet des relations $(I, 2.3)_a$, des équations de propagations de α, β et de φ et ψ (lemme 1) que

$$3\alpha\Lambda.(M, \Lambda, X) + 3\beta\Lambda.(M, \Lambda, Y) = 0,$$
$$3\alpha\Lambda.(M, \Lambda, Y) - 3\beta\Lambda.(M, \Lambda, X) = 0.$$

Ce qui prouve notre assertion pour un espace-temps proprement de type II (c'est-à-dire pour $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Abraham, Piecewise differentiable manifolds and the spacetime of Relativity, *Journal of Math. and Mech.*, 11 (1962), p. 553.

[2] A. Avez, Ondes monochromatiques et effet Doppler en Relativité Générale, *Bulletin astronomique*, XXIII, (1962), fasc. 4, pp. 273-294; Formule de Gauss-Bonnet-Chern en métrique de signature quelconque. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 255, (1962), p. 2049; *Thèse* : Essais de Géométrie riemannienne hyperbolique globale, applications à la Relativité Générale, Paris, 1963.

[3] L. Bel, Introduction d'un tenseur du quatrième ordre, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 248 (1959), p. 1296; *Thèse Sci. Math.*, La Radiation gravitationnelle, Paris, 1960.

[4] P. G. BERGMANN, *Introduction to the Theory of Relativity*, Prentice Hall, New York, 1950.

[5] P. BIDAL et G. de RHAM, Les formes différentielles harmoniques, *Comm. Math. Helv.*, 16 (1946), p. 1.

[6] H. BONDI, F. A. E. PIRANI and I. ROBINSON, Gravitational waves in General Relativity, III. Exact plane waves, *Proc. Roy. Soc. of London*, Ser. A, 251 (1959), p. 519.

[7] E. CALABI, On compact, Riemannian manifolds with constant curvature I. *Proc. of Symposia in pure Mathematics vol. III, Differential Geometry*, p. 155, A.M.S., 1961.

[8] E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[9] R. DEBEVER, La super-énergie en Relativité Générale, *Bull. Soc. Math. de Belgique*, 10 (1959), p. 112.

[10] R. DEBEVER, Champs électromagnétiques et champs gravifiques. *Colloque sur la Théorie de la Relativité*, Bruxelles, CBRM, 1959, p. 79; Tenseur de super-énergie et composantes irréductibles du tenseur de courbure, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 250, (1960).

[11] J. EHLERS und R. SACHS, Erhaltungssatze für die Wirkung in elektromagnetischen und gravischen Strahlungsfeldern, *Z. Phys.*, 115 (1959), p. 498.

[12] L. P. EISENHART, *Riemannian Geometry, Princeton Univ. Press. Princeton*, 1949.

[13] A. FROLICHER and A. NIJENHUIS, Theory of the vector valued differential forms, I. *Koniklijke Nederlandse Akad. van Wetenschappen*, Proceedings, Ser. A., *Math. Ser., LIX*, (1956), p. 338.

[14] J. N. GOLDBERG and R. P. KERR, Some applications of the Infinitesimal holonomy group to the Petrov classification of Einstein spaces, *J. of Math. Phys.*, 2 (1961), p. 327.

[15] J. N. GOLDBERG and R. K. SACHS, A Theorem on Petrov types. *Acta Physica Polonica, XXII, Supplementum*, (1962), pp. 13-23.

[16] J. L. KOSZUL, *Lectures on Fibre bundles and Differentiel Geometry*. Tate Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

[17] C. LANCZOS, A remarkable property of the Riemann tensor in four dimensions, *Ann. of Math.*, 2 *nd Ser.*, 39, (1938), pp. 842-850.

[18] LE THANH-PHONG, Vecteurs de Poynting en Relativité Générale. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 250 (1960), p. 987-989; Sur le comportement asymptotique d'une classe de métriques de type II. *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 251, (1960), pp. 210-212; Sur le champ de vecteurs isotropes satisfaisant à l'équation de Robinson, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 253, (1961), pp. 2469-2471; Sur la permanence de la classification de Petrov, *C.R. Acad. Sci.*, Paris, 254 (1962), p. 1926-1928.

[19] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson et Cie, Paris, 1955; *Théories globales des connexions et des groupes d'holonomie*, Edizioni Cremonese, Roma, 1955; *Géométrie de groupes de transformations*, Dunod, Paris, 1958; Ondes électromagnétiques et ondes gravitationnelles en Relativité générale. *Cahier de Physique*, 96, (1958), pp. 287-296; Radiation gravitationnelle.

Sém. Mécanique Analytique et Mécanique céleste, Année 1958-59, exposé 11. Paris, 1959; *Propagateurs et commutateurs en Relativité Générale*, Institut des Hautes Études Scientifiques, Publ. n° 10, Paris, 1961.

[20] L. Mariot, *Thèse Sci. Phys.:* Le champ électromagnétique pur en Relativité générale, Paris, 1957.

[21] C. W. Misner and J. A. Wheeler, Classical Physicsas Geometry. *Ann. Physics*, 2, (1957), p. 525.

[22] C. Moller, *The Theory of Relativity*, Oxford, Clarendon Press, 1954.

[23] K. Nomizu, Lie groups and differential geometry, *Math. Soc. of Japan*, 1956.

[24] A. Z. Petrov, *C.R. Acad. Sci. de l'URSS*, 81 (1951), n° 2, p. 149; *Notes scientifiques de l'Université de Kazan*, 114, (1954), p. 55; *C.R. Acad. Sci. de l'URSS*, 105 (1955), n° 5, p. 905.

[25] F. A. E. Pirani, On the physical significance of the Riemannian tensor. *Acta Physica Polonica*, *XV*, (1956), p. 389.

[26] F. A. E. Pirani, Invariant formulation of gravitationnal radiation theory, *Phys. Rev.*, 105 (1958), p. 1089; Gravitational waves in General Relativity IV. The gravitational field of a fast moving particle, *Proc. Roy. Soc.*, London, A 225, (1959), p. 96.

[27] J. Plebanski, On algebraical properties of skew-tensors, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astro. Phys.*, 9 (1961).

[28] G. de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.

[29] I. Robinson and A. Trautman, Spherical gravitational waves, *Phys. Rev. Letters*, 8 (1960), p. 431.

[30] G. Rosen, Interpretation of Rainich Geometry. *Recent Developments in General Relativity*, Pergamon Press, 1962.

[31] H. S. Ruse, On the geometry of the electromagnetic field in General Relativity, *Proc. London Math. Soc.*, (2), *XLI* (1936), p. 302.

[32] R. K. Sachs, On the asymptotic behavior of electromagnetic and gravitational waves. *Hamburg Univ.*, 1960; Gravitational fields with geodesic rays. *Hamburg Sem. In General Relativity*, May 1960; Gravitational pure Radiation, Hamburg, 1961; Gravitational waves in General Relativity VI. The outgoing radiation condition; *Proc. Roy. Soc.*, London, A 264 (1961), p. 309-338.

[33] J. F. Schell, Classification of four dimensional Riemannian spaces, *J. of Math. Phys.*, 2, n° 2, 1961.

[34] J. L. Synge, *Relativity: The special theory*, Amsterdam, *North Hollan Publ. Company*, 1956; *Relativity: The general theory.* Amsterdam, *North Holland Publ. Company*, 1960.

[35] A. Trautman, *Lectures notes in General Relativity.* King's Collège, London, 1958.

[36] J. Weber, *General Relativity and gravitational waves.* Interscience tracts on physics and astronomy, n° 10, New York, 1961.

(*Thèse, Fac. Sciences*, Paris, 1963).

Le Thanh Phong,
1, Square Buffalo, Montrouge (Seine).