ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ABDERRAZAK BOUAZIZ
NOURI KAMOUN

Équations différentielles invariantes sur les groupes et algèbres de Lie réductifs

Annales de l'institut Fourier, tome 50, nº 6 (2000), p. 1799-1857
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_2000__50_6_1799_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
50, 6 (2000), 1799–1857

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES INVARIANTES SUR LES GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE RÉDUCTIFS

par A. BOUAZIZ et N. KAMOUN

Introduction.

Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie, $\mathcal{D}'(V)$, resp. $\mathcal{D}'(V)_F$, resp. $\mathcal{S}'(V)$, désignera l'espace des distributions sur V, resp. le sous-espace des distributions d'ordre fini, resp. le sous-espace des distributions tempérées.

Si D est un opérateur différentiel à coefficients constants non nul dans V, on sait que l'équation $D \cdot u = v$ admet des solutions dans chacun des espaces suivants $\mathcal{D}'(V)$, $\mathcal{D}'(V)_F$ [E1], [E2], [M1], [M2] et $\mathcal{S}'(V)$ [H1], [L].

Si G est un sous-groupe de $GL(V)$ et si D et v sont G-invariants, on peut se poser la question de l'existence d'une solution u, dans l'un des espaces considérés ci-dessus, invariante par G. L'exemple suivant, dû à Raïs [R], montre que la réponse peut être négative. Considérons en effet le groupe G des automorphismes de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(x_1, x_2) \mapsto (x_1+ax_2, x_2)$, a décrivant $\mathbb{R}$, $D = \partial/\partial x_1$ et v la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$, alors l'équation $D \cdot u = v$ n'admet aucune solution invariante dans l'espace des distributions, car une distribution invariante u vérifie l'équation $x_2 \partial/\partial x_1 \cdot u = 0$. Mais, lorsque G est le groupe des isométries d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V, Méthée, de Rham et Tengstrand ont donné une

Mots-clés : Algèbres de Lie réductives – Groupes de Lie réductifs – Opérateurs différentiels invariants – Distributions invariantes – Équations différentielles.
Classification math. : 22E30 – 43A80.

réponse positive à cette question (voir [T] pour les détails et les références). Ces groupes étant réductifs, on peut raisonnablement espérer une réponse positive lorsque G est réductif; la question nous a été posée sous cette forme par Raïs et constitue le point de départ de ce travail. Nous montrons ici que la réponse est positive quand G est un groupe de Lie réductif agissant dans son algèbre de Lie par la représentation adjointe, et nous étudions aussi le problème analogue sur G lui-même.

Soit G un groupe de Lie réductif, que l'on suppose par exemple dans la classe de Harish-Chandra (on précisera les hypothèses sur G au paragraphe 1.1). On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$, $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_F$ et $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})^G$ les sous-espaces formés par les éléments G-invariants respectivement dans $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$, $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})_F$ et $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$.

THÉORÈME 1. — *Soit D un opérateur différentiel à coefficients constants non nul et G-invariant dans $\mathfrak{g}$. Alors on a*

(i) $D \cdot \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G = \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$.

(ii) $D \cdot \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_F = \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_F$.

(iii) $D \cdot \mathcal{S}'(\mathfrak{g})^G = \mathcal{S}'(\mathfrak{g})^G$.

On note $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ le centre de l'algèbre enveloppante de de la complexifiée $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$, qu'on identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels bi-invariants sur G. On sait [B] que pour $D \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, l'équation $D \cdot u = v$ n'a pas toujours de solution dans l'espace des distributions invariantes sur G. Dans [BR] on trouve une condition suffisante pour l'existence d'une solution élémentaire invariante. Nous montrons que cette condition est aussi suffisante pour l'existence de solutions dans l'espace $\mathcal{D}'(G)^G_F$ des distributions d'ordre fini et G-invariantes (par automorphismes intérieurs) dans G.

Si H est un sous-groupe de Cartan de G, on note $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{h}$ et W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. On note $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ que l'on identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants par translation sur H. On note enfin γ_H l'isomorphisme de Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur la sous-algèbre $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$ des éléments invariants par W dans $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Pour simplifier l'énoncé du théorème suivant, on suppose que G est acceptable (c'est une condition technique pour assurer que la demi-somme des racines d'un sous-groupe de Cartan est la différentielle d'un caractère de ce sous-groupe).

THÉORÈME 2. — *Soit $D \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. On suppose que, pour un sous-groupe de Cartan fondamental B, $\gamma_B(D)$ admet une solution élémentaire* *dans $\mathcal{D}'(B)$. Alors $D \cdot \mathcal{D}'(G)_F^G = \mathcal{D}'(G)_F^G$.*

On dispose d'un critère explicite, dû à Cérézo et Rouvière (voir théorème 5.4.1), pour vérifier l'hypothèse du théorème 2. Nous pensons que cette hypothèse est encore suffisante pour montrer que $D \cdot \mathcal{D}'(G)^G = \mathcal{D}'(G)^G$; c'est par exemple le cas pour $G = SL_2(\mathbb{R})$ (voir paragraphe 7.2).

La formulation précise du théorème 2 est valable aussi pour certains ouverts de G (voir théorème 2' au paragraphe 4).

L'orbite de chaque élément x de G peut être munie d'une mesure G-invariante μ_x, qui est en fait une mesure de Radon sur G [Ra] et appartient donc à $\mathcal{D}'(G)_F^G$. On peut alors appliquer le théorème 2 à ces mesures. Ainsi, si $D \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ vérifie l'hypothèse du théorème 2, il existe une distribution $\theta_x \in \mathcal{D}'(G)_F^G$ telle que $D \cdot \theta_x = \mu_x$. Lorsque x est l'élément neutre, on retrouve le résultat de Benabdallah et Rouvière, sur l'existence d'une solution élémentaire invariante, par une méthode différente de la leur.

Donnons quelques indications sur les démonstrations. Dans le cas de $\mathfrak{g}$, la théorie des intégrales orbitales (plus précisément la description des distributions invariantes [Bo1]) permet de se ramener à des espaces vectoriels, en l'occurence les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$, avec l'action d'un groupe fini; le théorème 1 se déduit alors facilement des résultats cités plus haut. Notons que, pour montrer l'assertion (ii) du théorème 1, nous donnons une description de l'espace des distributions invariantes d'ordre fini sur $\mathfrak{g}$ analogue aux résutats de [Bo1]. Dans le cas de G, on se ramène, via les intégrales orbitales, à prouver que, pour tout sous-groupe de Cartan H de G, on a $\gamma_H(D) \cdot \mathcal{D}'(H)_F = \mathcal{D}'(H)_F$. Pour cela on a besoin de deux résultats. Le premier : si P est un opérateur différentiel invariant par translation sur un sous-groupe de Cartan H et admet une solution élémentaire alors $P \cdot \mathcal{D}'(H)_F = \mathcal{D}'(H)_F$. Le second (voir [BR]) : l'existence d'une solution élémentaire pour $\gamma_B(D)$ implique que, pour tout sous-groupe de Cartan H de G, $\gamma_H(D)$ admet aussi une solution élémentaire.

Décrivons brièvement l'organisation de cet article. Dans le paragraphe 1, on munit chacun des espaces de distributions invariantes d'une filtration finie, invariante par $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, et on décrit le gradué associé. Le théorème 1 sera démontré dans le paragraphe 2. Dans le pragraphe 3, on étudie l'espace des distributions invariantes d'ordre fini sur G. Dans le paragraphe 4, on réduit la démonstration du théorème 2 aux deux résultats mentionnés ci-dessus : lemmes 4.2.1 et 4.2.2, qu'on démontrera respectivement aux pargraphes 5 et 6. Dans le paragraphe 7, on expliquera comment cette méthode s'applique aux espaces symétriques de type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, et on donnera quelques commentaires dans le cas de $SL_2(\mathbb{R})$.

Nous remercions M. Raïs qui a attiré notre attention sur les questions abordées dans cet article.

1. Distributions invariantes sur $\mathfrak{g}$.

1.1. Notations et conventions.

Si X est une variété différentielle, on note C_c^∞ l'espace des fonctions complexes, de classe C^∞, à support compact sur X. Si $K \subset X$ est un compact, on note $C^\infty(K)$ le sous-espace de C_c^∞ formé par les fonctions dont le support est inclus dans K. On note $\mathcal{D}'(X)$ l'espace des distributions sur X (voir par exemple [Tr2], §1.6), et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{D}'(X)_N$ le sous-espace des distributions d'ordre $\leqslant N$. Rappelons qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ est d'ordre $\leqslant N$ si pour tout compact $K \subset X$, il existe une constante $C_K > 0$ et un nombre fini d'opérateurs différentiels $D_1, \ldots, D_k$ sur X d'ordre $\leqslant N$ tels que

$$|\langle u, f\rangle| \leqslant C_K \sup_{1\leqslant j\leqslant k} \sup_{x\in X} |D_j \cdot f(x)|, \quad \forall f \in C^\infty(K).$$

Remarque 1.1. — La multiplication par les fonctions de classe C^∞ n'augmente pas l'ordre des distributions; en particulier, si $\chi \in C^\infty(X)$ ne s'annule en aucun point de X et si $u \in \mathcal{D}'(X)$, alors u est d'ordre $\leqslant N$ si et seulement si χu est d'ordre $\leqslant N$.

On dit qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(X)$ est d'ordre fini s'il existe un entier N tel que $u \in \mathcal{D}'(X)_N$. On notera $\mathcal{D}'(X)_F$ l'espace des distributions d'ordre fini.

Si V est un espace vectoriel réel de dimension finie, on note $V_{\mathbb{C}}$ le complexifié de V et on identifie l'algèbre symétrique $S(V_{\mathbb{C}})$ à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients complexes dans V. Si K est un groupe agissant par des automorphismes linéaires de V, on notera $S(V_{\mathbb{C}})^K$ la sous-algèbre des éléments K-invariants de $S(V_{\mathbb{C}})$. On note $D \mapsto \check{D}$ (ou, pour des raisons typographiques, $D \mapsto [D]\check{}$; par exemple lorsque la lettre D est remplacée par une expression longue) l'unique automorphisme d'algèbres de $S(V_{\mathbb{C}})$ qui prolonge l'isomorphisme $x \mapsto -x$ de V. L'action habituelle de $S(V_{\mathbb{C}})$ sur l'espace des distributions $\mathcal{D}'(V)$ est donnée par

$$\langle D \cdot u, f\rangle = \langle u, \check{D} \cdot f\rangle,$$

pour $D \in S(V_{\mathbb{C}})$, $u \in \mathcal{D}'(V)$ et $f \in C_c^\infty(V)$.

Si E et un espace vectoriel topologique, on note E' son dual topologique. Si T est une application linéaire continue, on note ${}^tT$ sa transposée.

Si G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on dit que G est réductif si $\mathfrak{g}$ est réductive. On note $\mathrm{Ad}(G)$ l'image de G par la représentation adjointe et $G_{\mathbb{C}}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On dit qu'un groupe réductif G est dans la classe de Harish-Chandra si

(i) il a un nombre fini de composantes connexes

(ii) $\mathrm{Ad}(G) \subset G_{\mathbb{C}}$

(iii) le groupe dérivé de la composante neutre de G est à centre fini.

Par exemple, un groupe semi-simple connexe est dans la classe de Harish-Chandra si et seulement si son centre est fini.

Nous allons montrer les théorèmes 1 et 2 pour la classe, plus large que celle de Harish-Chandra, des groupes G vérifiant :

(H) *G contient un sous-groupe distingué d'indice fini qui appartient à la classe de Harish-Chandra.*

Comme nous l'a fait remarquer le referee, puisque l'action de G dans $\mathfrak{g}$ se factorise à travers le groupe $\mathrm{Ad}(G)$, le théorème 1 est encore vrai si l'on suppose simplement que $\mathrm{Ad}(G)$ a un nombre fini de composantes connexes, car dans ce cas $\mathrm{Ad}(G)$ vérifie (H). Toutefois, nous avons préféré nous restreindre aux groupes vérifiant l'hypothèse (H), d'une part pour avoir un cadre homogène pour tout l'article, et d'autre part parce que, lors de l'utilisation de la méthode de descente dans le paragraphe 3, nous aurons besoin des résultats développés dans le paragraphe 1, énoncés avec l'hypothèse (H).

On fixe pour la suite un groupe réductif G vérifiant l'hypothèse (H). Son algèbre de Lie sera notée $\mathfrak{g}$. Plus généralement, on notera les groupes de Lie par des lettres majuscules M, $H, \dots$, et leurs algèbres de Lie par les lettres gothiques minuscules correspondantes $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}, \dots$

Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on note W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, et

$$\gamma_{\mathfrak{h}} : S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G \longrightarrow S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$$

la restriction de l'isomorphisme de Chevalley à $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ (vu l'hypothèse sur G, le groupe $\mathrm{Ad}(G)$ peut contenir des automorphismes extérieurs de $\mathfrak{g}$;

l'algèbre $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G$ est donc plus petite en général que l'algèbre des invariants dans $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ par le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$). Les sous-algèbres $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G$ et $S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W$ sont stables par l'automorphisme $D \mapsto \check{D}$ et on a

$$[\gamma_\mathfrak{h}(D)]\check{} = \gamma_\mathfrak{h}(\check{D}), \qquad D \in S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G. \tag{1}$$

On note ℓ le rang de $\mathfrak{g}$ (c'est la dimension d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$). On définit le discriminant $D_\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{g}$ par

$$\det(\lambda - \operatorname{ad} X) = D_\mathfrak{g}(X)\lambda^\ell + \ldots + \lambda^{\dim \mathfrak{g}}, \qquad X \in \mathfrak{g}.$$

On note $\mathfrak{g}_{\rm reg}$ l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$; c'est l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ tels que $D_\mathfrak{g}(X) \neq 0$. Si A est une partie de $\mathfrak{g}$, on note $A_{\rm reg} = A \cap \mathfrak{g}_{\rm reg}$.

1.2. Intégrales orbitales.

Nous rappelons brièvement et précisons certains résultats de [Bo1] sur les intégrales orbitales. Ces résultats sont énoncés pour G dans la classe de Harish-Chandra, mais restent valables ([Bo2], §4) pour G dans la classe des groupes vérifiant (H).

Soient $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g})$ et $X \in \mathfrak{g}_{\rm reg}$. On note $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui contient X, H le sous-groupe de Cartan de G correspondant à $\mathfrak{h}$ et on pose

$$J_\mathfrak{g}(f)(X) = |D_\mathfrak{g}(X)|^{\frac{1}{2}} \int_{G/H} f(\operatorname{Ad} g \cdot X) d\dot{g},$$

la mesure sur G/H est normalisée comme dans ([Bo1], §3.1). La fonction $J_\mathfrak{g}(f)$ appartient à l'espace $\mathcal{ID}(\mathfrak{g})$ introduit dans ([Bo1], 3.2); pour alléger les notations on le désignera simplement par $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$. Il est formé des fonctions ψ de classe C^∞ sur $\mathfrak{g}_{\rm reg}$, G-invariantes et vérifiant certaines propriétés de régularité au voisinage des éléments singuliers dont nous reformulons une partie :

(P1) *la restriction de ψ à toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est nulle en dehors d'une partie bornée et, pour tout $u \in S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$,*

$$\sup_{X \in \mathfrak{h}_{\rm reg}} |u \cdot \psi(X)| < \infty.$$

Une partie L de $\mathfrak{g}$ est dite compacte modulo G si elle est fermée, G-invariante et, pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, $L \cap \mathfrak{h}$ est compact.

On notera $\mathcal{I}(L)$ le sous-espace des $\psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ nulles en dehors de $L \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. La propriété (P1) permet de définir sur $\mathcal{I}(L)$ une semi-norme

$$p_{\mathfrak{h},\mathrm{u}}(\psi) = \sup_{X \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |u \cdot \psi(X)|.$$

Lorsque $\mathfrak{h}$ parcourt l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ et, pour chaque $\mathfrak{h}$, u parcourt $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, l'ensemble des semi-normes $p_{\mathfrak{h},u}$ définit une topologie d'espace de Fréchet sur $\mathcal{I}(L)$ (il est clair qu'on peut remplacer cette famille de semi-normes par une sous-famille dénombrable où $\mathfrak{h}$ parcourt un système, fini, de représentants des classes de conjugaison des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ et, pour chacune de ces sous-algèbres, u parcourt une base de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (voir §1.3). L'espace $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ est la réunion des $\mathcal{I}(L)$, L parcourant l'ensemble des parties compactes modulo G de $\mathfrak{g}$. On le munit de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{I}(L)$, qui en fait un espace de type LF (voir [Bo1], §3).

On peut maintenant donner la description de l'espace des distributions invariantes sur $\mathfrak{g}$ ([Bo1], théorème 4.1.1).

(D1) *L'application*

$$J_{\mathfrak{g}} : C_c^{\infty}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathfrak{g})$$

est continue surjective et sa transposée réalise une bijection entre $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ *et* $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^{\mathfrak{G}}$.

L'algèbre $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ opère sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ comme suit. Soient $D \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, $\psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ et $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$. On note $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan qui contient X et $\psi_{\mathfrak{h}}$ la restriction de ψ à $\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}$. Alors

$$D \cdot \psi(X) = \gamma_{\mathfrak{h}}(D) \cdot \psi_{\mathfrak{h}}(X).$$

Cette action fait de $J_{\mathfrak{g}}$ un morphisme de $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$-modules et, si l'on définit une action de $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ par

$$\langle D \cdot \theta, \psi \rangle = \langle \theta, \check{D} \cdot \psi \rangle, \qquad D \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G, \theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})', \psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}),$$

${}^tJ_{\mathfrak{g}}$ est aussi un morphisme de $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$-modules.

1.3. Distributions invariantes d'ordre fini sur $\mathfrak{g}$.

Dans ce paragraphe, nous allons étendre les résultats de [Bo1] pour obtenir une description des distributions invariantes d'ordre fini sur $\mathfrak{g}$.

On fixe un ensemble $\mathcal{C}$ de représentants des classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan et, pour chaque $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$, on fixe une base $X_1, X_2, \ldots, X_\ell$ de $\mathfrak{h}$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, on note

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i, \qquad D^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_\ell^{\alpha_\ell}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $\psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$, on pose

$$\|\psi\|_N = \sup_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}} \sup_{|\alpha| \leqslant N} p_{\mathfrak{h}, D^\alpha}(\psi).$$

Il est facile de voir que, pour tout $L \subset \mathfrak{g}$ compact modulo G, la famille de semi-normes $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}$, définit la topologie de $\mathcal{I}(L)$, et c'est même une base de semi-normes continues ([Tr1], définition 7.7), c'est-à-dire que, pour toute semi-norme continue p sur $\mathcal{I}(L)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une constante $C > 0$ tels que

$$p(\psi) \leqslant C\|\psi\|_N, \qquad \forall \psi \in \mathcal{I}(L). \tag{2}$$

DEFINITION 1.3.1. — *Soit $N \in \mathbb{N}$. On dit que $\theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ est d'ordre $\leqslant N$ si, pour tout $L \subset \mathfrak{g}$ compact modulo G, il existe une constante $C_L > 0$ telle que*

$$|\langle \theta, \psi \rangle| \leqslant C_L \|\psi\|_N, \qquad \forall \psi \in \mathcal{I}(L).$$

On dit que $\theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ est d'ordre fini s'il existe un entier N tel que θ soit d'ordre $\leqslant N$. On notera $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'_{\mathfrak{N}}$ (resp. $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'_{\mathfrak{F}}$) le sous-espace des éléments de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ d'ordre $\leqslant N$ (resp. d'ordre fini), alors

$$\mathcal{I}(\mathfrak{g})'_F = \cup_{N \in \mathbb{N}} \mathcal{I}(\mathfrak{g})'_N.$$

De même on note $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_N$ (resp. $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_F$) l'espace des distributions invariantes d'ordre $\leqslant N$ (resp. d'ordre fini) sur $\mathfrak{g}$. On va montrer que ${}^tJ_\mathfrak{g}$ induit une bijection entre $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'_F$ et $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_F$. Plus précisément

THÉORÈME 1.3.2. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que*

(i) ${}^tJ_\mathfrak{g}(\mathcal{I}(\mathfrak{g})'_N) \subset \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_M$,

(ii) *pour tout $\theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})'$, si ${}^tJ_\mathfrak{g}(\theta) \in \mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_N$ alors $\theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})'_M$.*

Cela montre que ${}^tJ_\mathfrak{g}$ induit une bijection entre $I(\mathfrak{g})'_F$ et $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_F$.

1.4. Démonstration de la première partie du théorème 1.3.2.

On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{g}$, une base de $\mathfrak{g}$ et on introduit les opérateurs de dérivations D^α, $\alpha \in \mathbb{N}^{\dim \mathfrak{g}}$, relativement aux coordonnées associées à cette base.

Pour $M \in \mathbb{N}$, on définit la semi-norme $\|\cdot\|_M$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ par

$$\|f\|_M = \sup_{|\alpha| \leqslant M} \sup_{X \in \mathfrak{g}} |D^\alpha f(X)|.$$

Cette notation désigne aussi une semi-norme sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$, mais il est toujours clair, d'après le contexte, de laquelle des deux il s'agit.

D'après Harish-Chandra (voir [V], théorème I-3-9), l'application

$$J_\mathfrak{g} : C_c^\infty(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathfrak{g})$$

est continue lorsqu'on munit $C_c^\infty(\mathfrak{g})$ de la topologie induite par $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ et $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ de la topologie définie par les semi-normes $\|\cdot\|_N$. Donc pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_N > 0$ et deux entiers p_N et N' tels que

$$\|J_\mathfrak{g}(f)\|_N \leqslant C_N \sup_{|\alpha| \leqslant N'} \sup_{X \in \mathfrak{g}} (1 + \|X\|)^{p_N} |D^\alpha f(X)|, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}).$$

Donc pour tout compact $K \subset \mathfrak{g}$ il existe une constante $C_K > 0$ telle que

$$\|J_\mathfrak{g}(f)\|_N \leqslant C_K \|f\|_{N'} \quad \forall f \in C^\infty(K). \tag{3}$$

Soient $N \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})'_{\mathfrak{N}}$ et K une partie compacte de $\mathfrak{g}$. On note L l'adhérence de $\cup_{g \in G} \operatorname{Ad} g(K)$; c'est un compact modulo G ([V], théorème I-1-28) et $J_\mathfrak{g}(C^\infty(K)) \subset \mathcal{I}(L)$. Par définition, il existe une constante $C_L > 0$ telle que

$$|\langle \theta, \psi \rangle| \leqslant C_L \|\psi\|_N, \quad \forall \psi \in \mathcal{I}(L). \tag{4}$$

Donc, pour toute fonction $f \in C^\infty(K)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle {}^t J_\mathfrak{g}(\theta), f \rangle| &= |\langle \theta, J_\mathfrak{g}(f) \rangle| \\ &\leqslant C_L \|J_\mathfrak{g}(f)\|_N \quad \text{(d'après (4))} \\ &\leqslant C_L C_K \|f\|_{N'} \quad \text{(d'après (3))}. \end{aligned}$$

Cela montre que ${}^t J_\mathfrak{g}(\theta)$ est d'ordre $\leqslant N'$.

1.5. Démonstration de la seconde partie du théorème 1.3.2.

On utilise les notations du paragraphe précédent. Pour un réel $R > 0$, on note

$$B_R = \{X \in \mathfrak{g}; \|X\| \leqslant R\}.$$

On fixe sur $\mathfrak{g}$ une fonction polynomiale positive homogène de degré d et G-invariante q, dont l'ensemble des zéros coïncide avec le cône nilpotent (voir [Bo1], §1.2). Pour un réel $a > 0$, on note

$$\mathfrak{g}_a = \{X \in \mathfrak{g}; q(X) \leqslant a\};$$

(dans [Bo1], $\mathfrak{g}_a$ désigne plutôt l'intérieur de celui-là); alors $\mathfrak{g}_a$ est un compact modulo G.

Il existe $R > 0$ tel que l'orbite $G \cdot X$ de tout $X \in \mathfrak{g}_1$ rencontre B_R ([Bo1], lemme 9.1.1). Donc, pour tout réel $t \geqslant 1$, l'orbite de chaque élément de $\mathfrak{g}_{t^d}$ rencontre B_{tR}. On note

$$K_t = B_{tR} \cap \mathfrak{g}_{t^d}.$$

Alors $J_{\mathfrak{g}}(C^\infty(K_t)) = \mathcal{I}(\mathfrak{g}_{t^d})$ ([Bo1], corollaire 11.2.3).

LEMME 1.5.1. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout réel $t \geqslant 1$, il existe une constante $C(N,t) > 0$, telle que, pour tout $\psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}_{t^d})$, on a*

$$\inf_{\substack{f \in C^\infty(K_t) \\ J_{\mathfrak{g}}(f) = \psi}} \|f\|_N \leqslant C(N,t) \|\psi\|_{N''}. \tag{5}$$

Démonstration. — Comme l'application

$$J_{\mathfrak{g}} : C^\infty(K_1) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$$

est une surjection linéaire continue entre deux espaces de Fréchet, elle est ouverte, d'après le théorème de l'application ouverte. Elle induit donc un isomorphisme topologique entre $C^\infty(K_1)/\operatorname{Ker} J_{\mathfrak{g}}$, muni de la topologie quotient, et $\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$. Il découle alors de la description des topologies quotients ([Tr1], proposition 7.9), que pour toute semi-norme continue q sur $C^\infty(K_1)$, l'application $\overline{q}$ sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$ définie par

$$\overline{q}(\psi) = \inf_{\substack{f \in C^\infty(K_1) \\ J_{\mathfrak{g}}(f) = \psi}} q(f)$$

est une semi-norme continue sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$. On applique ceci à la semi-norme $q = \|\cdot\|_N$, il découle alors de (2) qu'il existe une constante $C_N > 0$ et un entier $N'' \in \mathbb{N}$ tels que

$$(6) \qquad \inf_{\substack{f\in C^\infty(K_1)\\ J_{\mathfrak{g}}(f)=\psi}} \|f\|_N \leqslant C_N\|\psi\|_{N''}, \quad \forall\psi\in\mathcal{I}(\mathfrak{g}_1).$$

Soit t un réel $\geqslant 1$. Pour toute fonction g sur $\mathfrak{g}$ (ou sur $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}$) on définit la fonction g_t par

$$g_t(X) = g(tX).$$

On pose $\mathrm{e}(\mathfrak{g}) = \frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} - \operatorname{rang}\mathfrak{g})$. On voit alors d'après la définition de $J_{\mathfrak{g}}$ que

$$(7) \qquad J_{\mathfrak{g}}(f_t) = t^{-\,\mathrm{e}(\mathfrak{g})}J_{\mathfrak{g}}(f)_t.$$

Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$(8) \qquad \|f\|_M \leqslant \|f_t\|_M, \quad \forall f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}),$$

et

$$(9) \qquad \|\psi_t\|_M \leqslant t^M\|\psi\|_M, \quad \forall\psi\in\mathcal{I}(\mathfrak{g}).$$

Soit $\psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}_{t^d})$. Alors $\psi_t \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}_1)$ et l'application $f \mapsto t^{\mathrm{e}(\mathfrak{g})}f_t$ est une bijection de l'ensemble des $f\in C^\infty(K_t)$ telles que $J_{\mathfrak{g}}(f) = \psi$ sur l'ensemble des $h \in C^\infty(K_1)$ telles que $J_{\mathfrak{g}}(h) = \psi_t$. Donc

$$\begin{aligned}
\inf_{\substack{f\in C^\infty(K_t)\\ J_{\mathfrak{g}}(f)=\psi}} \|f\|_N &\leqslant t^{-\,\mathrm{e}(\mathfrak{g})} \inf_{\substack{f\in C^\infty(K_t)\\ J_{\mathfrak{g}}(f)=\psi}} \|t^{\mathrm{e}(\mathfrak{g})}f_t\|_N && \text{(d'après (8))}\\
&\leqslant t^{-\,\mathrm{e}(\mathfrak{g})} \inf_{\substack{h\in C^\infty(K_1)\\ J_{\mathfrak{g}}(h)=\psi_t}} \|h\|_N\\
&\leqslant t^{-\,\mathrm{e}(\mathfrak{g})}C_N\|\psi_t\|_{N''} && \text{(d'après (6))}\\
&\leqslant t^{N''-\mathrm{e}(\mathfrak{g})}C_N\|\psi\|_{N''} && \text{(d'après (9)).}
\end{aligned}$$

La constante $C(N,t) = C_N t^{N''-\mathrm{e}(\mathfrak{g})}$ ne dépend pas de ψ; cela montre (5). □

Montrons maintenant l'assertion (ii) du théorème 1.3.2. Fixons un entier N et l'entier N'' qui lui est associé par le lemme 1.5.1. Soit $\theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})'$. On note $\Theta = {}^t J_{\mathfrak{g}}(\theta)$ que l'on suppose d'ordre $\leqslant N$.

Soit L un compact modulo G. Il existe alors un réel $t \geqslant 1$ tel que $L \subset \mathfrak{g}_{t^d}$, et donc une constante C'_t telle que

$$|\langle\Theta, f\rangle| \leqslant C'_t\|f\|_N, \quad \forall f\in C^\infty(K_t).$$

Soit $\psi \in \mathcal{I}(L)$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(K_t)$ telle que $J_{\mathfrak{g}}(f) = \psi$ on a

$$|\langle \theta, \psi \rangle| = |\langle \Theta, f \rangle| \leqslant C'_t \|f\|_N.$$

Donc

$$\begin{aligned} |\langle \theta, \psi \rangle| &\leqslant \inf_{\substack{f \in C^\infty(K_t) \\ J_{\mathfrak{g}}(f) = \psi}} C'_t \|f\|_N \\ &\leqslant C(N,t) C'_t \|\psi\|_{N''} \text{ (d'après (5)).} \end{aligned}$$

Cela montre que θ est d'ordre $\leqslant N''$. Pour terminer la démonstration du théorème 1.3.2, il suffit de prendre $M = \max(N', N'')$, où N' (resp. N'') est l'entier associé à N dans la preuve de (i) (resp. (ii)).

1.6. Filtration de l'espace des distributions invariantes.

On note $\mathfrak{g}'$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{h}'_R$ le sous-espace de $\mathfrak{h}'$ formé par les éléments $X \in \mathfrak{h}'$ tels que toutes les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ sont réelles. On fixe une sous-algèbre de Cartan fondamentale $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ (i.e. $\mathfrak{b}$ n'a aucune racine réelle), et pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, on pose

$$j(\mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{h}'_R - \dim \mathfrak{b}'_R \ ;$$

il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que l'ensemble des valeurs prises par $j(\mathfrak{h})$ soit $\{0, 1, \dots, p\}$.

Pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant p$, on note $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$ le sous-espace des $\psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})$ tels que, pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant $j(\mathfrak{h}) > j$, la restriction de ψ à $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$ est nulle. On obtient ainsi une filtration croissante de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$. L'intérêt de ces sous-espaces est le suivant. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et si Δ est un système de racines imaginaires positives de $\mathfrak{h}$, on note a_Δ la fonction localement constante sur $\mathfrak{h}_{\text{reg}}$ définie par

$$a_\Delta(X) = \prod_{\alpha \in \Delta} \frac{\alpha(X)}{|\alpha(X)|},$$

alors, pour tout $\psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$, avec $j = j(\mathfrak{h})$, la fonction $a_\Delta \psi_{\mathfrak{h}}$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ à support compact sur $\mathfrak{h}$, que l'on notera $\pi_{\mathfrak{h}}(\psi)$. Plus précisément, notons $W(\mathfrak{h})$ le groupe de Weyl de $(G, \mathfrak{h})$ (normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans G modulo le centralisateur de $\mathfrak{h}$ dans G), ϵ_I le caractère de $W(\mathfrak{h})$ défini par

$$a_\Delta(w \cdot X) = \epsilon_I(w) a_\Delta(X), \quad X \in \mathfrak{h}_{\text{reg}}$$

et $C_c^\infty(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$ le sous-espace des fonctions $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h})$ vérifiant

$$f(w \cdot X) = \epsilon_I(w) f(X), \quad X \in \mathfrak{h}, \ w \in W(\mathfrak{h}),$$

alors $\pi_{\mathfrak{h}}(\psi)$ appartient à $C_c^\infty(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$.

L'espace $C_c^\infty(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$ est un facteur direct de $C_c^\infty(\mathfrak{h})$; en effet, l'application

$$P : f \mapsto \frac{1}{|W(\mathfrak{h})|} \sum_{w \in W(\mathfrak{h})} \epsilon_I(w) w \cdot f,$$

où $w \cdot f$ désigne la fonction sur $\mathfrak{h}$ définie par $w \cdot f(X) = f(w^{-1} \cdot X)$, est un projecteur continu de $C_c^\infty(\mathfrak{h})$ sur $C_c^\infty(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$. Dans la suite on identifiera $(C_c^\infty(\mathfrak{h})^{\epsilon_I})'$ à l'orthogonal de $\ker P$, c'est-à-dire l'espace $\mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$ des distributions θ sur $\mathfrak{h}$ vérifiant

$$\langle \theta, w \cdot f \rangle = \epsilon_I(w) \langle \theta, f \rangle, \qquad \forall w \in W(\mathfrak{h}), \ \forall f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}).$$

Il est clair que cette identification est compatible avec l'action de $S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$.

Rappelons que $\mathcal{C}$ désigne un ensemble de représentants des classes de conjugaison de sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. Pour $j = 0, \ldots, p$, on note $\mathcal{C}_j$ l'ensemble des sous-algèbres $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$ telles que $j(\mathfrak{h}) = j$. On fixe j et, pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j$, on choisit un système de racines imaginaires positives Δ, on obtient alors une application linéaire surjective ([Bo1], théorème 4.1.1)

$$\pi_j : \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} C_c^\infty(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$$

$$\psi \mapsto \sum_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \pi_{\mathfrak{h}}(\psi).$$

L'espace $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$, comme tout sous-espace d'un espace de type LF, se trouve muni de deux topologies : celle induite par $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$, qu'on notera $\mathcal{T}_i$, et la topologie de la limite inductive des $\mathcal{I}_j(L) = \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I}(L)$, L parcourant l'ensemble des parties compactes modulo G, que l'on notera $\mathcal{T}_{li}$; la seconde est plus fine que la première. Si l'on munit $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$ de la topologie $\mathcal{T}_{li}$, l'application π_j est continue, ouverte et son noyau est $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})$, avec la convention $\mathcal{I}_{-1}(\mathfrak{g}) = 0$, ([Bo1], théorème 4.1.1). On obtient donc un isomorphisme

$$\overline{\pi}_j : \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})/\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \oplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} C_c^\infty(\mathfrak{h})^{\epsilon_I},$$

et par transposition on obtient un isomorphisme

$$(10) \qquad {}^t\overline{\pi}_j : \oplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})/\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g}))'.$$

Pour $j = 0, \dots, p$, on note $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^\perp$ l'orthogonal de $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'$. On obtient ainsi une filtration décroissante de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ avec des isomorphismes naturels

$$h_j : \mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^\perp / \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^\perp \longrightarrow (\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})/\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g}))', \tag{11}$$

mais ici $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})/\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})$ est muni de la topologie quotient de $\mathcal{T}_i$ par $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})$. Fort heureusement on a

LEMME 1.6.1. — *Les deux topologies $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_{li}$ sur $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$ coïncident.*

Démonstration. — Pour chaque sous-algèbre $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$, considérons l'ensemble $\Phi_{\mathfrak{h}}$ des familles de fonctions continues $\rho = (\rho_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^\ell}$ sur $\mathfrak{h}$ telles que la famille des supports $(\operatorname{supp} \rho_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^\ell}$ soit localement finie.

Pour $\rho \in \Phi_{\mathfrak{h}}$, on voit facilement que l'on définit une semi-norme $q_{\mathfrak{h},\rho}$ sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ par

$$q_{\mathfrak{h},\rho}(\psi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^\ell} \sup_{X \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |\rho_\alpha(X) D^\alpha \psi(X)|.$$

On va montrer que la famille de semi-normes $q_{\mathfrak{h},\rho}$, $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$ et $\rho \in \Phi_{\mathfrak{h}}$, définit la topologie de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$. Il s'agit de montrer que, pour toute partie L de $\mathfrak{g}$ compacte modulo G, tout élément de cette famille est continue sur l'espace $\mathcal{I}(L)$ pour la topologie définie par la famille de semi-normes $p_{\mathfrak{h},D^\alpha}$, $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$, et *vice versa.*

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit $\alpha_0 \in \mathbb{N}^\ell$. On prend la famille $\rho_0 \in \Phi_{\mathfrak{h}}$ dont toutes les composantes sont nulles sauf celle d'indice α_0 qui est égale à 1. On a alors

$$p_{\mathfrak{h},D^{\alpha_0}}(\psi) = q_{\mathfrak{h},\rho_0}(\psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{I}(L).$$

Cela montre que $p_{\mathfrak{h},D^{\alpha_0}}$ est continue pour la topologie de $\mathcal{I}(L)$ définie par les semi-normes $q_{\mathfrak{h},\rho}$.

Fixons maintenant une semi-norme $q_{\mathfrak{h},\rho}$. Comme $L \cap \mathfrak{h}$ est compact et la famille des supports des ρ_α est localement finie, il n'existe qu'un nombre fini de ρ_α, dont le support rencontre $L \cap \mathfrak{h}$; on note A l'ensemble de ces α. Alors, pour tout $\psi \in \mathcal{I}(L)$,

$$q_{\mathfrak{h},\rho}(\psi) \leqslant \sum_{\alpha \in A} \sup_{X \in L \cap \mathfrak{h}} |\rho_\alpha(X)| p_{\mathfrak{h},D^\alpha}(\psi).$$

Donc $q_{\mathfrak{h},\rho}$ est continue pour la topologie de $\mathcal{I}(L)$ définie par les semi-normes $p_{\mathfrak{h},D^\alpha}$.

Si on note $q_{\mathfrak{h},\rho,j}$ la restriction de $q_{\mathfrak{h},\rho}$ à $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$, on voit comme ci-dessus que la famille de semi-normes $q_{\mathfrak{h},\rho,j}$, $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$ avec $j(\mathfrak{h}) \leqslant j$, définit la topologie $\mathcal{T}_{li}$ de $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$. Comme $q_{\mathfrak{h},\rho,j}$ est nulle si $j(\mathfrak{h}) > j$, il s'ensuit que la topologie $\mathcal{T}_i$ est aussi définie par la famille de semi-normes $q_{\mathfrak{h},\rho,j}$, $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$ avec $j(\mathfrak{h}) \leqslant j$. $\square$

Remarque 1.6.2. — Signalons qu'une forme linéaire θ sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ est continue si et seulement s'il existe pour toute $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$ une famille $\rho_{\mathfrak{h}} \in \Phi_{\mathfrak{h}}$ telle que

$$|\langle \theta, \psi \rangle| \leqslant \sup_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}} q_{\mathfrak{h},\rho_{\mathfrak{h}}}(\psi), \quad \forall \psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}).$$

La preuve est analogue à celle du théorème 2.1.5 de [H2] (voir plus loin la démonstration de la proposition 1.7.2) ; l'existence de fonctions "plateaux" est assurée par ([Bo1], corollaire 2.3.2).

De plus, θ est d'ordre fini si et seulement si on peut choisir les familles $\rho_{\mathfrak{h}}$ de sorte qu'il n'y ait qu'un nombre fini de ρ_α non nuls. $\square$

D'après (10) et (11), l'application $\varphi_j = {}^t\overline{\pi}_j^{-1} \circ h_j$ est un isomorphisme de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^\perp / \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^\perp$ sur $\bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$.

Il est clair que les sous-espaces $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$ sont stables par $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G$. Il en est donc de même des sous-espaces $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^\perp$; d'où une action naturelle de $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^{\mathfrak{G}}$ dans $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^\perp / \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^\perp$. De plus, si $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j$, on a

$$\pi_{\mathfrak{h}}(D \cdot \psi) = \gamma_{\mathfrak{h}}(D) \cdot \pi_{\mathfrak{h}}(\psi), \quad D \in S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G, \ \psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}),$$

et, d'après (1),

$${}^t\pi_{\mathfrak{h}}(\gamma_{\mathfrak{h}}(D) \cdot u) = D \cdot {}^t\pi_{\mathfrak{h}}(u), \quad D \in S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G, u \in \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}.$$

Donc si l'on fait opérer $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G$ dans $\bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}$ par

$$D \cdot \Big(\sum_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} u_{\mathfrak{h}} \Big) = \sum_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \gamma_{\mathfrak{h}}(D) \cdot u_{\mathfrak{h}},$$

il s'ensuit que l'isomorphisme φ_j commute avec l'action de $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G$. En composant avec l'isomorphisme ${}^tJ_{\mathfrak{g}}$ (voir la propriété (D1), §1.2), on peut résumer le contenu de ce paragraphe sous la forme sous laquelle on va l'utiliser.

(F1) *L'espace $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G$ admet une filtration finie, par des sous-espaces stables par $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^G$, telle que le gradué associé soit isomorphe à*

$$\bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I},$$

et, pour tout $D \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, on a

$$\mathrm{gr}(D) \sim \bigoplus_{\mathfrak{h}\in C} \gamma_{\mathfrak{h}}(D).$$

1.7. Filtration de l'espace des distributions invariantes d'ordre fini.

On reprend les notations des paragraphes précédents. Si a est un réel > 0, on note $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g}_a) = \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I}(\mathfrak{g}_a)$, et si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{h}_a = \mathfrak{g}_a \cap \mathfrak{h}$. Alors l'application π_j envoie surjectivement $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g}_a)$ sur $\bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} C_c^\infty(\mathfrak{h}_a)^{\epsilon_I}$ ([Bo1], corollaire 11.2.3).

LEMME 1.7.1. — *Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe alors $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $a > 0$, il existe une constante $C_a > 0$ telle que, pour toute $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j$ et toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_a)^{\epsilon_I}$, on ait*

$$\inf_{\substack{\psi\in\mathcal{I}_j(\mathfrak{g}_a)\\ \pi_j(\psi)=f}} \|\psi\|_N \leqslant C_a \|f\|_{N'}.$$

Démonstration. — Elle est analogue à celle du lemme 1.5.1. □

Pour $j = 0, \ldots, p$ et $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_F = \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp} \cap \mathcal{I}(\mathfrak{g})'_F, \quad \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_N = \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp} \cap \mathcal{I}(\mathfrak{g})'_N,$$

et on note $\varphi_{j,F}$ la restriction de φ_j à $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_F$, identifié à un sous-espace de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}$. On identifie aussi $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_N/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_N$ à un sous-espace de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_F$.

PROPOSITION 1.7.2. — *L'application $\varphi_{j,F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_F$ sur $\bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}_F$. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

(i) *il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_{j,F}(\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_N/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_N) \subset \bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}_M$.*

(ii) *$\varphi_{j,F}^{-1}(\bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}_N) \subset \mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_N/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_N$.*

Démonstration. — Soit $\theta \in \mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_F$, d'ordre $\leqslant N$. On note $\overline{\theta}$ sa classe dans $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_F$. On va montrer que $\varphi_{j,F}(\overline{\theta})$ est d'ordre fini.

Soit $a > 0$. Comme θ est d'ordre $\leqslant N$, il existe une constante $C'_a > 0$ telle que

$$(12) \qquad |\langle\theta,\psi\rangle| \leqslant C'_a \|\psi\|_N, \quad \forall\psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}_a).$$

Soient $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j$, $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_a)^{\epsilon_I}$ et $\psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}_a)$ tel que $\pi_j(\psi) = f$. Alors

$$\langle \varphi_{j,F}(\overline{\theta}), f\rangle = \langle \theta, \psi\rangle.$$

Donc, d'après (12) et le lemme 1.7.1,

$$|\langle \varphi_{j,F}(\overline{\theta}), f\rangle| \leqslant C'_a \inf_{\substack{\psi\in\mathcal{I}_j(\mathfrak{g}_a)\\ \pi_j(\psi)=f}} \|\psi\|_N \leqslant C'_a C_a \|f\|_{N'},$$

où N' est l'entier associé à N par le lemme 1.7.1. Comme N' ne dépend que de N, cela montre que $\varphi_{j,F}(\overline{\theta})$ est d'ordre $\leqslant N'$.

L'image de $\varphi_{j,F}$ est donc bien dans $\bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}_F$ et l'assertion (i) est bien vérifiée. Comme $\varphi_{j,F}$ est clairement injective, il nous reste à prouver que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $T \in \bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}_N$, il existe $\theta \in \mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})^{\perp}_N$ tel que l'image par $\varphi_{j,F}$ de sa classe modulo $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})^{\perp}_F$ est égale à T.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $T \in \bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}_N$. Considérons $\theta = T \circ \pi_j$. Alors $\theta \in (\mathcal{I}_j(\mathfrak{g}))'$ et sa restriction à $\mathcal{I}_{j-1}(\mathfrak{g})$ est nulle. On va montrer que θ se prolonge en un élément $\tilde{\theta}$ de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'_N$; il est clair alors que cela suffit pour conclure. La preuve est recopiée presque mot pour mot de la démonstration du théorème 2.1.5 de [H2].

Pour tout $a > 0$, il existe une constante $A_a > 0$ telle que

$$|\langle T, f\rangle| \leqslant A_a \|f\|_N, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}_a)^{\epsilon_I} \text{ et } \forall \mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j.$$

Par définition des normes, on a

$$\|\pi_j(\psi)\|_N \leqslant \|\psi\|_N, \quad \forall \psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}).$$

Donc

$$|\langle \theta, \psi\rangle| \leqslant A_a \|\psi\|_N, \quad \forall \psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}_a).$$

Choisissons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, une fonction $\chi_k \in C^\infty(\mathfrak{g})^G$ à support compact modulo G inclus dans $\mathfrak{g}_{k+1}$ et telle que $\chi_k \equiv 1$ au voisinage de $\mathfrak{g}_k$. On note $\varphi_k = \chi_k - \chi_{k-1}$ si $k \geqslant 1$ et $\varphi_0 = \chi_0$. Alors pour tout $\psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$, on a

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \psi \ ;$$

la somme est finie, car le support de ψ est inclus dans l'un des $\mathfrak{g}_k$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k\psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}_{k+1})$ ([Bo1], lemme 3.3.1). Donc

$$\begin{aligned} |\langle \theta, \psi\rangle| &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\langle \theta, \varphi_k\psi\rangle| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1} \|\varphi_k\psi\|_N \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1} \sup_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \sup_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{X\in\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |D^\alpha \cdot \varphi_k\psi(X)| \qquad (13) \\ &\leqslant \sum_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \sum_{|\alpha|\leqslant N} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1} \sup_{X\in\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |D^\alpha \cdot \varphi_k\psi(X)|. \qquad (14) \end{aligned}$$

Si on développe les termes $D^\alpha \cdot \varphi_k\psi(X)$ par la formule de Leibniz, on voit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$ avec $|\alpha| \leqslant N$, et tout $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j$,

$$(15)\quad |D^\alpha \cdot \varphi_k\psi(X)| \leqslant C \sum_{|\beta|\leqslant N} \Big|\Big(\sum_{|\gamma|\leqslant N} |D^\gamma\varphi_k(X)|\Big) D^\beta\psi(X)\Big|, \quad \forall X \in \mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}.$$

Pour $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_{\mathfrak{h},k}(X) = \sum_{|\gamma|\leqslant N} |D^\gamma\varphi_k(X)|, \quad X \in \mathfrak{h},$$

alors pour tout compact K de $\mathfrak{h}$ il n'y a qu'un nombre fini d'indices k tels que K rencontre le support de $f_{\mathfrak{h},k}$. Donc la fonction

$$f_{\mathfrak{h}}(X) = \sup_k 2^{k+1} A_{k+1} f_{\mathfrak{h},k}(X), \quad X \in \mathfrak{h},$$

est continue sur $\mathfrak{h}$. On note m_N le cardinal de l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{N}^\ell$ tels que $|\alpha| \leqslant N$. Il découle alors de (13) et (15) :

$$\begin{aligned}
|\langle\theta,\psi\rangle| &\leqslant m_N C \sum_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \Big(\sum_{|\beta|\leqslant N}\sum_{k=0}^{\infty} A_{k+1} \sup_{X\in\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |f_{\mathfrak{h},k}(X) D^\beta\psi(X)|\Big)\\
&\leqslant m_N C \sum_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \Big(\sum_{|\beta|\leqslant N}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\Big(2^{k+1}A_{k+1} \sup_{X\in\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |f_{\mathfrak{h},k}(X) D^\beta\psi(X)|\Big)\Big)\\
&\leqslant m_N C \sum_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \Big(\sum_{|\beta|\leqslant N}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\Big(\sup_{X\in\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |f_{\mathfrak{h}}(X) D^\beta\psi(X)|\Big)\Big)\\
&\leqslant m_N C \sum_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} \Big(\sum_{|\beta|\leqslant N} \sup_{X\in\mathfrak{h}_{\mathrm{reg}}} |f_{\mathfrak{h}}(X) D^\beta\psi(X)|\Big).
\end{aligned}$$

On note $\rho_{\mathfrak{h}} = (\rho_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^\ell}$ la famille (finie) de fonctions continues sur $\mathfrak{h}$ définie par

$$\rho_\beta = f_{\mathfrak{h}} \text{ si } |\beta| \leqslant N, \text{ et } \rho_\beta = 0 \text{ si } |\beta| > N.$$

Alors

$$|\langle\theta,\psi\rangle| \leqslant m_N C \sum_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}_j} q_{\mathfrak{h},\rho_{\mathfrak{h}}}(\psi), \quad \forall\psi \in \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}).$$

Le théorème de Hahn-Banach montre que θ se prolonge en une forme linéaire continue sur $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ d'ordre $\leqslant N$. □

On déduit de la proposition 1.7.2, du théorème 1.3.2 et de la propriété (F1) :

(F2) *L'espace $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})^G_F$ admet une filtration finie par des sous-espaces stables par $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ telle que le gradué associé soit isomorphe à*

$$\bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}} \mathcal{D}'(\mathfrak{h})^{\epsilon_I}_F,$$

et, pour tout $D \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, on a

$$\mathrm{gr}(D) \sim \bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}} \gamma_{\mathfrak{h}}(D).$$

1.8. Localisation des distributions invariantes.

On va donner dans ce paragraphe une version locale des résultats précédents.

Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathfrak{g}$ *complètement G-invariant*, c'est-à-dire G-invariant et contient la composante semi-simple de chacun de ses éléments. Alors (voir [Bo1]), les intégrales orbitales des fonctions $f \in C^\infty_c(\mathcal{V})$ forment un sous-espace de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$, noté $\mathcal{I}(\mathcal{V})$, que l'on munit de la topologie de la limite inductive des $\mathcal{I}(L)$, L parcourant l'ensemble des parties compactes modulo G incluses dans $\mathcal{V}$, de sorte que ${}^tJ_{\mathfrak{g}}$ réalise un isomorphisme entre $\mathcal{I}(\mathcal{V})'$ et $\mathcal{D}'(\mathcal{V})^G$, et la filtration de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ induit une filtration sur $\mathcal{I}(\mathcal{V})$ dont le gradué associé est isomorphe à $\bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}} C^\infty_c(\mathfrak{h}\cap\mathcal{V})^{\epsilon_I}$. La démonstration du lemme 1.6.1 reste valable si on remplace $\mathfrak{g}$ par $\mathcal{V}$. On obtient alors l'analogue de la propriété (F1).

(F3) *L'espace $\mathcal{D}'(\mathcal{V})^G$ admet une filtration finie, par des sous-espaces stables par $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, telle que le gradué associé soit isomorphe à*

$$\bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}} \mathcal{D}'(\mathfrak{h}\cap\mathcal{V})^{\epsilon_I},$$

et, pour tout $D \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, on a

$$\mathrm{gr}(D) \sim \bigoplus_{\mathfrak{h}\in\mathcal{C}} \gamma_{\mathfrak{h}}(D).$$

Comme dans le cas $\mathcal{V} = \mathfrak{g}$, on dit que $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'$ est d'ordre $\leqslant N$, si pour tout $L \subset \mathcal{V}$ compact modulo G, il existe une constante $C_L > 0$ telle que

$$|\langle\theta,\psi\rangle| \leqslant C_L\|\psi\|_N, \quad \forall\psi \in \mathcal{I}(L).$$

On dit que $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'$ est d'ordre fini s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que θ soit d'ordre $\leqslant N$. On notera $\mathcal{I}(\mathcal{V})'_N$ (resp. $\mathcal{I}(\mathcal{V})'_F$) le sous-espace de $\mathcal{I}(\mathcal{V})'$ formé par les éléments d'ordre $\leqslant N$ (resp. d'ordre fini).

La restriction de $J_{\mathfrak{g}}$ à $C_c^\infty(\mathcal{V})$ sera encore notée $J_{\mathfrak{g}}$.

PROPOSITION 1.8.1. — *Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout ouvert complètement G-invariant $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{g}$, on ait :*

(i) ${}^tJ_{\mathfrak{g}}(\mathcal{I}(\mathcal{V})'_N) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{V})^G_M$,

(ii) *pour tout $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'$, si ${}^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta) \in \mathcal{D}'(\mathcal{V})^G_N$ alors $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'_M$.*

Démonstration. — On note M l'entier associé à N par le théorème 1.3.2.

(i) Soit $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'_N$ et soit $K \subset \mathcal{V}$ compact. On note L l'adhérence de $\cup_{g\in G} \operatorname{Ad} g(K)$. Alors L est un compact modulo G inclus dans $\mathcal{V}$; cette propriété caractérise les ouverts complètement G-invariants ([V], théorème I-1-28).

D'après ([Bo1], corollaire 2.3.2), il existe $\chi \in C^\infty(\mathcal{V})^G$, à support compact modulo G inclus dans $\mathcal{V}$, telle que $\chi \equiv 1$ dans un voisinage de L. La multiplication par χ définit une application continue de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{I}(\mathcal{V})$; on définit alors $\chi\theta \in \mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ par

$$\langle \chi\theta, \psi\rangle = \langle \theta, \chi\psi\rangle, \quad \psi \in \mathcal{I}(\mathfrak{g}).$$

Il est facile de voir que $\chi\theta$ est aussi d'ordre $\leqslant N$. Alors, d'après le théorème 1.3.2, ${}^tJ_{\mathfrak{g}}(\chi\theta)$ est d'ordre $\leqslant M$. Mais comme $J_{\mathfrak{g}}$ commute avec la multiplication par les fonctions G-invariantes de classe C^∞ et $\chi \equiv 1$ dans un voisinage de K, on a

$$\langle {}^tJ_{\mathfrak{g}}(\chi\theta), f\rangle = \langle {}^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta), f\rangle, \quad \forall f \in C^\infty(K)\ ;$$

d'où l'on déduit que ${}^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta)$ est d'ordre $\leqslant M$.

(ii) Soit $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'$ tel que ${}^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta) \in \mathcal{D}'(\mathcal{V})^G_N$, et soit $L \subset \mathcal{V}$ compact modulo G. On fixe une fonction χ comme en (i). On définit comme ci-dessus l'élément $\chi\theta$ de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})'$ et on note $\chi^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta)$ la distribution sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$\langle \chi^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta), f\rangle = \langle {}^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta), \chi f\rangle, \quad f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}).$$

Alors $\chi^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta)$ est G-invariante d'ordre $\leqslant N$ et

$$\chi^tJ_{\mathfrak{g}}(\theta) =^t J_{\mathfrak{g}}(\chi\theta).$$

Donc, d'après le théorème 1.3.2, $\chi\theta$ est d'ordre $\leqslant M$. Comme $\chi\theta$ coïncide avec θ sur $\mathcal{I}(L)$, on en déduit facilement que θ est d'ordre $\leqslant M$. □

Remarque 1.8.2. — Il est important, pour l'étude des distributions invariantes d'ordre fini sur G, de noter que dans l'énoncé de la proposition 1.8.1, lorsque N est donné, on peut choisir un entier M qui convient pour tous les ouverts complètement G-invariants $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{g}$.

Pour $j = 0, 1, \ldots, p$, on pose

$$\mathcal{I}_j(\mathcal{V}) = \mathcal{I}_j(\mathfrak{g}) \cap \mathcal{I}(\mathcal{V}), \quad \mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp}_F = \mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp} \cap \mathcal{I}(\mathcal{V})'_F,$$

et

$$\mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp}_N = \mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp} \cap \mathcal{I}(\mathcal{V})'_N, \quad N \in \mathbb{N}.$$

On note, comme au paragraphe 1.6, $\varphi_{j,F}$ la restriction de l'isomorphisme

$$\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{V})^{\perp}/\mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h} \cap \mathcal{V})^{\epsilon_I}$$

à $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{V})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp}_F$. Alors

PROPOSITION 1.8.3. — *L'application $\varphi_{j,F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{V})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp}_F$ sur $\bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h} \cap \mathcal{V})^{\epsilon_I}_F$. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

(i) *il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi_j(\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{V})^{\perp}_N/\mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp}_N) \subset \bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h} \cap (\mathcal{V}))^{\epsilon_I}_M$.*

(ii) $\varphi_j^{-1}(\bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}_j} \mathcal{D}'(\mathfrak{h} \cap \mathcal{V})^{\epsilon_I}_N) \subset \mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{V})^{\perp}_N/\mathcal{I}_j(\mathcal{V})^{\perp}_N$.

Démonstration. — Elle découle de la proposition 1.7.2 par les arguments de la démonstration de la proposition 1.8.1; il suffit de remarquer que $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'$ est d'ordre $\leqslant N$ si et seulement si pour toute fonction $\chi \in C^{\infty}(\mathcal{V})^G$, $\chi\theta$ est d'ordre $\leqslant N$, et, de même, $T \in \mathcal{D}'(\mathfrak{h} \cap \mathcal{V})$ est d'ordre $\leqslant N$ si et seulement si pour toute fonction $f \in C_c^{\infty}(\mathfrak{h} \cap \mathcal{V})$, fT est d'ordre $\leqslant N$. □

Comme pour $\mathfrak{g}$, il découle de (F3) et des propositions 1.8.1 et 1.8.3 :

(F4) *L'espace $\mathcal{D}'(\mathcal{V})^G_F$ admet une filtration finie, par des sous-espaces stables par $S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, telle que le gradué associé soit isomorphe à*

$$\bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}} \mathcal{D}'(\mathfrak{h} \cap \mathcal{V})^{\epsilon_I}_F,$$

et, pour tout $D \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$, on a

$$\mathrm{gr}(D) \sim \bigoplus_{\mathfrak{h} \in \mathcal{C}} \gamma_{\mathfrak{h}}(D).$$

2. Démonstration du théorème 1.

Dans cette section on va démontrer une version plus générale du théorème 1. On s'intéresse aux ouverts $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{g}$ complètement G-invariants qui vérifient la propriété suivante :

(C) *Pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, $\mathcal{U} \cap \mathfrak{h}$ est convexe.*

Rappelons que $\mathfrak{g}'$ désigne l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}$ et notons $\mathfrak{c}$ son centre. Pour $\epsilon > 0$, on note $\mathfrak{g}'_\epsilon$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}'$ tels que pour toute valeur propre λ de $\operatorname{ad} X$, on a $|\lambda| < \epsilon$. Alors si V est un ouvert convexe de $\mathfrak{c}$, l'ensemble $\mathcal{U} = V \times \mathfrak{g}'_\epsilon$ est un ouvert de $\mathfrak{g}$ complètement G-invariant qui vérifie la propriété (C). On peut obtenir d'autres ouverts de ce type en remplaçant la condition $|\lambda| < \epsilon$ par $|\operatorname{Im} \lambda| < \epsilon$, où $\operatorname{Im} z$ désigne la partie imaginaire d'un complexe z.

THÉORÈME 1'. — *Soient G un groupe de Lie réductif vérifiant l'hypothèse (H), soit $D \in S(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ non nul, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathfrak{g}$ complètement G-invariant vérifiant la propriété (C). Alors*

(i) $D \cdot \mathcal{D}'(\mathcal{U})^G = \mathcal{D}'(\mathcal{U})^G$

(ii) $D \cdot \mathcal{D}'(\mathcal{U})^G_F = \mathcal{D}'(\mathcal{U})^G_F$

(iii) $D \cdot \mathcal{S}'(\mathfrak{g})^G = \mathcal{S}'(\mathfrak{g})^G$.

Démonstration. — (i) On utilise la propriété (F3). Comme la filtration de $\mathcal{D}'(\mathcal{U})^G$ est finie, pour que $D : \mathcal{D}'(\mathcal{U})^G \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathcal{U})^G$ soit surjectif, il suffit que $\operatorname{gr}(D)$ le soit. Ceci équivaut à $\gamma_{\mathfrak{h}}(D)\cdot\mathcal{D}'(\mathfrak{h}\cap\mathcal{U})^{\epsilon_I} = \mathcal{D}'(\mathfrak{h}\cap\mathcal{U})^{\epsilon_I}$ pour tout $\mathfrak{h} \in \mathcal{C}$. Comme $\gamma_{\mathfrak{h}}(D)$ est non nul et $\mathfrak{h}\cap\mathcal{U}$ est convexe, la dernière assertion découle du théorème de Malgrange-Ehrenpreis et du fait que $\mathcal{D}'(\mathfrak{h}\cap\mathcal{U})^{\epsilon_I}$ soit un facteur direct de $\mathcal{D}'(\mathfrak{h} \cap \mathcal{U})$ stable par tout $u \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$.

(ii) Découle de la même façon que (i) de la propriété (F4) et du théorème de Malgrange-Ehrenpreis pour les distributions d'ordre fini.

(iii) Découle de l'analogue de (F1) pour l'espace de Schwartz, qui est une conséquence immédiate du théorème 4.1.2 de [Bo1] (la différence avec (F1) est qu'il n'y a pas de complications dues aux différentes topologies sur les $\mathcal{I}_j(\mathfrak{g})$: tous les espaces considérés sont des espaces de Fréchet). □

Remarque. — Tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathfrak{g}$, G-invariant et vérifiant l'hypothèse (C), est complètement G-invariant. En effet, pour $\mathfrak{g} = sl_2$, on voit facilement que $\mathcal{U}$ contient 0, et contient donc la composante semi-simple de chacun de ses éléments; en général, pour montrer que la composante semi-simple d'un élément de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$, on se ramène à sl_2 à l'aide d'un sl_2-triplet convenable dans $\mathfrak{g}$.

3. Distributions invariantes sur G.

Comme pour les algèbres de Lie, on se propose dans ce paragraphe d'étendre les résultats de [Bo2] aux distributions invariantes d'ordre fini sur les groupes réductifs. Désormais le groupe G sera supposé dans la classe de Harish-Chandra, parce qu'on va utiliser les résultats de [Bo2] qui ne sont démontrés que dans ce cadre.

3.1. Intégrales orbitales sur G.

On dit qu'un ouvert de G est complètement G-invariant s'il est G-invariant et s'il contient la partie semi-simple (de la décomposition de Jordan) de chacun de ses éléments. On définit le discriminant D_G de G par

$$\det(\lambda - 1 + \operatorname{Ad} x) = D_G(x)\lambda^\ell + \ldots + \lambda^{\dim G}, \quad x \in G.$$

On note G_{reg} l'ensemble des éléments semi-simples réguliers de G; c'est l'ensemble des $x \in G$ tels que $D_G(x) \neq 0$. Plus généralement, si A est une partie de G, on notera $A_{\mathrm{reg}} = A \cap G_{\mathrm{reg}}$.

Soit $\mathcal{W}$ un ouvert complètement G-invariant de G. Si $f \in C_c^\infty(\mathcal{W})$ et si $x \in \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$, on note H le sous-groupe de Cartan de G contenant x et on pose

$$J_G(f)(x) = |D_G(x)|^{\frac{1}{2}} \int_{G/H} f(gxg^{-1})d\dot{g},$$

la mesure sur G/H est normalisée comme dans [Bo2]. La fonction $J_G(f)$ appartient à l'espace $\mathcal{I}(\mathcal{W})$ introduit dans ([Bo2], §3.1). Comme pour les algèbres de Lie, nous nous contentons de rappeler certaines propriétés des éléments de cet espace; ce sont des fonctions ψ de classe C^∞ et G-invariantes sur $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ vérifiant certaines propriétés de régularité au voisinage des éléments singuliers; en particulier

(P2) *Pour tout sous-groupe de Cartan H de G, il existe un compact $K \subset H \cap \mathcal{W}$ tel que la restriction de ψ à $H \cap \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ est nulle en dehors de $K \cap \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ et, pour tout $u \in S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, on a*

$$\sup_{x \in H \cap \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}} |u \cdot \psi(x)| < \infty.$$

L'espace $\mathcal{I}(\mathcal{W})$ est stable par la multiplication par les fonctions G-invariantes de classe C^∞, et il est muni d'une topologie d'espace LF, analogue à celle de $\mathcal{I}(\mathfrak{g})$, définie comme suit.

On dit qu'une partie L de $\mathcal{W}$ est compacte modulo G si elle est fermée, G-invriante et, pour tout sous-groupe de Cartan H de G, $L \cap H$ est compact. On notera $\mathcal{I}(L)$ le sous-espace des $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{W})$ nulles en dehors de $L \cap \mathcal{W}_{\text{reg}}$. Si H est un sous-groupe de Cartan de G et si $u \in S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, pour tout $\psi \in \mathcal{I}(L)$, on pose

$$p_{H,u}(\psi) = \sup_{x \in H_{\text{reg}}} |u \cdot \psi(x)|.$$

Alors $p_{H,u}$ est une semi-norme sur $\mathcal{I}(L)$. Lorsque H parcourt l'ensemble des sous-groupes de Cartan de G et, pour chaque H, u parcourt $S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, l'ensemble des semi-normes $p_{H,u}$ définit une topologie d'espace de Fréchet sur $\mathcal{I}(L)$.

L'espace $\mathcal{I}(\mathcal{W})$ est la réunion des $\mathcal{I}(L)$, L parcourant l'ensemble des parties compactes modulo G de $\mathcal{W}$. Sa topologie est celle de la limite inductive des $\mathcal{I}(L)$.

Le principal intérêt de ce qui précède est le résultat suivant (voir [Bo2], théorème 3.2.1) :

(D2) *L'application*

$$J_G : C_c^\infty(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{W})$$

est continue surjective et sa transposée réalise une bijection entre $\mathcal{I}(\mathcal{W})'$ *et* $\mathcal{D}'(\mathcal{W})^G$.

L'espace $\mathcal{I}(\mathcal{W})$ est muni d'une action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ de sorte que

$$J_G(D \cdot f) = D \cdot J_G(f), \quad \forall D \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C}), \ \forall f \in C_c^\infty(\mathcal{W}).$$

Rappelons la définition de cette action. Si H est un sous-groupe de Cartan de G, et si on note γ_H l'isomorphisme de Harish-Chandra de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ sur $S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W$ et ψ_H la restriction à $H \cap \mathcal{W}_{\text{reg}}$ de $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{W})$, alors, pour tout $D \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ et tout $x \in H \cap \mathcal{W}_{\text{reg}}$, on a

$$D \cdot \psi(x) = \gamma_H(D) \cdot \psi_H(x).$$

On note $D \mapsto \check{D}$ l'anti-automorphisme principal de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Cet anti-automorphisme préserve $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$.

On identifie $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ à l'algèbre des opérateurs différentiels invariants par translation à gauche sur G. Si $\mathcal{O}$ est un ouvert de G, on définit une action (à gauche) de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$ par

$$\langle D \cdot u, f \rangle = \langle u, \check{D} \cdot f \rangle, \ \ D \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C}), \ u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}), \ f \in C_c^\infty(\mathcal{O}).$$

Comme G est unimodulaire, si on fixe une mesure de Haar dg sur G, alors, pour toute fonction $f \in C^\infty(G)$, on a l'égalité de distributions

$$D \cdot (f dg) = (D \cdot f) dg, \quad D \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}).$$

On définit une action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur $\mathcal{I}(\mathcal{W})'$ par

$$\langle D \cdot u, \psi \rangle = \langle u, \check{D} \cdot \psi \rangle, \quad D \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}),\ u \in \mathcal{I}(\mathcal{W})',\ \psi \in \mathcal{I}(\mathcal{W}).$$

Si H est un sous-groupe de Cartan de G, l'isomorphisme γ_H vérifie

$$\gamma_H(\check{D}) = [\gamma_H(D)]\check{}.$$

Il en découle que ${}^tJ_G$ commute avec l'action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

Pour étendre ces résultats aux distributions d'ordre fini, on a besoin de rappeler les grandes lignes de la démonstration.

3.2. Méthode de descente.

La méthode de descente de Harish-Chandra repose sur le schéma suivant (voir [V], § I-2-1) : X et Y deux variétés différentiables munies de densités (qui ne s'annulent en aucun point) ω_X et ω_Y respectivement, et p une submersion surjective de X sur Y. Chaque fibre $p^{-1}(y)$, $y \in Y$, est alors munie d'une mesure μ_y associée canoniquement à ω_X et ω_Y. Pour $f \in C_c^\infty(X)$, on définit une fonction $p_* f$ sur Y par

$$p_* f(y) = \int_{p^{-1}(y)} f(x) d\mu_y(x).$$

Alors $p_* f$ appartient à $C_c^\infty(Y)$ et $\operatorname{supp}(p_* f) \subset p(\operatorname{supp}(f))$. De plus, l'application

$$p_* : C_c^\infty(X) \longrightarrow C_c^\infty(Y)$$

est linéaire continue surjective et sa transposée ${}^tp_*$ est une injection de $\mathcal{D}'(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$.

Si en outre X et Y sont munies de l'action différentiable d'un groupe de Lie G tel que ω_X et ω_Y soient G-invariantes et p soit G-équivariante, alors l'application p_* est G-équivariante et, pour tout $u \in \mathcal{D}'(Y)$, la distribution ${}^tp_*(u)$ est G-invariante si et seulement si u est G-invariante.

Il est important pour nous et facile à vérifier que l'application ${}^tp_*$ ne modifie pas l'ordre des distributions; plus précisément on a

LEMME 3.2.1. — *Si $u \in \mathcal{D}'(Y)$ et si N est un entier, alors ${}^t\!p_*(u) \in \mathcal{D}'(X)_N$ si et seulement si $u \in \mathcal{D}'(Y)_N$.*

Soit s un élément semi-simple de G. On note M (resp. $\mathfrak{m}$) le centralisateur de s dans G (resp. l'espace des points fixes de $\operatorname{Ad} s$ dans $\mathfrak{g}$). Alors M est un groupe réductif qui vérifie l'hypothèse (H) du paragraphe 1; son algèbre de Lie s'identifie à $\mathfrak{m}$. On dit qu'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{m}$ est G-admissible si :

- il est complètement M-invariant,
- l'application $\pi : G \times \mathcal{V} \longrightarrow G$ définie par $\pi(g, X) = gs \exp X g^{-1}$ est submersive,
- si $g \in G$ vérifie $gs\exp(\mathcal{V})g^{-1} \cap s\exp(\mathcal{V}) \neq \emptyset$, on a $g \in M$.

Dans [Bo2] il y a une condition supplémentaire : si $X \in \mathcal{V}_{\text{reg}}$, alors $s \exp X \in G_{\text{reg}}$. Elle découle en fait des autres conditions.

Si $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert G-admissible de 0 dans $\mathfrak{m}$, alors $\mathcal{U} = \pi(G \times \mathcal{V})$ est un ouvert complètement G-invariant de G; on dira dans la suite que $\mathcal{U}$ est un *bon voisinage* de s. Le point important concernant ces voisinages est que si $\mathcal{W}$ est un ouvert complètement G-invariant de G, alors, pour tout élément semi-simple $s \in \mathcal{W}$, il existe un bon voisinage $\mathcal{U}$ de s tel que $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$, et l'ensemble des ces bons voisinages recouvre $\mathcal{W}$.

Les applications

$$\pi : G \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$$

$$p : G \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V},$$

où p est la projection sur $\mathcal{V}$, sont des submersions surjectives G-équivariantes (où l'action de G est : la multiplication à gauche dans $G \times \mathcal{V}$, la conjugaison dans $\mathcal{U}$ et l'action triviale dans $\mathcal{V}$). Pour appliquer le schéma du début du paragraphe à π et p, on a besoin de densités G-invariantes.

On fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée G-invariante κ sur $\mathfrak{g}$, et on munit $\mathfrak{g}$ de la densité $\omega_{\mathfrak{g}}$ définie par

$$\omega_{\mathfrak{g}}(e_1, \ldots, e_n) = |\det \kappa(e_i, e_j)|^{\frac{1}{2}} \quad (n = \dim \mathfrak{g}).$$

On munit G de l'unique densité G-invariante par multiplication à gauche qui coïncide avec $\omega_{\mathfrak{g}}$ sur l'espace tangent à G en l'identité (identifié à $\mathfrak{g}$); on la note ω_G. La mesure associée à ω_G est une mesure da Haar sur G, qu'on notera simplement dg. La restriction de κ à $\mathfrak{m}$ étant non dégénérée, elle définit de même des densités M-invariantes $\omega_{\mathfrak{m}}$, ω_M sur $\mathfrak{m}$ et M respectivement; la mesure de Haar sur M associée à ω_M sera notée dm.

On rappelle la fonction $j_{\mathfrak{m}}$ définie sur $\mathfrak{m}$ par

$$j_{\mathfrak{m}}(X) = \det\left(\frac{1-\exp(-\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X}\right).$$

Alors l'application π est submersive en $(g, X) \in G \times \mathcal{V}$ si et seulement si

$$j_{\mathfrak{m}}(X) \det(1 - s^{-1} \exp -X)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}} \neq 0.$$

Pour tout $X \in \mathcal{V}_{\text{reg}}$ on a

$$\frac{|D_{\mathfrak{m}}(X)|}{|D_G(s \exp X)|} = \frac{1}{|j_{\mathfrak{m}}(X)|\, |\det(1 - s^{-1} \exp -X)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{m}}|}.$$

On déduit alors du fait que $\mathcal{V}$ est G-admissible que la fonction χ_s, définie sur $\mathcal{V}_{\text{reg}}$ par

$$\chi_s(X) = \frac{|D_{\mathfrak{m}}(X)|^{\frac{1}{2}}}{|D_G(s \exp X)|^{\frac{1}{2}}},$$

se prolonge en une fonction C^∞ sur $\mathcal{V}$, notée encore χ_s, qui ne s'annule en aucun point de $\mathcal{V}$.

Si $f \in C_c^\infty(G \times \mathcal{V})$, un calcul simple donne

$$\pi_* f(gs \exp X g^{-1}) = \frac{|D_{\mathfrak{m}}(X)|}{|D_G(s \exp X)|} \int_M f(gm^{-1}, \operatorname{Ad} m \cdot X) dm,$$

pour tous $g \in G$, $X \in \mathcal{V}$, et

$$p_* f(X) = \int_G f(g, X) dg, \quad X \in \mathcal{V}.$$

On note $R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}$ l'application de $C^\infty(\mathcal{U}_{\text{reg}})^G$ dans $C^\infty(\mathcal{V}_{\text{reg}})^M$ définie par

$$R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}(\varphi)(X) = \varphi(s \exp X).$$

On peut reformuler le lemme 5.2.1 de [Bo2] (la normalisation des mesures définissant π_* et p_* est légèrement différente de celle adoptée dans [Bo2])

LEMME 3.2.2. — (i) *Pour toute fonction* $f \in C_c^\infty(G \times \mathcal{V})$,

$$R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}} \circ J_G \circ \pi_*(f) = \chi_s J_{\mathfrak{m}} \circ p_*(f).$$

(ii) *L'application* $R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}$ *induit un isomorphisme topologique entre* $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ *et* $\mathcal{I}(\mathcal{V})$.

3.3. Distributions invariantes d'ordre fini sur G.

Soit $\mathcal{W}$ un ouvert de G complètement G-invariant et soit $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{W})'$. On dira que θ est d'ordre $\leqslant N$, pour un entier N, si pour toute partie $L \subset \mathcal{W}$ compacte modulo G, il existe des semi-normes $p_{H_1,u_1}, \ldots, p_{H_k,u_k}$, où $H_1, \ldots, H_k$ sont des sous-groupes de Cartan de G et, pour tout $i = 1, \ldots, k$, $u_i \in S(\mathfrak{h}_{i\mathbb{C}})$ de degré $\leqslant N$, tels que

$$|\langle \theta, \psi \rangle| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} p_{H_i,u_i}(\psi), \qquad \forall \psi \in \mathcal{I}(L).$$

On notera $\mathcal{I}(\mathcal{W})'_N$ le sous-espace de $\mathcal{I}(\mathcal{W})'$ formé par les éléments d'ordre $\leqslant N$, et $\mathcal{I}(\mathcal{W})'_F$ la réunion des $\mathcal{I}(\mathcal{W})'_N$, $N \in \mathbb{N}$.

Si $f \in C^\infty(\mathcal{W})^G$ et si $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{W})'$, on définit $f\theta$ par

$$\langle f\theta, \psi \rangle = \langle \theta, f\psi \rangle, \quad \psi \in \mathcal{I}(\mathcal{W}).$$

Comme pour les distributions, il est clair que si θ est d'ordre $\leqslant N$, alors $f\theta$ est aussi d'ordre $\leqslant N$; si en outre $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{W}$, $f\theta$ est d'ordre $\leqslant N$ si et seulement si θ est d'ordre $\leqslant N$.

Proposition 3.3.1. — *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que*

(i) ${}^tJ_G(\mathcal{I}(\mathcal{W})'_N) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_{N'}$,

(ii) *pour tout $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{W})'$, si ${}^tJ_G(\theta) \in \mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_N$ alors $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{W})'_{N'}$.*

Démonstration. — (i) Soit $N \in \mathbb{N}$. On a vu (proposition 1.8.1) que si M est un groupe de Lie réductif vérifiant l'hypothèse (H) d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$, il existe un entier N_M tel que pour tout ouvert M-invariant $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{m}$ on a ${}^tJ_{\mathfrak{m}}(\mathcal{I}(\mathcal{V})'_N) \subset \mathcal{D}'(\mathcal{V})^M_{N_M}$; l'entier N_M ne dépend que de la classe d'isomorphisme de M (remarque 1.8.2). Il existe un nombre fini de sous-groupes réductifs de G tels que le centralisateur de tout élément semi-simple de G soit isomorphe à l'un d'eux. Donc il existe un entier N' (que l'on fixera pour la suite) tel que, pour tout élément semi-simple s de G, si l'on note M son centralisateur dans G, on a $N_M \leqslant N'$.

Soit $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{W})'_N$. On va montrer que $\Theta ={}^t J_G(\theta)$ est d'ordre $\leqslant N'$. Remarquons tout d'abord que s'il existe un recouvrement ouvert $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{W}$ tel que la restriction de Θ à chaque $\mathcal{U}_i$ soit d'ordre $\leqslant N'$ alors Θ est d'ordre $\leqslant N'$; en effet il suffit de considérer une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert localement fini plus fin que $(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ et de remarquer que la multiplication par une fonction C^∞ n'augmente pas l'ordre d'une distribution. Comme $\mathcal{W}$ peut être recouvert par des bons voisinages de ses éléments semi-simples, il suffit de montrer que la restriction de Θ à de tels voisinages est d'ordre $\leqslant N'$.

Soit $s \in \mathcal{W}$ un élément semi-simple. On utilise les notations du paragraphe précédent : M, $\mathfrak{m}$, et on fixe un voisinage G-admissible $\mathcal{V}$ de 0 dans $\mathfrak{m}$ tel que $\mathcal{U} = \pi(G \times \mathcal{V})$ soit inclus dans $\mathcal{W}$. La restriction de θ à $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ est continue, et définit donc un élément de $\mathcal{I}(\mathcal{U})'$; il est clair que son ordre est $\leqslant N$; on le notera aussi θ. On note de même Θ la restriction de Θ à $\mathcal{U}$ de sorte que l'égalité $\Theta =^t J_G(\theta)$ soit préservée sur $\mathcal{U}$.

L'application $R_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}$ étant un isomorphisme (lemme 3.2.2), sa transposée est aussi un isomorphisme et il est clair, d'après la définition des topologies, qu'elle ne modifie pas l'ordre. Il existe donc un unique élément $\theta_s \in \mathcal{I}(\mathcal{V})'$ d'ordre $\leqslant N$ tel que ${}^tR_{\mathcal{U}|\mathcal{V}}(\theta_s) = \theta$. D'après le lemme 3.2.1, Θ est d'ordre $\leqslant N'$ si et seulement si ${}^t\pi_*(\Theta)$ est d'ordre $\leqslant N'$. D'après le lemme 3.2.2 et le fait que $J_\mathfrak{m}$ commute avec la multiplication par χ_s, on a ${}^t\pi_*(\Theta) =^t p_*(\chi_s^t J_\mathfrak{m}(\theta_s))$. Il suffit donc de montrer que ${}^tJ_\mathfrak{m}(\theta_s)$ est d'ordre $\leqslant N'$, car la multiplication par χ_s et ${}^tp_*$ préservent l'ordre. Et cela découle de la définition de N' et de la proposition 1.8.1.

(ii) Soit $\theta \in \mathcal{I}(\mathcal{W})'$ tel que ${}^tJ_G(\theta) \in \mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_N$. En utilisant une partition de l'unité G-invariante (voir [Bo2], lemme 2.3.1), on se ramène, comme ci-dessus, au cas où $\mathcal{W}$ est un bon voisinage d'un élément semi-simple s. On suppose donc qu'on est dans ce cas et on utilise les notations ci-dessus. Il suffit donc de montrer que θ_s est d'ordre $\leqslant N'$. Or ${}^tp_*(\chi_s^t J_\mathfrak{m}(\theta_s))$ est d'ordre $\leqslant N$; donc $\chi_s^t J_\mathfrak{m}(\theta_s)$ est d'ordre $\leqslant N$. Comme χ_s ne s'annule en aucun point de $\mathcal{V}$, l'ordre de ${}^tJ_\mathfrak{m}(\theta_s)$ est donc $\leqslant N$. La proposition 1.8.1 permet de conclure. □

3.4. Filtration de l'espace des distributions invariantes d'ordre fini sur G.

Dans ce paragraphe, on va montrer l'analogue de la proposition 1.8.3. On fixe un ouvert complètement G-invariant $\mathcal{W}$ de G et on commence par rappeler la filtration de $\mathcal{I}(\mathcal{W})$ (voir [Bo2], §3.2).

Pour tout sous-groupe de Cartan H de G, on fixe un système de racines imaginaires positives Δ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$; on notera ρ_Δ la demi-somme des éléments de Δ. Pour $\nu \in \mathfrak{h}^*_\mathbb{C}$, on note τ_ν l'unique automorphisme de $S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$ vérifiant $\tau_\nu(X) = \nu(X) + X$. Lorsque $\nu = \rho_\Delta$, on le notera souvent pour simplifier τ_Δ. On continue de noter W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$.

Si μ est un élément du réseau engendré par les racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, on note ξ_μ le caractère de H correspondant. Pour $x \in H_{\text{reg}}$, on note

$$b_\Delta(x) = \prod_{\alpha\in\Delta} \frac{1-\xi_{-\alpha}(x)}{|1-\xi_{-\alpha}(x)|}.$$

On note $W(H)$ le groupe de Weyl de (G,H) (le quotient du normalisateur de H dans G par son centralisateur) ; ce groupe opère naturellement dans H, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^*$, et il existe un homomorphisme $\epsilon_I : W(H) \longrightarrow \{\pm 1\}$ tel que

$$b_\Delta(w^{-1}\cdot x) = \epsilon_I(w)(\xi_{\rho_\Delta - w\cdot\rho_\Delta} b_\Delta)(x), \quad w \in W(H), \quad x \in H_{\text{reg}}.$$

On note $C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})^\Delta$ l'espace des fonctions $f \in C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})$ vérifiant $f(w^{-1}\cdot x) = \epsilon_I(w)(\xi_{\rho_\Delta - w\cdot\rho_\Delta} f)(x), \;\; w \in W(H), \;\; x \in H\cap\mathcal{W}_{\text{reg}}$.

Pour $f \in C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})$, on note $p_\Delta(f)$ la fonction sur $H\cap\mathcal{W}$ définie par

$$p_\Delta(f)(x) = \frac{1}{|W(H)|} \sum_{w\in W(H)} \epsilon_I(w)\xi_{w\cdot\rho_\Delta - \rho_\Delta} f(w^{-1}\cdot x),$$

où $|W(H)|$ désigne le cardinal de $W(H)$. Le lemme suivant est facile.

LEMME 3.4.1.

1. *Si* $P \in \tau_\Delta(S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{W}})$, *on a*
$$P\cdot C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})^\Delta \subset C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})^\Delta.$$

2. *L'application* p_Δ *est une projection continue de* $C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})$ *sur* $C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})^\Delta$ *qui commute avec l'action de* $\tau_\Delta(S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W)$.

Pour tout $D \in S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, on a

$$[\tau_{-\Delta}(D)]\check{} = \tau_\Delta(\check{D})\ ; \tag{16}$$

donc l'application $D \mapsto \check{D}$ induit un isomorphisme de $\tau_{-\Delta}(S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W)$ sur $\tau_\Delta(S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W)$. On peut alors définir une action de $\tau_{-\Delta}(S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W)$ sur $(C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})^\Delta)'$ par

$$\langle D\cdot T, f\rangle = \langle T, \check{D}\cdot f\rangle,$$

$D \in \tau_{-\Delta}(S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W)$, $T \in (C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})^\Delta)'$, $f \in C_c^\infty(H\cap\mathcal{W})^\Delta$. On note $\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^\Delta$ l'espace des distributions u sur $H\cap\mathcal{W}$ vérifiant

$$w\cdot u = \epsilon_I(w)\xi_{w\cdot\rho_\Delta - \rho_\Delta} u, \quad w \in W(H).$$

L'algèbre $S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, qui s'identifie à l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{h}_\mathbb{C})$, opère dans $\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})$ de la même façon que l'action qu'on a défini plus haut de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}'(\mathcal{O})$. Le lemme suivant est aussi facile que le lemme 3.4.1.

LEMME 3.4.2.

(1) *Si* $P \in \tau_{-\Delta}(S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W)$, *on a*
$$P \cdot \mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta} \subset \mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}.$$

(2) *L'application* ${}^t p_{\Delta}$ *est un isomorphisme linéaire de* $(C_c^{\infty}(H \cap \mathcal{W})^{\Delta})'$ *sur* $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}$ *qui commute avec l'action de* $\tau_{-\Delta}(S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W)$.

Dans la suite on identifiera $(C_c^{\infty}(H \cap \mathcal{W})^{\Delta})'$ à $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}$ grâce à ${}^t p_{\Delta}$. Il est clair que si l'on définit de façon évidente les éléments de $(C_c^{\infty}(H \cap \mathcal{W})^{\Delta})'$ d'ordre fini, ${}^t p_{\Delta}$ induit un isomorphisme entre l'espace formé par ces éléments et l'espace $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}_F$ des éléments d'ordre fini de $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}$; ce qui nous permettra d'identifier ces deux espaces.

Rappelons (voir §1.6) qu'on a associé à toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ un entier noté $j(\mathfrak{h})$. Si H est un sous-groupe de Cartan de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, on pose $j(H) = j(\mathfrak{h})$. Il existe un entier p tel que, lorsque H parcourt l'ensemble des sous-groupes de Cartan de G, l'ensemble des valeurs prises par $j(H)$ soit $\{0, 1, \dots, p\}$.

Pour tout entier j tel que $0 \leqslant j \leqslant p$, on note $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})$ le sous-espace des $\psi \in \mathcal{I}(\mathcal{W})$ tels que, pour tout sous-groupe de Cartan H de G vérifiant $j(H) > j$, la restriction de ψ à $H \cap \mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ est nulle. Si $\psi \in \mathcal{I}_j(\mathcal{W})$ et si H est un sous-groupe de Cartan de G tel que $j(H) = j$, la fonction $b_{\Delta}\psi_H$ se prolonge en un élément de $C_c^{\infty}(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}$, qu'on notera $\Pi_H(\psi)$.

On fixe un ensemble $\mathcal{H}_j$ de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan H de G tels que $j(H) = j$. On notera Π_j l'application linéaire de $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})$ dans $\bigoplus_{H \in \mathcal{H}_j} C_c^{\infty}(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}$ définie par
$$\Pi_j(\psi) = \sum_{H \in \mathcal{H}_j} \Pi_H(\psi).$$

Dans [Bo2], l'espace $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})$ est "implicitement" muni d'une topologie d'espace LF analogue à celle de $\mathcal{I}_j(\mathcal{U})$ (voir §1.6) pour laquelle Π_j est continue et ${}^t\Pi_j$ est une bijection de $\bigoplus_{H \in \mathcal{H}_j} \mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}$ sur l'orthogonal de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{W})$ dans $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})'$ (voir [Bo2], théorème 3.3.1). L'argument de la démonstration du lemme 1.6.1 montre que la topologie de $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})$ coïncide avec la topologie induite par celle de $\mathcal{I}(\mathcal{W})$; donc l'orthogonal de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{W})$ dans $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})'$ s'identifie à $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{W})^{\perp}/\mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp}$, ici $\mathcal{I}_k(\mathcal{W})^{\perp}$ désigne l'orthogonal de $\mathcal{I}_k(\mathcal{W})$ dans $\mathcal{I}(\mathcal{W})'$, et on obtient, comme au paragraphe 1.6, un isomorphisme
$$\Phi_j : \mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{W})^{\perp}/\mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{H \in \mathcal{H}_j} \mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})^{\Delta}.$$

On note $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp}_F = \mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp} \cap I(\mathcal{W})'_F$, et $\Phi_{j,F}$ la restriction de Φ_j à $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{W})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp}_F$. Alors

PROPOSITION 3.4.3. — *L'application $\Phi_{j,F}$ est un isomorphisme de $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{W})^{\perp}_F/\mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp}_F$ sur $\bigoplus_{H\in\mathcal{H}_j} \mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta}_F$.*

Démonstration. — On se ramène comme dans la démonstration de la proposition 3.3.1 au cas où $\mathcal{W}$ est un bon voisinage d'un élément semi-simple de G, puis on applique la proposition 1.8.3 comme dans la preuve du corollaire 5.2.2 de [Bo1]. □

Remarquons qu'on peut préciser l'ordre de $\Phi_{j,F}(\theta)$ en fonction de celui de θ comme dans la proposition 1.8.3, mais nous n'en avons pas besoin.

Revenons à l'action de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Il est clair que les $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})$ sont stables par $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Il en est donc de même des $\mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp}$; d'où une action naturelle de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathcal{I}_{j-1}(\mathcal{W})^{\perp}/\mathcal{I}_j(\mathcal{W})^{\perp}$. Soit $H\in\mathcal{H}_j$. Alors un calcul simple montre que pour tout $D\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et pour tout $\psi\in\mathcal{I}_j(\mathcal{W})$, on a

$$\Pi_H(D\cdot\psi) = \tau_{\Delta}(\gamma_H(D))\cdot\Pi_H(\psi).$$

Il en découle facilement, d'après (1) et (16), que pour tout $D\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et tout $u\in\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta}$ on a

$${}^t\Pi_H(\tau_{-\Delta}(\gamma_H(D))\cdot u) = D\cdot{}^t\,\Pi_H(u).$$

Donc si l'on fait opérer $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans $\bigoplus_{H\in\mathcal{H}_j}\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta}$ par

$$D\cdot\Big(\sum_{H\in\mathcal{H}_j} u_H\Big) = \sum_{H\in\mathcal{H}_j}\tau_{-\Delta}(\gamma_H(D))\cdot u_H,$$

il s'ensuit que l'isomorphisme Φ_j (et donc aussi $\Phi_{j,F}$) commute avec l'action de $Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

On note $\mathcal{H} = \cup_{0\leqslant j\leqslant p}\mathcal{H}_j$. Comme dans le paragraphe 1.7, on déduit des propositions 3.3.1 et 3.4.3 :

(F5) *L'espace $\mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_F$ admet une filtration finie, par des sous-espaces stables par $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, telle que le gradué associé soit isomorphe à*

$$\bigoplus_{H\in\mathcal{H}}\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta}_F,$$

et, pour tout $D\in Z(\mathfrak{g})$, on a

$$\mathrm{gr}(D)\sim\bigoplus_{H\in\mathcal{H}}\tau_{-\Delta}\gamma_H(D).$$

Remarque 3.4.4. — Lorsque $\mathcal{W} = G$ on peut montrer que la filtration ci-dessus est définie par une graduation. En effet, d'après [Bo2], théorème 3.2.1 et corollaire 7.4.3, il existe un isomorphisme Ψ de $\bigoplus_{H\in\mathcal{H}}\mathcal{D}'(H)^{\Delta}$ sur $\mathcal{D}'(G)^G$, qui commute avec l'action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ (l'action de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathcal{D}'(H)^{\Delta}$ est définie via $\tau_{-\Delta}\circ\gamma_H$). On déduit facilement de la définition de Ψ que l'image d'une distribution d'ordre fini est d'ordre fini. La formule d'inversion des intégrales orbitales (voir [Bo3]) implique sans difficulté que l'image réciproque d'une distribution d'ordre fini est aussi d'ordre fini. Ainsi Ψ induit un isomorphisme de $\bigoplus_{H\in\mathcal{H}}\mathcal{D}'(H)^{\Delta}_F$ sur $\mathcal{D}'(G)^G_F$.

4. Démonstration du théorème 2.

Comme pour les algèbres de Lie, on va démontrer une version un peu plus générale du théorème 2.

4.1. Réduction aux sous-groupes de Cartan.

On commence par la conséquence suivante de (F5) que l'on déduit comme dans la démonstration du théorème 1'.

PROPOSITION 4.1.1. — *Soit $D\in\mathcal{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $D\cdot\mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_F=\mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_F$.

(ii) *Pour tout sous-groupe de Cartan H de G on a*

$$\tau_{-\Delta}\gamma_H(D)\cdot\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta}_F=\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta}_F.$$

La propriété (ii) ne dépend pas du choix de Δ ; en effet soient Δ_1 et Δ_2 deux systèmes de racines imaginaires positives de H ; on pose $\mu=\rho_{\Delta_2}-\rho_{\Delta_1}$, alors μ est une somme de racines de H et la multiplication par ξ_μ réalise un isomorphisme de $\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})_F$ sur lui-même, qui envoie $\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta_1}_F$ sur $\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})^{\Delta_2}_F$, et vérifie

$$\xi_\mu(\tau_{-\Delta_1}(D)\cdot u)=\tau_{-\Delta_2}(D)\cdot(\xi_\mu u), \tag{17}$$

pour tout $D\in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^W$ et tout $u\in\mathcal{D}'(H\cap\mathcal{W})_F$.

4.2. Énoncé du théorème 2′.

Rappelons que $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{c}$) désigne l'algèbre dérivée (resp. le centre) de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{c}_I$ l'espace vectoriel des $X \in \mathfrak{c}$ tels que $\exp X$ appartient à un sous-groupe compact de G. On fixe un supplémentaire $\mathfrak{c}_R$ de $\mathfrak{c}_{\mathfrak{I}}$ dans $\mathfrak{c}$. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'_I$ (resp. $\mathfrak{h}'_R$) le sous-espace des $X \in \mathfrak{h}'$ tels que toutes les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ sont imaginaires pures (resp. réelles), $\mathfrak{h}_I = \mathfrak{h}'_I \oplus \mathfrak{c}_I$, $\mathfrak{h}_R = \mathfrak{h}'_R \oplus \mathfrak{c}_R$. Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_I \oplus \mathfrak{h}_R$.

Si H est un sous-groupe de Cartan de G, on note H_I son sous-groupe compact maximal. L'algèbre de Lie de H_I s'identifie à $\mathfrak{h}_I$ et l'application $(h, X) \mapsto h \exp X$ est un isomorphisme de groupes de Lie de $H_I \times \mathfrak{h}_R$ sur H. Pour simplifier, on dira qu'un ouvert Ω de H est R-convexe s'il existe un ouvert convexe ω de $\mathfrak{h}_R$ tel que $\Omega = H_I \exp \omega$. Comme pour les algèbres de Lie, on va démontrer une version locale du théorème 2. Pour cela on introduit la propriété (C′) suivante des ouverts complètement G-invariants $\mathcal{W}$ de G :

(C′) *Pour tout sous-groupe de Cartan H de G, $\mathcal{W} \cap H$ est R-convexe.*

Par exemple, pour $r > 0$, l'ensemble G_r des $x \in G$ tels que toute valeur propre λ de $\operatorname{Ad} x$ vérifie $|\lambda| < r$ est un ouvert complètement G-invariant qui vérifie la propriété (C′).

THÉORÈME 2′. — *Soient G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra, $D \in Z(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et $\mathcal{W}$ un ouvert complètement G-invariant de G vérifiant la propriété (C′). On suppose que, pour un sous-groupe de Cartan fondamental B, $\tau_\Delta(\gamma_B)(D)$ admet une solution élémentaire dans $\mathcal{D}'(B)$. Alors $D \cdot \mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_F = \mathcal{D}'(\mathcal{W})^G_F$.*

Remarquons que, d'après la formule (17), l'hypothèse sur D ne dépend pas du choix de Δ. Cette hypothèse est légèrement différente de celle de Benabdallah et Rouvière : ils supposent l'existence d'une solution élémentaire pour l'opérateur $\gamma_B(D)$ plutôt que pour $\tau_\Delta(\gamma_B)(D)$. Lorsque ρ_Δ est la différentielle d'un caractère ξ de B, les deux hypothèses sont équivalentes; en effet, en multipliant par ξ (resp. ξ^{-1}) une solution élémentaire de $\tau_\Delta(\gamma_B)(D)$ (resp. $\gamma_B(D)$), on obtient une solution élémentaire de $\gamma_B(D)$ (resp. $\tau_\Delta(\gamma_B)(D)$). Ainsi les deux conditions sont équivalentes si le groupe G est acceptable.

Soit H un sous-groupe de Cartan de G. L'application

$$\theta \mapsto \frac{1}{|W_G|} \sum_{w \in W_G} \epsilon_I(w) \xi_{\rho_\Delta - w \cdot \rho_\Delta} w \cdot \theta$$

est un projecteur de $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})_F$ sur $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})_F^\Delta$ qui commute avec l'action de $\tau_{-\Delta}(S(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^W)$. Donc, si pour un élément $D \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, l'opérateur $\tau_{-\Delta}(\gamma_H(D))$ envoie $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})_F$ sur lui-même, il envoie aussi $\mathcal{D}'(H \cap \mathcal{W})_F^\Delta$ sur lui-même. Donc pour démontrer le théorème $2'$, il suffit d'après la proposition 4.1.1 et compte tenu du fait que l'assertion (ii) de cette proposition ne dépend pas du choix de Δ, de montrer que l'hypothèse de ce théorème implique que, pour tout sous-groupe de Cartan H de G et pour tout ouvert R-convexe Ω de H, on a

$$\tau_\Delta \gamma_H(D) \cdot \mathcal{D}'(\Omega)_F = \mathcal{D}'(\Omega)_F. \tag{18}$$

On fera la démonstration en deux étapes :

LEMME 4.2.1. — *Soient H un sous-groupe de Cartan de G, D un opérateur différentiel invariant par translation sur H et Ω un ouvert R-convexe de H. Alors si D admet une solution élémentaire on a $D \cdot \mathcal{D}'(\Omega)_F = \mathcal{D}'(\Omega)_F$.*

LEMME 4.2.2. — *Soit $D \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. On suppose que pour un sous-groupe de Cartan fondamental B de G, l'opérateur différentiel $\tau_\Delta(\gamma_B(D))$ admet une solution élémentaire. Alors, pour tout sous-groupe de Cartan H de G, l'opérateur $\tau_\Delta(\gamma_H(D))$ admet une solution élémentaire.*

5. Démonstration du lemme 4.2.1.

On note H^0 (resp. H_I^0) la composante connexe de l'élément neutre de H (resp. H_I). Soit Ω un ouvert R-convexe de H. On écrit $\Omega = H_I \exp \omega$, ω un ouvert convexe de $\mathfrak{h}_R$, et on note $\Omega^0 = H_I^0 \exp \omega$. Comme Ω et D sont invariants par translation par les éléments de H_I, il suffit de montrer que

$$D \cdot \mathcal{D}'(\Omega^0)_F = D'(\Omega^0)_F.$$

L'application $(h, X) \mapsto h \exp X$ de $H_I^0 \times \mathfrak{h}_R$ dans H^0 est un isomorphisme de groupes de Lie, il suffit de démontrer le lemme pour le groupe $H_I^0 \times \mathfrak{h}_R$; où l'on convient d'appeler ouvert R-convexe tout ouvert de la forme $H_I^0 \times \omega$, ω ouvert convexe de $\mathfrak{h}_R$.

La démonstration repose sur les résultats de [H2] et [H3] dont on adoptera les conventions et les notations pour la commodité du lecteur. Pour ce faire, nous identifierons $\mathfrak{h}_R$ à $\mathbb{R}^n$ et H_I^0 au tore $\mathbb{T}^p = \{e^{i\theta} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_p}) : \theta_i \in \mathbb{R}\}$.

5.1. Opérateurs différentiels.

On va identifier l'espace des opérateurs différentiels invariants par translation sur chacun des groupes $\mathbb{T}^p$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ à un espace de polynômes.

On notera $\mathrm{Pol}[\eta]$ (resp. $\mathrm{Pol}[\xi]$), resp. $\mathrm{Pol}[\eta,\xi]$) l'espace des polynômes à coefficients complexes en les variables $(\eta_1, \dots, \eta_p)$ (resp. $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, resp. $(\eta_1, \dots, \eta_p, \xi_1, \dots, \xi_n)$).

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^p$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, on pose $\eta^\alpha = \eta_1^{\alpha_1} \cdots \eta_p^{\alpha_p}$, de sorte que tout élément P de $\mathrm{Pol}[\eta]$ s'écrit comme une somme finie : $P = \sum\limits_\alpha a_\alpha \eta^\alpha$. On note

$$\partial^\alpha = \Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\Big)^{\alpha_1} \cdots \Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta_p}\Big)^{\alpha_p}.$$

À tout $P \in \mathrm{Pol}[\eta]$, $P = \sum_\alpha a_\alpha \eta^\alpha$, on associe l'opérateur différentiel invariant par translation sur $\mathbb{T}^p$:

$$P(\partial) = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha \ ;$$

alors l'application $P \mapsto P(\partial)$ est une bijection de $\mathrm{Pol}[\eta]$ sur l'espace des opérateurs différentiels invariants par translation sur $\mathbb{T}^p$. On note

$$P(-\partial) = \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha,$$

de sorte que, avec nos conventions antérieures, pour tout $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^p)$ et tout $f \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$, on a

$$\langle P(\partial) \cdot u, f \rangle = \langle u, P(-\partial) \cdot f \rangle.$$

De même, pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$, on note

$$\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} \cdots \xi_n^{\beta_n}, \qquad D^\beta = \Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\beta_1} \cdots \Big(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\beta_n},$$

et à tout $Q \in \mathrm{Pol}[\xi]$, $Q = \sum_\beta b_\beta \xi^\beta$, on associe l'opérateur différentiel sur $\mathbb{R}^n$:

$$Q(D) = \sum_\beta b_\beta D^\beta.$$

Alors l'application $Q \mapsto Q(D)$ est une bijection de Pol$[\xi]$ sur l'espace des opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{R}^n$. Pour décrire l'action évidente des opérateurs différentiels sur les distributions, on introduit comme ci-dessus l'opérateur

$$Q(-D) = \sum_\beta (-1)^{|\beta|} b_\beta D^\beta.$$

On décrit de même les opérateurs différentiels invariants par translation sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$. Si $P \in \mathrm{Pol}[\eta, \xi]$ s'écrit $P(\eta, \xi) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \eta^\alpha \xi^\beta$, on lui associe l'opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$:

$$P(\mathbb{D}) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \partial^\alpha D^\beta,$$

et on note

$$P(-\mathbb{D}) = \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} c_{\alpha,\beta} \partial^\alpha D^\beta.$$

Pour tout ouvert U de $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ on notera $\mathcal{E}(U) = C^\infty(U)$ et $\mathcal{E}'(U)$ son dual (qui s'identifie à l'espace des distributions à support compact sur U). Lorsque $U = \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ on notera ces espaces simplement $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. De même $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n)$ sera noté simplement $\mathcal{D}'$.

5.2. Transformation de Fourier partielle.

Si $k \in \mathbb{Z}^p$, on note e_k le caractère de $\mathbb{T}^p$ défini par

$$e_k(e^{i\theta_1}, \cdots, e^{i\theta_p}) = e^{ik\cdot\theta} = e^{ik_1\theta_1} \cdots e^{ik_p\theta_p},$$

et

$$|k| = \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} k_i^2 \Big)^{1/2}.$$

Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{T}^p \times \omega)$, on définit la famille $(\hat{u}_k)_{k \in \mathbb{Z}^p}$, de distributions sur ω, qu'on appelle la transformée de Fourier partielle de u, par

$$\langle \hat{u}_k, \varphi \rangle = \langle u, e_{-k} \otimes \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_c^\infty(\omega).$$

Cette transformation a les propriétés évidentes suivantes relativement à l'action des opérateurs différentiels et au produit de convolution.

On écrit un polynôme $P \in \mathrm{Pol}[\eta, \xi]$ sous la forme $P(\eta, \xi) = \sum_\beta P_\beta(\eta)\xi^\beta$, avec $P_\beta \in \mathrm{Pol}[\eta]$, et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^p$, on note P_k le polynôme

$$P_k(\xi) = \sum_\beta P_\beta(k)\xi^\beta.$$

Alors pour toute distribution u sur $\mathbb{T}^p \times \omega$, on a

$$\left(\widehat{P(\mathbb{D}) \cdot u}\right)_k = P_k(D) \cdot \hat{u}_k,$$

et pour toutes distributions $u \in \mathcal{D}'$ et $v \in \mathcal{E}'$, on a

$$\left(\widehat{u \star v}\right)_k = \hat{u}_k \star \hat{v}_k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^p.$$

La proposition suivante ([CR], p. 575) caractérise les familles de distributions $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ obtenues par transformation de Fourier partielle.

PROPOSITION 5.2.1. — *La transformation de Fourier partielle réalise une bijection entre $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^p \times \omega)$ et l'espace formé par les familles $(v_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ de distributions sur ω telles que, pour tout compact $K \subset \omega$, il existe une constante $C > 0$ et deux entiers $a, s \in \mathbb{N}$ tels que*

$$(19) \qquad |\langle v_k, \varphi\rangle| \leqslant C(1 + |k|^2)^s \|\varphi\|_a, \ \ \forall \varphi \in C^\infty(K), \ \ \forall k \in \mathbb{Z}^p,$$

où $\|\varphi\|_a = \sup_{|\beta|\leqslant a} \|D^\beta \cdot \varphi\|_\infty$.

On note $d\theta$ la mesure de Haar sur le tore $\mathbb{T}^p$ pour laquelle il est de volume 1, et on note dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Dans la suite, quand on considère un espace de fonctions intégrables sur $\mathbb{T}^p$, sur $\mathbb{R}^n$ ou sur un ouvert ω de $\mathbb{R}^n$, on sous-entend qu'il est défini relativement à $d\theta$, dx ou la restriction de dx à ω.

Soient ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f \in L^2(\mathbb{T}^p \times \omega)$ et $k \in \mathbb{Z}^p$. Alors la fonction $\hat{f}_k$ définie pour presque tout $x \in \omega$ par

$$\hat{f}_k(x) = \int_{\mathbb{T}^p} e^{-ik\cdot\theta} f(e^{i\theta}, x) d\theta$$

appartient à $L^2(\omega)$. La famille de distributions associées aux fonctions $\hat{f}_k$ coïncide avec la transformée de Fourier partielle de la distribution associée à f.

Pour décrire l'image par la transformation de Fourier partielle de $L^2(\mathbb{T}^p \times \omega)$, on introduit l'espace $\mathcal{H}(\omega)$ des familles $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ dans $L^2(\omega)$ vérifiant

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \|f_k\|_2^2 < \infty,$$

et on le munit du produit hermitien

$$\big((f_k),(g_k)\big)=\sum_k \langle f_k,g_k\rangle_{L^2(\omega)}$$

qui en fait un espace de Hilbert. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la formule de Plancherel de $\mathbb{T}^p$.

PROPOSITION 5.2. — *Pour toute fonction $f\in L^2(\mathbb{T}^p\times\omega)$, la famille $(\hat f_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ appartient à $\mathcal{H}(\omega)$ et l'application $f\mapsto(\hat f_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{T}^p\times\omega)$ sur $\mathcal{H}(\omega)$.*

5.3. La fonction $\tilde P$.

Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on note $\mathrm{Pol}_m[\xi]$ le sous-espace de $\mathrm{Pol}[\xi]$ formé par les polynômes de degré $\leqslant m$. Suivant Hörmander ([H3], Exemple 10.1.3), si $P\in\mathrm{Pol}_m[\xi]$, on définit la fonction $\tilde P$ sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\tilde P(\zeta)=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha\cdot P(\zeta)|^2\Big)^{\frac12}.$$

Les propriétés suivantes de $\tilde P$ sont évidentes :

P-1 Si $P\neq 0$, la fonction $\tilde P$ est minorée inférieurement par une constante >0.

P-2 Pour tout $\zeta\in\mathbb{R}^n$, on a $|P(\zeta)|\leqslant\tilde P(\zeta)$.

P-3 L'application $P\mapsto\tilde P(0)$ est une norme sur $\mathrm{Pol}[\xi]$, que l'on notera $\|P\|$.

En outre (voir [H3], formules (10.1.8) et (10.4.3)) on a

LEMME 5.3.1. — *Soit $m\in\mathbb{N}$. Alors il existe une constante $C_m>0$ telle que, pour tout $P\in\mathrm{Pol}_m[\xi]$, on ait*

$$\tilde P(0)\leqslant C_m(1+|\zeta|)^m\tilde P(\zeta),\quad \forall\zeta\in\mathbb{R}^n, \tag{20}$$

et il existe une constante $C'_m>0$ telle que, pour tous $P,Q\in\mathrm{Pol}_m[\xi]$, on ait

$$\tilde P(\zeta)\tilde Q(\zeta)\leqslant C'_m\widetilde{PQ}(\zeta),\ \ \forall\zeta\in\mathbb{R}^n. \tag{21}$$

Pour tout entier m, on notera $q_m=(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^m$. C'est un élément de $\mathrm{Pol}_{2m}[\xi]$.

LEMME 5.3.2. — *Soit $m \in \mathbb{N}$. Alors il existe une constante $C''_m > 0$ telle que, pour tout $P \in \mathrm{Pol}_m[\xi]$, on ait*

$$\tilde{P}(0) \leqslant C''_m \widetilde{q_m P}(\zeta), \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{22}$$

Démonstration. — Pour tout $P \in \mathrm{Pol}_m[\xi]$ et tout $\zeta \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
\tilde{P}(0) &\leqslant C_m(1+|\zeta|)^m \tilde{P}(\zeta) && \text{(d'après (20))}\\
&\leqslant C_m(1+|\zeta|)^{2m} \tilde{P}(\zeta) &&\\
&\leqslant 2^m C_m q_m(\zeta)\tilde{P}(\zeta) &&\\
&\leqslant 2^m C_m \tilde{q_m}(\zeta)\underset{\sim}{\tilde{P}}(\zeta) && \text{(d'après (P-2))}\\
&\leqslant 2^m C_m C'_{2m} \widetilde{q_m P}(\zeta) && \text{(lemme 5.3.1),}
\end{aligned}$$

d'où le lemme. □

5.4. Solutions élémentaires sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$.

Comme on l'a dit dans l'introduction, on dispose d'un critère (théorème suivant) pour qu'un opérateur différentiel invariant par translation sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ ait une solution élémentaire; il est dû à Cérézo et Rouvière ([CR], §7).

THÉORÈME 5.4.1. — *Soit $P \in \mathrm{Pol}[\eta,\xi]$. Alors $P(\mathbb{D})$ admet une solution élémentaire sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ si et seulement si*

$$(\mathrm{C-R}) \quad \exists C > 0,\ \exists N \geqslant 0\ ;\ \forall k \in \mathbb{Z}^p, \quad \|P_k\| \geqslant \frac{C}{(1+|k|^2)^N}.$$

Remarque 5.4.2. — Si l'opérateur différentiel $P(\mathbb{D})$ admet une solution élémentaire E sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$P(\mathbb{D})(E * u) = u, \quad \forall u \in \mathcal{E}'. \tag{23}$$

$$E * (P(\mathbb{D})u) = u, \quad \forall u \in \mathcal{E}'. \tag{24}$$

PROPOSITION 5.4.3. — *Soit $P \in \mathrm{Pol}[\eta,\xi)]$ tel que $P(\mathbb{D})$ admet une solution élémentaire sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout ouvert R-convexe Ω de $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$, la restriction de $P(-\mathbb{D})$ à $\mathcal{E}'(\Omega)$ est injective, et $P(-\mathbb{D})\cdot\mathcal{E}'(\Omega)$ est un fermé de $\mathcal{E}'(\Omega)$ pour la topologie faible.*

Démonstration. — La restriction de $P(-\mathbb{D})$ à $\mathcal{E}'(\Omega)$ coïncide avec la transposée de l'application $P(\mathbb{D}) : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$. Alors, d'après le théorème de Banach (de surjectivité dans les espaces de Fréchet), la conclusion de la proposition est équivalente à $P(\mathbb{D}) \cdot \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$. Et cela est équivalent à ([Tr2], théorème 1.9) :

a) Ω est $P(-\mathbb{D})$-convexe, et

b) $P(\mathbb{D}) \cdot \mathcal{E}(\Omega) \supset C_c^\infty(\Omega)$.

La propriété (C-R) de P implique en particulier que $P_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^p$; la propriété a) découle alors de la R-convexité de Ω ([Ro], proposition 3.1). La propriété b) est une conséquence immédiate de (23).□

Pour démontrer le théorème 5.5.1 ci-dessous, nous avons besoin d'établir, sous l'hypothèse (C-R), l'existence d'une solution élémentaire de $P(\mathbb{D})$ dont la transformée de Fourier partielle est formée de distributions ayant certaines propriétés de régularité.

On notera $\mathrm{Pol}_m[\xi]^0$ l'espace $\mathrm{Pol}_m[\xi]$ privé du polynôme nul. Pour $Q \in \mathrm{Pol}_m[\xi]^0$ et $\zeta \in \mathbb{C}^n$, on notera P_ζ le polynôme défini par $P_\zeta(\xi) = P(\xi + \zeta)$.

LEMME 5.4.4 ([H2], lemme 7.3.12). — *Pour toute boule Z de $\mathbb{C}^n$ centrée en* 0, *on peut trouver une fonction positive $\Phi \in C^\infty(\mathrm{Pol}_m[\xi]^0 \times \mathbb{C}^n)$ telle que*

i) *$\Phi(Q, \zeta)$ est absolument homogène de dégré 0 relativement à Q.*

ii) *$\Phi(Q, \zeta) = 0$ si $\zeta \notin Z$.*

iii) *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $Q \in \mathrm{Pol}_m[\xi]^0$, on a*

$$\tilde{Q}(0) \leqslant C|Q(\zeta)| \quad \text{si } \Phi(Q, \zeta) \neq 0. \tag{25}$$

On va maintenant adapter à nos besoins le théorème 10.2.1 de [H3].

PROPOSITION 5.4.5. — *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une constante $C(m, \psi) > 0$ telle que, pour tout $Q \in \mathrm{Pol}_m[\xi]^0$, l'opérateur différentiel $Q(D)$ admet une solution élémentaire E sur $\mathbb{R}^n$ telle que*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{\psi E}(\xi) \tilde{Q}(\xi)| \leqslant C(m, \psi). \tag{26}$$

Démonstration. — Elle est essentiellement la même que celle du théorème 10.2.1 de [H3]. Soit $Q \in \mathrm{Pol}_m[\xi]^0$. On prend la solution élémentaire donnée par l'expression 7.3.22 de [H2] :

$$E(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{\mathbb{C}^n} \hat{\varphi}(-\xi - \zeta) \frac{\Phi(Q_\xi, \zeta)}{Q_\xi(\zeta)} \, d\zeta, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{27}$$

où $d\zeta$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$, et Φ désigne la fonction définie dans le lemme 5.4.4 et correspondant à la boule unité fermée de $\mathbb{C}^n$ (ce qui correspond à $\epsilon = 3$ dans la démonstration du théorème 10.2.1 de [H3]). Alors, en substituant dans la démonstration du théorème 10.2.1 de [H3] la fonction ψ à la fonction $1/ch\|3x\|$, on voit que, lorsque $|\zeta| \leqslant 3/2$, l'ensemble des fonctions : $x \mapsto \psi(x)e^{i\langle x,\zeta\rangle}$ est borné dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et donc les arguments de la démonstration du théorème 10.2.1 de [H3] permettent d'obtenir (26), qui est l'analogue de l'inégalité (10.2.3) dans [loc.cit.]. □

PROPOSITION 5.4.6. — *Soient $m \in \mathbb{N}$, $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $P \in \mathrm{Pol}[\eta,\xi]$ de dégré $\leqslant m$ par rapport à ξ et vérifiant la condition (C-R). Alors il existe une solution élémentaire E de $P(\mathbb{D})$ sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ telle que*

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{\psi \hat{E}_k}(\xi)\tilde{P}_k(\xi)| \leqslant C(m,\psi), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^p. \tag{28}$$

Démonstration. — Pour $k \in \mathbb{Z}^p$, on a $P_k \neq 0$ d'après (C-R). On notera F_k la solution élémentaire sur $\mathbb{R}^n$ de $P_k(D)$ donnée par la proposition 5.4.5 :

$$F_k(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \int_{\mathbb{C}^n} \hat{\varphi}(-\xi-\zeta)\, \frac{\Phi((P_k)_\xi,\zeta)}{(P_k)_\xi(\zeta)}\, d\zeta, \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{29}$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{Z}^p$ le degré de P_k est $\leqslant m$, il suffit, d'après (26) et (27), de démontrer que la famille de distributions $(F_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ est la transformée de Fourier partielle d'une distribution E sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire qu'elle vérifie la condition (19) (voir proposition 5.2.1).

Soit $R > 0$. On note $\overline{B}(0,R)$ la boule fermée de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon R. Pour toute fonction $\varphi \in C^\infty(\overline{B}(0,R))$, on a ([H2], 7.3.1)

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leqslant \|\varphi\|_{L^1} e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

et donc

$$|\zeta^\alpha \hat{\varphi}(\zeta)| \leqslant \|D^\alpha\varphi\|_{L^1} e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

D'où, si $a \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$(1+|\xi+\zeta|)^a |\hat{\varphi}(-\xi-\zeta)| \leqslant C_1 e^{R|Im\,\zeta|} \sum_{|\alpha|\leqslant a} \|D^\alpha\varphi\|_\infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Donc, comme $|\operatorname{Im}\zeta|$ reste borné lorsque ζ décrit Z (la boule unité de $\mathbb{C}^n$), il existe une constante C_2 (indépendante de φ) telle que

$$(1+|\xi+\zeta|)^a |\hat{\varphi}(-\xi-\zeta)| \leqslant C_2 \|\varphi\|_a \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ \forall \zeta \in Z. \tag{30}$$

D'autre part, puisque $\widetilde{(Q_\xi)}(0) = \tilde{Q}(\xi)$, on déduit des inégalités (20) et (25) et de la condition (C-R) qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que, pour $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ et $k \in \mathbb{Z}^p$, on a

$$(31) \qquad |(P_k)_\xi(\zeta)|(1+|\xi|)^m \geqslant \frac{C_3}{(1+|k|^2)^N} \quad \text{si } \Phi((P_k)_\xi, \zeta) \neq 0.$$

On déduit du lemme 5.4.4 que la fonction Φ est bornée. Alors, d'après (29), (30) et (31), il existe une constante $C_4 > 0$ (indépendante de φ) telle que

$$|\langle F_k, \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_a(1+|k|^2)^N \int_{\mathbb{R}^n \times Z} \frac{(1+|\xi|)^m}{(1+|\xi+\zeta|)^a} d\xi d\zeta, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^p,$$

et par suite, pour $a > m+n$, il existe une constante $C_5 > 0$ telle que

$$|\langle F_k, \varphi\rangle| \leqslant C_5(1+|k|^2)^N\|\varphi\|_a, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^p, \ \forall \varphi \in C^\infty(\overline{B}(0,R)).$$

Ainsi la famille $(F_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ vérifie la condition (19) de la proposition 5.2.1.□

5.5. Solutions d'ordre fini des équations différentielles dans $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$.

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note $r_N(\eta) = (1+\eta_1^2+\cdots+\eta_p^2)^N$; c'est un élément de $\mathrm{Pol}[\eta]$.

Pour tout ouvert U de $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$, on note $L^2_{\mathrm{loc}}(U)$ l'espace des fonctions localement de carré intégrable sur U; lorsque $U = \mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$, on le note simplement L^2_{loc}. Il est muni de la topologie de la convergence dans $L^2(U)$ sur tout compact de U (voir [M1]) qui en fait un espace de Fréchet.

Si $K \subset U$ est un compact, on note $L^2(K)$ le sous-espace de $L^2(U)$ formé par les fonctions dont le support est dans K, muni de la topologie induite par $L^2(U)$.

On note $L^2_{\mathrm{comp}}(U)$ la réunion des $L^2(K)$, K parcourant l'ensemble des parties compactes de U, muni de la topologie de la limite inductive. Les espaces $L^2_{\mathrm{loc}}(U)$ et $L^2_{\mathrm{comp}}(U)$ sont chacun dual de l'autre.

THÉORÈME 5.5.1. — *Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit $P \in \mathrm{Pol}[\eta,\xi]$ de degré $\leqslant m$ par rapport à la variable ξ et vérifiant la propriété (C-R) :*

$$(32) \qquad \exists\, C_1 > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N} \ ; \ \forall k \in \mathbb{Z}^p, \ \|P_k\| \geqslant \frac{C_1}{(1+|k|^2)^N}.$$

On note $Q(\eta,\xi) = r_N(\eta)q_m(\xi)$. *Alors*

i) *l'opérateur différentiel* $(QP)(\mathbb{D})$ *admet une solution élémentaire* E *telle que, pour toute fonction* $\varphi \in L^2_{\text{comp}}$, $E * \varphi$ *appartient à* L^2_{loc},

ii) *pour tout ouvert R-convexe* Ω *de* $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$, *on a*

$$(QP)(\mathbb{D}) \cdot L^2_{\text{loc}}(\Omega) \supset L^2_{\text{loc}}(\Omega).$$

Démonstration. — Pour tout $k \in \mathbb{Z}^p$, on a

$$(QP)_k(\zeta) = r_N(k)q_m(\zeta)P_k(\zeta)\ ;$$

par suite

$$\widetilde{(QP)}_k = [r_N(k)\widetilde{q_m P_k}] = (1+|k|^2)^N \widetilde{q_m P_k}.$$

Alors, d'après le lemme 5.3.2, il existe une constante $C_2 > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^p$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\widetilde{(QP)}_k(\xi) \geqslant C_2(1+|k|^2)^N \widetilde{P_k}(0).$$

Il s'ensuit, d'après (32), que

$$\widetilde{(QP)}_k(\xi) \geqslant C_1C_2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^p,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{33}$$

en particulier QP vérifie la condition (C-R).

On note E la solution élémentaire de l'opérateur différentiel $(QP)(\mathbb{D})$ donnée par la proposition 5.4.6. Soit K un compact de $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ et soit $\varphi \in L^2(K)$. On voit facilement, d'après les propositions 5.2.1 et 5.2.2, que pour montrer que $E * \varphi$ appartient à L^2_{loc}, il suffit de montrer que, pour tout ouvert relativement compact ω de $\mathbb{R}^n$, si on note $U = \mathbb{T}^p \times \omega$, alors

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p, \big(\widehat{(E * \varphi)_{|U}}\big)_k \in L^2(\omega) \ \text{ et } \ \sum_k \|\big(\widehat{(E * \varphi)_{|U}}\big)_k\|_2^2 < \infty.$$

Remarquons que, pour tout $u \in \mathcal{D}'$ et tout $k \in \mathbb{Z}^p$,

$$\big(\widehat{u_{|U}}\big)_k = (\hat{u}_k)_{|\omega},$$

donc

$$\big(\widehat{(E * \varphi)_{|U}}\big)_k = \big(\widehat{(E * \varphi)}_k\big)_{|\omega} = \big(\hat{E}_k * \hat{\varphi}_k\big)_{|\omega}.$$

Il suffit alors de montrer que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p, \big(\hat{E}_k * \hat{\varphi}_k\big)_{|\omega} \in L^2(\omega) \ \text{ et } \ \sum_k \|\big(\hat{E}_k * \hat{\varphi}_k\big)_{|\omega}\|_2^2 < \infty.$$

Sans nuire à la généralité, on supposera $K \subset U$; cela nous permettra de considérer φ comme un élément de $L^2(U)$.

On fixe une fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ égale à 1 dans un voisinage de l'adhérence de l'ensemble $\omega - \omega = \{x - y; x \in \omega, y \in \omega\}$, et on pose $F_k = \psi \hat{E}_k$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}^p$, on a

$$(\hat{E}_k * \hat{\varphi}_k)_{|_\omega} = (F_k * \hat{\varphi}_k)_{|_\omega}.$$

D'après le théorème 10.3.7 de [H3] (plus précisément sa démonstration), $(F_k * \hat{\varphi}_k)_{|_\omega}$ appartient à $L^2(\omega)$ et (en prenant le polynôme P (resp. Q) de [loc.cit.] égal à $(QP)_k$ (resp. 1)), on a

$$\begin{aligned}\|(F_k * \hat{\varphi}_k)_{|_\omega}\|_2 &\leqslant \|\varphi_k\|_2 \cdot \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\hat{F}_k(\xi)(\widetilde{QP})_k(\xi)| \cdot \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{(\widetilde{QP})_k(\xi)} \\ &\leqslant \frac{C(m,\psi)}{C_1 C_2} \|\hat{\varphi}_k\|_2 \quad \text{d'après (28) et (33).}\end{aligned}$$

On pose $C = \frac{C(m,\psi)}{C_1 C_2}$. Alors

$$\|(\hat{E}_k * \hat{\varphi}_k)_{|_\omega}\|_2^2 = \|(F_k * \hat{\varphi}_k)_{|_\omega}\|_2^2 \leqslant C^2 \|\hat{\varphi}_k\|_2^2.$$

D'après (5.2.2), on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \|\hat{\varphi}_k\|_2^2 = \|\varphi\|_2^2.$$

Donc

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \|(\hat{E}_k * \hat{\varphi}_k)_{|_\omega}\|_2^2 \leqslant C^2 \|\varphi\|_2^2 < \infty.$$

Cela prouve i).

Pour l'assertion ii), nous allons adapter à notre situation la démonstration de Malgrange ([M1], théorème 4). Pour alléger les notations, posons $\mathbb{D} = (QP)(\mathbb{D})$ et $\check{\mathbb{D}} = QP(-\mathbb{D})$.

Soit Ω un ouvert R-convexe de $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$. Notons

$$\mathcal{F} = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \ ; \ \mathbb{D} \cdot f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)\},$$

($\mathbb{D}$ agit dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ au sens des distributions.)

On munit $\mathcal{F}$ de la topologie localement convexe la moins fine pour laquelle les applications $f \mapsto f$ et $f \mapsto \mathbb{D} \cdot f$ de $\mathcal{F}$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ sont continues.

Il est facile de voir que l'espace vectoriel localement convexe $\mathcal{F}$ s'identifie au sous-espace $\widetilde{\mathcal{F}}$ de $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ formé des couples $(f, \mathbb{D} \cdot f)$, $f \in \mathcal{F}$, muni de la topologie induite, et que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un sous-espace fermé de $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Donc $\mathcal{F}$ est un espace de Fréchet.

Il suffit de montrer que l'application linéaire continue $T : \mathcal{F} \to L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, définie par $T(f) = \mathbb{D} \cdot f$, est surjective. Comme $\mathcal{F}$ et $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ sont des espaces de Fréchet, il suffit, d'après le théorème de Banach, de montrer que ${}^tT$ est injective et son image est faiblement fermée dans $\mathcal{F}'$.

Commençons par remarquer que $\mathcal{E}(\Omega)$ est un sous-espace dense de $\mathcal{F}$; en effet, il est clair par définition que $\mathcal{E}(\Omega) \subset \mathcal{F}$ et que la topologie de $\mathcal{F}$ est définie par les familles de semi-normes : p_ψ, q_ψ (ψ parcourant $C_c^\infty(\Omega)$) définies par

$$p_\psi(f) = \|\psi f\|_2, \quad q_\psi(f) = \|\psi \mathbb{D} \cdot f\|_2, \ \ f \in \mathcal{F}.$$

Il s'agit donc de montrer que pour tout $f \in \mathcal{F}$, tout $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$ telle que

$$p_\psi(f - \varphi) < \epsilon, \quad \text{et} \quad q_\psi(f - \varphi) < \epsilon. \tag{34}$$

Soient donc $f \in \mathcal{F}$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ et $\epsilon > 0$. On fixe une fonction $\chi \in C_c^\infty(\Omega)$ qui vaut 1 dans un voisinage du support de ψ et une suite régularisante $(\chi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $C_c^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n)$. On pose $\varphi_n = \chi_n * \chi f$. Alors φ_n appartient à $C_c^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n)$ et pour n assez grand son support est inclus dans Ω.

Comme $\chi f \in L^2(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n)$, il est bien connu que $\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \chi f\|_2 = 0$, or

$$p_\psi(\varphi_n - f) = \|\psi\varphi_n - \psi\chi f\|_2 \leqslant \|\psi\|_\infty \|\varphi_n - \chi f\|_2,$$

donc $\lim_{n\to\infty} p_\psi(\varphi_n - f) = 0$.

Pour n assez grand on a

$$\psi \mathbb{D} \cdot \varphi_n = \psi(\chi_n * (\mathbb{D} \cdot \chi f)) = \psi(\chi_n * (\chi \mathbb{D} \cdot f)).$$

Comme $\chi \mathbb{D} \cdot f \in L^2(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n)$, on en déduit comme précédemment que $\lim_{n\to\infty} q_\psi(\varphi_n - f) = 0$. On voit donc que pour n assez grand φ_n vérifie les inégalités (34).

Il est clair que l'injection canonique de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\mathcal{F}$, que l'on notera ι, est continue; cela découle de la caractérisation des topologies initiales. Donc ${}^t\iota$ est une application injective de $\mathcal{F}'$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ (c'est l'opération de restriction à $\mathcal{E}(\Omega)$).

D'après (33) et la proposition 5.4.3, l'application $\check{\mathbb{D}} : \mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{E}'(\Omega)$ est injective. Comme l'espace $L^2_{\text{comp}}(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{E}'(\Omega)$, la restriction de $\check{\mathbb{D}}$ à $L^2_{\text{comp}}(\Omega)$ est injective. Or si $\varphi \in L^2_{\text{comp}}(\Omega)$, on a

$${}^t\iota({}^tT(\varphi)) = \check{\mathbb{D}}(\varphi),$$

donc forcément ${}^tT$ est injective.

Soit $\nu \in \mathcal{F}'$ dans l'adhérence faible de ${}^tT(L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega))$. Comme ${}^t\iota$ est continue pour les topologies faibles, ${}^t\iota(\nu)$ appartient à l'adhérence faible de ${}^t\iota({}^tT(L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega))$ dans $\mathcal{E}'(\Omega)$; c'est-à-dire l'adhérence faible de $\check{\mathbb{D}}\cdot L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$. Or $\check{\mathbb{D}}\cdot L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega) \subset \check{\mathbb{D}}\cdot\mathcal{E}'(\Omega)$ et, d'après (33) et la proposition 5.4.3, ${}^t\mathbb{D}\cdot\mathcal{E}'(\Omega)$ est un fermé de $\mathcal{E}'(\Omega)$ pour la topologie faible, donc ${}^t\iota(\nu)$ appartient à ${}^t\mathbb{D}\cdot\mathcal{E}'(\Omega)$, et il existe alors $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$ tel que ${}^t\iota(\nu) = \check{\mathbb{D}}\cdot\mu$.

Toute forme linéaire continue sur $\widetilde{\mathcal{F}}$ est la restriction d'une forme linéaire continue sur $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \times L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Donc, pour tout $\lambda \in \mathcal{F}'$, il existe $(\psi_1, \psi_2) \in L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega) \times L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ tels que

$$\lambda(f) = \langle f, \psi_1\rangle + \langle \mathbb{D}\cdot f, \psi_2\rangle, \quad \forall f \in \mathcal{F},$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le crochet de dualité entre $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et $L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$. On peut alors écrire

$$(35) \qquad {}^t\iota(\nu) = \varphi_1 + \check{\mathbb{D}}\cdot\varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega).$$

Soit maintenant E une solution élémentaire de $\mathbb{D}$ vérifiant i) : $E * L^2_{\mathrm{comp}} \subset L^2_{\mathrm{loc}}$. Pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n)$, on note $\check{f}$ la fonction sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ définie par $\check{f}(x) = f(x^{-1})$; alors $\check{f}$ appartient aussi à $C_c^\infty(\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n)$. Pour $\theta \in \mathcal{D}'$, on définit la distribution $\check{\theta}$ sur $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$ par

$$\langle\check{\theta}, f\rangle = \langle\theta, \check{f}\rangle.$$

On vérifie alors facilement que $\check{E}$ est une solution élémentaire de $\check{\mathbb{D}}$ vérifiant aussi $\check{E} * L^2_{\mathrm{comp}} \subset L^2_{\mathrm{loc}}$. L'espace $\mathcal{E}'(\Omega)$ (resp. $L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$) s'identifie canoniquement à un sous-espace de $\mathcal{E}'$ (resp. L^2_{comp}), alors en appliquant l'opérateur $\check{E} * \cdot$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu &= \check{E} * \big(\check{\mathbb{D}}\cdot\mu\big) && \text{(d'après (24))}\\
&= \check{E} * {}^t\iota(\nu) &&\\
&= \check{E} * \big(\varphi_1 + \check{\mathbb{D}}\cdot\varphi_2\big) && \text{(d'après (35))}\\
&= (\check{E} * \varphi_1) + \varphi_2. &&
\end{aligned}$$

Comme $\check{E} * \varphi_1 \in L^2_{\mathrm{loc}}$, $\varphi_2 \in L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ et $L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega) \subset L^2_{\mathrm{loc}}$, il s'ensuit que μ appartient à L^2_{loc}, et donc $\mu \in L^2_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, car $\mu \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Ainsi pour tout $f \in \mathcal{E}(\Omega)$, on a

$$\langle\nu, f\rangle = \langle\mu, \mathbb{D}\cdot f\rangle = \langle{}^tT(\mu), f\rangle.$$

Donc ${}^tT(\mu)$ et ν coïncident sur le sous-espace dense $\mathcal{E}(\Omega)$ de $\mathcal{F}$; d'où ${}^tT(\mu) = \nu$, et l'image de ${}^tT$ est bien faiblement fermée dans $\mathcal{F}'$. $\square$

Le théorème suivant résume les résultats du paragraphe 5 et complète la preuve du lemme 4.2.1.

THÉORÈME 5.5.2. — *Soit* $P \in \mathrm{Pol}[\eta, \xi]$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $P(\mathbb{D})$ *admet une solution élémentaire sur* $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$.

2) *Pour tout ouvert R-convexe* Ω *de* $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$, *on a* $P(\mathbb{D}) \cdot \mathcal{D}'_F(\Omega) = \mathcal{D}'_F(\Omega)$.

3) *P vérifie la condition (C-R).*

Démonstration. — Les assertions 1) et 3) sont équivalentes d'après le théorème 5.4.1. Il est évident que 1) découle de 2). On suppose que P vérifie 1) et on fixe un ouvert R-convexe Ω de $\mathbb{T}^p \times \mathbb{R}^n$. On sait d'après le théorème 5.5.1 qu'il existe $Q \in \mathrm{Pol}[\eta, \xi]$ tel que $(QP)(\mathbb{D}) \cdot L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \supset L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Il est bien connu que toute distribution ν d'ordre fini sur Ω s'écrit comme une combinaison linéaire finie de "dérivées" de fonctions appartenant à $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (on peut aussi les prendre continues) :

$$\nu = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} R_i(\mathbb{D}) \cdot f_i,$$

$R_i \in \mathrm{Pol}[\eta, \xi]$ et $f_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pour tout indice i, $1 \leqslant i \leqslant k$, il existe $g_i \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que $(QP)(\mathbb{D}) \cdot g_i = f_i$. Alors la distribution $\mu = \sum_{1 \leqslant i \leqslant k} (QR_i)(\mathbb{D}) \cdot g_i$ est d'ordre fini et $P(\mathbb{D}) \cdot \mu = \nu$. Cela montre 2) et achève la preuve du théorème. □

6. Démonstration du lemme 4.2.2.

Ce lemme est énoncé dans [BR] avec $\gamma_H(D)$ à la place de $\tau_\Delta(\gamma_H(D))$. Comme à notre connaissance sa démonstration n'a pas été publiée, nous en proposons une preuve. Pour simplifier, on notera dans la suite $D_H = \tau_\Delta(\gamma_H(D))$.

On fixe un sous-groupe de Cartan fondamental B de G et on suppose que D_B admet une solution élémentaire. Il est clair que si l'assertion du lemme est vraie pour un sous-groupe de Cartan, elle est vraie aussi pour tous ses conjugués; en particulier elle est vraie pour tous les sous-groupes de Cartan fondamentaux. Il suffit donc de la démontrer pour un ensemble de sous-groupes de Cartan qui rencontre toutes les classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G. On le fera pour les sous-groupes de Cartan dont l'algèbre de Lie est obtenue par une transformation de Cayley de $\mathfrak{b}$.

Remarquons que, si H est un sous-groupe de Cartan, il suffit de montrer l'existence d'une solution élémentaire de D_H sur H^0, la composante connexe de l'élément neutre de H, car en prolongeant une telle solution par 0 sur les autres composantes connexes on obtient une solution élémentaire sur H.

6.1. Transformation de Cayley.

Rappelons que $\mathfrak{g}'$ (resp. $\mathfrak{c}$) désigne l'algèbre dérivée (resp. le centre) de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{c}_I$ l'espace vectoriel des $X \in \mathfrak{c}$ tels que $\exp X$ appartient à un sous-groupe compact de G. On fixe un supplémentaire $\mathfrak{c}_R$ de $\mathfrak{c}_I$ dans $\mathfrak{c}$. Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}'_I$ (resp. $\mathfrak{h}'_R$) le sous-espace des $X \in \mathfrak{h}'$ tels que toutes les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ sont imaginaires pures (resp. réelles), $\mathfrak{h}_I = \mathfrak{h}'_I \oplus \mathfrak{c}_I$, $\mathfrak{h}_R = \mathfrak{h}'_R \oplus \mathfrak{c}_R$. Alors $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_I \oplus \mathfrak{h}_R$. On note H le sous-groupe de Cartan de G correspondant à $\mathfrak{h}$ et $T_H = \exp \mathfrak{h}_I$. Alors T_H est le sous-groupe compact maximal de H^0 et l'application $(t, X) \mapsto t \exp X$ est un isomorphisme de groupes de Lie de $T_H \times \mathfrak{h}_R$ sur H^0.

On fixe une forme bilinéaire symétrique non dégénérée κ sur $\mathfrak{g}$ telle que sa restriction à $\mathfrak{g}'$ soit la forme de Killing et sa restriction à $\mathfrak{c}_I$ (resp. $\mathfrak{c}_R$) soit définie négative (resp. positive). Alors la restriction de κ à $\mathfrak{h}_I$ (resp. $\mathfrak{h}_R$) est définie négative (resp. positive) pour toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Dans la suite $\mathfrak{h}_R$ (resp. $\mathfrak{h}_I$) sera muni de la structure euclidienne définie par κ (resp. $-\kappa$). Cela permet d'identifier chacun de ces espaces avec son dual et de munir celui-ci d'une structure euclidienne.

On note Γ_H l'ensemble des $X \in \mathfrak{h}_I$ tels que $\exp X = 1$; c'est un réseau dans $\mathfrak{h}_I$. On note Γ^*_H l'ensemble des $\mu \in i\mathfrak{h}^*_I$ tels que $\mu(\gamma) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ pour tout $\gamma \in \Gamma_H$. Alors tout $\mu \in \Gamma^*_H$ définit un caractère ξ_μ de T_H par $\xi_\mu(\exp X) = e^{\mu(X)}$, et l'application $\mu \mapsto \xi_\mu$ est une bijection de Γ^*_H sur le groupe des caractères de T_H.

Soit H un sous-groupe de Cartan de G. On suppose que son algèbre de Lie est obtenue par une transformation de Cayley de $\mathfrak{b}$. Nous renvoyons à [S] pour la définition précise et rappelons ici seulement ce dont on a besoin. On a

– $\mathfrak{h}_I \subset \mathfrak{b}_I$

– $\mathfrak{b}_R \subset \mathfrak{h}_R$

– il existe un automorphisme intérieur c de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tel que $c(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et $c(X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{h}_I$ et pour tout $X \in \mathfrak{b}_R$

– on note $\mathfrak{u}$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}_I$ dans $\mathfrak{b}_I$ et $\mathfrak{v}$ l'orthogonal de $\mathfrak{b}_R$ dans $\mathfrak{h}_R$, alors $\Gamma_B \cap \mathfrak{u}$ est un réseau dans $\mathfrak{u}$ et $c(\mathfrak{u}) = i\mathfrak{v}$.

Lorsqu'un espace vectoriel est somme directe d'une famille de sous-espaces, on identifie le dual de chacun de ces sous-espaces avec l'orthogonal de la somme des autres sous-espaces. On utilise cela pour les différentes décompositions des sous-algèbres de Cartan. Par exemple, on identifie $\mathfrak{h}_{\mathfrak{I}}$ avec l'orthogonal de $\mathfrak{h}_R$ dans $\mathfrak{h}^*$; ainsi une racine imaginaire de $\mathfrak{h}$ est vue comme un élément de $i\mathfrak{h}_I^*$.

Pour distinguer entre les différents ρ_Δ qui interviennent dans la suite, on note $\rho_{\mathfrak{h}}$ pour désigner le ρ_Δ correspondant à $\mathfrak{h}$.

LEMME 6.1.1. — *On utilise les notations ci-dessus. Alors* $\rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}_I} - \rho_{\mathfrak{h}}$ *appartient à* Γ_H^*.

Démonstration. — Si K est un sous-groupe de Cartan de G et si Δ et Δ' sont deux systèmes de racines imaginaires positives de $\mathfrak{k}$, la différence $\rho_\Delta - \rho_{\Delta'}$ est une somme de racines de $\mathfrak{k}$; elle appartient donc à Γ_K^*. Comme $\Gamma_H \subset \Gamma_B$, il s'ensuit que la conclusion du lemme ne dépend pas du choix des systèmes de racines imaginaires positives qui définissent $\rho_{\mathfrak{b}}$ et $\rho_{\mathfrak{h}}$. On va faire un choix particulier.

On note I l'ensemble des racines imaginaires de $\mathfrak{b}$, I^0 l'ensemble des $\alpha \in I$ nulles sur $\mathfrak{u}$ et I^1 l'ensemble des $\alpha \in I$ nulles sur $\mathfrak{h}_I$. Si $\alpha \in I$, on note $\tilde{\alpha}$ sa restriction à $\mathfrak{h}_I$. Alors $\tilde{\alpha}$ est une racine imaginaire de $\mathfrak{h}$, et l'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est une bijection de I^0 sur l'ensemble des racines imaginaires de $\mathfrak{h}$. On fixe un choix de Δ pour $\mathfrak{b}$, et on note $\tilde{\Delta}$ l'ensemble des $\tilde{\alpha}$, $\alpha \in \Delta \cap I^0$. Alors $\tilde{\Delta}$ est un système de racines imaginaires positives de $\mathfrak{h}$. Pour ces choix, on a

$$\rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}_I} - \rho_{\mathfrak{h}} = \sum_{\alpha \in \Delta \setminus (I^0 \cup I^1)} \frac{1}{2} \alpha_{|\mathfrak{h}_I}. \tag{36}$$

Si $\alpha \in \Delta \setminus (I^0 \cup I^1)$, on note $\bar{\alpha}$ l'élément de $i\mathfrak{b}_I^*$ qui coïncide avec α sur $\mathfrak{u}$ et coïncide avec $-\alpha$ sur $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{h}$. Alors $\bar{\alpha}$ est aussi une racine imaginaire, et il en est de même de $-\bar{\alpha}$; chacune des deux racines $\pm\bar{\alpha}$ est distincte de α et de $-\alpha$. Cela découle du fait que $c \cdot \alpha$ est une racine complexe de $\mathfrak{h}$, et $\bar{\alpha}$ est définie de sorte que $c \cdot \bar{\alpha} = \overline{c \cdot \alpha}$; où $\overline{c \cdot \alpha}$ désigne la conjuguée habituelle de la racine $c \cdot \alpha$ de $\mathfrak{h}$. Il s'ensuit que $\bar{\alpha}$ ou bien $-\bar{\alpha}$ appartient aussi à $\Delta \setminus (I^0 \cup I^1)$; dans le premier cas

$$\frac{1}{2}\alpha_{|\mathfrak{h}_\mathfrak{I}} + \frac{1}{2}\bar{\alpha}_{|\mathfrak{h}_I} = 0,$$

dans le second

$$\frac{1}{2}\alpha_{|\mathfrak{h}_I} + \frac{1}{2}\bar{\alpha}_{|\mathfrak{h}_I} = \alpha_{|\mathfrak{h}_I}.$$

Donc le membre de droite de (36) est la restriction à $\mathfrak{h}_I$ d'une somme de racines imaginaires de $\mathfrak{b}$; c'est donc un élément de Γ_H^*. □

LEMME 6.1.2. — *Il existe un nombre fini de formes linéaires $\mu_1, \dots \mu_r \in i\mathfrak{u}^*$ telles que, pour tout $\nu \in \Gamma_H^*$, il existe un entier j, $1 \leqslant j \leqslant r$, tel que $\nu - \rho_\mathfrak{h} + \rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}_I} + \mu_j$ soit un élément de Γ_B^*.*

Démonstration. — Comme $\Gamma_B \cap \mathfrak{u}$ est un réseau dans $\mathfrak{u}$, le sous-groupe $U = \exp \mathfrak{u}$ est fermé dans T_B. Donc $T_B = UT_H$, et $U \cap T_H$ est un sous-groupe commutatif fini, qu'on notera F. On fixe, pour tout caractère χ de F, un caractère π_χ de U qui le prolonge, et on ote μ_χ l'élément de $i\mathfrak{u}^*$ qui vérifie

$$\pi_\chi(\exp X) = e^{\mu_\chi(X)}, \quad \forall X \in \mathfrak{u}.$$

D'après le lemme 6.1.1, $\nu - \rho_\mathfrak{h} + \rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}_I}$ appartient à Γ_H^* ; c'est donc la différentielle d'un caractère π_ν de T_H, dont on note χ_ν la restriction à F. Il existe alors un caractère π de T_B dont la restriction à T_H est π_ν et la restriction à U est π_{χ_ν}. La différentielle de ce caractère est

$$\nu - \rho_\mathfrak{h} + \rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}_I} + \mu_{\chi_\nu}.$$

Cela prouve le lemme. □

6.2. Retour sur la condition de Cérézo-Rouvière.

On va mettre la condition de Cérézo-Rouvière sous une forme indépendante des coordonnées. Soit V un espace vectoriel euclidien de dimension finie ; on note $q = \dim V$ et $\langle , \rangle$ le produit scalaire de V.

L'espace $S(V_\mathbb{C})$ s'identifie à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur V ; on note, dans ce paragraphe, $\partial(P)$ l'opérateur différentiel associé à $P \in S(V_\mathbb{C})$. Il existe un unique isomorphisme d'algèbres $P \mapsto P^*$ de $S(V_{\mathbb{C}})$ sur $S(V_{\mathbb{C}}^*)$ (identifié à l'algèbre des fonctions polynômes sur V) tel que $v^*(w) = i\langle v, w\rangle$ pour tous $v, w \in V$. On munit $S(V_{\mathbb{C}})$ d'un produit scalaire par

$$\langle P, Q\rangle = \partial(\bar{P}) \cdot Q^*(0),$$

et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Le choix d'une base orthonormée de V permet d'identifier $S(V_{\mathbb{C}}^*)$ à l'algèbre des polynômes en q indéterminées sur $\mathbb{C}$; le choix de l'isomorphisme $P \mapsto P^*$ est tel que $P^*(D) = \partial(P)$ et $\|P\| = \|P^*\|$ (P^* est considéré comme un polynôme en q variables et sa norme est définie au paragraphe 5.3).

Supposons que V soit somme directe de deux sous-espaces U et W. On identifie U^* (resp. W^*) à l'orthogonal de W (resp. U) dans V^*. Soit $P \in S(V_{\mathbb{C}})$. Pour tout $\lambda \in U_{\mathbb{C}}^*$, on note P_λ l'unique élément de $S(W_{\mathbb{C}})$ tel que $P_\lambda(\nu) = P(\lambda + \nu)$ pour tout $\nu \in W^*$ (ici P est vu comme un polynôme sur $V_{\mathbb{C}}^*$).

Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit $P \in S(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Alors $\partial(P)$ admet une solution élémentaire dans H^0 si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\|P_\mu\| \geqslant \frac{C}{(1 + \|\mu\|^2)^N}, \quad \forall \mu \in \Gamma_H^*.$$

On applique ceci à D_B qui admet une solution élémentaire par hypothèse. Un calcul simple montre que $(D_H)_\mu = \gamma_H(D)_{\mu-\rho_{\mathfrak{h}}}$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\|\gamma_B(D)_{\mu-\rho_{\mathfrak{b}}}\| \geqslant \frac{C}{(1 + \|\mu\|^2)^N}, \quad \forall \mu \in \Gamma_B^*. \tag{37}$$

On veut donc démontrer qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ et $C' > 0$ tels que

$$\|\gamma_H(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}\| \geqslant \frac{C'}{(1 + \|\nu\|^2)^{N'}}, \quad \forall \nu \in \Gamma_H^*. \tag{38}$$

LEMME 6.2.1. — *Soient V un espace vectoriel euclidien de dimension finie, somme directe de deux sous-espaces orthogonaux U et W, $\lambda \in U_{\mathbb{C}}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors il existe une constante $C_\lambda > 0$ telle que*

$$\|P_\lambda\| \leqslant C_\lambda \|P\|$$

pour tout $P \in S(V_{\mathbb{C}})$ de degré $\leqslant m$.

Démonstration. — L'application $P \mapsto P_\lambda$ de $S(V_{\mathbb{C}})$ dans $S(W_{\mathbb{C}})$ est linéaire, donc sa restriction au sous-espace vectoriel de dimension finie de $S(V_{\mathbb{C}})$ formé par les éléments de degré $\leqslant m$ est continue; le lemme en découle. □

6.3. Fin de la démonstration du lemme 4.2.2.

On va démontrer (38). Comme c est un automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, on a

$$\gamma_H(D) = c \cdot \gamma_B(D). \tag{39}$$

On utilise les notations du lemme 6.1.2 et on fixe un entier $0 \leqslant j \leqslant r$. On note $\lambda_j = \mu_j - \rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{u}}$ et $\Gamma^*_{H,j}$ l'ensemble des $\nu \in \Gamma^*_H$ tels que $\nu - \rho_{\mathfrak{h}} + \rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}_I} + \mu_j$, que l'on notera μ_ν, soit un élément de Γ^*_B. Pour tout $\nu \in \Gamma^*_{H,j}$ on a

$$\nu - \rho_{\mathfrak{h}} + \lambda_j = \mu_\nu - \rho_{\mathfrak{b}}.$$

On note m le degré de $\gamma_H(D)$ et C_j la constante du lemme 6.2.1 correspondant aux données : $\mathfrak{h}_R = \mathfrak{b}_R + \mathfrak{v}$, $c \cdot \lambda_j$ et m.

Pour tout $\nu \in \Gamma^*_{H,j}$, $\gamma_H(D)_{\nu - \rho_{\mathfrak{h}}}$ est un élément de $S((\mathfrak{h}_R)_{\mathbb{C}})$ de degré $\leqslant m$. Donc, d'après le lemme 6.2.1,

$$\|[\gamma_H(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}]_{c\cdot\lambda_j}\| \leqslant C_j \|\gamma_H(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}\|. \tag{40}$$

Comme c fixe tout élément de $\mathfrak{h}_I$ et tout élément de $\mathfrak{b}_R$, on voit d'après (39) et des calculs simples que

$$\begin{aligned}[\gamma_H(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}]_{c\cdot\lambda_j} &= [(c \cdot \gamma_B(D))_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}]_{c\cdot\lambda_j} \\ &= [c \cdot (\gamma_B(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}})]_{c\cdot\lambda_j} \\ &= [\gamma_B(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}]_{\lambda_j} \\ &= \gamma_B(D)_{\mu_\nu - \rho_{\mathfrak{b}}} \ ;\end{aligned}$$

ces égalités ont lieu dans $S((\mathfrak{b}_R)_{\mathbb{C}})$. Donc d'après (40)

$$\|\gamma_H(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}\| \geqslant \frac{1}{C_j} \|\gamma_B(D)_{\mu_\nu-\rho_{\mathfrak{b}}}\|, \ \ \forall \nu \in \Gamma^*_{H,j}. \tag{41}$$

On a

$$\|\mu_\nu\|^2 = \|\nu - \rho_{\mathfrak{h}} + \rho_{\mathfrak{b}|\mathfrak{h}_I}\|^2 + \|\mu_j\|^2.$$

On en déduit qu'il existe une constante M_j telle que

$$1 + \|\mu_\nu\|^2 \leqslant M_j(1 + \|\nu\|^2), \ \ \forall \nu \in \Gamma^*_{H,j}.$$

Donc, d'après (41) et (37), on a

$$\|\gamma_H(D)_{\nu-\rho_{\mathfrak{h}}}\| \geqslant \frac{C}{M_j C_j} \frac{1}{(1 + \|\nu\|^2)^N}, \ \ \forall \nu \in \Gamma^*_{H,j}.$$

L'inégalité (38) en découle, car le nombre d'indices j est fini et Γ^*_H est la réunion des $\Gamma^*_{H,j}$.

7. Remarques.

7.1. Espaces symétriques de type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$.

En utilisant la méthode de [BR], Andersen [A] a donné une condition suffisante pour l'existence de solutions élémentaires invariantes sur les espaces symétriques réductifs de type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Notre méthode s'applique aussi à ces espaces; en particulier la condition d'Andersen est suffisante pour l'existence de solutions d'ordre fini. Nous nous contentons d'énoncer le résultat global et d'indiquer brièvement les modifications à effectuer dans la démonstration; nous renvoyons par exemple à [Ha] pour plus de détails sur les résultats concernant $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$ que nous allons utiliser. On adoptera dans ce paragraphe les notations usuelles pour les espaces symétriques qui diffèrent légèrement de celles utilisées dans le reste de l'article.

Soit G un groupe de Lie réductif complexe connexe et soit σ une involution de G dont le groupe des points fixes H est une forme réelle de G. L'application $x \mapsto x\sigma(x)^{-1}$ induit un difféomorphisme G-équivariant φ de G/H sur une sous-variété $\mathbb{M}$ de G; $\mathbb{M}$ est la composante connexe de l'élément neutre de l'ensemble des $x \in G$ tels que $\sigma(x) = x^{-1}$; G opère dans G/H par multiplication à gauche et dans $\mathbb{M}$ par $g \cdot m = gm\sigma(g)^{-1}$. On identifiera dans la suite G/H à $\mathbb{M}$.

On note $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$) l'algèbre de Lie de G (resp. H). Alors $\mathfrak{g}$ s'identifie à la complexifiée de $\mathfrak{h}$. Le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ sera noté $Z(\mathfrak{g})$ et sera identifié à l'algèbre des opérateurs différentiels G-invariants sur $\mathbb{M}$.

On appelle sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{M}$ le centralisateur dans $\mathbb{M}$ d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$. Si $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{h}$, on notera A le sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{M}$ correspondant. En général A n'est pas un groupe, mais si l'on note $A_{\mathbb{C}}$ le sous-groupe de Cartan de G correspondant à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, alors A est un ouvert du sous-groupe abélien $A_{\mathbb{C}}^{-\sigma}$ de $A_{\mathbb{C}}$ formé par les éléments x tels que $\sigma(x) = x^{-1}$; la composante connexe de l'élément neutre A^0 de A (qui est aussi une composante connexe de $A_{\mathbb{C}}^{-\sigma}$) est égale à $\exp i\mathfrak{a}$. À chaque élément ξ de $i\mathfrak{a}$ on associe un champ de vecteurs sur A, qu'on note aussi ξ, par

$$\xi \cdot f(a) = \frac{d}{dt} f(a \exp t\xi)_{|t=0}, \quad f \in C^\infty(A), a \in A \ ;$$

cette application se prolonge de façon unique en un homomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ dans l'algèbre des opérateurs différentiels sur A invariants par translation par A^0.

Soit A un sous-ensemble de Cartan de $\mathbb{M}$ et soit $\mathfrak{a}$ la sous-algèbre de Cartan correspondante. On note $W(A)$ le groupe de Weyl de (H, A) (le quotient du normalisteur de A dans H par son centralisteur). On note ξ_μ le caractère de $A_{\mathbb{C}}$ associé à une somme finie μ de racines de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$. Une racine de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}$ est dite imaginaire si sa restriction à $\mathfrak{a}$ est à valeurs imaginaires pures; l'ensemble des racines imaginaires de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est un système de racines. Soit Δ un système de racines imaginaires positives. On note comme d'habitude ρ_Δ la demi-somme des éléments de Δ. On définit la signature imaginaire $\epsilon_I(w)$ d'un élément w de $W(A)$ par $\epsilon_I(w) = (-1)^{|\Delta \cap (-w^{-1}\cdot\Delta)|}$; elle ne dépend pas du choix de Δ. On note $\mathcal{D}'(A)^\Delta$ l'espace des distributions u sur A vérifiant

$$w \cdot u = \epsilon_I(w) \frac{\xi_{w\cdot\rho_\Delta - \rho_\Delta}}{|\xi_{w\cdot\rho_\Delta - \rho_\Delta}|} u, \quad \forall w \in W(A).$$

La fonction $\frac{\xi_{w\cdot\rho_\Delta - \rho_\Delta}}{|\xi_{w\cdot\rho_\Delta - \rho_\Delta}|}$ est localement constante sur A, car $\xi_{w\cdot\rho_\Delta - \rho_\Delta}$ est à valeurs réelles sur A; ceci aura pour avantage, par rapport aux groupes, la disparition de τ_Δ dans les différents énoncés.

Pour un sous-ensemble de Cartan A de $\mathbb{M}$, on notera γ_A l'isomorphisme de Harish-Chandra de $Z(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre des invariants du groupe de Weyl dans $S(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$.

On dira qu'un sous-ensemble de Cartan A de $\mathbb{M}$ est *fondamental* si la dimension du sous-groupe compact maximal de A^0 est maximale.

On note $\mathcal{D}'(\mathbb{M})^H_F$ l'espace des distributions d'ordre fini sur $\mathbb{M}$ invariantes par H; l'action de H dans $\mathbb{M}$ est la restriction de celle de G, c'est-à-dire par automorphismes intérieurs. L'élément neutre de G appartient à $\mathbb{M}$ et à tout sous-ensemble de Cartan A de $\mathbb{M}$, on peut donc parler de solutions élémentaires d'un opérateur différentiel sur $\mathbb{M}$ ou sur A.

THÉORÈME 3. — *Soit $D \in Z(\mathfrak{g})$. On suppose qu'il existe un sous-ensemble de Cartan fondamental B de $\mathbb{M}$ tel que $\gamma_B(D)$ ait une solution élémentaire dans B. Alors $D \cdot \mathcal{D}'(\mathbb{M})^H_F = \mathcal{D}'(\mathbb{M})^H_F$; en particulier D admet une solution élémentaire invariante.*

La démonstration est analogue à celle du théorème 2'. On montre de la même façon l'analogue de la filtration (F5) pour $\mathcal{D}'(\mathbb{M})^H_F$; le gradué associé est isomorphe à une somme $\oplus\mathcal{D}'(A)^\Delta_F$, A parcourant un ensemble (fini) de représentants des classes de conjugaison de sous-ensembles de Cartan de $\mathbb{M}$, et $\mathcal{D}'(A)^\Delta_F$ désigne le sous-espace des distributions d'ordre fini dans $\mathcal{D}'(A)^\Delta$. Le gradué associé à $D \in Z(\mathfrak{g})$ est $\oplus\gamma_A(D)$; noter qu'on n'a pas besoin ici de τ_Δ. On se ramène alors à prouver (voir proposition 4.1.1) que, pour tout sous-ensemble de Cartan A de $\mathbb{M}$,

$$\gamma_\Delta(D) \cdot \mathcal{D}'(A)_F^\Delta = \mathcal{D}'(A)_F^\Delta.$$

Comme A est un ouvert dans un groupe de Lie abélien, il suffit, d'après le lemme 4.2.1, de montrer que $\gamma_A(D)$ admet une solution élémentaire dans A^0; ceci se démontre comme le lemme 4.2.2 à partir de l'hypothèse, mais plus simplement, car l'absence des τ_Δ fait qu'on n'a plus besoin du lemme 6.1.1.

7.2. Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$.

Les classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de $SL_2(\mathbb{R})$ sont représentées par

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R}^\times \right\}.$$

Le théorème suivant améliore le théorème 2 pour $G = SL_2(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 4. — *Soit $D \in Z(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ non nul. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *$\gamma_T(D)$ admet une solution élémentaire dans $\mathcal{D}'(T)$.*

ii) $D \cdot \mathcal{D}'(G)_F^G = \mathcal{D}'(G)_F^G$.

iii) $D \cdot \mathcal{D}'(G)^G = \mathcal{D}'(G)^G$.

Le sous-groupe A n'a pas de racines imaginaires et le groupe de Weyl $W(T)$ est trivial, donc dans la proposition 4.1.1 (pour $\mathcal{W} = G$), on peut remplacer $\mathcal{D}'(T)_F^\Delta$ par $\mathcal{D}'(T)_F$ et $\mathcal{D}'(A)_F^\Delta$ par l'espace $\mathcal{D}'(A)_F^{W(A)}$ des distributions $W(A)$-invariantes d'ordre fini sur A; de plus, d'après les commentaires qui suivent l'énoncé du théorème 2′ et puisque ρ_Δ est la différentielle d'un caractère de T, on peut remplacer, dans l'assertion (ii) de la propostion 4.1.1, $\tau_{-\Delta}\gamma_T(D)$ par $\gamma_T(D)$, donc l'assertion ii) est équivalente à

$$\gamma_T(D) \cdot \mathcal{D}'(T)_F = \mathcal{D}'(T)_F \quad \text{et} \quad \gamma_A(D) \cdot \mathcal{D}'(A)_F^{W(A)} = \mathcal{D}'(A)_F^{W(A)}.$$

Comme la composante connexe de l'élément neutre de A est isomorphe à $\mathbb{R}$, la deuxième condition est toujours vérifiée puisque $\gamma_A(D)$ est non nul. Donc ii) est équivalente à

$$\gamma_T(D) \cdot \mathcal{D}'(T)_F = \mathcal{D}'(T)_F. \tag{42}$$

De même, en utilisant le gradué associé à $\mathcal{D}'(G)^G$ (analogue de (F5) qui découle facilement des théorèmes 3.2.1 et 3.3.1 de [Bo2]), on voit que l'assertion iii) est équivalente à

$$\gamma_T(D) \cdot \mathcal{D}'(T) = \mathcal{D}'(T). \tag{43}$$

Comme T est compact, il est bien connu, et facile à établir, que les assertions i), (42) et (43) sont équivalentes; cela prouve le théorème 4.

Remarque 7.2.1. — D'après ([Bo2], théorème 3.2.1 et corollaire 7.4.3), l'espace $\mathcal{D}'(G)^G$ est isomorphe à $\mathcal{D}'(T) \oplus \mathcal{D}'(A)^{W(A)}$; on écrit $\Theta \sim \Theta_T + \Theta_A$ la décomposition correspondante d'un élément Θ de $\mathcal{D}'(G)$. Il est facile de voir que, pour tout $D \in Z(\mathfrak{g})$, on a

$$D \cdot \Theta \sim \gamma_T(D) \cdot \Theta_T + \gamma_A(D) \cdot \Theta_A \ ;$$

(comme ci-dessus on utilise l'argument de l'intégralité de ρ_Δ pour remplacer $\tau_\Delta \gamma_T(D)$ par $\gamma_T(D)$). Si D est non nul, on a $\gamma_A(D) \cdot \mathcal{D}'(A)^{W(A)} = \mathcal{D}'(A)^{W(A)}$. Donc les distributions $\Theta \in \mathcal{D}'(G)^G$ qui n'appartiennent pas à $D \cdot \mathcal{D}'(G)^G$ sont celles dont la composante Θ_T n'appartient pas à $\gamma_T(D) \cdot \mathcal{D}'(T)$. Par exemple si D est l'opérateur de Casimir de G, alors la mesure de Dirac à l'origine δ_e^G n'appartient pas à $D \cdot \mathcal{D}'(G)^G$; en effet $(\delta_e^G)_T$ est égale à une constante non nulle près à $\frac{d}{d\theta}\delta_e^T$ (voir [V], théorème II.12.13) et $\gamma_T(D) = -(\frac{d^2}{d\theta^2}+1)$, donc une distribution $u \in \mathcal{D}'(T)$ appartient à $\gamma_T(D)\cdot\mathcal{D}'(T)$ si et seulement si $\hat{u}(\pm 1) = 0$, ce qui n'est pas le cas de $\frac{d}{d\theta}\delta_e^T$. Ainsi l'opérateur de Casimir de G n'admet pas de solution élémentaire invariante sur G; ce résultat a été établi par Benabdallah [B].

7.3. Groupes complexes.

Lorsque G est un groupe réductif complexe connexe, muni de la structure de groupe de Lie réel sous-jacente, la condition du théorème 2 est aussi nécessaire pour que $D \cdot \mathcal{D}'(G)_F^G = \mathcal{D}'(G)_F^G$. En effet, les sous-groupes de Cartan de G sont tous conjugués et n'ont pas de racines imaginaires, donc si H est un sous-groupe de Cartan de G, l'espace $\mathcal{D}'(H)^\Delta$ du paragraphe (3.4) n'est autre que l'espace $\mathcal{D}'(H)^{W(H)}$ des distributions sur H invariantes par le groupe de Weyl $W(H)$. Donc, d'après la proposition (4.1.1), $D \cdot \mathcal{D}'(G)_F^G = \mathcal{D}'(G)_F^G$ implique $\gamma_H(D) \cdot \mathcal{D}'(H)_F^{W(H)} = \mathcal{D}'(H)_F^{W(H)}$; comme la mesure de Dirac de support l'élément neutre est dans $\mathcal{D}'(H)_F^{W(H)}$, cela montre que $\gamma_H(D)$ admet une solution élémentaire.

BIBLIOGRAPHIE

[A] N. ANDERSEN, Solutions élémentaires invariantes pour les opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques réductifs de type $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$, C. R. Acad. Sc., 327 (1998), 123–126.

[B] A. BENABDALLAH, L'opérateur de Casimir de $SL(2,\mathbb{R})$, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 17 (1984), 269–291.

[BR] A. BENABDALLAH et F. ROUVIÈRE, Résolubilité des opérateurs bi-invariants sur un groupe de Lie semi-simple, C. R. Acad. Sc., 298 (1984), 405–408.

[Bo1] A. BOUAZIZ, Intégrales orbitales sur les algèbres de Lie réductives, Invent. Math., 115 (1994), 163–207.

[Bo2] A. BOUAZIZ, Intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 27 (1994), 573–609.

[Bo3] A. BOUAZIZ, Formule d'inversion des intégrales orbitales sur les groupes de Lie réductifs, J. Funct. Anal., 134 (1994), 100–182.

[CR] A. CÉRÉZO et F. ROUVIÈRE, Solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie réel compact et sur un espace homogène réductif compact, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 2 (1969), 561–581.

[E1] L. EHRENPREIS, Solutions of some problems of division, I, Amer. J. Math., 76 (1954), 883–903.

[E2] L. EHRENPREIS, Solutions of some problems of division, III, Amer. J. Math., 78 (1956), 685–715.

[Ha] P. HARINCK, Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, J. Funct. Anal., 153 (1998), 52–107.

[H1] L. HÖRMANDER, On the division of distributions by polynomials, Arkiv för Math., 53 (1958), 555–568.

[H2] L. HÖRMANDER, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, I, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1983.

[H3] L. HÖRMANDER, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, II, Springer, Berlin–Heidelberg–New-York, 1983.

[L] S. ŁOJASIEWICZ, Sur le problème de la division, Studia Math., 18 (1959), 87–136.

[M1] B. MALGRANGE, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, 6 (1955-56), 271–355.

[M2] B. MALGRANGE, Sur la propagation de la régularité des solutions des équations à coefficients constants, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R., Tome 3 (53) (1959), 433–440.

[R] M. RAÏS, Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent, C. R. Acad. Sc., 273 (1971), 495–498.

[Ra] R.R. RAO, Orbital integrals in reductive groups, Ann. of Math., 96 (1972), 505–510.

[Ro] F. ROUVIÈRE, Invariant differential equations on certain semisimple Lie groups, Trans. A. M. S., 243 (1978), 97–113.

[S] W. SCHMID, On the characters of the discrete series, the hermitian symmetric case, Invent. Math., 30 (1995), 47–144.

[T] A. TENGSTRAND, Distributions invariant under orthogonal group of arbitrary signature, Math. Scand., 8 (1960), 201–218.

[Tr1] F. TRÈVES, Topological Vector Spaces, distributions and kernels, Academic Press, New-York–London, 1967.

[Tr2] F. TRÈVES, Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients, Gordon and Breach, New-York–London–Paris, 1966.

[V] V.S. VARADARAJAN, Harmonic Analysis on Real Reductive Groups, (Lect. Notes Math., vol. 576), Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New-York, 1977.

Manuscrit reçu le 13 mars 2000,
accepté le 18 mai 2000.

A. BOUAZIZ,
Département de Mathématiques
SP2MI
B.P. 30179
Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope Cedex (France).
bouaziz@mathlabo.univ-poitiers.fr

N. KAMOUN,
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Monastir
5019 Monastir (Tunisie).