

THIERRY MIGNON

**Courbes lisses sur les surfaces rationnelles génériques  
: un lemme d'Horace différentiel**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 50, n° 6 (2000), p. 1709-1744

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_2000\\_\\_50\\_6\\_1709\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_6_1709_0)

© Annales de l'institut Fourier, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## COURBES LISSES SUR LES SURFACES RATIONNELLES GÉNÉRIQUES : UN LEMME D’HORACE DIFFÉRENTIEL

par Thierry MIGNON

---

### Introduction.

Cet article est consacré à l’étude des courbes sur les surfaces rationnelles génériques. Étant donné un entier  $r$ , la surface rationnelle générique  $S$  de nombre de Picard  $r + 1$ , est obtenue en éclatant  $r$  points génériques et indépendants de  $\mathbb{P}_k^2$  (ici,  $k$  est algébriquement clos, de caractéristique nulle).

Il est d’usage de munir le groupe de Picard de  $S$  de la base formée de la transformée totale d’une droite du plan, et de l’opposé des  $r$  diviseurs exceptionnels. La classe d’un diviseur  $D$  est alors un  $(r + 1)$ -uplet d’entiers  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$ . Nous noterons  $\mathcal{L}(\underline{d})$  le système linéaire complet d’une telle classe. La dimension attendue pour  $\mathcal{L}(\underline{d})$  est

$$\max \left( \frac{1}{2} d(d + 3) - \sum_{i=1}^r m_i ; -1 \right).$$

Sous de bonnes hypothèses (conjecture d’Harbourne-Hirschowitz), on s’attend à ce que le système  $\mathcal{L}(\underline{d})$  ait la dimension attendue, et que sa courbe générique soit géométriquement irréductible et lisse.

L’objectif essentiel de ce travail est de prouver un lemme qui permet, par des spécialisations successives du  $r$ -uplet de points  $(P_1, \dots, P_r)$ , de traiter les questions évoquées ci-dessus. Ce résultat constitue ainsi une

---

*Mots-clés* : Surfaces rationnelles – Courbes lisses – Courbes planes – Singularités prescrites – Horace.

*Classification math.* : 14H50 – 14N20.

méthode d'approche dans le problème des courbes planes à singularités prescrites.

Ce lemme vient s'ajouter aux méthodes d'Horace, introduites par A. Hirschowitz, qui traitent usuellement de la *dimension* des systèmes du type  $\mathcal{L}(\underline{d})$ . Il permet en outre d'étudier la *géométrie* des courbes (irréductibilité, lissité). Toutefois, l'apport essentiel de ce lemme consiste en l'introduction de « méthodes infinitésimales » (voir la partie 2.2) qui permettent d'assouplir considérablement les techniques déjà en notre possession.

Comme première application de ce « lemme d'Horace géométrique », nous démontrons le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — Soit  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$  un  $(r + 1)$ -uplet d'entiers positifs tel que  $d \geq m_1 + m_2 + m_3$  et  $m_1 \geq \dots \geq m_r$ . Soit  $g$  le genre arithmétique des courbes de  $\mathcal{L}(\underline{d})$  et  $e = e(\underline{d})$  la dimension attendue pour  $\mathcal{L}(\underline{d})$ .

Si  $e \geq 0$  et  $0 \leq g \leq 4$ , alors  $\dim \mathcal{L}(\underline{d}) = e$  et la courbe générique de  $\mathcal{L}(\underline{d})$  est géométriquement irréductible et lisse (sauf, si  $r = 9$ , pour  $\underline{d} = (3n; n, \dots, n)$ , avec  $n \geq 2$ ; dans ce cas, on trouve  $n$  fois la cubique passant par les 9 points).

Il faut remarquer que le théorème 1 s'applique à des systèmes linéaires de dimension nulle ( $e = 0$ ). La courbe est alors isolée, et l'emploi du théorème de Bertini est impossible. Signalons aussi que l'hypothèse  $d \geq m_1 + m_2 + m_3$  est une condition naturelle : l'utilisation algorithmique de transformations quadratiques permet de ramener l'étude de n'importe quel système à un autre satisfaisant cette condition (voir [22]).

Par ailleurs, le lemme d'Horace géométrique, a permis d'obtenir d'autres types de résultats. En 1997, l'auteur a montré que la courbe générique du système  $\mathcal{L}(\underline{d})$  est lisse et irréductible dès que  $m_i \leq 3$  et  $d \geq 317$  (voir [21]). Nous sommes actuellement en mesure de prouver un résultat analogue dès que  $m_i \leq m$  ( $m$  un entier positif quelconque) et  $d \geq d_0(m)$  (l'entier  $d_0(3)$  ainsi obtenu est toutefois beaucoup plus grand que 333). Pour ces deux théorèmes, le lemme démontré ici, couplé à d'autres techniques, est au cœur de la démonstration.

Le théorème 1 est un cas particulier de la conjecture suivante, due à Hirschowitz (et à Harbourne, pour la dimension des systèmes), qui prévoit que pour un  $(r + 1)$ -uplet d'entiers  $(d; m_1, \dots, m_r)$  tel que  $m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$  et  $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ , on ait :

1) *Le système  $\mathcal{L}(d)$  a la dimension attendue.*

2) *Si  $e \geq 0$  et  $g \geq 0$ , la courbe générique de  $\mathcal{L}(\underline{d})$  est géométriquement irréductible et lisse (sauf pour  $\underline{d} = (3n; n^9)$ ).*

Les travaux précédents ont surtout porté sur le premier point de cette conjecture, à commencer par ceux de Nagata [22], dans le cas où  $r \leq 9$ . Les récents, et nombreux, progrès dans ce domaine (voir [2], [5], [6], [20], [24] entre autres) permettent d'aborder sérieusement le deuxième point. On peut alors imposer plusieurs types d'hypothèses :

On peut étudier les systèmes de dimension élevée (voir [11]). Dans ce cadre, il est alors permis de faire usage du théorème de Bertini. On peut aussi étudier les systèmes ayant des  $m_i$  bornés : le premier résultat dans ce sens remonte à 1981 pour les  $m_i$  valant 1 ou 2 (Arbarello et Cornalba, [3]). Nous avons signalé plus haut deux résultats de ce type (multiplicités bornées par un entier  $m$  quelconque, mais degré grand devant  $m$ ) obtenus récemment par l'auteur.

Enfin, on peut majorer le genre arithmétique des courbes étudiées. C'est la voie entamée par S. Bossini [4] dans sa thèse et que nous poursuivons dans le présent travail. Précisément, le théorème 1 était connu pour les courbes de genres 1 et 2 et la plupart des courbes de genre 3 (voir [4]). La méthode employée ne permettait pas d'aller plus loin (voir ci-dessous). L'introduction des méthodes différentielles nous permet de conclure ici l'étude des courbes de genre 3, et d'effectuer celle des courbes de genre 4.

*Principe du lemme d'Horace différentiel.* — Le principe de la méthode d'Horace est le suivant : considérons un système de courbes planes de degré  $d$  assignées à passer avec des multiplicités fixées par plusieurs points génériques  $P_i$ . Choisissons une courbe irréductible  $C$  de degré  $c$ . Spécialisons plusieurs des points  $P_i$  sur  $C$  jusqu'à ce que  $C$  devienne une composante fixe du système linéaire en position spéciale. Puisque  $C$  est une composante fixe, nous pouvons la « soustraire » au système en position spéciale. On obtient un système linéaire *résiduel* de courbes de degré  $d - c$ . Sous certaines conditions, précisées par le lemme 3.1, si la courbe générique du système résiduel est géométriquement irréductible et lisse, la courbe générique du système initial est elle aussi géométriquement irréductible et lisse. Ce système résiduel étant de degré inférieur, il sera souvent plus aisé de l'étudier. En contrepartie, les points seront maintenant en position plus spéciale. Il est enfin possible d'appliquer plusieurs fois la méthode d'Horace pour aboutir à des systèmes bien connus de degrés très faibles.

L'une des conditions les plus contraignantes de cette méthode est la condition d'ajustabilité. Si la courbe  $C$  est lisse, cette condition stipule que la somme des multiplicités des points spécialisés sur  $C$  (le « nombre de conditions sur  $C$  ») doit être égale au genre de  $C$  moins un. De manière générale, l'ajustabilité usuelle correspond à la condition 1) du lemme 3.1, où l'on impose à l'entier  $a$  d'être nul. C'est là une condition combinatoire extrêmement contraignante. Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, soit la courbe n'est pas une composante du système en position spéciale, soit la dimension du système *augmente* en position spéciale.

Dans [4], on trouve une version non différentielle du lemme d'Horace géométrique. La condition d'ajustement empêche l'étude des courbes de genre supérieur à 3. Pour espérer aller plus loin, il nous faut donc assouplir cette condition.

Pour cela, nous démontrons un lemme de type *différentiel*. Les résultats de ce type (voir [1], [2], [9]) permettent généralement, lorsque la dimension du système augmente en position spéciale, de remplacer le système résiduel par un sous-système ayant la dimension attendue, mais où l'on impose aux courbes de nouveaux types de conditions infinitésimales (les courbes seront alors singulières en des cusps, des tacnodes...).

En ce qui nous concerne, les singularités du système résiduel — après la spécialisation — sont toujours imposées par des gros points (des conditions d'ordre infinitésimal apparaissent toutefois, immanquablement, dans les hypothèses du lemme). De plus, le système résiduel peut avoir une dimension plus élevée que le système initial. Précisément, si l'entier  $a$  de la condition 1) de 3.1 est non nul, la dimension augmente de  $a$ . Cette possibilité d'accroître la dimension du système devient vite un atout considérable. En effet, même en partant d'un système de dimension zéro, nous serons rapidement en mesure d'utiliser le théorème de Bertini.

### *Plan de l'article*

Dans une première partie, nous construisons les familles de courbes sur les surfaces génériques.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des spécialisations des courbes dans cette famille : l'un des points cruciaux de la démonstration du lemme d'Horace géométrique est de montrer que, même si la dimension augmente, la courbe générique du système initial se spécialise en la courbe générique du système en position spéciale.

Pour vérifier cela, nous étudions la stratification de la variété des  $r$ -uplets par la cohomologie (la dimension du système). Au voisinage du point spécial  $x$ , où la dimension du système est trop élevée, nous devons montrer que la codimension des strates est suffisamment grande. Nous utilisons pour cela la dérivée cohomologique de M. Green et R. Lazarsfeld. Cette dérivée permet de tester si un vecteur tangent à la variété des  $r$ -uplets de points appartient au cône tangent à l'une des strates de cohomologie.

La troisième partie est consacrée à la démonstration du lemme d'Horace géométrique. Nous donnons aussi quelques résultats qui permettent de vérifier les hypothèses de ce lemme.

Pour finir, nous appliquons cette méthode à la démonstration du théorème 1.

Nous n'étudions que les classes  $(d; m_1, \dots, m_r)$  adéquates (c'est-à-dire, telles que  $m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$  et  $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ ) ayant une dimension attendue positive. S. Bossini a montré que, à genre fixé, il n'y a qu'un nombre fini de telles classes. Il y en a quatorze pour les genres deux et trois, et vingt-cinq pour le genre quatre.

La méthode consiste alors à traiter chaque cas à l'aide du lemme 3.1. Nous présentons ici un exemple d'une telle étude pour la courbe de genre 4 de plus haut degré (de classe  $\underline{d} = (30; 10^8, 9, 4)$ ). Nous renvoyons le lecteur à [19], pour l'étude détaillée des vingt-cinq cas de genre 4, et de la courbe de plus haut degré en genre 3.

L'auteur souhaite remercier le *referee* pour ses remarques et suggestions, et lui avoir signalé entre autre l'involution de Bertini (§ 4.2) et le lemme 2.2.

### Table des matières.

Introduction . . . . .	1709
1. Familles de courbes sur les surfaces rationnelles . . . . .	1714
1.1. Familles de surfaces rationnelles . . . . .	1714
1.2. Diviseurs relatifs effectifs . . . . .	1714
2. Bonnes spécialisations dans $F$ . . . . .	1717
2.1. Stratification de $X$ . . . . .	1717
2.2. Déformation des groupes de cohomologie selon Green et Lazarsfeld . . . . .	1718
2.3. Un critère de bonne spécialisation . . . . .	1724
3. Le lemme d'Horace géométrique . . . . .	1730
3.1. Énoncé et démonstration du lemme . . . . .	1730
3.2. Sur les hypothèses du lemme d'Horace géométrique . . . . .	1734
4. Application : courbes de genres 1 à 4 . . . . .	1736
4.1. Liste des classes adéquates . . . . .	1736
4.2. La courbe de plus haut degré . . . . .	1737

## 1. Familles de courbes sur les surfaces rationnelles.

Nous construisons ici les familles de surfaces rationnelles obtenues en éclatant  $r$  points distincts du plan projectif, puis les familles de courbes sur ces surfaces.

À chaque  $(r + 1)$ -uplet d'entiers  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$  est associée une telle famille de courbes  $F = F(\underline{d})$ . Les points de  $F$  sont des couples  $(C, x)$  où  $x = (P_1, \dots, P_r)$  est un  $r$ -uplet de points distincts de  $\mathbb{P}^2$  et  $C$  est une courbe de degré  $d$  passant par chaque point  $P_i$  avec la multiplicité au moins  $m_i$ .

### 1.1. Familles de surfaces rationnelles.

Soit  $r \geq 0$  et  $X$  l'ouvert de  $(\mathbb{P}^2)^r$  des  $r$ -uplets de points distincts. Le morphisme  $\mathbb{P}_X^2 = \mathbb{P}^2 \times X \rightarrow X$  est muni de  $r$  sections naturelles :

$$\begin{aligned} \gamma_i : X &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \times X, \\ (P_1, \dots, P_r) &\longmapsto (P_i, (P_1, \dots, P_r)). \end{aligned}$$

Soit  $\Gamma_i$  l'image de  $\gamma_i$ . L'union  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^r \Gamma_i$  est une variété lisse de  $\mathbb{P}_X^2$ . En éclatant  $\mathbb{P}_X^2$  le long de  $\Gamma$ , on obtient une famille de surfaces rationnelles, paramétrées par  $X$  :

$$S_X \xrightarrow{b} \mathbb{P}_X^2 \longrightarrow X.$$

Nous noterons  $\pi$  le morphisme composé  $S_X \rightarrow X$ . Pour tout point  $x = (P_1, \dots, P_r)$  de  $X$ , la fibre de  $\pi$  au-dessus de  $x$ , notée  $S_x$  est simplement le plan éclaté aux  $r$  points  $P_1, \dots, P_r$ . Si  $x$  est le point générique de  $X$ ,  $S_x$  est la *surface rationnelle générique* de nombre de Picard  $r + 1$ .

Par convention, si  $Y \rightarrow X$  est un morphisme de schéma, nous noterons  $\Gamma_Y$  l'image réciproque de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{P}_Y^2 = \mathbb{P}^2 \times Y$ . Nous noterons aussi  $S_Y \xrightarrow{b_Y} \mathbb{P}_Y^2$  l'éclatement de  $\mathbb{P}_Y^2$  le long de  $\Gamma_Y$ . Puisque tous les voisinages infinitésimaux de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{P}_X^2$  sont plats sur  $X$ , l'éclatement de  $\Gamma$  commute au changement de base, et  $S_Y$  est simplement le produit fibré de  $Y$  par  $S_X$  au-dessus de  $X$  (voir [14], théorème 19.4,6). Enfin, si  $\mathcal{L}$  est un fibré inversible sur  $S_X$ , nous noterons  $\mathcal{L}_Y$  l'image réciproque de  $\mathcal{L}$  sur  $S_Y$ .

### 1.2. Diviseurs relatifs effectifs.

Rappelons que l'on appelle diviseur de Cartier relatif de  $S_X$  sur  $X$  tout faisceau d'idéaux  $\mathcal{I}_D$  sur  $S_X$ , localement principal, et non diviseur de zéro dans toutes les fibres du morphisme  $\pi$  (voir [12]). Ces faisceaux d'idéaux sont plats sur  $X$ .

*Exemples :*

1) Soit  $L$  une droite de  $\mathbb{P}_k^2$ ,  $L \times X \subset \mathbb{P}^2 \times X$  la famille de droites correspondante au-dessus de  $X$ , et  $H_X = b^{-1}(L \times X)$  la transformée totale de  $L \times X$  dans  $S_X$  après éclatement. L'idéal  $\mathcal{I}_{H_X}$  est un diviseur de Cartier relatif effectif de  $S_X \rightarrow X$ .

2) Soit maintenant  $E_{i,X}$  le diviseur exceptionnel issu de l'éclatement le long de  $\Gamma_i$ ; l'idéal  $\mathcal{I}_{E_{i,X}}$  est un diviseur de Cartier relatif effectif de  $S_X \rightarrow X$ .

Ces deux exemples nous permettent de munir le groupe de Picard de chaque surface  $S_x$  d'une base

$$[H_x], [-E_{1,x}], \dots, [-E_{r,x}].$$

Puisque les diviseurs de Cartier relatifs sont plats sur  $X$ , ils vérifient la propriété suivante de conservation des nombres :

PROPOSITION 1.1. — *Soit  $D$  un diviseur relatif effectif de  $S_X \rightarrow X$  et, pour tout  $x \in X$  soit  $[D_x] \in \mathbb{Z}^{r+1}$  la classe du diviseur  $D_x$  dans la base définie ci-dessus; le  $(r + 1)$ -uplet d'entiers  $[D_x]$  ne dépend pas de  $x$ .*

Le diviseur canonique de  $\text{Pic } S_x$  vaut  $\omega = (-3; (-1)^r)$  (la notation  $(-1)^r$  désigne l'entier  $-1$  répété  $r$  fois; nous conserverons cette convention dans la suite). La forme d'intersection de  $\text{Pic } S_x$  est donnée par

$$(d; m_1, \dots, m_r) \cdot (c; n_1, \dots, n_r) = dc - m_1 n_1 - \dots - m_r n_r.$$

Fixons maintenant une classe  $\underline{d} \in \mathbb{Z}^{r+1}$ . Nous noterons  $\mathcal{O}(\underline{d})$  le faisceau localement libre  $\mathcal{O}(d[H_x] - \sum_{i=1}^r m_i[E_i])$  et  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  le système linéaire complet de  $\mathcal{O}(\underline{d})$  :  $\mathcal{L}_x(\underline{d}) = \mathbb{P}(H^0(S_x, \mathcal{O}(\underline{d})))$ .

Le théorème de Riemann-Roch permet de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $\mathcal{O}(\underline{d})$  :

$$\chi(\underline{d}) = \frac{1}{2}(d+1)(d+2) - \sum_{i=1}^r \frac{1}{2} m_i(m_i+1).$$

Si  $d \geq -2$ , le théorème de dualité de Serre assure que l'on a  $h^2(S_x, \mathcal{O}(\underline{d})) = 0$ . La dimension attendue pour  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  vaut alors

$$\max(\chi(\underline{d}) - 1, -1).$$

(Par convention, le système vide est supposé de dimension  $-1$ .)

Un système  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  est dit *régulier* s'il a la dimension attendue.



Nous souhaitons posséder une famille universelle de diviseurs relatifs effectifs de classe  $\underline{d}$ . L'existence d'une telle famille nous est assurée par la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2 (voir [12], théorème 4.3). — Soit  $\underline{d} \in \mathbb{Z}^{r+1}$ . Le foncteur

$$\mathbf{F}(\underline{d}) : \mathbf{Sch}/\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Ens},$$

$$Y \longmapsto \left\{ D \subset S_Y, \text{ diviseur relatif effectif} \right.$$

$$\left. \text{de } S_Y \text{ sur } Y \text{ de classe } \underline{d} \right\}$$

est représentable par le couple  $(F, \mathcal{Q})$  défini ainsi.

- Le schéma  $F = F(\underline{d})$  est le schéma  $\text{Proj Sym}(\mathcal{M})$  où  $\mathcal{M}$  est le  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent défini à isomorphisme unique près tel que, pour tout  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{H}om(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\sim} \pi_*((\pi^*\mathcal{N})(\underline{d}))$  (l'isomorphisme est fonctoriel en  $\mathcal{N}$ ).

- Le diviseur  $\mathcal{Q}$  est obtenu à partir de la section tautologique de  $\mathcal{H}om(\mathcal{M}_F, \mathcal{O}_F(1))$  qui, par l'isomorphisme ci-dessus, donne une section de  $\pi_*(\mathcal{O}_{S_F}(\underline{d}))^*/\mathcal{O}_F^*$ , et donc un diviseur relatif de  $S_F$  sur  $F$ .

Les points fermés de  $F$  peuvent être vus comme les couples  $(D, x)$  où  $x$  est un  $r$ -uplet de points distincts du plan et  $D$  une courbe de classe  $\underline{d}$  sur la surface  $S_x$ . Le morphisme naturel  $F \xrightarrow{p} X$  envoie  $(D, x)$  sur  $x$ , et la fibre  $F_x$  est le système linéaire  $\mathbb{P}(H^0(S_x, \mathcal{O}(\underline{d})))$ .

Si  $x'$  est le point générique de  $F_x$ , la courbe  $\mathcal{Q}_{x'}$  est simplement la courbe générique du système linéaire  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$ . Nous la noterons  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$ .

Dans [17], 7.6, A. Hirschowitz remarque que, puisque  $h^2(S, \mathcal{O}(\underline{d}))$  est toujours nul (on suppose ici  $d \geq -2$ ), la situation peut être décrite plus simplement. En effet, il existe alors un morphisme  $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  entre deux faisceaux localement libres sur  $X$  tel que pour tout morphisme de schémas  $f : Y \rightarrow X$ , on ait la suite exacte

$$(i) \quad 0 \rightarrow (\pi_Y)_*\mathcal{O}(\underline{d}) \longrightarrow \mathcal{E}_Y \xrightarrow{u_Y} \mathcal{E}'_Y \longrightarrow R_*^1\pi_Y\mathcal{O}(\underline{d}) \rightarrow 0.$$

Le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{M}$  de la proposition 1.2 apparaît maintenant comme le conoyau de la transposée de  $u$  de  $\mathcal{E}'^\vee$  vers  $\mathcal{E}^\vee$ . On obtient ainsi une présentation localement libre de  $\mathcal{M}$ ,

$$(ii) \quad \mathcal{E}'^\vee \longrightarrow \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

satisfaisant la relation  $\text{rg } \mathcal{E}^\vee - \text{rg } \mathcal{E}'^\vee = \chi(\mathcal{O}(\underline{d}))$ .

## 2. Bonnes spécialisations dans $F$ .

L'étude des courbes de la surface rationnelle générique passe par la réalisation de « bonnes spécialisations » de points dans la variété  $F$  associée à un  $(r + 1)$ -uplet  $\underline{d}$ .

Précisément, soient  $x$  un point de  $X$  et  $x'$  le point générique de  $F_x$ , fibre du morphisme  $F \xrightarrow{p} X$ . Soient  $y \in X$ , une spécialisation de  $x$ , et  $y'$  le point générique de la fibre  $F_y$ . Nous tenterons de répondre aux questions suivantes :

- Le point  $y'$  est-il une spécialisation de  $x'$  ?
- Le point  $y'$  est-il lisse dans  $F$  ?

L'outil essentiel de cette étude est la dérivation cohomologique de Green et Lazarsfeld [10]. Cette application (ou plutôt son opposée) apparaît aussi sous le nom d'application « Rank Kodaira-Spencer » dans [17].

Dans cette section, nous fixons  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$ ,  $F = F(\underline{d})$  et  $F \xrightarrow{p} X$  le morphisme naturel.

### 2.1. Stratification de $X$ .

Pour étudier les spécialisations dans  $F$ , il est utile d'introduire la stratification de  $X$  par la cohomologie de  $\mathcal{I}_Z(d)$ . Cette stratification est donnée par les ensembles

$$X^i = \{x \in X; h^0(S_x, \mathcal{O}_{S_x}(\underline{d})) \geq \chi^+ + i + 1\}, \quad i \geq -1,$$

où  $\chi^+$  désigne l'entier  $\max(\chi(\underline{d}), 0)$ .

Les sous-schémas fermés  $X^i$  vérifient les inclusions  $X^{-1} \supset X^0 \supset X^1 \supset \dots$ . En particulier,  $X^{-1}$  est  $X$  tout entier, et  $X^0$  est le lieu où le diviseur n'a pas la dimension attendue.

PROPOSITION 2.1. — Soient  $x, y$ , deux points de  $X$  tels que  $x$  se spécialise en  $y$ . Soit  $x'$  et  $y'$  les points génériques respectifs des fibres  $F_x$  et  $F_y$ . On note  $Y$  l'adhérence de  $x$  dans  $X$ , et on pose  $Y^i = Y \cap X^i$  pour  $i \geq -1$ . Soit enfin  $a$  un entier positif ou nul. Si,

- 1)  $y \in Y^{a-1} \setminus Y^a$ ;
- 2) pour  $a \geq 1$ , pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq (a - 1)$ ,  $\text{codim}_{Y,y} Y^i \geq i + 2$ ,

alors  $y'$  est une spécialisation de  $x'$ .

*Preuve.* — Soit  $\mathcal{M}$  le module défini dans la proposition 1.2, et  $U = \text{Spec } A$  un ouvert affine de  $Y$ . Il s'agit de montrer que  $\text{Proj Sym}(\mathcal{M}|_U)$  est irréductible. Considérons la présentation de  $\mathcal{M}$ ,  $u^\vee : \mathcal{E}^\vee \rightarrow \mathcal{E}^\vee$ , introduite juste après la présentation 1.2. La suite exacte (i) montre que la stratification  $X^i$  est définie par le rang de  $u^\vee$ , c'est-à-dire par les idéaux de Fitting de  $\mathcal{M}$ .

Posons  $\mathcal{N}' = \mathcal{E}'^\vee|_U$  et  $\mathcal{N} = \mathcal{E}^\vee|_U$ . Le morphisme  $\mathcal{N}' \rightarrow \mathcal{N}$  est une présentation de  $\mathcal{M}|_U$  telle que  $\text{rg}(\mathcal{N}) - \text{rg}(\mathcal{N}') = \chi(\mathcal{O}(d))$ . La proposition découle alors du lemme suivant.

**LEMME 2.2.** — *Soit  $A$  un anneau intègre noethérien,  $v : N' \rightarrow N$  une présentation localement libre d'un  $A$ -module de type fini  $M$ . Notons  $F_i(M)$  les idéaux de Fitting de  $M$ . Si  $\text{rg}(N') - \text{rg}(N) = \chi > 0$  et si  $\text{ht}(F_i(M)) \geq i + 2 - \chi$  pour tout  $i$ , l'anneau  $(\text{Sym } M)_{\text{red}}$  est intègre.*

*Preuve.* — Soit  $\mathfrak{P}$  un idéal premier minimal de  $\text{Sym } M$  de trace  $\mathfrak{Q}$  sur  $A$ . Il suffit de montrer que  $\mathfrak{Q} = (0)$ . On peut donc supposer  $A$  local, d'idéal maximal  $\mathfrak{Q}$ , et la présentation  $v$  minimale.

Soit  $d = \text{rg}(N)$ ; puisque la présentation est minimale, les coefficients de la «matrice»  $v$  sont dans  $\mathfrak{Q}$  et  $F_{d-1}(M) \subset \mathfrak{Q}$ . Ainsi,

$$\text{ht}(F_{d-1}(M)) \leq \text{ht}(\mathfrak{Q}) \leq \text{ht}(\mathfrak{P}).$$

Mais, par ailleurs,  $\text{Sym } M$  est défini dans  $\text{Sym } N$  par  $d - \chi$  équations, donc  $\text{ht}(\mathfrak{P}) \leq d - \chi$ , ce qui est impossible.  $\square$

## 2.2. Déformation des groupes de cohomologie selon Green et Lazarsfeld.

Dans [10], Green et Lazarsfeld présentent un critère permettant de vérifier qu'un vecteur tangent à  $X$  appartient au cône tangent à l'une des strates de cohomologie. Nous commençons par rappeler leur énoncé et en déduisons un lemme pour prouver la lissité locale de la variété  $F$ . Nous explicitons ensuite totalement ce critère dans les situations qui nous intéressent.

### 2.2.1. Construction de l'application sur l'espace tangent.

Soit  $x$  un point fermé de  $X$ , et  $t$  un vecteur de l'espace tangent  $T_x X$ ;  $t$  est la donnée d'un morphisme de

$$\mathbf{D} = \text{Spec}(k[\varepsilon]/\varepsilon^2)$$

dans  $X$  dont l'image a pour support  $x$ . Sur  $\mathbf{D}$ , il y a une suite exacte naturelle

$$0 \rightarrow k \xrightarrow{\times \varepsilon} k[\varepsilon] \xrightarrow{\varepsilon=0} k \rightarrow 0,$$

que l'on peut relever en une suite exacte courte sur  $\mathbb{P}_{\mathbf{D}}^2$ . Puisque  $\mathcal{I}_Z(d)$  est plat sur  $X$ , la suite reste exacte lorsqu'on la tensorise par  $\mathcal{I}_{Z_{\mathbf{D}}}(d)$ . En prenant l'image directe sur  $\mathbb{P}^2$  (par la projection  $\mathbf{D} \times \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ ) on obtient la suite exacte courte de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -modules suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{Z_x}(d) \rightarrow \mathcal{I}_{Z_{\mathbf{D}}}(d) \rightarrow \mathcal{I}_{Z_x}(d) \rightarrow 0,$$

qui est un élément de  $\text{Ext}^1(\mathcal{I}_{Z_x}(d), \mathcal{I}_{Z_x}(d))$ . En passant à la suite exacte longue de cohomologie, on obtient le morphisme cobord, application linéaire de  $H^0(S_x, \mathcal{I}_{Z_x}(d))$  dans  $H^1(S_x, \mathcal{I}_{Z_x}(d))$ .

On a ainsi défini une application linéaire

$$\begin{aligned} \varphi : T_x X &\longrightarrow L(H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z_x}(d)), H^1(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z_x}(d))), \\ t &\longmapsto \varphi_t. \end{aligned}$$

Cette application est définie dans [10] (voir en particulier la remarque faisant suite au lemme 2.3), où les auteurs montrent qu'elle vérifie la propriété suivante.

**PROPOSITION 2.3** (voir [10], théorème 4). — *Soit  $\varphi$  l'application linéaire définie ci-dessus,  $x$  un point fermé de  $X$  et  $t \in T_x X$ . Si  $t$  appartient au cône tangent à  $X^i$  au point  $x$ , alors  $\dim \ker \varphi_t \geq \chi(\underline{d})^+ + i + 1$ .*

### 2.2.2. Lien avec l'application de Kodaira-Spencer et critère de lissité.

On a déjà signalé au § 1.2 la simplification qu'apportait l'annulation de  $h^2(S, \mathcal{O}(d))$  et l'existence du morphisme  $u : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ . À partir d'un tel morphisme A. Hirschowitz définit l'application « Rank Kodaira Spencer » (voir [17]) qui offre une construction alternative de l'application  $\varphi$ , et permet d'obtenir aisément un critère de lissité pour  $F$ .

Reprenons les notations du § 1.2. Soit  $x$  un point de  $X$ ,  $U$  un voisinage affine de  $x$  sur lequel on choisit deux trivialisations de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}'$ , notées respectivement  $E \otimes \mathcal{O}_U$  et  $E' \otimes \mathcal{O}_U$  où  $E$  et  $E'$  sont deux  $k$ -espaces vectoriels de dimension respective  $e$  et  $e'$ . Ce choix permet de voir  $u$  comme une section du fibré trivial  $\mathcal{O}_U \otimes L(E, E')$ .

Notons  $B = L(E, F)$ . Le morphisme  $u$  définit une application  $\mu$  de  $X$  dans  $B$ ; nous noterons  $u_x = \mu(x)$ . La stratification  $X^i$  apparaît ainsi comme l'image inverse de la stratification de  $B$  par le rang de ses éléments.

On définit l'application « Rank Kodaira Spencer » (RKS) au point  $x$  comme le morphisme composé

$$\text{RKS}_x : T_x X \xrightarrow{T_x \mu} T_{u_x} B \xrightarrow{\sim} B \longrightarrow L(\ker(u_x), \text{coker}(u_x))$$

(la première flèche est l'application tangente à  $\mu$ , la deuxième flèche est simplement la restriction à  $\ker u_x$  suivie du quotient par  $\text{im } u_x$ ). Cette application vérifie la propriété suivante :

PROPOSITION 2.4 (voir [17], 7.7). — *En identifiant  $H^0(S_x, \mathcal{O}(\underline{d}))$  à  $\ker(u_x)$  et  $H^1(S_x, \mathcal{O}(\underline{d}))$  à  $\text{coker}(u_x)$  par la suite exacte (i), on a  $\varphi = -\text{RKS}$ .*

Remarque. — La construction donnée ici est locale. Voir [17] pour une définition plus intrinsèque.

Supposons maintenant que  $\chi = \chi(\underline{d}) \geq 1$ . Dans ce cas,  $e = e' + \chi > e'$ . Soit  $G_E$  l'espace des droites de  $E$ , et soit

$$G^1 \subset G_E \times B = \{(V, f) ; f(V) = 0\}.$$

On sait (voir, par exemple, [17]) que la variété  $G^1$  est lisse, de codimension  $e - \chi$ . De plus, le fibré normal à  $G^1$  en  $(V, f)$  s'identifie à  $L(V, E')$  et le morphisme de projection de l'espace total sur ce fibré normal s'écrit

$$\begin{aligned} T_V G_E \oplus T_f B &= L(V, E/V) \oplus L(E, E') \longrightarrow L(V, E'), \\ (\Phi, g) &\longmapsto \bar{f} \circ \Phi + g \circ \iota, \end{aligned}$$

où  $\bar{f}$  est la factorisation de  $f$  à travers le quotient de  $E$  par  $V$ , et  $\iota$  est l'injection de  $V$  dans  $E$ .

PROPOSITION 2.5 (voir [17], 3.5). — *Soient  $Y$  une sous-variété de  $X$ ,  $y$  un point lisse de  $Y$  et  $V$  une droite de  $\ker u_y$ . Le schéma  $F|_Y \subset G_E \times Y$  est lisse en  $(V, y)$ , de la bonne codimension  $e - \chi$  si et seulement si le morphisme composé suivant :*

$$T_y Y \xrightarrow{\text{RKS}} L(\ker u|_y, \text{coker } u|_y) \longrightarrow L(V, \text{coker } u|_y)$$

*est surjectif (le deuxième morphisme est la restriction à  $V$ ).*

*Preuve.* — Puisque  $F = \text{Proj Sym } \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}$  admet pour résolution

$$\mathcal{E}'^\vee \xrightarrow{u^\vee} \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{M},$$

$F$  est l'image inverse de  $G^1$  par le morphisme  $\mu \times \text{id} : G_E \times Y \rightarrow G_E \times B$ . La variété  $G^1$  est lisse de codimension  $e - \chi$ ; donc  $F|_Y$  est lisse en  $(V, y)$ , de même codimension si et seulement si le morphisme composé

$$\begin{aligned} \xi : T_V G_E \oplus T_y Y &\longrightarrow T_V G_E \oplus T_{u_y} B \longrightarrow L(V, E'), \\ (\Phi, t) &\longmapsto (\Phi, T_y \mu(t)) \longmapsto \bar{u}_y \circ \Phi + T_y \mu(t) \circ \iota \end{aligned}$$

est surjectif.

En choisissant un supplémentaire à  $\text{im}(u_y)$  dans  $E'$ , on peut écrire

$$L(V, E') \xrightarrow{\sim} L(V, \text{im}(u_y)) \oplus L(V, \text{coker}(u_y)).$$

Ceci permet de voir l'application

$$\xi : T_V G_E \oplus T_y Y \longrightarrow L(V, \text{im}(u_y)) \oplus L(V, \text{coker}(u_y))$$

comme une matrice formée de quatre blocs :  $\begin{pmatrix} \xi_{1,1} & \xi_{1,2} \\ \xi_{2,1} & \xi_{2,2} \end{pmatrix}$ .

L'application  $\xi_{2,2} : T_y Y \rightarrow L(V, \text{coker}(u_y))$ , est celle évoquée dans l'énoncé : elle est surjective par hypothèse.

L'application  $\xi_{1,2} : L(V, E/V) \rightarrow L(V, \text{coker}(u_y))$  est nulle, et on vérifie aisément que  $\xi_{1,1}$ , qui à  $\Phi \in L(V, E/V)$  associe

$$(\text{quotient par supplémentaire}) \circ \bar{u}_y \circ \Phi \in L(V, \text{im}(u_y))$$

est surjective

□

### 2.2.3. Description à l'aide du schéma de Hilbert des points.

Les résultats décrits dans les deux paragraphes précédents sont très généraux. Nous abordons maintenant des résultats plus spécifiques à notre situation. Posons

$$m = \sum_{i=1}^r \frac{1}{2} m_i (m_i + 1)$$

et notons  $\text{Hilb}^m \mathbb{P}^2$  le schéma de Hilbert des schémas de dimension zéro et de longueur  $m$  dans le plan. Il y a un morphisme naturel de  $X$  dans

$\text{Hilb}^m \mathbb{P}^2$  (l'image du point  $x$  est le schéma  $Z_x$ ). Ce morphisme induit une application linéaire sur les espaces tangents :

$$\delta : T_x X \longrightarrow T_{[Z_x]} \text{Hilb}^m \mathbb{P}^2 \simeq \text{hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{I}_{Z_x}(d), \mathcal{O}_{Z_x}(d)).$$

Par ailleurs, la suite exacte courte

$$(*) \quad 0 \rightarrow \mathcal{I}_{Z_x}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{S_x}(d) \longrightarrow \mathcal{O}_{Z_x}(d) \rightarrow 0$$

fournit le morphisme de cobord

$$\gamma : \text{hom}_{\mathbb{P}^2}(\mathcal{I}_Z(d), \mathcal{O}_Z(d)) \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(d), \mathcal{I}_Z(d)).$$

PROPOSITION 2.6. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} T_x X & \xrightarrow{\delta} \text{hom}(\mathcal{I}_{Z_x}(d), \mathcal{O}_{Z_x}(d)) & \xrightarrow{\alpha} L(H^0(\mathcal{I}_{Z_x}(d)), H^0(\mathcal{O}_{Z_x}(d))) \\ \searrow & \downarrow \gamma & \downarrow \beta \\ & \text{Ext}^1(\mathcal{I}_{Z_x}(d), \mathcal{I}_{Z_x}(d)) & \longrightarrow L(H^0(\mathcal{I}_{Z_x}(d)), H^1(\mathcal{I}_{Z_x}(d))). \end{array}$$

(Les flèches du bas définissent  $\varphi$ ,  $\alpha$  est le morphisme induit en cohomologie, et  $\beta$  est la composition par le cobord de la suite exacte longue issue de (\*)).

*Preuve.* — La commutativité du carré de droite est formelle et nous ne la vérifions pas ici.

Le morphisme  $\delta$  est connu et peut être décrit ainsi : étant donné  $t \in T_x X$ , c'est-à-dire un morphisme  $\mathbf{D} \rightarrow X$ , le faisceau  $\mathcal{I}_{Z_{\mathbf{D}}}(d)$  est plat sur  $\mathbf{D}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{P}^2$ , et  $f$  une section sur  $U$  de  $\mathcal{I}_{Z_x}(d)$ . Soit  $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)$  tel que  $f + \varepsilon g$  étende  $f$  en une section de  $\mathcal{I}_{Z_{\mathbf{D}}}(d)$ . Alors l'évaluation  $\bar{g}$  de  $g$  sur  $\mathcal{O}_{Z_x}(d)$  ne dépend pas du choix de  $g$ . On pose  $\delta_t(g) = \bar{g}$ .

On peut alors écrire un diagramme de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{I}_{Z_x}(d) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z_{\mathbf{D}}}(d) & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z_x}(d) \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow \lambda & & \downarrow \delta_t \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{I}_{Z_x}(d) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_x}(d) \rightarrow 0 \end{array}$$

où  $\lambda$  envoie une section  $f + \varepsilon g$  sur  $g$ . On vérifie aisément que ce diagramme est commutatif. Ceci montre, par définition du morphisme  $\gamma$ , que l'extension  $0 \rightarrow \mathcal{I}_{Z_x}(d) \rightarrow \mathcal{I}_{Z_{\mathbf{D}}}(d) \rightarrow \mathcal{I}_{Z_x}(d) \rightarrow 0$  est bien l'image de  $\delta_t$  par  $\gamma$ . □

2.2.4. Description à l'aide de la dérivation usuelle.

Dans le cas très particulier de notre famille  $\mathbb{P}_X^2 \rightarrow X$ , il est possible de décrire encore plus précisément le morphisme  $\delta$  de la propriété 2.6.

Soit  $x = (P_1, \dots, P_r)$  et  $\mathcal{T}$  le fibré tangent à  $\mathbb{P}^2$ . Un élément  $t$  de  $T_x X$  s'écrit  $t = (t_1, \dots, t_r)$ , où  $t_i \in T_{P_i} \mathbb{P}^2 = \mathcal{T} \otimes \mathcal{O}_{P_i}$ . Puisque le morphisme  $\mathcal{T} \otimes \mathcal{O}_{P_i^{m_i}} \rightarrow \mathcal{T} \otimes \mathcal{O}_{P_i}$  est surjectif pour tout  $i$ , on peut relever chaque  $t_i$  en un « champ de vecteurs »  $t'_i$  défini sur tout le gros point ; posons

$$t' = (t'_1, \dots, t'_r) \in \mathcal{T} \otimes \mathcal{O}_{Z_x} = \text{hom}(\Omega_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{Z_x}, \mathcal{O}_{Z_x}).$$

En composant  $t'$  avec la différentielle  $\mathcal{I}_{Z_x}/\mathcal{I}_{Z_x}^2 \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2} \otimes \mathcal{O}_{Z_x}$ , et en tensorisant par  $\mathcal{O}(d)$ , on obtient une application  $d_{t'} \in \text{hom}(\mathcal{I}_{Z_x}(d), \mathcal{O}_{Z_x}(d))$ .

PROPOSITION 2.7. — *Le morphisme  $d_{t'}$  défini ci-dessus ne dépend pas du choix de  $t'$ , et  $\delta_t = -d_{t'}$ .*

Preuve. — Puisque  $\text{hom}(\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_Z) = \bigoplus_{i=1}^r \text{hom}(\mathcal{I}_{P_i^{m_i}}, \mathcal{O}_{P_i^{m_i}})$ , le problème peut se traiter séparément en chacun des points  $P_i$ . Nous supposons qu'il y a un seul gros point  $P^m$ .

Pour prouver l'indépendance du choix du relèvement, il suffit de supposer que  $t = 0$  et montrer que  $t' = 0$ . Soit  $f = f_1 \cdots f_m \in \mathcal{I}_{P^m}$ , où  $f_j \in \mathcal{I}_P$ . Soit  $d : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \rightarrow \Omega_{\mathbb{P}^2}$ , la différentielle. On sait que  $df = \sum_{j=1}^m f_1 \cdots \hat{f}_j \cdots f_m df_j$  (la notation  $\hat{f}_j$  signifie que le terme  $f_j$  est omis) ; donc

$$d_{t'} f = \sum_{j=1}^m f_1 \cdots \hat{f}_j \cdots f_m t'(df_j).$$

Mais puisque  $t$  est nul, l'image de  $t'(df_j)$  par le morphisme  $\mathcal{O}_{P^m} \rightarrow \mathcal{O}_P$  est nul. Autrement dit,  $t'(df_j) \in \mathcal{I}_P/\mathcal{I}_P^m$ , et  $t'(df)$  qui est un produit de  $m$  éléments de  $\mathcal{I}_P$  est nul dans  $\mathcal{O}_P^m$ .

Pour l'égalité, considérons  $U = \text{Spec } k[x_1, y_1]$  un ouvert de  $X = \mathbb{P}^2$  contenant  $P$ , et  $\text{Spec } k[x, y, x_1, y_1]$  un ouvert de  $\mathbb{P}_U^2$ . Sur cet ouvert,  $\mathcal{I}_Z$  est l'idéal  $\{x - x_1, y - y_1\}^m$ . Soient  $(a, b)$  les coordonnées de  $P$  dans  $\text{Spec } k[x_1, y_1]$ . Soit  $t = \alpha \partial_x + \beta \partial_y$  un vecteur tangent en  $P$ . Le morphisme  $k[x_1, y_1] \rightarrow k[\varepsilon]/\varepsilon^2$  correspondant envoie  $x_1$  sur  $a + \alpha\varepsilon$  et  $y_1$  sur  $b + \beta\varepsilon$ . Si  $f$  appartient à  $k[x, y, x_1, y_1]$ , nous allons évaluer  $f$  dans plusieurs anneaux. Nous poserons :

$$\begin{aligned} \bar{f} &= f|_{x_1=a, y_1=b} \in k[x, y], & \tilde{f} &= f|_{P^m, x_1=a, y_1=b} \in k[x, y]/I_P^m, \\ \hat{f} &= f|_{x_1=a+\alpha\varepsilon, y_1=b+\beta\varepsilon} \in k[x, y, \varepsilon]/\varepsilon^2. \end{aligned}$$



• Supposons tout d'abord que  $m = 1$ . Soit  $f = (x - x_1)g + (y - y_1)h$  dans  $I_Z$ . On calcule

$$\dot{f} = \bar{f} + \varepsilon(-(\overline{\alpha g + \beta h}) + (x - a)\overline{\partial_{x_1} g} + (y - b)\overline{\partial_{y_1} h}).$$

Donc  $\delta_t(f) = -(\alpha g + \beta h)^\sim$  est dans  $k$ . Par ailleurs,

$$d_t(f) = (\alpha g + \beta h + (x - a)\partial_x g + (y - b)\partial_y h)^\sim = (\alpha g + \beta h)^\sim.$$

Donc  $\delta_t(f) = -d_t(f)$ .

• Supposons maintenant que  $m \geq 2$ . Par linéarité, on peut supposer que  $f$  s'écrit  $f = f_1 \cdots f_m$  où  $f_j \in \{x - x_1, y - y_1\}$ . Le calcul montre que

$$\dot{f} = \sum_{j=1}^m \bar{f}_1 \cdots \dot{f}_j \cdots \bar{f}_m.$$

Donc

$$\begin{aligned} \delta_t(f) &= \sum_{j=1}^m \tilde{f}_1 \cdots \delta_t(f_j) \cdots \tilde{f}_m = - \sum_{j=1}^m \tilde{f}_1 \cdots d_t(f_j) \cdots \tilde{f}_m \\ &= -d_{t'}(f_1 \cdots f_m) = -d_{t'} f. \end{aligned} \quad \square$$

### 2.3. Un critère de bonne spécialisation.

Dans certaines situations, il est possible de répondre aux questions posées en introduction de la partie 2. C'est l'objet du lemme 2.9, énoncé et démontré dans les deux paragraphes suivants.

#### 2.3.1. Énoncé du critère.

Fixons quelques conventions :

**DÉFINITION 2.8.** — Soit  $y$  un point (non fermé) de  $X$  et  $a \leq r$ , un entier positif. Notons abusivement  $y = (P_1, \dots, P_r)$ .

Nous dirons que les points  $P_1, \dots, P_a$ , sont libres dans le plan s'il existe une variété irréductible et localement fermée  $V$  de  $(\mathbb{P}^2)^{r-a}$  telle que  $y$  est le point générique de  $(\mathbb{P}^2)^a \times V$ .

Si  $C$  est une courbe de  $\mathbb{P}_y^2$ , nous dirons que les points  $P_1, \dots, P_a$ , sont libres sur  $C$  s'il existe une variété irréductible et localement fermée  $V$  de  $(\mathbb{P}^2)^{r-a}$  ainsi qu'un diviseur effectif relatif irréductible  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{P}^2 \times V \rightarrow V$  tel que  $y$  est le point générique de  $Y = \mathcal{C} \times_V \mathcal{C} \times_V \cdots \times_V \mathcal{C}$  (avec  $a$  produits fibrés) et  $C$  est la fibre générique de  $\mathcal{C} \times_V Y \rightarrow Y$ . Puisque  $(\mathbb{P}^2 \times V) \times_V (\mathbb{P}^2 \times V) \times_V \cdots \times_V (\mathbb{P}^2 \times V)$  est isomorphe à  $(\mathbb{P}^2)^a \times V$ , il est clair que  $Y \subset (\mathbb{P}^2)^a$ .

Soit  $x = (P_1, \dots, P_r) \in X$ ; si  $P_j$  est un point lisse sur une courbe  $C$ , on note  $P_j^C$  le point d'intersection de  $\tilde{C}$  et du diviseur exceptionnel  $E_j$  sur  $S_x$ . Si  $\mathcal{O}(\underline{d})$  est un fibré inversible de  $S_x$ , on note aussi  $\mathcal{O}(\underline{d}) - P_j^C$  le fibré  $\mathcal{I}_{P_j^C}(\underline{d})$ . Les sections globales de ce faisceau de  $S_x$  correspondent, sur le plan, aux courbes de degré  $d$ , ayant une multiplicité au moins  $m_i$  au point  $P_i$  et ayant une branche tangente à  $C$  au point  $P_j$ .

LEMME 2.9 (critère de spécialisation). — Soient  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$  dans  $\mathbb{Z}^{r+1}$  et  $a$  un entier positif. Soit  $V$  une sous-variété irréductible et localement fermée de  $(\mathbb{P}^2)^{r-a-1}$ , et  $C$  un diviseur effectif relatif irréductible  $C$  de  $\mathbb{P}^2 \times V \rightarrow V$ . On note  $x$  le point générique de  $(\mathbb{P}^2)^{a+1} \times V$  et  $y$  celui de  $Y = C \times_V C \times_V \dots \times_V C$  ( $a + 1$  produits fibrés).

On note  $C \subset \mathbb{P}_y^2$  la fibre générique de  $C \times_V Y \rightarrow Y$ , et on suppose cette courbe géométriquement irréductible et lisse, de classe  $\underline{c} \in \text{Pic}(S_y)$  et de genre  $g(\underline{c})$ . Supposons que

- 1)  $\underline{d} \cdot \underline{c} + 1 - g(\underline{c}) = -a$  (condition d'ajustement);
- 2) en position  $y$ , il y a  $g(\underline{c})$  points libres sur  $C$ , affectés de multiplicités positives;
- 3)  $m_1, \dots, m_{a+1} \geq 2$ ;
- 4)  $h^0(S, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}) - P_1^C - \dots - P_{a+1}^C)$  a la dimension attendue

$$(\chi(\underline{d} - \underline{c}) - a)^+ - 1 = \chi(\underline{d})^+ - 1.$$

Alors  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  est non spécial,  $\dim \mathcal{L}_y(\underline{d}) = \chi(\underline{d})^+ + a - 1$  et, si  $\chi(\underline{d}) \geq 1$ , la courbe  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$  se spécialise en  $\mathcal{D}_y(\underline{d})$ , et le schéma  $F$  est lisse au point générique de la fibre  $F_y$ .

Preuve. — Montrons tout d'abord que  $\dim \mathcal{L}_y(\underline{d}) = \chi^+ + a - 1$  (comme toujours,  $\chi^+ = \max(\chi(\underline{d}), 0)$ ). Sur  $S_y$ , on peut écrire une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0(S_y, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c})) \rightarrow H^0(S_y, \mathcal{O}(\underline{d})) \rightarrow H^0(\tilde{C}_y, \mathcal{O}_{\tilde{C}_y}(\underline{d})).$$

Puisqu'il y a  $g(\tilde{C})$  points  $P_i$  génériques et indépendants sur  $C$ , le fibré  $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\underline{d})$  est non spécial. Cela permet de calculer

$$h^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\underline{d})) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{C}}(\underline{d}))^+ = (\underline{d} \cdot \underline{c} + 1 - g(\tilde{C}))^+ = (-a)^+ = 0.$$

Ainsi,  $h^0(S_y, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c})) = h^0(S_y, \mathcal{O}(\underline{d}))$ . Mais d'après l'hypothèse 4, on sait que  $h^0(S_y, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c})) = h^0(S_y, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}) - P_1^C - \dots - P_{a+1}^C) + a + 1 = \chi^+ + a$ , autrement dit,  $\dim \mathcal{L}_y(\underline{d}) = \chi + a - 1$ .

Soient  $Y = (\mathbb{P}^2)^{a+1} \times V \subset X$  et  $Y^i = Y \cap X^i$  la stratification par la cohomologie de  $Y$ . D'après ce qui précède,  $y \in Y^{a-1} \setminus Y^a$ . Nous allons montrer que  $\text{codim}_y(Y^i) \geq i+2$  pour  $0 \leq i \leq a-1$ . Cela prouvera que  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  est régulier (ce qui équivaut à dire que  $Y^{-1}$  est non vide). Cela prouvera aussi que  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$  se spécialise en  $\mathcal{D}_y(\underline{d})$  : c'est la proposition 2.1.

On peut trouver un point fermé  $z = (z_1, z_2)$  de  $Y$  tel que  $C_{z_2}$  soit irréductible (et par définition,  $z_1 \in C_{z_2}^{a+1}$ ); on peut aussi choisir  $z$  en sorte que  $z_2$  soit lisse dans  $V$ , que  $h^0(S_z, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}) - P_{i_1}^{C_z} - \dots - P_{i_{a+1}}^{C_z})$  ait la dimension attendue (en particulier,  $z \in Y^{a-1} \setminus Y^a$ ), que le système  $\mathcal{O}_{\tilde{C}_z}(\underline{d})$  soit non spécial et que les composantes des strates  $Y^i$  en  $z$  soient les mêmes qu'en  $y$ . Dans ce cas,  $\text{codim}_{y,Y} Y^i = \text{codim}_{z,Y} Y^i$ . Posons  $H = (\mathbb{P}^2)^{a+1} \times z_2$ . Puisque  $\text{codim}_{z,H} Y^i \cap H \leq \text{codim}_{z,Y} Y^i$ , il suffit de montrer que  $\text{codim}_{z,Y \cap H} Y^i \cap H \geq i + 2$ .

Considérons donc un vecteur tangent  $t$  à  $H$  au point  $z$ . Dans sa décomposition en  $r$  vecteurs tangents au plan,  $t = (t_1, \dots, t_{a+1}, 0^{r-a-1})$ . Le lemme 2.10 ci-dessous nous dit que si  $t$  appartient au cône tangent à  $Y^i \cap H$  ( $i \geq 0$ ), alors on trouve au moins  $i + 2$  vecteurs  $t_i$  tangents à la courbe  $C_z$ . Cela prouve que la codimension du cône tangent à  $Y^i \cap H$  est supérieure à  $i + 2$ , comme souhaité.

Soit maintenant  $z'$  le point générique de  $F_z$ . Le lemme 2.10 montre que  $z'$  est un point lisse de  $F|_H = p^{-1}(H)$  (où  $p$  est la projection  $F \rightarrow X$ ). Nous devons montrer que  $z'$  est aussi un point lisse de  $F$ .

Soit  $q : F \rightarrow (\mathbb{P}^2)^a \times V \rightarrow V$ , le morphisme composé. Il existe un voisinage non singulier  $U$  de  $z_2$ , tel que les fibres de  $q$  au-dessus de  $U$  soient irréductibles, de dimension constante. Puisque  $U$  est non singulier,  $q$  est plat. Par ailleurs, la fibre  $q^{-1}(z_2) = F|_Z$  est lisse en  $z'$ . Ceci montre que  $F$  est lisse en  $z'$ . Le point générique  $y'$  de  $F_y$  peut se spécialiser en  $z'$ , donc  $F$  est aussi lisse en  $y'$ . □

### 2.3.2. Calcul du noyau de la dérivée cohomologique.

Pour achever la démonstration du lemme 2.9, nous devons étudier la dérivation cohomologique au point  $z \in X$ .

Pour  $1 \leq i \leq r$ , nous posons

$$Z_i = P_i^{m_i}, \quad T_i = Z_i \cap C, \quad Z'_i = (\mathcal{I}_{Z_i} : \mathcal{I}_C) \text{ (le transporteur).}$$

Ces deux derniers schémas sont respectivement appelés la *trace* et le *schéma résiduel* de  $Z_i$  sur  $C$ . (Ces définitions sont usuelles en méthode

d'Horace). Puisque les  $a + 1$  premiers points sont des points lisses de  $C$ , pour  $1 \leq i \leq a + 1$   $T_i$  est un schéma curviligne de longueur  $m_i$  sur  $C$ , et  $Z'_i = P_i^{m_i-1}$ .

Exceptionnellement, nous notons aussi

$$Z = Z_y, \quad Z' = (\mathcal{I}_Z : \mathcal{I}_C) = \bigcup_{i=1}^r Z'_i.$$

Il y a une suite exacte naturelle, dite « suite exacte résiduelle » (où  $c$  est le degré de  $C$ ) :

$$0 \rightarrow I_{Z'}(d - c) \rightarrow I_Z(d) \rightarrow I_{T,C}(d) \rightarrow 0.$$

La suite exacte résiduelle dans le plan est l'analogue de la suite exacte sur le plan éclaté. Il y a donc un isomorphisme

$$\nu : H^0(I_{Z'}(d - c)) \xrightarrow{\sim} H^0(I_Z(d)).$$

Soit  $t$  un vecteur de  $T_z X$ . Nous noterons  $\psi_t$  la composée de la dérivée cohomologique  $\varphi_t$  et de l'isomorphisme  $\nu$  :

$$\psi_t : H^0(I_{Z'}(d - c)) \xrightarrow{\nu} H^0(I_Z(d)) \xrightarrow{\varphi_t} H^1(I_Z(d)).$$

LEMME 2.10. — *Sous les hypothèses du lemme 2.9, soit  $z$  une spécialisation de  $y$  telle que  $h^0(S_z, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}) - P_{i_1}^C - \dots - P_{i_{a+1}}^C)$  a la dimension attendue, et que  $\mathcal{O}_{\tilde{C}_z}(\underline{d})$  est non spécial. Soit  $t$  un vecteur tangent à  $X$  en  $z$  tel que  $t = (t_1, \dots, t_{a+1}, 0^{r-a-1})$ .*

a) *Si, pour  $b \leq a$ ,  $t_1, \dots, t_b$  sont transverses à  $C$  et  $t_{b+1}, \dots, t_{a+1}$  sont tangents à  $C$ , alors,*

$$\ker \psi_t = H^0(\mathcal{I}_{Z' \cup T_1 \cup \dots \cup T_b}(d - c)).$$

*En conséquence,  $\dim \ker \psi_t = \chi(\underline{d}) + a - b$  et  $t$  appartient au cône tangent à  $X^{-1} \setminus X^{a-b}$ .*

b) *Si tous les vecteurs  $t_i$  sont transverses à  $C$ ,  $\dim \ker \psi_t = \chi(\underline{d})$  et  $t$  appartient au cône tangent à  $X^{-1} \setminus X^0$ .*

c) *Soient  $s$  une section de  $H^0(\mathcal{I}_{Z'}(d - c))$ ,  $D$  le diviseur correspondant et  $V$  la droite de  $H^0(\mathcal{I}_{Z'}(d - c))$  engendrée par  $s$ . Si  $D$  n'a aucune branche tangente à  $C$  en  $P_1, \dots, P_a$ , alors l'application*

$$T_z((\mathbb{P}^2)^{a+1} \times z_2) \rightarrow L(V, H^1(I_Z(d)))$$

*est surjective. En conséquence,  $F|_{(\mathbb{P}^2)^{a+1} \times z_2}$  est lisse au point générique de  $F_z$ .*

*Preuve.* — a) Il suffit de prouver que le noyau de  $\psi_t$  est bien celui annoncé. L'affirmation qui suit, découle de la proposition 2.3. Choisissons  $t' = (t'_1, \dots, t'_{a+1}, 0^{r-a-1}) \in \text{Hom}(\Omega_{\mathbb{P}^2}, \mathcal{O}_Z)$  qui relève  $t$  (voir la proposition 2.6).

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^0(\mathcal{I}_{Z'}(d-c)) & \xrightarrow{\nu} & H^0(\mathcal{I}_Z(d)) & & & & \\
 & & \downarrow d_{t'} & \searrow \varphi^t & & & \\
 H^0(\mathcal{I}_Z(d)) & \hookrightarrow & H^0(\mathcal{O}(d)) & \xrightarrow{\text{ev}} & H^0(\mathcal{O}_Z(d)) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{I}_Z(d)).
 \end{array}$$

Par définition,  $\ker \psi_t = \{h \in H^0(\mathcal{I}_{Z'}(d-c)); d_{t'} \circ \nu(h) \in \text{im ev}\}$ .

Soient  $\ell$  une équation de  $C$  et  $h$  une section de  $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_{Z'}(d-c))$ . Par définition de  $d_{t'}$  et  $\nu$ , on a

$$d_{t'} \circ \nu(h) = d_{t'}(\ell h) = \bigoplus_{i=1}^r (d_{t'_i}(h)\ell + h d_{t'_i}(\ell)).$$

Vu le choix des vecteurs  $t_i$ , on constate que  $d_{t'_i}(\ell h)$  s'annule sur  $Z_i$  pour  $i > a + 1$ , sur  $Z'_i \cup T_i$  pour  $b < i \leq a + 1$  et sur  $Z'_i$  pour  $1 \leq i \leq b$ . En particulier, on est assuré que  $d_{t'_{a+1}}(\ell h)$  s'annule sur  $T_{a+1}$ . On applique le lemme 2.12, qui affirme que

$$d_{t'}(\ell h) \in \text{im}(ev) \iff d_{t'}(\ell h) \text{ s'annule sur } T_i, \forall i, 1 \leq i \leq b.$$

Mais, pour  $1 \leq i \leq b$ , puisque  $t_i$  est transverse à  $C$ ,  $d_{t'_i}(\ell)$  est inversible. Donc  $d_{t'_i}(h)\ell + h d_{t'_i}(\ell) = h d_{t'_i}(\ell)$  s'annule sur  $T_i$  si et seulement si  $h$  s'annule sur  $T_i$ . Ainsi,  $d_{t'} \circ \nu(h) \in \text{im}(ev)$  si et seulement si  $h$  appartient à  $H^0(\mathcal{I}_{Z' \cup T_1 \cup \dots \cup T_b}(d-c))$ .

b) Pour démontrer ce point, nous allons simplement écrire l'application linéaire  $\psi_t$  dans une base bien choisie. Soit  $i, 1 \leq i \leq (a + 1)$ . Posons  $\tau_i = (t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{a+1}, 0^{r-a-1})$ , un élément de  $T_x X$ . Soit  $e_i$  un élément de  $\ker \psi_{\tau_i}$  n'appartenant pas à l'espace  $H^0(\mathcal{I}_{(Z' \cup T_1 \cup \dots \cup T_{a+1})}(d))$ . Choisissons aussi une base de  $H^0(\mathcal{I}_{Z' \cup T_1 \cup \dots \cup T_{a+1}}(d))$ ,  $e_{a+2}, \dots, e_{\chi+a}$ . D'après le point a), les  $e_i$  forment une base de  $H^0(\mathcal{I}_{Z'}(d-c))$ .

Pour  $1 \leq i \leq a$ , posons aussi  $f_i = \psi_{\tau_{a+1}}(e_i)$ . Les  $f_i$  forment une base de  $H^1(\mathcal{I}_Z(d))$ .

On remarque que  $\psi_t(e_i) - \psi_{\tau_{a+1}}(e_i) = \psi_{(0, \dots, 0, t_{a+1}, 0, \dots, 0)}(e_i) = 0$  (en effet, pour  $1 \leq i \leq a$ ,  $d_{t_{a+1}}(\ell e_i)$  s'annule sur  $T_{a+1}$ ). Donc  $\psi_t(e_i) = f_i$  et, dans la base choisie, la matrice  $(\chi + a, a)$  de  $\psi_t$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

où les étoiles désignent des scalaires non déterminés. On constate ainsi que  $\psi_t$  est de rang  $a$ , comme annoncé.

c) Choisissons, en chaque point  $P_i$  un vecteur  $t_i$  de  $T_{P_i}\mathbb{P}^2$  transverse à  $C$ . Nous noterons  $\tau_i \in T_y X$  les vecteurs  $(0^{a-i-1}, t_i, 0^{r-i})$ . Nous allons montrer que les  $a$  applications linéaires  $\psi_{\tau_i}$  restreintes à  $V$  sont indépendantes. Puisque  $\dim H^1(S_y, \underline{d}) = a$ , cela suffit à démontrer le lemme.

Supposons qu'il existe  $a$  scalaires  $\ell_1, \dots, \ell_a$  tels que l'on ait  $\ell_1\psi_{\tau_1} + \dots + \ell_a\psi_{\tau_a}(s) = 0$ . D'après les points a) et b) ci-dessus,  $D$  possède une branche tangente à  $C$  en chaque point  $P_i$  tel que  $\ell_i$  est non nul. En conséquence, tous les  $\ell_i$  sont nuls. □

LEMME 2.11. — *La courbe  $C$  est une composante fixe du système linéaire*

$$H^0(\mathcal{I}_{Z'_1 \cup Z'_2 \cup \dots \cup (Z'_{a+1} \cup T_{a+1}) \cup Z_{a+2} \cup \dots \cup Z_r}(d)).$$

Preuve. — Éclatons le plan aux  $r$  points  $P_1, \dots, P_r$ . Sur la surface rationnelle  $S_y$  obtenue, la transformée stricte  $\tilde{C}$  de  $C$  est lisse, et il suffit de montrer que  $\tilde{C}$  est une composante fixe du système  $\mathcal{L}_z(\mathcal{O}(d; m_1 - 1, \dots, m_{a+1} - 1, m_{a+2}, \dots, m_r) - P_{a+1}^C)$ .

Posons  $\underline{d}' = (d; m_1 - 1, \dots, m_{a+1} - 1, m_{a+2}, \dots, m_r)$ . Il y a une suite exacte naturelle :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(S, \mathcal{O}(\underline{d}' - \underline{c})) &\xrightarrow{+\tilde{C}} H^0(S, \mathcal{O}(\underline{d}') - P_{a+1}^C) \\ &\rightarrow H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}(\underline{d}')|_{\tilde{C}} - P_{a+1}^C). \end{aligned}$$

Puisque  $\tilde{C}$  est lisse, le théorème de Riemann-Roch nous dit que

$$\chi(\tilde{C}, \mathcal{O}(\underline{d}')|_{\tilde{C}} - P_{a+1}^C) = \underline{d}' \cdot \underline{c} - 1 + 1 - g(\tilde{C}) = \underline{d} \cdot \underline{c} + a + 1 - g(\tilde{C}) = 0.$$

De plus, il y a  $g(\tilde{C})$  points génériques affectés de coefficients non nuls sur  $C$ . Donc  $\mathcal{O}(\underline{d}')|_{\tilde{C}} - P_{a+1}^C$  est non spécial sur  $\tilde{C}$ , et n'a pas de section globale. La première flèche est donc un isomorphisme, comme souhaité. □

LEMME 2.12. — Soit  $h \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_Z(d)) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{Z_i}(d))$  tel que  $h$  s'annule sur  $Z'_1 \cup \dots \cup Z'_{a+1} \cup Z_{a+2} \cup \dots \cup Z_r$ . Si  $h$  s'annule sur  $T_{a+1}$  alors,

$$h \in \text{im}(\text{ev}) \iff h \text{ s'annule sur } T_i, \forall i, 1 \leq i \leq a.$$

Preuve. — Implication  $\Rightarrow$ . D'après le lemme précédent, si  $h \in \text{im}(\text{ev})$  est l'image d'un élément de  $f$  de  $H^0(\mathcal{O}(d))$ ,  $f$  s'annule sur la courbe  $C$  tout entière. En conséquence,  $h$  s'annule sur toutes les traces  $T_i$ .

Implication  $\Leftarrow$ . Il suffit de calculer les dimensions des espaces vectoriels en jeu. Posons  $A = H^0(\mathcal{O}_Z(d))$ ,  $B \subset A$  l'ensemble des fonctions de  $A$  nulles sur  $Z'_1 \cup \dots \cup Z'_a \cup (Z'_{a+1} \cup T_{a+1}) \cup Z_{a+2} \cup \dots \cup Z_r$ , et  $B_0 \subset B$  l'ensemble des fonctions de  $B$  qui s'annulent aussi sur  $T_1 \cup \dots \cup T_a$ .

L'implication précédente nous dit que  $\text{im}(\text{ev}) \cap B \subset B_0$ . Puisque  $h^1(\mathcal{I}_Z(d)) = a$ ,  $\dim \text{im}(\text{ev}) = \dim(A) - a$ . Par suite,  $\dim(\text{im}(\text{ev}) \cap B) \geq \dim(B) - a = \dim(B_0)$  et  $\text{im}(\text{ev}) \cap B = B_0$ .  $\square$

### 3. Le lemme d'Horace géométrique.

#### 3.1. Énoncé et démonstration du lemme.

Nous utilisons les conventions du lemme 2.9.

LEMME 3.1 (Horace géométrique). — Soient  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$  appartenant à  $\mathbb{Z}^{r+1}$  et  $x, y$ , deux points de  $X$  tels que  $x$  se spécialise en  $y$ . Soient  $C$  une courbe de  $\mathbb{P}_y^2$  et  $\tilde{C}_y$  sa transformée stricte sur  $S_y$ . On suppose  $\tilde{C}_y$  géométriquement irréductible et lisse, de classe  $\underline{c} \in \text{Pic}(S_y)$  et de genre  $g(\underline{c})$ .

• Dimension et spécialisation. Supposons que :

- 1)  $\underline{d} \cdot \underline{c} + 1 - g(\underline{c}) = -a$  où  $a \geq 0$  (condition d'ajustement);
- 2) en position  $y$ , il y a  $g(\underline{c})$  points libres sur  $C$ , affectés de multiplicités positives;
- 3) si  $a \geq 1$ , il y a  $a + 1$  points  $P_{i_1}, \dots, P_{i_{a+1}}$ , affectés de multiplicités supérieures à un, tels que au point  $x$ , ces  $a + 1$  points sont libres dans le plan  $\mathbb{P}^2$ , et au point  $y$ , ces  $a + 1$  points sont libres sur  $C$ ;
- 4) si  $a = 0$ ,  $h^0(S, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}))$  a la dimension attendue  $\chi(\underline{d} - \underline{c}) = \chi(\underline{d})$ ; si  $a \geq 1$ ,  $h^0(S, \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}) - P_{i_1}^C - \dots - P_{i_{a+1}}^C)$  a la dimension attendue  $\chi(\underline{d} - \underline{c}) - a - 1 = \chi(\underline{d}) - 1$ .

Alors  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  est non spécial et si  $\chi(\underline{d}) \geq 1$ ,  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$  se spécialise en  $\mathcal{D}_y(\underline{d})$ .

- Irréductibilité. Si, de plus,  $\chi(\underline{d}) \geq 1$  et
- 5) si  $a = 0$ , la classe  $\underline{c}$  n'est pas effective en position  $x$ ;
- 6)  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$  est géométriquement irréductible;

alors  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$  est géométriquement irréductible.

- Lissité. Si, enfin,
- 7) si  $a = 0$ ,  $y$  est normal dans l'adhérence de  $x$ ;
- 8)  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$  rencontre  $\tilde{C}_y$  transversalement;
- 9)  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c}) \cap \tilde{C}_y$  est irréductible (pas géométriquement);
- 10)  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$  est lisse;

alors  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$  est lisse.

*Preuve.* — Supposons tout d'abord que  $a \geq 1$ . On peut supposer que les  $a + 1$  points de l'hypothèse 3 sont les premiers points  $P_1, \dots, P_{a+1}$ . Alors  $x = (x_1, x_2)$  est le point générique de  $(\mathbb{P}^2)^{a+1} \times V$  et  $y = (y_1, y_2)$  est celui de  $C^{a+1} \times W$ , où  $V$  et  $W$  sont deux sous-variétés de  $(\mathbb{P}^2)^{r-a-1}$  ( $W \subset V$ ). On effectue la spécialisation en deux temps, en spécialisant d'abord  $x$  en  $z = (x_1, y_2)$ , puis en  $y = (y_1, y_2)$ . On note  $Y$  l'adhérence de  $x$  dans  $X$ .

Il suffit de montrer que  $\mathcal{L}_z(\underline{d})$  est régulier, et que  $\mathcal{D}_z(\underline{d})$  est géométriquement irréductible et lisse. Par semi-continuité, si  $\mathcal{L}_z(\underline{d})$  est régulier, il existe un ouvert  $U$  de  $Y$  contenant  $z$ , tel que les fibres de  $F \rightarrow X$  soient de dimension constante sur  $U$ . Le schéma  $F|_U$  est donc irréductible et la courbe  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$  se spécialise en  $\mathcal{D}_z(\underline{d})$ . Elle est alors irréductible et lisse, comme cette dernière.

Notons  $\eta$ , le point générique de  $F_z$ , et  $t$  celui de  $F_y$ . Les hypothèses 1 à 4 permettent d'appliquer le lemme 2.9 pour la spécialisation de  $z$  à  $y$ . On en déduit que  $\mathcal{L}_z(\underline{d})$  est régulier, que  $t$  est une spécialisation de  $\eta$  et est un point lisse de l'adhérence de  $\eta$  dans  $F$ . Posons  $T$  le localisé en  $t$  de l'adhérence de  $\eta$ . Le schéma  $T$  paramètre le diviseur relatif universel de classe  $\underline{d}$  :  $\mathcal{Q} \subset S_T \rightarrow T$ . Par définition,  $\mathcal{Q}_\eta = \mathcal{D}_z(\underline{d})$  et  $\mathcal{Q}_t = \mathcal{D}_z(\underline{d} - \underline{c}) \cup \tilde{C}_y$ .

Si  $\underline{c}$  est effective en  $z$ , soit  $C'$  un diviseur de  $S_z$  de classe  $\underline{c}$ . La suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}) \rightarrow \mathcal{O}(\underline{d}) \rightarrow \mathcal{O}_{C'}(\underline{d}) \rightarrow 0$  nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{O}(\underline{d})) &\geq h^0(\mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c})) \geq \chi(\underline{d} - \underline{c}) \\ &= \chi(\underline{d}) - \chi(\mathcal{O}_{C'}(\underline{d})) = \chi(\underline{d}) + a > \chi(\underline{d}). \end{aligned}$$

Ceci est impossible puisque  $\mathcal{L}_z(\underline{d})$  est régulier.



Ainsi,  $\underline{c}$  n'est pas effective en  $z$ , et on peut appliquer le lemme 3.3 pour prouver que la courbe  $\mathcal{D}_z(\underline{d})$  est géométriquement irréductible.

Maintenant, puisque  $\mathcal{D}_z(\underline{d})$  est géométriquement irréductible, et que  $t$  est lisse dans  $T$ , on peut appliquer le lemme 3.4. Cela montre que la courbe  $\mathcal{D}_z(\underline{d})$  est lisse.

Si  $a = 0$ , on sait que  $\mathcal{L}_y(\underline{d})$  est régulier (considérer la suite exacte sur  $S_y : 0 \rightarrow \mathcal{O}(\underline{d} - \underline{c}) \rightarrow \mathcal{O}(\underline{d}) \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\underline{d}) \rightarrow 0$ ). Sur un ouvert  $U$  de  $Y$  contenant  $y$ , la dimension des fibres de  $F \rightarrow Y$  est donc constante, et le point générique de  $F_y$ ,  $t$ , est une spécialisation du point générique de  $F_x$ ,  $\eta$ . On applique alors les lemmes 3.3 puis 3.4 où  $T$  est le localisé de  $F|_Y$  en  $t$ .  $\square$

*Terminologie.* — La courbe  $C$  sera appelée la courbe *exploitée*. La classe  $\underline{d} - \underline{c}$ , le système  $\mathcal{L}_y(\underline{d} - \underline{c})$  et la courbe  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$  seront respectivement appelés classe, système et courbe *résiduelle*. Le schéma  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c}) \cap \tilde{C}_y$  sera appelé *intersection résiduelle*.

*Remarque 3.2.* — a) Si l'on souhaite seulement prouver que  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  a la dimension attendue, il suffit de considérer  $a$  points dans l'hypothèse 3. (C'est le lemme d'Horace différentiel usuel; voir [2].)

b) Si  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c})$  n'est pas irréductible mais s'écrit  $\mathcal{D}_y(\underline{d} - \underline{c}) = b_1 F_1 \cup \dots \cup b_\ell F_\ell$  (où les  $F_i$  sont géométriquement irréductibles), on peut remplacer les hypothèses 5 et 6 par : pour toute décomposition de  $\mathcal{D}_y(\underline{d})$  en deux composantes, la classe de l'une de ces deux composantes n'est pas effective au dessus du point  $x$ . (On modifie légèrement le lemme d'irréductibilité 3.3.)

Les deux lemmes suivants s'inspirent de résultats similaires de [4].

**LEMME 3.3.** — Soit  $\mathcal{Q} \subset S_T \rightarrow T$  un diviseur relatif effectif de classe  $\underline{d}$  sur le spectre d'un anneau local intègre, noëthérien, de point générique  $\eta$  et de point spécial  $t$ . Supposons que  $\mathcal{Q}_t = R_t \cup R'_t$  où  $R_t$  et  $R'_t$  sont deux courbes géométriquement irréductibles et réduites de classes respectives  $\underline{r}$  et  $\underline{r}'$ . Si l'une des deux classes  $\underline{r}$  ou  $\underline{r}'$  n'est pas effective en  $\eta$ , alors  $\mathcal{Q}_\eta$  est géométriquement irréductible et réduite.

*Preuve.* — Supposons que  $T = \text{Spec } A$ ; soit  $\mathcal{M}$  l'idéal maximal de  $A$  et  $K$  son corps des fractions. Notons  $K'$  la clôture algébrique de  $K$ , et  $A'$  la clôture intégrale de  $A$  dans  $A'$ . On sait qu'il existe un idéal maximal  $\mathcal{M}'$  de  $A'$  tel que  $A \cap \mathcal{M}' = \mathcal{M}$ . Ainsi, quitte à faire le changement de base

$\text{Spec } A' \rightarrow \text{Spec } A$ , remplacer  $\eta$  par le point générique de  $A'$  et remplacer  $t$  par  $\mathcal{M}'$ , il suffit de montrer que  $\mathcal{Q}_\eta$  est irréductible et réduit.

Si ce n'est pas le cas, notons  $\mathcal{Q}_\eta = G_\eta \cup G'_\eta$  (les unions sont ici schématiques). Soit  $G$ , l'adhérence de  $G_\eta$  dans  $\mathcal{Q}$ . Le morphisme  $G \rightarrow T$  est projectif et son image contient le point générique de  $T$ ; il est donc surjectif, et toutes ses fibres sont de dimension 1. Par définition,  $G \subset S_T$  est un diviseur relatif effectif de  $S_T \rightarrow T$ ; de même pour  $G'$ . Au point  $t$ , on obtient  $\mathcal{Q}_t = G_t \cup G'_t = R_t \cup R'_t$ . Puisque  $R_t$  et  $R'_t$  sont géométriquement irréductibles et réduites on en déduit que (par exemple)  $G_t = R_t$  et  $G'_t = R'_t$ . Mais alors  $R_\eta$  et  $R'_\eta$  sont de classes  $\underline{r}$  et  $\underline{r}'$ , qui sont ainsi toutes deux effectives au point  $\eta$  □

LEMME 3.4. — Soit  $\mathcal{Q} \rightarrow T$  une famille plate et projective de courbes sur le spectre d'un anneau local intègre, noethérien, sur un corps de caractéristique 0, de point générique  $\eta$  et de point spécial  $t$ . On suppose que  $T$  est normal (ou géométriquement unibranche, voir [13], 6.15), que la fibre générique  $\mathcal{Q}_\eta$  est géométriquement irréductible et que la fibre spéciale  $\mathcal{Q}_t$  admet deux composantes géométriquement irréductibles,  $R_t$  et  $R'_t$ . Si  $R_t$  et  $R'_t$  sont lisses, transverses, et si  $R_t \cap R'_t$  est irréductible, alors  $\mathcal{Q}_\eta$  est lisse.

Preuve. — Supposons  $\mathcal{Q}_\eta$  singulière et notons  $Z_\eta$  son lieu singulier. Posons  $Z$  l'adhérence de  $Z_\eta$  dans  $\mathcal{Q}$ , et  $Z_t$  la fibre de  $Z$  au-dessus de  $t$ . Le fermé  $Z_t$  est non-vide et est contenu dans le lieu singulier de  $\mathcal{Q}_t$ , c'est-à-dire  $R_t \cap R'_t$ . Ceci montre que  $Z_t$  est de dimension 0 sur le corps résiduel de  $k(t)$  et, puisque  $R_t \cap R'_t$  est irréductible,  $Z_t = R_t \cap R'_t$ .

En particulier, le morphisme  $g : Z \rightarrow T$  est non ramifié au-dessus de  $t$  ( $R_t \cap R'_t$  est le spectre d'un corps, extension finie séparable de  $k(t)$ ). Mais puisque l'anneau  $T$  est normal (ou géométriquement unibranche), le théorème 18.10.1 de [14], montre que  $g$  est en fait étale au-dessus de  $t$  (donc au-dessus de  $T$ ).

Soit maintenant  $k' \supset k(t')$ , une extension algébrique finie de  $k(t')$  telle que, au-dessus de  $t' = \text{Spec } k'$  les nœuds de  $\mathcal{Q}_{t'}$  soient  $k' = k(t')$ -rationnels. Ils sont donc tous distincts. Si  $(A, \mathcal{M})$  est l'anneau local tel que  $T = \text{Spec } A$ , il existe un anneau local intègre  $(A', \mathcal{M}')$ , extension plate, entière de  $A$  tel que  $A'/\mathcal{M}' = k(t')$ . On note  $T' = \text{Spec } A'$ , et on considère la courbe  $\mathcal{Q}_{T'}$  sur cette nouvelle base, ainsi que le lieu singulier  $Z_{T'}$ .

On sait que  $Z_{t'} = R_{t'} \cap R'_{t'}$ . On souhaite éclater la variété  $Z_{T'}$ . Afin

de s'assurer que cet éclatement commute au changement de base, étudions les voisinages infinitésimaux de  $Z_{T'}$  :

Soit  $z \in Z_{t'}$  un point singulier (nodal) de  $Q_{t'}$ . Soit  $\widehat{O}_{Q_{T'},z}$  le voisinage formel de  $z$  dans  $Q_{T'}$ . Notons aussi  $A'_m = \mathcal{O}_{T',t'}/\mathcal{I}_{T',t'}^m$ , l'algèbre artinienne définissant le  $m$ -ième voisinage infinitésimal de  $t'$  dans  $T'$ . Cette algèbre artinienne paramètre la déformation du noeud  $z$ . D'après [7], il existe un morphisme de  $h : k(t')[[s]] \rightarrow A'_m$  tel que

$$\widehat{O}_{Q_{T'},z} \xrightarrow{\sim} A'_m \otimes_h k(t')[[u, v, s]]/(uv - s).$$

Mais puisque  $Z$  est étale sur  $A'_m$ , on a en fait  $\widehat{O}_{Q_{T'},z} \xrightarrow{\sim} A'_m[[u, v]]/(uv)$ . Par suite, le  $n$ -ième voisinage infinitésimal de  $Z_{T'}$  restreint à  $A'_m$  vaut  $\bigcup_{z_i \in Z_{t'}} \text{Spec } A'_m[u_i, v_i]/(u_i v_i, (u_i, v_i)^n)$ . Ainsi,  $Z_{T'}$  est plat au-dessus de tous les voisinages  $A'_m$ . D'après le critère local de platitude, il est plat au-dessus de  $T'$ .

Considérons maintenant l'éclatement  $\widetilde{Q}$  de  $Q_{T'}$  le long de  $Z_{T'}$ . D'après le théorème 19.4.6 de [14] le schéma  $\widetilde{Q}$  obtenu est plat sur  $Q$  et cet éclatement commute au changement de base. En particulier,  $\widetilde{Q}|_{t'} = \widetilde{Q}_{t'}$ . Or,  $Z_{t'} = R_{t'} \cap R'_{t'}$  est une union de noeuds disjoints. Donc  $\widetilde{Q}_{t'}$  a deux composantes connexes. En revanche, puisque  $\widetilde{Q}_\eta$  est irréductible, elle n'a qu'une seule composante connexe.

Notons maintenant  $G \rightarrow T$  le morphisme fini obtenu par factorisation de Stein de  $\widetilde{Q} \rightarrow T$ . Puisque le morphisme  $\widetilde{Q} \rightarrow T$  est plat, il est universellement ouvert, et  $G \rightarrow T$  est aussi universellement ouvert. Notons  $U = G \times_T G \setminus \Delta$  l'ouvert de  $G \times_T G$  des points hors de la diagonale. Si  $g_t^1$  et  $g_t^2$  sont les deux points distincts de  $G$  au-dessus du point spécial  $t$ , le point  $g_1 \times g_2$  appartient à  $U$ . L'ouvert  $U$  est donc non vide et se projette sur un ouvert de  $T$ . En conséquence, il existe un point  $g_\eta^1 \times g_\eta^2$ , tel que  $g_\eta^1 \neq g_\eta^2$ , qui se projette sur  $\eta$ . Ceci est impossible. □

### 3.2. Sur les hypothèses du lemme d'Horace géométrique.

L'une des conditions les plus délicates à obtenir pour appliquer 3.1 est la condition d'irréductibilité de l'intersection résiduelle (hypothèses 8 et 9). Nous donnons ici deux lemmes pour vérifier cette hypothèse dans des cas simples. Nous donnons ensuite une remarque utile, pour prouver qu'une courbe est lisse et vérifier ainsi l'hypothèse 10.

LEMME 3.5. — *Soit  $C$  une courbe irréductible sur une surface lisse  $S$ . Soit  $D$  la courbe générique d'un système linéaire sans point base sur  $C$ . Alors  $D$  rencontre  $C$  transversalement et  $D \cap C$  est irréductible.*

*Preuve.* — La transversalité est immédiate : il suffit d'appliquer le théorème de Bertini au système  $|\mathcal{O}(D)|$  restreint à  $C$ .

Soit  $V = \mathbb{P}(S, \mathcal{O}(D))$ , qui paramètre le diviseur relatif  $\mathcal{D} \subset S \times V$  sur  $V$  ( $D$  est la fibre générique de  $\mathcal{D} \rightarrow V$ ). Il s'agit de montrer que  $I = \mathcal{D} \cap C \times V$  est irréductible. Mais, puisque  $|\mathcal{O}(D)|$  est sans point base sur  $C$ , les fibres de la projection  $I \rightarrow C$  ont toutes la dimension  $\dim V - 1$ . La variété  $I$  est donc irréductible. □

Pour montrer qu'un pinceau est sans point base sur une courbe, nous emploierons parfois le résultat suivant :

LEMME 3.6. — Soient  $x, y$  deux points de  $X$  tels que  $x$  se spécialise en  $y$ . Soient  $C$  une courbe irréductible de  $S_x^r$  et  $D$  la courbe générique d'un pinceau  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  de  $S_x$ . Soit  $D \cdot C = n \geq 1$ , le nombre d'intersections de  $D$  et  $C$ . Si

- la dimension de  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  n'augmente pas lors de la spécialisation ;
- la courbe  $C$  se spécialise en une union de  $n$  courbes irréductibles,  $C = C_1 \cup \dots \cup C_n$ , de classes respectives  $\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n$  sur  $S_y$  telles que  $\underline{c}_i \cdot \underline{d} = 1$  ou 0 ;
- pour tout  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) le système  $\mathcal{L}_y(\underline{d} - \underline{c}_i)$  est vide ;

alors  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  est sans point base sur  $C$ .

*Preuve.* — Il suffit de montrer qu'en position spéciale,  $\mathcal{L}_y(\underline{d})$  est sans point base sur chaque courbe  $C_i$ . Supposons donc que la courbe  $C_i$  contienne un point base pour le pinceau  $\mathcal{L}_y(\underline{d})$ . Deux cas peuvent se présenter :

Soit  $C_i$  est une composante fixe de  $\mathcal{L}_y(\underline{d})$ . Dans ce cas, la classe  $\underline{d} - \underline{c}_i$  est effective. Ce cas est exclu par hypothèse.

Soit  $C_i$  contient un unique point base,  $Q$  (car l'intersection vaut  $\underline{c}_i \cdot \underline{d} = 1$ ). Dans ce cas, le pinceau  $\mathcal{L}_y(\underline{d})$  induit donc un morphisme de degré zéro :  $C_i \setminus Q \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Puisque ce morphisme est de degré zéro, il envoie  $C_i - Q$  sur un unique point de  $\mathbb{P}^1$ . En conséquence,  $C_i$  est contenue dans l'une des fibres du pinceau, et  $\underline{d} - \underline{c}_i$  est une classe effective de  $S_y$ . Cette situation est impossible par hypothèse. □

LEMME 3.7. — Soit  $D$  la courbe générique d'un système linéaire de dimension supérieure ou égale à 1 (noté  $|D|$ ) sur une surface lisse  $S$ . Si  $D$  est réduite et irréductible, et si  $D^2 \leq 3$ , alors  $D$  est lisse.

*Preuve.* — D'après le théorème de Bertini, la courbe générique  $D$  est lisse en dehors des points bases de  $|D|$ . Supposons que  $D$  soit singulière en l'un de ces points bases,  $Q$ . Choisissons  $D_1$  et  $D_2$  deux diviseurs irréductibles et distincts de  $|D|$  (de tels diviseurs existent car  $D$  est irréductible). Alors,  $D^2 = D_1 \cdot D_2$  est la colongueur du lieu schématique  $D_1 \cap D_2$ . Puisque  $D_1$  et  $D_2$  sont tous deux singuliers en  $P$ , cette colongueur est supérieure à 4, contrairement aux hypothèses.  $\square$

## 4. Application : courbes de genres 1 à 4.

Une première application du lemme 3.1 est l'étude des courbes de bas genres sur les surfaces rationnelles génériques. Les résultats de S. Bossini [4], et ceux obtenus ici se complètent pour donner le théorème suivant :

**THÉORÈME 1.** — *Soient  $x$  le point générique de  $(\mathbb{P}^2)^r$  et  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}^{r+1}$  tels que  $m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$  et  $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ . Si  $\chi(\underline{d}) \geq 1$  et  $0 \leq g(\underline{d}) \leq 4$  alors le système  $\mathcal{L}_x(\underline{d})$  est régulier, et  $\mathcal{D}_x(\underline{d})$  est géométriquement irréductible et lisse (sauf si  $\underline{d} = (3n; n^9)$  pour  $n \geq 2$ , auquel cas l'unique courbe du système est  $n$  fois le diviseur anticanonique).*

### 4.1. Liste des classes adéquates.

Une classe *adéquate* est une classe  $\underline{d} = (d; m_1, \dots, m_r)$  telle que  $m_1 \geq \dots \geq m_r \geq 1$  et  $d \geq m_1 + m_2 + m_3$ . Dans [4], S. Bossini montre que l'ensemble des classes adéquates de dimension attendue positive et de genre fixé  $g$  (supérieur ou égal à 2) est fini. La démonstration du théorème 1 consiste donc à traiter un nombre fini de courbes, dont il faut démontrer l'irréductibilité et la lissité.

S. Bossini dénombre 4 classes de genre 2 et 10 de genre 3. Il étudie ensuite toutes ces classes de genre inférieur ou égal à 3, sauf l'unique classe  $(18; 6^8, 5, 3)$  de plus haut degré et de genre 3, que l'absence de lemme différentiel ne lui permet pas de traiter. Cette classe est étudiée par l'auteur dans [19].

La liste (table 1) de toutes les classes de genre 4 a été obtenue à l'aide d'un algorithme (programmé en langage C). Ces classes sont au nombre de 26.

Nous ne traiterons ici que le cas de la courbe de plus grand degré, de classe  $(30; 10^8, 9, 4)$ . Les autres classes sont étudiées dans [19] (voir aussi [16] pour la classe  $(21; 7^6, 6^4)$ , traitée à part).

Classe $(\underline{d})$	$\chi(\underline{d})$	Classe $(\underline{d})$	$\chi(\underline{d})$	Classe $(\underline{d})$	$\chi(\underline{d})$
$(5; 2^2)$	15	$(9; 3^6, 2^6)$	1	$(16; 6, 5^8, 4)$	2
$(6; 4)$	18	$(10; 4, 3^8, 2^2)$	2	$(18; 6^8, 5, 2^2)$	1
$(6; 2^6)$	10	$(12; 4^8, 3)$	5	$(18; 6^8, 4^2)$	2
$(7; 5, 2)$	18	$(12; 4^8, 2^3)$	2	$(21; 7^8, 6, 3)$	2
$(7; 3, 2^8)$	6	$(12; 4^7, 3^3)$	3	$(21; 7^6, 6^4)$	1
$(7; 2^{11})$	3	$(12; 4^6, 3^5)$	1	$(22; 8, 7^8, 5)$	1
$(8; 4, 2^{11})$	2	$(13; 5, 4^8, 3, 2)$	1	$(24; 8^8, 7, 5)$	1
$(9; 3^8)$	7	$(15; 5^8, 4, 2)$	3	$(30; 10^8, 9, 4)$	1
$(9; 3^7, 2^3)$	4	$(15; 5^8, 3^2, 2)$	1		

Table 1. Les classes de genre 4

### 4.2. La courbe de plus haut degré.

Nous adoptons les conventions suivantes :

Nous désignons par  $x_1, x_2, \dots$  les spécialisations successives du point générique  $x_0$  de  $X$ . Si  $C$  est une courbe du plan  $\mathbb{P}_{x_i}^2$ ,  $\tilde{C}_i$  désigne la transformée stricte de  $C$ , et  $\underline{c}_i$  la classe de  $\tilde{C}_i$  dans  $\text{Pic } S_{x_i}$ .

Lorsque l'on applique le lemme d'Horace géométrique 3.1, nous dirons que l'on exploite une courbe  $C$  en différenciant aux points  $P_{i_1}, \dots, P_{i_{a+1}}$  si  $a \geq 1$  et si  $P_{i_1}, \dots, P_{i_{a+1}}$  sont les  $a + 1$  points de la condition 3. Si  $a = 0$ , nous dirons que l'on exploite  $C$  sans différencier. Nous dirons enfin que l'on exploite  $C$  sans spécialiser si le lemme 3.1 s'applique avec  $x = y$ . Dans ce cas, la transformée totale de  $C$  est déjà une composante fixe du système.

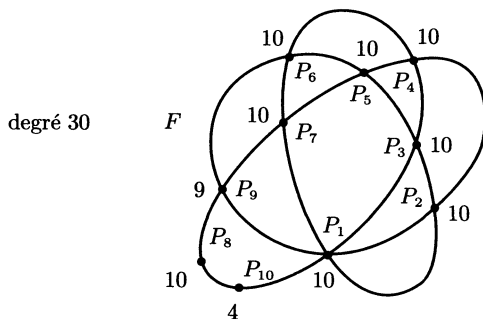
Posons  $\underline{d}_0 = (30; 10^8, 9, 4)$ . Il s'agit de montrer que  $\mathcal{L}_{x_0}(\underline{d}_0) = 0$ , et que  $\mathcal{D}_{x_0}(\underline{d}_0)$  est géométriquement irréductible.

*Première spécialisation,  $\underline{d}_0 = (30; 10^8, 9, 4)$ ,  $\chi = 1$ .* — On spécialise  $P_8$  et  $P_{10}$  en deux points génériques de la sextique  $F$  ayant un point triple en  $P_1$ , et 7 noeuds en  $P_2, \dots, P_7$  et  $P_9$ .

Plus précisément, il existe un ouvert  $V$  de  $(\mathbb{P}^2)^8$  tel que, si  $(Q_1, \dots, Q_8) \in V$ , il existe une unique sextique irréductible ayant un point triple en  $Q_1$  et 7 points doubles en  $Q_2, \dots, Q_8$ . Soit  $C$  le diviseur relatif tautologique de  $V \times \mathbb{P}^2 \rightarrow V$ , on considère la sous variété irréductible  $Y = C \times_V C$  de  $(\mathbb{P}^2)^{10}$  (les deux points supplémentaires sont placés en

positions 8 et 10). La sextique  $F$  est la fibre générique de  $C \rightarrow Y$ .

La classe de  $\tilde{F}_1$  est  $\underline{f}_1 = (6; 3, 2^6, 1, 2, 1)$ . On l'exploite en différenciant aux points  $P_8$  et  $P_{10}$ .



Puisque  $\tilde{F}_1$  est rationnelle et que  $\underline{f}_1 \cdot \underline{d}_0 = -1$ , les hypothèses 1 et 2 sont vérifiées. L'hypothèse 4 est plus délicate :

$$h^0(S_{x_1}, \mathcal{O}(24; 7, 8^6, 9, 7, 3) - P_8^F - P_{10}^F) = 0.$$

*Vérification de l'hypothèse 4.* — Soit  $\underline{d}_1 = \underline{d}_0 - \underline{f}_1$ ; on observe que  $\underline{d}_1 \cdot \underline{f}_1 = 1$ . Puisque  $\tilde{F}_1$  est rationnelle, et passe par les deux points  $P_8^F$  et  $P_9^F$ , c'est forcément une composante fixe du système  $\mathcal{L}_{x_1}(\underline{d}_1 - P_8^F - P_9^F)$ . On peut donc « soustraire »  $\underline{f}_1$ . On obtient  $\underline{d}'_2 = \underline{d}_1 - \underline{f}_1 = (18; 4, 6^6, 8, 5, 2)$ . Pour montrer que ce système n'a pas de section, on utilise la première partie du lemme 3.1.

On fait dégénérer  $F$  en l'union d'une cubique  $C$ , ayant un point double en  $P_5$  et passant par tous les points sauf  $P_7$ , d'une droite  $H$  passant par  $P_1, P_7$  et  $P_9$  et d'une conique  $U$ . On exploite  $C$  pour obtenir le résiduel  $(15; 3, 5^3, 4, 5, 6, 7, 4, 1)$ .

On fait maintenant dégénérer  $C$  en l'union d'une droite  $K$  et d'une conique  $V$  passant par  $P_2, P_3, P_5, P_6, P_8, P_9, P_{10}$ . On exploite  $V$  et on obtient  $(13; 3, 4^2, 5, 3, 4, 6^2, 3, 0)$ .

Dans cette position, on vérifie (toujours à l'aide de la méthode d'Horace) qu'il existe une unique sextique rationnelle irréductible ayant deux points triples en  $P_7$  et  $P_8$ , quatre points doubles en  $P_2, P_3, P_4, P_6$ , et passant par  $P_1, P_5, P_9$ . On l'exploite sans spécialiser et on obtient pour résiduel  $(7; 2^3, 3, 2^2, 3^2, 2, 0)$ .

On fait dégénérer  $V$  en l'union de deux droites  $J$  et  $L$ . On spécialise  $P_2, P_5, P_6$  et  $P_9$  sur  $J$ , que l'on exploite. On obtient  $(6; 2, 1, 2, 3, 1^2, 3^2, 1, 0)$ .

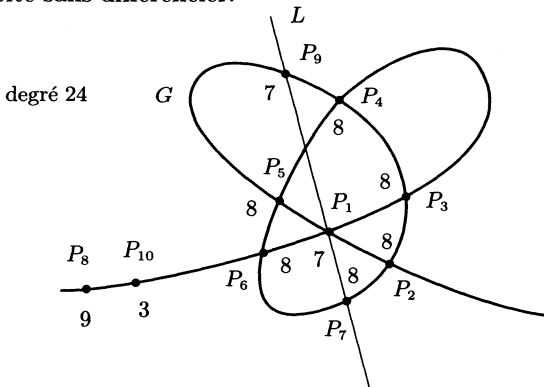
On vérifie maintenant qu'il existe une unique conique irréductible et lisse passant par les cinq points  $P_1, P_3, P_4, P_7, P_8$ . On l'exploite sans spécialiser. On obtient la classe  $(4; 1^3, 2, 1^2, 2^2, 1)$  dont on peut vérifier qu'elle n'a pas de section en faisant dégénérer la conique  $U$ .  $\square$

Les hypothèses 5 et 7 sont évidentes.

Pour 8 et 9, on remarque que  $\underline{d}_1 \cdot \underline{f}_1 = 1$  : soit  $\mathcal{D}_{x_1}(\underline{d}_1)$  rencontre  $\tilde{F}_1$  en un seul point, soit elle la contient. Cette deuxième situation est impossible puisque  $h^0(S_{x_1}, \underline{d}_1 - \underline{f}_1) = 0$  (démonstration de l'hypothèse 4).

Pour les hypothèses 6 et 10, on applique à nouveau le lemme d'Horace géométrique.

Deuxième spécialisation  $\underline{d}_1 = (24; 7, 8^6, 9, 7, 3)$ ,  $\chi = 2$ . — On spécialise  $P_9$  au point générique de la droite  $L$  passant par  $P_1$  et  $P_7$ . La sextique  $F$  dégénère en deux courbes :  $L$  et une quintique  $G$ . On spécialise  $P_8$  et  $P_9$  sur cette quintique. La classe de  $\tilde{G}_2$  est  $\underline{g}_2 = (5; 2^6, 1^4)$ . On l'exploite sans différencier.



La courbe  $\tilde{G}_2$  est rationnelle, et  $\underline{d}_1 \cdot \underline{g}_2 = -1$ , les hypothèses 1 et 2 sont donc satisfaites.

L'hypothèse 5 est évidente.

Pour la condition 7, on montre facilement, en considérant la fibration de  $\bar{x}_1 \rightarrow (\mathbb{P}^2)^8$  définie en « oubliant » les points  $P_8$  et  $P_{10}$ , que  $x_2$  est lisse dans  $\bar{x}_1$ .

Hypothèses 8 et 9 (intersection résiduelle). Le résiduel est  $\underline{d}_2 = (19; 5, 6^5, 7, 8, 6, 2)$ , et le nombre d'intersection vaut  $\underline{d}_2 \cdot \underline{g}_2 = 2$ . D'après



le lemme 3.5, il suffit de montrer que le pinceau  $\mathcal{L}_{x_2}(\underline{d}_2)$  est sans point base sur  $\tilde{G}_2$ . On utilise le lemme 3.6. Pour cela, on fait dégénérer  $G$  en l'union d'une droite  $K$  contenant  $P_2, P_3, P_4$  et d'une quartique  $R$ . Dans cette position,  $\underline{k} = (1; 0, 1^3, 0^6)$  et  $\underline{r} = (4; 2, 1^3, 2^2, 1^4)$ . Ces deux courbes vérifient  $\underline{k} \cdot \underline{d}_2 = \underline{r} \cdot \underline{d}_2 = 1$ .

- Montrons tout d'abord que  $h^0(\underline{d}_2 - \underline{r} = (15; 3, 5^3, 4^2, 6, 7, 5, 1)) = 0$ .

On spécialise  $P_{10}$  à l'intersection de  $R$  et de la droite  $K$ . On exploite  $K$  pour obtenir  $(14; 3, 4^5, 6, 7, 5, 0)$ .

On vérifie que la courbe rationnelle de degré 7 ayant un point quadruple en  $P_8$ , un point triple en  $P_7$ , six points doubles en  $P_2, \dots, P_6, P_9$  et passant par  $P_1$ , est irréductible. On l'exploite sans spécialiser. Le résiduel est  $(7; 2^6, 3^3, 0)$ .

On fait maintenant dégénérer la quartique  $R$  en une conique  $U$  et deux droites  $M$  et  $N$ . On spécialise  $P_1, P_4, P_5$  sur  $M$  et  $P_1, P_3, P_6$  sur  $N$ .

On exploite  $U$  puis, sans spécialiser, la droite  $L$ , et enfin la droite  $K$ . Le résiduel vaut  $(3; 1, 0, 1^5, 2, 1, 0)$ . On conclut sans difficulté.

- Montrons maintenant que  $h^0(\underline{d}_2 - \underline{k} = (18; 5^4, 6^2, 7, 8, 6, 2)) = 0$ .

On fait dégénérer  $R$  en deux coniques  $U$  et  $V$ . On spécialise  $P_1, P_3, P_5, P_6, P_7, P_8$  sur  $U$  que l'on exploite. Le résiduel est  $(16; 4, 5, 4, 5^3, 6, 7, 6, 2)$ .

On spécialise maintenant le point  $P_{10}$  à l'intersection de  $U$  et  $V$ . On exploite  $U$  pour obtenir  $(14; 3, 5, 3, 5, 4^2, 5, 6^2, 1)$ .

On spécialise le point  $P_8$  sur la droite  $M$  passant par  $P_3$  et  $P_9$ . On exploite  $M$  puis, sans spécialiser, la conique  $V$ . On obtient  $(11; 2, 4, 2, 4, 3^2, 5^2, 4, 0)$ .

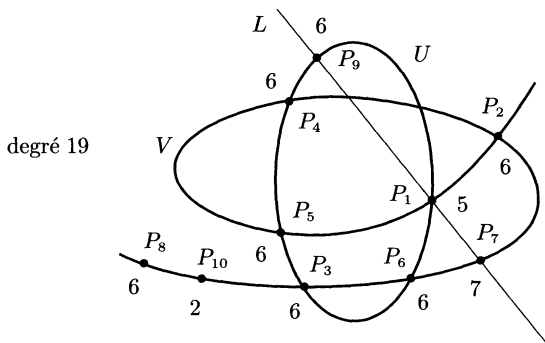
On vérifie maintenant qu'il existe une unique sextique rationnelle irréductible ayant deux points triples en  $P_7, P_8$ , quatre points doubles en  $P_2, P_4, P_5, P_9$  et passant par  $P_1, P_3, P_6$ . On l'exploite pour obtenir  $(5; 1, 2, 1, 2, 1, 2^4, 0)$ .

On fait dégénérer  $U$  en deux droites,  $A$  et  $B$ , en spécialisant  $P_1, P_3$  et  $P_5$  sur  $A$ . On exploite  $B$  puis, sans spécialiser, la droite  $K$  et enfin la conique  $V$ . On obtient une classe de degré 1 qui n'a pas de section.

L'hypothèse 10 se vérifie grâce au lemme 3.7 : la courbe  $\mathcal{D}_{x_2}(\underline{d}_2)$  est la courbe générique d'un pinceau ; or  $\underline{d}_2^2 = 3$ .

Il reste à montrer que  $\mathcal{L}_{x_2}(\underline{d}_2)$  est régulier, et que  $\mathcal{D}_{x_2}(\underline{d}_2)$  est géométriquement irréductible (hypothèses 4 et 6). On utilise à nouveau 3.1.

Troisième spécialisation  $\underline{d}_2 = (19; 5, 6^5, 7, 8, 6, 2)$ ,  $\chi = 2$ . — On spécialise  $P_3$  au point générique de la conique  $U$  passant par les 5 points  $P_1, P_4, P_5, P_6$  et  $P_9$ . La quintique  $G$  se décompose alors en  $U$  et une cubique  $V$ . On spécialise  $P_8$  et  $P_9$  sur  $V$ . La classe de  $\tilde{V}_3$  est  $\underline{v}_3 = (3; 1, 2, 1^6, 0, 1)$ . On l'exploite sans différencier.



La courbe  $\tilde{V}_3$  est rationnelle, et  $\underline{d}_2 \cdot \underline{v}_3 = -1$ . Les hypothèses 1 à 3 sont donc vérifiées. L'hypothèse 5 est évidente. Le résiduel vaut  $\underline{d}_3 = (16; 4^2, 5^4, 6, 7, 6, 1)$ .

Il suffit maintenant de prouver la régularité de  $\underline{d}_3$  et l'irréductibilité de  $\mathcal{D}(\underline{d}_3)$  (hypothèses 4 et 6). Pour cela, nous pouvons ne conserver que les contraintes imposées aux 9 premiers points.

En effet, supposons la classe  $\underline{d}' = (16; 4^2, 5^4, 6, 7, 6, 0)$  régulière et la courbe  $\mathcal{D}(\underline{d}')$  géométriquement irréductible. Le système linéaire  $\mathcal{L}(\underline{d}')$  est un pinceau sans composante fixe, donc le point  $P_{10}$  qui est générique sur la cubique  $V$  ne peut être un point base de ce pinceau et la classe  $\underline{d}_3$  est régulière. Par ailleurs, si la courbe  $\mathcal{D}(\underline{d}_3)$  est réductible, elle admet nécessairement la cubique  $V$  comme composante (sinon,  $P_{10}$  ne serait sur aucune section réductible du pinceau  $\mathcal{L}(\underline{d}')$ ). Donc la classe  $\underline{d}_3 - \underline{v}_3 = (13; 3, 2, 4^4, 5, 6, 6, 0)$  est effective. On vérifie facilement que ceci est impossible (pour cela, on peut par exemple utiliser des transformations de Cremona, comme ci-dessous).

Ainsi, nous pouvons nous ramener au cas — largement étudié — où l'on éclate au plus neuf points du plan (voir [8], [15] ou [22] par exemple).

Posons  $\underline{s} = (16; 4^2, 5^4, 6, 7, 6)$  et considérons les neuf points dans la position définie plus haut. On montre facilement qu'il existe une unique cubique irréductible et lisse passant par les 9 points  $P_1, \dots, P_9$  (les 8 points  $P_1, \dots, P_7, P_9$  sont en position presque générale au sens de [8] : il n'y a pas de points infiniment voisins, ni 4 points alignés, ni 7 points sur une conique; et le dernier point  $P_8$  est générique sur  $V$ ). Posons  $\underline{c} = (3; 1^9)$  la classe de cette courbe. Par ailleurs, il existe exactement trois racines effectives irréductibles dans le groupe de Picard, qui sont  $\underline{\ell} = (1; 1, 0^5, 1, 0, 1)$ ,  $\underline{\mu} = (2; 1, 0, 1^4, 0^2, 1)$  et  $\underline{\nu} = (3; 1, 2, 1^6, 0)$  (comme dans [8], une *racine* désigne ici une classe orthogonale à  $\underline{c}$  d'auto-intersection  $-2$ ).

Nous allons effectuer plusieurs transformations de Cremona, afin de simplifier le système initial. Une telle transformation, centrée aux trois points  $P_i, P_j, P_k$  est bien définie si et seulement si les courbes de classes  $[L - E_i - E_j]$ ,  $[L - E_i - E_k]$  et  $[L - E_j - E_k]$  sont irréductibles, c'est-à-dire si et seulement si l'intersection de ces courbes avec les trois racines irréductibles  $\underline{\ell}$ ,  $\underline{\mu}$  et  $\underline{\nu}$  est positive ou nulle.

Supposons la transformation possible et notons  $w$  l'élément du groupe de Weyl correspondant. La classe  $\underline{s}$  est régulière et irréductible si et seulement si la courbe de classe  $w(\underline{s})$  l'est (dans la nouvelle base de Pic  $S$ , où les trois racines effectives irréductibles sont  $w(\underline{\ell})$ ,  $w(\underline{\mu})$  et  $w(\underline{\nu})$ ).

On vérifie ainsi qu'une première transformation  $w_1$ , centrée aux points  $P_6, P_7$  et  $P_8$  est possible, et nous donne :

$$\begin{aligned} w_1(\underline{s}) &= (16; 4^2, 5^4, 6, 7, 6), & w_1(\underline{\ell}) &= (1; 1, 0^5, 1, 0, 1), \\ w_1(\underline{\mu}) &= (3; 1, 0, 1^3, 2, 1^3), & w_1(\underline{\nu}) &= (3; 1, 1, 1^6, 0). \end{aligned}$$

Par la suite, on vérifie que l'on peut effectuer six transformations de Cremona respectivement centrées aux points suivants :  $(P_3P_4P_9)$ ,  $(P_5, P_8P_9)$ ,  $(P_1P_2P_6)$ ,  $(P_5P_7P_8)$ ,  $(P_2P_3P_7)$ ,  $(P_1P_3P_4)$ . En notant  $w$  la composée des sept éléments du groupe de Weyl correspondants, on obtient :

$$\begin{aligned} w(\underline{s}) &= (6; 2^2, 1, 2^6), & w(\underline{\ell}) &= (1; 1, 0^5, 1, 0, 1), \\ w(\underline{\mu}) &= (3; 1, 0, 1^3, 2, 1^3), & w(\underline{\nu}) &= (8; 2, 3^4, 2, 3^2, 2). \end{aligned}$$

Dans la position définie par les trois racines irréductibles  $w(\underline{\ell})$ ,  $w(\underline{\mu})$ ,  $w(\underline{\nu})$  les 8 points  $P_1, P_2, P_4, \dots, P_9$  sont en position presque générale, et le système linéaire  $\mathcal{L}(6; 2^2, 0, 2^6)$  définit l'*involution de Bertini* (cf. [8], V. 5, p. 58). L'unique racine irréductible du plan éclaté en ces 8 points est la transformée stricte de la droite passant par  $P_1, P_7$  et  $P_9$ , c'est donc aussi

l'unique cycle fondamental. Puisque le point  $P_3$  n'est pas sur cette droite, le système  $\mathcal{L}(6; 2^2, 1, 2^6)$  est régulier (voir [8], théorème I, p. 55). Par ailleurs, la proposition 6, p. 57 de [8], permet d'affirmer que, puisque  $\mathcal{L}(3; 1^9)$  est régulier, il existe une courbe irréductible dans  $\mathcal{L}(6; 2^2, 1, 2^6)$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ALEXANDER, A. HIRSCHOWITZ, Un lemme d'Horace différentiel : application aux singularités hyperquartiques de  $\mathbb{P}^5$ , *J. Alg. Geom.*, 1 (1992), 411–426.
- [2] J. ALEXANDER, A. HIRSCHOWITZ, An asymptotic vanishing theorem for generic unions of multiple points, preprint alg-geom/9703037 (1997).
- [3] E. ARBARALLO, M. CORNALBA, Footnotes to a paper of Benjamino Segre, *Math. Ann.*, 256 (1981), 341–362.
- [4] S. BOSSINI, Classification des courbes sur les surfaces rationnelles génériques, *Algebraic Geometry, Europroj Conferences in Catania and Barcelona, Lecture Notes in Pure and Appl. Math.* n° 200, 1998, 283–329.
- [5] C. CILIBERTO, R. MIRANDA, Degenerations of planar linear systems, *J. reine angew. Math.*, (1998), 191–220.
- [6] C. CILIBERTO, R. MIRANDA, Linear systems of plane curves with base points of equal multiplicity, preprint math.AG/9804018, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1998.
- [7] P. DELIGNE, D. MUMFORD, Irreducibility of the space of curves of given genus, *Publ. Math. de l'IHES*, 36 (1969), 75–109.
- [8] M. DEMAZURE, Surfaces de Del Pezzo, Séminaire sur les singularités des surfaces, Palaiseau (France), *Lectures notes in Mathematics* n° 777 (1977).
- [9] L. EVAIN, Dimension des systèmes lineaires : une approche différentielle et combinatoire, preprint alg-geom/9709032, 1997.
- [10] M. GREEN, R. LAZARSEFELD, Deformation theory, generic vanishing theorems, and some conjectures of Enriques, Catanese and Beauville, *Invent. Math.*, 90 (1987), 389–407.
- [11] G.M. GREUEL, C. LOSSEN, E. SHUSTIN, Plane curves of minimal degree with prescribed singularities, *Invent. Math.*, 133, 3 (1998), 539–580.
- [12] A. GROTHENDIECK, Les schémas de Picard : théorèmes d'existence, technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, *Séminaire Bourbaki*, exposé 232 (1961–1962).
- [13] A. GROTHENDIECK, Éléments de géométrie algébrique, Chap. IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, *Publ. Math. de l'IHES*, 24 (1965).
- [14] A. GROTHENDIECK, Éléments de géométrie algébrique, Chap. IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, *Publ. Math. de l'IHES*, 32 (1966).
- [15] B. HARBOURNE, The geometry of rational surfaces and Hilbert functions of points in the plane, *Can. Math. Soc. Conf. Proc.*, 6 (1986), 95–111.
- [16] M. HEVELING, Courbes planes avec points à multiplicités imposées, rapport de stage de l'ENS Lyon, 1999.

- [17] A. HIRSCHOWITZ, Rank techniques and jump stratifications, vector bundles on algebraic varieties, Proceedings Bombay 1984, Oxford University Press, 1987, 159–205.
- [18] A. HIRSCHOWITZ, Une conjecture pour la cohomologie des diviseurs sur les surfaces rationnelles génériques, *J. reine angew. Math.*, 397 (1989), 208–213.
- [19] T. MIGNON, Systèmes linéaires de courbes planes, thèse, Université de Nice, 1997.
- [20] T. MIGNON, Systèmes de courbes planes à singularités imposées : le cas des multiplicités inférieures ou égales à quatre, Prépublications de l'ENS Lyon 230, to appear in *J. Pure Applied Alg.*, 2000.
- [21] T. MIGNON, Intersection de courbes planes et constructions de courbes à singularités ordinaires, to appear in *J. Pure Applied Alg.*, 2000.
- [22] M. NAGATA, On rational surfaces II, *Mem. Coll. Sci. Kyoto*, XXXIII, Mathematics n° 2, 1960, 271–293.
- [23] A. NOBILE, On families of singular plane projective curves, *Annali di Matematica pura ed applicata (IV)* CXXXVIII (1984), 341–378.
- [24] G. XU, Ample line bundles on smooth surfaces, *J. reine angew. Math.*, 107 (1995), 99–209.

Manuscrit reçu le 24 février 1999,  
révisé le 1<sup>er</sup> mars 2000,  
accepté le 27 avril 2000.

Thierry MIGNON,  
Université Montpellier II  
Département des Sciences Mathématiques  
Place Eugène Bataillon  
34095 Montpellier cedex 05 (France).  
mignon@math.univ-montp2.fr