



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Aurélie CORTEZ

Singularités génériques des variétés de Schubert covexillaires

Tome 51, n° 2 (2001), p. 375-393.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_2_375_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

SINGULARITÉS GÉNÉRIQUES DES VARIÉTÉS DE SCHUBERT COVEXILLAIRES

par Aurélie CORTEZ

1. Introduction.

Soit \mathbb{K} un corps algébriquement clos de caractéristique arbitraire. On considère dans $GL_n(\mathbb{K})$, le sous-groupe de Borel B des matrices triangulaires supérieures. On va s'intéresser aux variétés de Schubert dans la variété de drapeaux $GL_n(\mathbb{K})/B$, paramétrées par le groupe symétrique d'ordre n , noté \mathfrak{S}_n .

D'après [7], la variété de Schubert X_w associée à la permutation w de \mathfrak{S}_n est singulière si et seulement s'il existe des entiers $i < j < k < l$ dans $[1, n]$ vérifiant : $w(k) < w(l) < w(i) < w(j)$ - on dira alors que w contient une configuration (3412) - , ou bien $w(l) < w(j) < w(k) < w(i)$ - configuration (4231). On appellera covexillaires les permutations qui ne contiennent pas de configuration (3412); w est covexillaire si et seulement si ww_0 est vexillaire au sens de Lascoux et Schützenberger.

L'objet de ce travail est de décrire le lieu singulier et les singularités génériques des variétés de Schubert covexillaires, généralisant le cas grassmannien, traité dans [1]. On montre que les composantes irréductibles du lieu singulier sont paramétrées par certains des points coessentiels de la

Mots-clés : Variétés de Schubert – Permutations vexillaires – Singularités génériques – Lieux singuliers.

Classification math. : 14M15 – 20F55.

permutation – que l’on appellera bien bordés – et l’on en donne une description explicite. Cette description du lieu singulier des variétés de Schubert covexillaires était implicitement contenue dans [8], où Lascoux décrit une méthode de calcul des polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les variétés de Schubert covexillaires (Lascoux les appelle “vexillaires” car nos paramétrisations des variétés de Schubert diffèrent d’un facteur w_0 à droite). En particulier, ceci met en évidence les composantes irréductibles du lieu des points non rationnellement lisses d’une variété de Schubert covexillaire, qui sont exactement celles du lieu singulier d’après [2].

On donne ici une démonstration géométrique du résultat. De plus, on décrit la singularité le long de chaque composante du lieu singulier ; ce sont les singularités génériques mentionnées dans le titre. Comme les résultats de [8] le suggéraient, il s’avère que ces singularités génériques sont les mêmes que dans le cas grassmannien. En revanche, d’autres types de singularité apparaissent lorsque l’on ne suppose plus la variété covexillaire (cf. [1], 4.6).

Alain Lascoux a eu la gentillesse de me consacrer du temps pour m’expliquer sa méthode de calcul des polynômes de Kazhdan-Lusztig dans le cas vexillaire, je l’en remercie chaleureusement. Je remercie également le ou les rapporteur(s), d’une part pour une suggestion qui m’a permis d’obtenir un énoncé plus précis du théorème 3.6, d’autre part pour la preuve du lemme 3.5. Enfin, je tiens à remercier Michel Brion pour l’intérêt qu’il a porté à mon travail.

2. Préliminaires.

2.1. Notations.

\mathbb{K} est un corps algébriquement clos de caractéristique arbitraire, $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{K}^n , $GL_n = GL_n(\mathbb{K})$, B est le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures, U est le radical unipotent de B et U^- est le radical unipotent du groupe des matrices triangulaires inférieures, T est le tore maximal des matrices diagonales dans GL_n .

On note \mathfrak{S}_n le groupe symétrique d’ordre n . Pour $w \in \mathfrak{S}_n$, on note e_w le point wB de GL_n/B , $C_w = Be_w$ la cellule de Schubert, et $X_w = \overline{C_w}$ la variété de Schubert associés. On note également $\ell(w)$ le nombre d’inversions de w . On rappelle que l’on a $\ell(w) = \dim X_w$. On note w_0 l’élément de plus grande longueur dans \mathfrak{S}_n .

La variété des drapeaux GL_n/B , sera aussi notée $Fl(n)$. On notera $\mathbb{K}^\bullet = \mathbb{K}^1 \subset \dots \subset \mathbb{K}^n$ le drapeau standard dans $Fl(n)$, correspondant au sous-groupe de Borel B . Pour $g \in GL_n$, on notera indifféremment $g\mathbb{K}^\bullet$ ou V_g^\bullet le drapeau associé. Pour toute suite finie d'entiers $1 \leq d_1 \leq \dots \leq d_k \leq n$, on notera $Fl(d_1, \dots, d_k; n)$ la variété des drapeaux partiels de dimensions d_1, \dots, d_k dans \mathbb{K}^n . Pour $p \leq n$, on notera $Gr_p(n)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension p dans \mathbb{K}^n .

2.2. Lieu singulier, singularités génériques.

Le lieu singulier de la variété de Schubert X_w est un fermé B -stable, il est donc réunion de variétés de Schubert. Ses composantes irréductibles sont données par les permutations maximales v telles que le point e_v soit un point singulier de X_w .

Étant donné $v \leq w$, l'ensemble $v(U^-)e_v \cap X_w$ est le voisinage standard de e_v dans X_w . D'après la décomposition de Bruhat, il est isomorphe au produit $C_v \times \mathcal{N}_{v,w}$ où $\mathcal{N}_{v,w} = [v(U^-) \cap U^-]e_v \cap X_w$ (cf. [6], Lemma A4). La cellule de Schubert C_v étant un espace affine, on a en fait : X_v est une composante irréductible du lieu singulier de X_w si et seulement si $\mathcal{N}_{v,w}$ a e_v pour unique point singulier. Ce sont les singularités génériques que l'on va décrire.

2.3. L'ordre de Bruhat-Chevalley.

2.3.1. Le point de vue classique.

L'inclusion des variétés de Schubert induit un ordre partiel sur le groupe symétrique, appelé ordre de Bruhat-Chevalley : pour $v, w \in \mathfrak{S}_n$, $v \leq w \iff X_v \subseteq X_w$.

L'ordre de Bruhat-Chevalley sur le groupe symétrique est également décrit de la manière suivante (cf. [11], Prop. 2.1.11) : notant $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$, $v \leq w$ si et seulement si pour tout k , notant $v'_1 < \dots < v'_k$ et $w'_1 < \dots < w'_k$ les suites (v_1, \dots, v_k) et (w_1, \dots, w_k) réordonnées en suites croissantes, on a $v'_l \leq w'_l$ pour tout $l \leq k$.

Une troisième caractérisation de l'ordre de Bruhat-Chevalley nous sera utile. Elle fait intervenir la fonction rang associée à une permutation : pour $w \in \mathfrak{S}_n$ et $(p, q) \in [1, n]^2$, on définit

$$r_w(p, q) = \#\{m \mid m \leq p \text{ et } w(m) \leq q\}.$$

On a alors le lemme suivant (cf. [11], Prop. 2.1.12),

LEMME 2.1. — Pour $v, w \in \mathfrak{S}_n$

$$v \leq w \iff r_v(p, q) \geq r_w(p, q) \quad \forall (p, q) \in [1, n]^2.$$

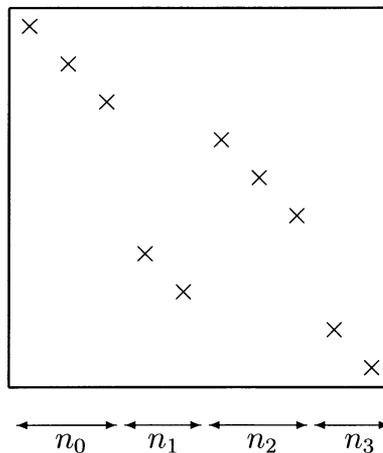
2.3.2. Une nouvelle approche : les corectrices.

A. Lascoux et M.P. Schützenberger ont introduit une nouvelle approche de l'ordre de Bruhat-Chevalley sur le groupe symétrique, en définissant les rectrices d'une permutation (cf [10]). Ici, il est plus commode d'envisager une notion duale, et nous parlerons des corectrices d'une permutation.

On appelle cograssmanniennes les permutations n'ayant qu'une montée, et cobigrassmanniennes les permutations cograssmanniennes dont l'inverse est aussi cograssmannienne. Une cobigrassmannienne γ est de la forme :

$$\begin{aligned} \gamma(i) &= n + 1 - i \text{ pour } 1 \leq i \leq n_0, \\ \gamma(i) &= n + 1 - n_2 - i \text{ pour } n_0 + 1 \leq i \leq n_0 + n_1, \\ \gamma(i) &= n + 1 + n_1 - i \text{ pour } n_0 + n_1 + 1 \leq i \leq n_0 + n_1 + n_2, \\ \gamma(i) &= n + 1 - i \text{ pour } n_0 + n_1 + n_2 + 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

(on coupe $(n, n - 1, \dots, 1)$ en quatre blocs et on permute les deux blocs médians). Une cobigrassmannienne est ainsi déterminée par le quadruplet d'entiers (n_0, n_1, n_2, n_3) (où $n_3 = n - n_0 - n_1 - n_2$), la donnée des cardinaux des quatre blocs, avec $n_0, n_3 \in \mathbb{N}$ et $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$. En termes de graphe, les cobigrassmanniennes sont de la forme suivante :



On dispose alors d'un critère simple pour comparer une permutation arbitraire et une cobigrassmannienne : pour $w \in \mathfrak{S}_n$ et c la cobigrassmannienne définie par le quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) , on a $w \leq c$ si et seulement si l'ensemble $w([1, n_0 + n_1]) \cap [1, n_1 + n_3]$ contient au moins n_1 éléments.

Il est encore plus simple de comparer deux cobigrassmanniennes : si c et c' sont les cobigrassmanniennes associées respectivement à (n_0, n_1, n_2, n_3) et (n'_0, n'_1, n'_2, n'_3) , alors on a $c \leq c'$ si et seulement si $\begin{cases} n_0 \leq n'_0 \\ n_3 \leq n'_3 \end{cases}$ et $\begin{cases} n_1 \geq n'_1 \\ n_2 \geq n'_2 \end{cases}$.

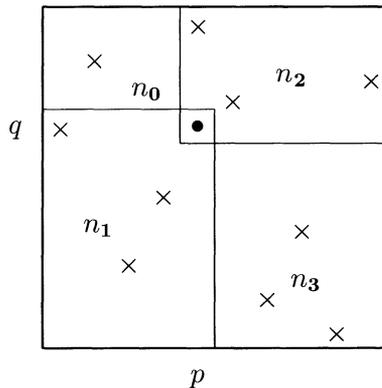
Les cobigrassmanniennes permettent de décrire l'ordre de Bruhat-Chevalley de la façon suivante : notant \mathcal{C} l'ensemble des cobigrassmanniennes, on considère l'ensemble des parties de \mathcal{C} muni de l'ordre inverse de l'inclusion, c'est-à-dire $A \preceq B$ si $A \supseteq B$. Alors l'application $\mathfrak{S}_n \rightarrow 2^{\mathcal{C}}$ induit un isomorphisme d'ensembles ordonnés de \mathfrak{S}_n $w \mapsto \{c \in \mathcal{C} \mid w \leq c\}$ sur son image. Étant donnée une permutation w de \mathfrak{S}_n , les éléments minimaux de $\{c \in \mathcal{C} \mid w \leq c\}$ sont appelés corectrices de w ; d'après ce qui précède, leur donnée détermine entièrement w .

Pour les décrire explicitement, introduisons l'ensemble coessentiel de w , dual de l'ensemble essentiel défini par Fulton (cf. [4]) :

$$\text{Coess}(w) = \left\{ (p, q) \in [1, n]^2 \mid \begin{array}{l} w(p-1) \leq q < w(p) \\ w^{-1}(q) \leq p-1 < w^{-1}(q+1) \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble paramètre les corectrices de w . La corectrice associée au point coessentiel (p, q) de w , notée $c_{p,q}$, est donnée par son quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) comme suit :

- $n_0 = \#\{m < p \mid w(m) > q\}$
- $n_1 = \#\{m \leq p \mid w(m) \leq q\}$
- $n_2 = \#\{m \geq p \mid w(m) \geq q\}$
- $n_3 = \#\{m > p \mid w(m) < q\}$



DÉFINITION 2.2. — Soit γ une cobigrassmannienne de quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) . On dit que γ est itérable si on a $n_0, n_3 \geq 1$, et on définit alors l'itérée γ^1 de γ par son quadruplet $(n_0 - 1, n_1 + 1, n_2 + 1, n_3 - 1)$.

Elle vérifie l'inégalité $\gamma^1 \leq \gamma$.

2.4. Description des variétés de Schubert.

Explicitement, la variété de Schubert X_w est l'ensemble des drapeaux complets V^\bullet de \mathbb{K}^n qui vérifient les relations d'incidence suivantes : pour $(p, q) \in [1, n]^2$,

$$\dim(V^p \cap \mathbb{K}^q) \geq r_w(p, q),$$

où r_w désigne la fonction de rang associée à la permutation w . Les points coessentiels de w fournissent un ensemble minimal de relations d'incidence pour X_w : les relations $\dim(V^{p-1} \cap \mathbb{K}^q) \geq r_w(p-1, q)$ pour $(p, q) \in \text{Coess}(w)$ sont indépendantes et suffisent à décrire X_w (cf. [5] chap. 10, ex. 6).

Comme de plus la fonction rang en un point coessentiel (p, q) vérifie $r_w(p, q) = r_w(p-1, q)$ (puisque l'on a $w(p) > q$), ces relations s'écrivent aussi $\dim(V^{p-1} \cap \mathbb{K}^q) \geq r_w(p, q)$ pour $(p, q) \in \text{Coess}(w)$.

En particulier, la variété de Schubert associée à la cobigrassmannienne c de quadruplet (n_0, n_1, n_2, n_3) est définie par la seule relation

$$\dim(V^{n_0+n_1} \cap \mathbb{K}^{n_1+n_3}) \geq n_1.$$

2.5. Points coessentiels des permutations covexillaires.

Introduisons des notations qui nous serviront dans la suite.

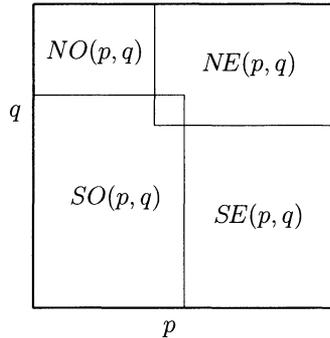
La donnée d'un point (p, q) du carré $[1, n]^2$ détermine les quatre quadrants suivants :

$$NO(p, q) = \{(i, j) \mid i < p, j > q\}$$

$$SO(p, q) = \{(i, j) \mid i \leq p, j \leq q\}$$

$$NE(p, q) = \{(i, j) \mid i \geq p, j \geq q\}$$

$$SE(p, q) = \{(i, j) \mid i > p, j < q\}$$



Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on omettra de préciser les coordonnées du point, en écrivant simplement NO au lieu de $NO(p, q)$.

Si w est une permutation covexillaire, ses points coessentiels vérifient la propriété suivante (cf. [11] Prop. 2.2.8) : il n'y a pas de point coessentiel dans le quadrant NO défini par un point coessentiel (ni dans son quadrant SE). Par conséquent, si (p, q) et (p', q') sont deux points coessentiels tels que $p \geq p'$ alors on a $q \geq q'$. Ainsi, l'ensemble des points coessentiels de w est totalement ordonné pour l'ordre produit sur $[1, n]^2$. On parlera donc de la suite croissante des points coessentiels de w .

De plus, la suite des rangs associée est alors strictement croissante. En effet, si (p, q) et (p', q') sont deux points coessentiels de w consécutifs avec $p \leq p'$, alors on a aussi $q \leq q'$, donc le quadrant SO associé à (p, q) est contenu dans celui associé à (p', q') , noté ici SO' , et donc $r_w(p, q) \leq r_w(p', q')$. Si de plus $p < p'$, alors le point $(p' - 1, w(p' - 1))$ est dans SO' mais pas dans SO , tandis que si $p = p'$ alors on a $q < q'$, et le point $(w^{-1}(q + 1), q + 1)$ est dans SO' mais pas dans SO . On a donc bien $r_w(p, q) < r_w(p', q')$.

3. Des composantes irréductibles du lieu singulier.

Soit $w \in \mathfrak{S}_n$ une permutation covexillaire. Soient $(P_i)_{1 \leq i \leq k}$ la suite croissante des points coessentiels de w , $P_i = (p_i, q_i)$, $(r_i)_{1 \leq i \leq k}$ la suite strictement croissante des rangs de w aux points coessentiels, et enfin pour $i \in \{1, \dots, k\}$, c_i la corectrice de w associée au point coessentiel P_i .

DÉFINITION 3.1. — *Un point coessentiel (p, q) de w est dit bien bordé si la corectrice de w associée est itérable, c'est-à-dire si le graphe de w rencontre les quadrants $NO(p, q)$ et $SE(p, q)$.*

Soit $P_i = (p_i, q_i)$ un point coessentiel bien bordé de w . On va construire une composante irréductible du lieu singulier de X_w associée à P_i .

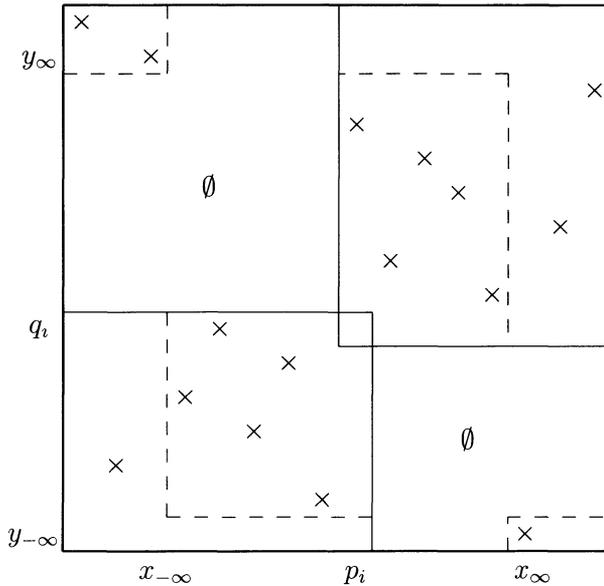
On considère dans le carré $[1, n]^2$ les quatre quadrants déterminés par le point (p_i, q_i) . Soient $x_{-\infty}$ (resp. x_{∞}) l'abscisse du point du graphe de w le plus à l'Est du quadrant NO (resp. Ouest du quadrant SE), c'est-à-dire

$$\begin{aligned} x_{-\infty} &= \sup \{p \mid p < p_i \text{ et } w(p) > q_i\}, \\ x_{\infty} &= \inf \{p \mid p > p_i \text{ et } w(p) < q_i\}. \end{aligned}$$

On pose $y_\infty = w(x_{-\infty})$ et $y_{-\infty} = w(x_\infty)$. Comme w est covexillaire, le point $(x_{-\infty}, y_\infty)$ est aussi le point du graphe de w le plus au Sud dans le quadrant NO , et le point $(x_\infty, y_{-\infty})$ est aussi le point du graphe de w le plus au Nord dans le quadrant SE . De plus, comme (p_i, q_i) est un point coessentiel de w on a les inégalités suivantes : $x_{-\infty} < p_i - 1$ et $q_i + 1 < y_\infty$.

LEMME 3.2. — *Le graphe de w rencontre les parties $[x_{-\infty} + 1, p_i - 1] \times [y_{-\infty} + 1, q_i]$ et $[p_i, x_\infty - 1] \times [q_i + 1, y_\infty - 1]$.*

Ce lemme se traduit sur le diagramme suivant :



Preuve. — Comme (p_i, q_i) est un point coessentiel, on a $w^{-1}(q_i) < p_i$ et $w(p_i - 1) \leq q_i$. De plus on a $w(x_{-\infty}) > q_i$, en particulier $w^{-1}(q_i) \neq x_{-\infty}$, on est donc dans l'un des deux cas suivants : $w^{-1}(q_i) \geq x_{-\infty} + 1$ ou $w^{-1}(q_i) < x_{-\infty}$. Dans le premier cas, le point $(w^{-1}(q_i), q_i)$ est dans $[x_{-\infty} + 1, p_i - 1] \times [y_{-\infty} + 1, q_i]$. Dans le second cas, on a nécessairement $y_{-\infty} < w(p_i - 1)$, sinon les abscisses $w^{-1}(q_i) < x_{-\infty} < p_i - 1 < x_\infty$ donnent une configuration (3412). Le point $(p_i - 1, w(p_i - 1))$ est alors dans $[x_{-\infty} + 1, p_i - 1] \times [y_{-\infty} + 1, q_i]$. Ainsi la partie $[x_{-\infty} + 1, p_i - 1] \times [y_{-\infty} + 1, q_i]$ contient au moins un point du graphe de w .

On montre de même que la partie $[p_i, x_\infty - 1] \times [q_i + 1, y_\infty - 1]$ contient nécessairement l'un des deux points $(w^{-1}(q_i + 1), q_i + 1)$ ou $(p_i, w(p_i))$, donc rencontre le graphe de w . \square

On associe à (p_i, q_i) deux suites de points du graphe de w , et deux entiers s_i et t_i , les longueurs de ces suites; la première suite est contenue dans le rectangle $[p_i, x_\infty - 1] \times [q_i + 1, y_\infty - 1]$, et de la forme $(x_h, y_h)_{1 \leq h \leq s_i}$, avec $q_i < y_1 < \dots < y_{s_i}$ et $x_1 > \dots > x_{s_i} \geq p_i$, l'autre est contenue dans le rectangle $[x_{-\infty} + 1, p_i] \times [y_{-\infty} + 1, q_i]$ et de la forme $(x_h, y_h)_{-1 \leq h \leq -t_i}$, avec $q_i > y_{-1} > \dots > y_{-t_i}$ et $x_{-1} < \dots < x_{-t_i} < p_i$.

La construction se fait par récurrence comme suit : soient d'abord $\mathcal{Q}_1 = \{q \mid q_i < q < y_\infty \text{ et } p_i \leq w^{-1}(q) < x_{-\infty}\}$ (non vide par le lemme 3.2), $y_1 = \inf \mathcal{Q}_1$ et $x_1 = w^{-1}(y_1)$. Puis pour $h > 1$, tant que $\mathcal{Q}_h \neq \emptyset$, où \mathcal{Q}_h est par définition $\{q \mid y_{h-1} < q < y_\infty \text{ et } p_i \leq w^{-1}(q) < x_{h-1}\}$, on définit $y_h = \inf \mathcal{Q}_h$ et $x_h = w^{-1}(y_h)$. La suite de points ainsi construite sera appelée la suite NE associée au point coessentiel (p_i, q_i) (elle est contenue dans le quadrant $NE(p_i, q_i)$).

De manière symétrique dans le rectangle $[x_{-\infty} + 1, p_i] \times [y_{-\infty} + 1, q_i]$, on pose d'abord $y_{-1} = \sup \{q \mid y_{-\infty} < q < q_i \text{ et } x_{-\infty} < w^{-1}(q) < p_i\}$, $x_{-1} = w^{-1}(y_{-1})$ et pour $h < -1$, on définit $y_h = \sup \{q \mid y_{-\infty} < q < y_{h+1} \text{ et } x_{h+1} < w^{-1}(q) < p_i\}$ et $x_h = w^{-1}(y_h)$. Cette suite de points sera appelée suite SO.

DÉFINITION 3.3. — On notera $\mathcal{X}^i = \mathcal{X}_+^i \cup \mathcal{X}_-^i$ (resp. $\mathcal{Y}^i = \mathcal{Y}_+^i \cup \mathcal{Y}_-^i$) l'ensemble des abscisses (resp. ordonnées) ainsi construites, où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_+^i &= \{x_h \mid h \in [1, s_i] \cup \{\infty\}\}, & \mathcal{X}_-^i &= \{x_h \mid h \in [-1, -t_i] \cup \{-\infty\}\}, \\ \mathcal{Y}_+^i &= \{y_h \mid h \in [1, s_i] \cup \{\infty\}\}, & \mathcal{Y}_-^i &= \{y_h \mid h \in [-1, -t_i] \cup \{-\infty\}\}. \end{aligned}$$

On omettra l'exposant i lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

On définit alors la permutation τ_i par

$$\tau_i = (y_{-1}, y_1) [(y_{-1}, y_{-2}) \cdots (y_{-t_i}, y_{-\infty})] [(y_1, y_2) \cdots (y_{s_i}, y_\infty)] w$$

où (h, l) désigne la transposition de support $\{h, l\}$.

Enfin, on note D' la région du carré $[1, n]^2$ délimitée par les points $(x_h, w(x_h))$ et $(x_h, \tau_i(x_h))$ pour $h \in [1, s_i] \cup [-1, -t_i] \cup \{-\infty, \infty\}$, et D la région obtenue en enlevant à D' sa frontière NE.

Exemple 3.4. — On considère la permutation

$$w = (16, 3, 15, 5, 7, 4, 6, 2, 13, 9, 12, 11, 8, 1, 10, 14)$$

dans \mathfrak{S}_{16} , et le point coessentiel $(9, 7)$. Sur le diagramme suivant, on a représenté par des \bullet les points du graphe de w dont l'abscisse est dans \mathcal{X}^i , et par des \circ les autres points du graphe.

Démontrons maintenant quelques propriétés simples de la permutation τ_i qui résultent de sa construction.

- LEMME 3.5. — (a) $\tau_i \leq w$,
 (b) $\ell(\tau_i) = \ell(w) - (s_i + t_i + 1)$,
 (c) $r_{\tau_i}(p_j - 1, q_j) = r_w(p_j - 1, q_j) + \delta_{ij}$ pour tout $(p_j, q_j) \in \text{Coess}(w)$.

Preuve. — On remarque que $r_{\tau_i} = r_w + 1$ sur D et $r_{\tau_i} = r_w$ en dehors de D . Compte tenu du lemme 2.1, cela implique (a).

Rappelons que si $\sigma' = (a, b)\sigma$ avec $a < b$ et $\sigma^{-1}(a) > \sigma^{-1}(b)$, aucun point du graphe de σ n'étant à l'intérieur du rectangle de sommets $(\sigma^{-1}(a), a)$ et $(\sigma^{-1}(b), b)$, alors $\ell(\sigma') = \ell(\sigma) - 1$. Ici, l'intérieur de D' ne contient aucun point du graphe de w . On est donc dans la situation précédente pour chacun des produits par une transposition permettant de passer de w à τ_i . L'assertion (b) en résulte immédiatement.

Reste, pour démontrer (c), à s'assurer que pour tout autre point coessential (p_j, q_j) , le point $(p_j - 1, q_j)$ n'est pas dans D . Si $p_j > p_i$, c'est une conséquence de l'inégalité $q_j \geq w(p_j - 1)$, puisque aucun point du graphe de w ne se trouve à la fois à l'Est de (p_i, q_i) et au Sud de la frontière NE de D' . Si $p_j < p_i$, c'est de même une conséquence de l'inégalité $q_j < w(p_j)$. Enfin, si $p_j = p_i$, cela résulte des inégalités $w^{-1}(q_j) < p_i \leq w^{-1}(q_j + 1)$, car il vient alors $q_j \notin [y_{-\infty}, y_{\infty} - 1]$, or les points de D ont leur ordonnée dans $[y_{-\infty}, y_{\infty} - 1]$. □

Nous allons maintenant décrire la transversale $\mathcal{N}_{\tau_i, w}$. Soit $\bar{\tau}_i \in GL_n$ la matrice de la permutation τ_i .

On renvoie à 3.3 pour la définition de \mathcal{X}_- et \mathcal{Y}_+ , et on définit alors

$$\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-} = \left\{ u = (u_{hl}) \in GL_n \left| \begin{array}{l} u_{\tau_i(l)l} = 1 \text{ pour tout } l, \\ u_{hl} = 0 \text{ si } h \notin \mathcal{Y}_+ \text{ ou } l \notin \mathcal{X}_-, \\ \text{rg } (u_{hl})_{\substack{h \in \mathcal{Y}_+ \\ l \in \mathcal{X}_-}} \leq 1 \end{array} \right. \right\}.$$

Le tore T agit sur $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ par : $t \cdot u = t u (\bar{\tau}_i^{-1} t^{-1} \bar{\tau}_i)$.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME 3.6. — *L'application $u \mapsto u\mathbb{K}^\bullet$ induit un isomorphisme T -équivariant de $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ dans $\mathcal{N}_{\tau_i, w}$. En particulier, X_{τ_i} est une composante irréductible du lieu singulier de X_w .*

Preuve. — Par définition, $\mathcal{N}_{\tau_i, w} = [\tau_i(U^-) \cap U^-]e_{\tau_i} \cap X_w$. Il résulte de la décomposition de Bruhat que l'application

$$\begin{aligned} \phi : (\bar{\tau}_i U^- \cap U^- \bar{\tau}_i) &\longrightarrow [\tau_i(U^-) \cap U^-]e_{\tau_i} \\ u &\longmapsto u\mathbb{K}^\bullet \end{aligned}$$

est un isomorphisme T -équivariant. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-} = \phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w})$.

On remarque d'abord que

$$\bar{\tau}_i U^- \cap U^- \bar{\tau}_i = \left\{ u \in GL_n \left| \begin{array}{l} u_{\tau_i(l)l} = 1 \text{ pour tout } l, \\ u_{hl} = 0 \text{ si } h < \tau_i(l) \text{ ou } l > \tau_i^{-1}(h) \end{array} \right. \right\}.$$

Fixons maintenant $u \in \phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w})$, et montrons que $u_{hl} = 0$ si $l \notin \mathcal{X}_-$ et $h > \tau_i(l)$, ou si $h \notin \mathcal{Y}_+$ et $l < \tau_i^{-1}(h)$.

Considérons pour commencer $l \notin \mathcal{X}_-$. Alors le point $(l, \tau_i(l))$ n'est pas dans D , on a donc $r_{\tau_i}(l, \tau_i(l)) = r_w(l, \tau_i(l))$ comme remarqué au début de la preuve du lemme 3.5. L'espace $u(\mathbb{K}^l) + \mathbb{K}^{\tau_i(l)}$ contient la famille de vecteurs

$$\{e_1, \dots, e_{\tau_i(l)}\} \cup \{ue_p \mid p < l, \tau_i(p) > \tau_i(l)\} \cup \{ue_l - e_{\tau_i(l)}\}.$$

S'il existait $h > \tau_i(l)$ tel que $u_{hl} \neq 0$, alors cette famille serait libre. Or son cardinal est

$$\tau_i(l) + l - r_{\tau_i}(l, \tau_i(l)) + 1 = \tau_i(l) + l - r_w(l, \tau_i(l)) + 1,$$

alors que $\dim(u(\mathbb{K}^l) + \mathbb{K}^{\tau_i(l)}) \leq \tau_i(l) + l - r_w(l, \tau_i(l))$, une contradiction. Ceci montre que $u_{hl} = 0$ pour tout $h > \tau_i(l)$.

On montre de même que si $h \notin \mathcal{Y}_+$, alors $u_{hl} = 0$ pour tout $l < \tau_i^{-1}(h)$.

Soit maintenant ρ le rang de la matrice extraite $(u_{hl})_{\substack{h \in \mathcal{Y}_+ \\ l \in \mathcal{X}_-}}$. On considère l'espace F engendré par la famille de vecteurs

$$\{e_1, \dots, e_{q_i}\} \cup \{ue_p \mid p \leq p_i - 1, \tau_i(p) > q_i\} \cup \{ue_l, l \in \mathcal{X}_-\}.$$

On voit que sa dimension est

$$q_i + p_i - 1 - r_{\tau_i}(p_i - 1, q_i) + \rho.$$

D'autre part on a $r_{\tau_i}(p_i - 1, q_i) = r_w(p_i - 1, q_i) + 1$, et donc il vient

$$\dim F = p_i - 1 + q_i - r_w(p_i - 1, q_i) - 1 + \rho.$$

Or F est contenu dans l'espace $u(\mathbb{K}^{p_i-1}) + \mathbb{K}^{q_i}$, qui est de dimension au plus $p_i - 1 + q_i - r_w(p_i - 1, q_i)$. On obtient donc $\rho \leq 1$.

On a donc montré que $\phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w}) \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$. Or $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ est une variété irréductible de dimension $s_i + t_i + 1$, et d'après le lemme 3.5, $\mathcal{N}_{\tau_i, w}$ est aussi de dimension $s_i + t_i + 1$. On obtient ainsi $\phi^{-1}(\mathcal{N}_{\tau_i, w}) = \mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$.

La variété $\mathcal{C}_{\mathcal{Y}_+, \mathcal{X}_-}$ a un unique point singulier : $\bar{\tau}_i$. On en déduit que X_{τ_i} est une composante irréductible du lieu singulier de X_w . \square

4. Réciproque, description du lieu singulier.

Nous allons d'abord construire une résolution à la Zelevinsky (cf. [15]) de la variété de Schubert X_w , que l'on utilisera à plusieurs reprises dans la suite. Soient

$$Z_w = \{(U^\bullet, V^\bullet) \in Fl(r_1, \dots, r_k; n) \times Fl(n) \mid U^{r_j} \subseteq V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\},$$

$\pi : Z_w \longrightarrow Fl(n)$ la seconde projection, et

$$\Omega = \{V^\bullet \in Fl(n) \mid \dim(V^{p_i-1} \cap \mathbb{K}^{q_i}) = r_i \text{ pour tout } i\}.$$

PROPOSITION 4.1. — *La projection π fait de Z_w une résolution de X_w . De plus, π induit un isomorphisme au-dessus de l'ouvert Ω de X_w .*

Preuve. — On montre d'abord que la variété Z_w est irréductible et lisse, par une méthode inspirée de [14]. On donne ici les détails de la preuve afin d'obtenir une formule explicite donnant la dimension de Z_w , qui sera utile dans la suite.

Considérons d'abord la variété

$$\tilde{Z}_w = \{(U^\bullet, V^\bullet) \in Fl(r_1, \dots, r_k; n) \times Fl(n) \mid U^{r_j} \subseteq V^{p_j-1} \text{ pour tout } j\}.$$

La première projection $Fl(r_1, \dots, r_k; n) \times Fl(n) \longrightarrow Fl(r_1, \dots, r_k; n)$ induit une fibration localement triviale $\pi_1 : \tilde{Z}_w \longrightarrow Fl(r_1, \dots, r_k; n)$, de fibre isomorphe à

$$Y = \{V^\bullet \in Fl(n) \mid \mathbb{K}^{r_j} \subseteq V^{p_j-1} \text{ pour tout } j\}.$$

On a

$$\pi_1(Z_w) = \{U^\bullet \in Fl(r_1, \dots, r_k; n) \mid U^{r_j} \subseteq \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}$$

et $\pi_1^{-1}\pi_1(Z_w) = Z_w$, donc cette projection induit une fibration localement triviale $Z_w \rightarrow Y'$, où

$$Y' = \{U^\bullet \in Fl(r_1, \dots, r_k; n) \mid U^{r_j} \subseteq \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\},$$

de fibre Y . Il suffit maintenant de montrer que Y et Y' sont irréductibles et lisses.

On projette d'abord Y sur la variété $\widehat{Y} = \{\widehat{V}^\bullet \in Fl(p_1 - 1, \dots, p_k - 1; n) \mid \mathbb{K}^{r_j} \subseteq \widehat{V}^{p_j - 1} \text{ pour tout } j\}$. Cette projection est une fibration localement triviale dont la fibre est un produit de variétés de drapeaux, donc irréductible et lisse. Définissons pour $1 \leq j \leq k$,

$$\widehat{Y}_{\geq j} = \{\widehat{V}^\bullet \in Fl(p_j - 1, \dots, p_k - 1; n) \mid \mathbb{K}^{r_h} \subseteq \widehat{V}^{p_h - 1} \text{ pour tout } h \geq j\}.$$

Alors $\widehat{Y}_{\geq k}$ est une grassmannienne, donc elle est irréductible et lisse. Puis on observe que la projection naturelle de $\widehat{Y}_{\geq j-1}$ sur $\widehat{Y}_{\geq j}$ est une fibration localement triviale, de fibre isomorphe à une grassmannienne, donc irréductible et lisse. On obtient ainsi par récurrence l'irréductibilité et la lissité de tous les $\widehat{Y}_{\geq j}$, en particulier de $\widehat{Y} = \widehat{Y}_{\geq 1}$.

De même, les projections

$$Fl(r_1, \dots, r_k; n) \rightarrow Fl(r_1, \dots, r_{k-1}; n) \rightarrow \dots \rightarrow Gr_{r_1}(n)$$

font de Y' une suite de fibrations en grassmanniennes, donc Y' est irréductible et lisse. On a ainsi le résultat pour Z_w .

Il est clair que Z_w se projette par π sur X_w , et que π est bijective au-dessus de l'ouvert Ω de X_w . En particulier on en déduit que les variétés Z_w et X_w ont même dimension. Soit $z_w = (\mathbb{K}^{r^\bullet}, e_w) \in Z_w$, l'orbite Uz_w est un ouvert dense de Z_w et il résulte de la décomposition de Bruhat que π induit un isomorphisme $Uz_w \rightarrow Ue_w$, et π est birationnelle.

Comme Ω est un ouvert de la variété normale X_w (cf. [13]), il résulte alors du théorème principal de Zariski que π induit un isomorphisme au-dessus de Ω (cf. [3] 5.4, cor. 2). \square

On déduit de cette proposition que l'ouvert Ω de X_w est formé de points lisses. Le lieu singulier de X_w est donc contenu dans le complémentaire de Ω , c'est-à-dire dans $\bigcup_{c_i \text{ itérable}} X_w \cap X_{c_i^1}$ (cf. 2.4). Nous montrerons qu'il y a en fait égalité, et que les intersections $X_w \cap X_{c_i^1}$ sont les composantes irréductibles du lieu singulier construites en 3.

Pour commencer, nous avons la

PROPOSITION 4.2. — Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que la corectrice c_i soit itérable, la variété $X_w \cap X_{c_i^1}$ est irréductible.

Preuve. — On fixe i dans $\{1, \dots, k\}$ tel que la corectrice associée soit itérable, c'est-à-dire tel que le point coessentiel P_i soit bien bordé. Nous allons montrer que l'intersection $X_w \cap X_{c_i^1}$ est l'image d'un morphisme $Z_w^i \rightarrow X_w$ où Z_w^i est une variété irréductible.

Comme le point coessentiel P_i est bien bordé, il existe un entier $p < p_i$ tel que $w(p) > q_i$. On a donc $r_i < \min(p_i - 1, q_i)$. On définit la suite $(r_j^i)_{1 \leq j \leq k}$ par

$$r_j^i = r_j + \delta_{ij}.$$

Cette suite est croissante. On définit alors la variété

$$Z_w^i = \{(U^\bullet, V^\bullet) \in Fl(r_1^i, \dots, r_k^i; n) \times Fl(n) \mid U^{r_j^i} \subseteq V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}.$$

Soit π_i la projection de Z_w^i sur le deuxième facteur : $\pi_i : \begin{matrix} Z_w^i & \longrightarrow & X_w \\ (U^\bullet, V^\bullet) & \longmapsto & V^\bullet \end{matrix}$

Par construction, l'image de π_i est contenue dans $X_w \cap X_{c_i^1}$. Réciproquement, si $V^\bullet \in X_w \cap X_{c_i^1}$, la suite $E_j = V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j}$ pour $j \leq k$ est croissante car w est covexillaire, et on a $\dim E_j \geq r_j^i$. On peut donc choisir $U^{r_j^i} \subseteq E_j$ pour $j \leq k$ avec $\dim U^{r_j^i} = r_j^i$ et $U^{r_j^i} \subseteq U^{r_{j+1}^i}$. Ainsi $X_w \cap X_{c_i^1}$ est l'image de π_i , et il reste à montrer que Z_w^i est irréductible. Cela se fait aisément en adaptant la preuve de l'irréductibilité de Z_w dans la proposition 4.1 : la projection de Z_w^i sur le premier facteur est une fibration localement triviale de base $Y'^i = \{U^\bullet \in Fl(r_1^i, \dots, r_k^i; n) \mid U^{r_j^i} \subseteq \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}$, et de fibre isomorphe à $Y^i = \{V^\bullet \in Fl(n) \mid \mathbb{K}^{r_j^i} \subseteq V^{p_j-1} \text{ pour tout } j\}$. On démontre l'irréductibilité de Y^i et Y'^i comme on a procédé pour Y et Y' . Ceci achève la démonstration. □

Remarque 4.3. — On notera v_i la permutation définie par $X_w \cap X_{c_i^1} = X_{v_i}$. On observe que pour toute autre corectrice itérable $c_{i'}$, les permutations v_i et $v_{i'}$ sont incomparables. En effet, on a $r_{v_i}(p_j - 1, q_j) \geq r_j^i$ pour tout $(p_j, q_j) \in \text{Coess}(w)$. Mais d'après le lemme 3.5 (c) on a $\tau_i \leq v_i$ et $r_{\tau_i}(p_j - 1, q_j) = r_j^i$ pour tout j . On en déduit que $r_{v_i}(p_j - 1, q_j) = r_j^i$ pour tout j . En particulier, d'après le lemme 2.1, v_i et $v_{i'}$ sont incomparables.

Voyons maintenant la

PROPOSITION 4.4. — Le point e_{v_i} est singulier dans X_w .

Preuve. — Supposons au contraire que ce soit un point lisse. Considérons

$$C_{[v_i, w]} = \bigcup_{v_i \leq y \leq w} Be_y.$$

Alors $C_{[v_i, w]}$ est un ouvert B -stable et lisse de X_w contenant e_{v_i} . La projection $\pi : Z_w \rightarrow X_w$ induit une projection birationnelle $\bar{\pi} : \pi^{-1}(C_{[v_i, w]}) \rightarrow C_{[v_i, w]}$. D'après le théorème principal de Zariski (cf. [12], III, 9, prop. 1), si $\bar{\pi}$ n'est pas un isomorphisme, on aura l'égalité suivante, où $\text{Ex } \bar{\pi}$ désigne le lieu exceptionnel de $\bar{\pi}$:

$$\dim(\bar{\pi}^{-1}(\text{Ex } \bar{\pi})) = \ell(w) - 1 \quad (\#).$$

Nous allons expliciter le lieu exceptionnel de $\bar{\pi}$, et son image réciproque par $\bar{\pi}$, pour voir que cette égalité n'est pas vérifiée. Ceci achèvera la démonstration.

Comme π est un isomorphisme au-dessus de l'ouvert Ω , son lieu exceptionnel est inclus dans le complémentaire de Ω , i.e. dans $\bigcup_{c_j \text{ itérable}} X_w \cap X_{c_j^1}$. On en déduit, compte tenu de la proposition précédente, $\text{Ex } \pi \subseteq \bigcup_{c_j \text{ itérable}} X_{v_j}$.

On a remarqué que les permutations v_j associées aux coretrices itérables de w sont incomparables, donc $C_{[v_i, w]} \cap (\bigcup_{c_j \text{ itérable}} X_{v_j}) = Be_{v_i}$, et il vient $\text{Ex } \bar{\pi} \subseteq Be_{v_i}$. Ainsi, le lieu exceptionnel de $\bar{\pi}$ est soit égal à Be_{v_i} , soit vide, selon que $e_{v_i} \in \text{Ex } \bar{\pi}$ ou non. On s'intéresse donc maintenant à la fibre de $\bar{\pi}$ au point e_{v_i} :

$$\bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \simeq \{U^\bullet \in Fl(r_1, \dots, r_k; n) \mid U^{r_j} \subseteq V_{v_i}^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j} \text{ pour tout } j\}.$$

Comme on l'a remarqué précédemment, on a $\dim(V_{v_i}^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j}) = r_j + \delta_{ij}$ pour tout j , donc on a

$$\bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \simeq \{U^{r_i} \in Gr_{r_i}(n) \mid V_{v_i}^{p_i-1-1} \cap \mathbb{K}^{q_i-1} \subseteq U^{r_i} \subseteq V_{v_i}^{p_i-1} \cap \mathbb{K}^{q_i}\},$$

c'est-à-dire

$$\bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{K}^{r_i - r_{i-1} + 1}).$$

En particulier, comme $r_i - r_{i-1} + 1 \geq 2$, $e_{v_i} \in \text{Ex } \bar{\pi}$, d'où $\text{Ex } (\bar{\pi}) = Be_{v_i}$.

On déduit de la décomposition de Bruhat l'isomorphisme $\bar{\pi}^{-1}(Be_{v_i}) \simeq \bar{\pi}^{-1}(e_{v_i}) \times Be_{v_i}$, et donc $\dim(\bar{\pi}^{-1}(Be_{v_i})) = r_i - r_{i-1} + \ell(v_i)$. L'égalité (#) donne donc

$$\ell(w) - \ell(v_i) = r_i - r_{i-1} + 1.$$

On peut d'autre part tirer des preuves des propositions 4.1 et 4.2 une autre expression de la codimension de X_{v_i} dans X_w . En effet, on a déjà remarqué que $\dim X_w = \dim Z_w$. D'autre part, l'ensemble

$$\Omega^i = \{V^\bullet \in X_{v_i} \mid \dim(V^{p_j-1} \cap \mathbb{K}^{q_j}) = r_j^i\}$$

est un ouvert non vide de X_{v_i} et la projection π_i est bijective au-dessus de cet ouvert, on a donc $\dim X_{v_i} = \dim Z_w^i$. En reprenant pas à pas les preuves de ces propositions (4.1 et 4.2), on obtient, en posant $p_0 = 1, r_0 = 0$, et $p_{k+1} = q_{k+1} = r_{k+1} = n + 1$:

$$\begin{aligned} \dim Z_w = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (p_{j+1} - p_j)(p_{j+1} - p_j - 1) + \sum_{j=1}^k (p_{j+1} - p_j)(p_j - 1 - r_j) \\ + \sum_{j=1}^k (r_j - r_{j-1})(q_j - r_j) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dim Z_w^i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^k (p_{j+1} - p_j)(p_{j+1} - p_j - 1) + \sum_{j=1}^k (p_{j+1} - p_j)(p_j - 1 - r_j^i) \\ + \sum_{j=1}^k (r_j^i - r_{j-1}^i)(q_j - r_j^i). \end{aligned}$$

D'où par soustraction : $\ell(w) - \ell(v_i) = (p_{i+1} - p_i) - (q_i - r_i) + (r_i + 1 - r_{i-1}) + (q_{i+1} - r_{i+1})$.

En rapprochant les deux expressions, on obtient

$$(p_{i+1} - p_i) + (q_{i+1} - q_i) = r_{i+1} - r_i.$$

Ceci est absurde, car par un raisonnement simple de dénombrement, tenant compte, suivant les cas, des inégalités $w(p_{i+1}) > q_{i+1}$ ou $w^{-1}(q_i + 1) > p_i$, on montre que l'on a toujours

$$r_{i+1} - r_i \leq (p_{i+1} - p_i) + (q_{i+1} - q_i) - 1. \quad \square$$

Il résulte immédiatement de cette proposition que $\text{Sing}(X_w) = \bigcup_{c_i \text{ itérable}} X_{v_i}$, et $v_i = \tau_i$ pour tout i tel que la corectrice c_i est itérable.

On a ainsi obtenu le théorème suivant

THÉORÈME 4.5. — *Soit w une permutation covexillaire.*

a) *Les composantes irréductibles de $\text{Sing}(X_w)$ sont en bijection avec l'ensemble des points coessentiels bien bordés du graphe de w . Plus précisément, les variétés $X_i := X_w \cap X_{c_i^1}$, pour c_i corectrice itérable de w , sont irréductibles et sont exactement les composantes irréductibles de $\text{Sing}(X_w)$.*

b) *De plus, la singularité générique le long de X_i est isomorphe au cône $\mathcal{C}_{s_i+1, t_i+1}$ des matrices de taille $(s_i + 1, t_i + 1)$ et de rang au plus 1, où s_i et t_i sont définis comme dans la section 3.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BRION, P. POLO, Generic singularities of certain Schubert varieties, *Math. Z.*, 231 (1999), 301-324.
- [2] V. DEODHAR, Local Poincaré duality and nonsingularity of Schubert varieties, *Comm. Algebra*, 13 (1985), 1379-1388.
- [3] J. DIEUDONNÉ, *Cours de géométrie algébrique*, tome 2, P.U.F.
- [4] W. FULTON, Flags, Schubert polynomials, degeneracy loci, and determinantal formulas, *Duke Math. J.*, 65 (1992), 381-420.
- [5] W. FULTON, *Young Tableaux*, with applications to representation theory and geometry, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press, New-York (1997).
- [6] D. KAZHDAN, G. LUSZTIG, Representation of Coxeter groups and Hecke algebras, *Inv. Math.*, 53 (1979), 165-184.
- [7] V. LAKSHMIBAI, B. SANDHYA, Criterion for smoothness of Schubert varieties in $SL(n)/B$, *Proc. Indian Acad. Sci.*, 100 (1990), 45-52.
- [8] A. LASCoux, Polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les variétés de Schubert vexillaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 321 (1995), 667-670.
- [9] A. LASCoux, M.P. SCHÜTZENBERGER, Polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les grassmanniennes, *Astérisque*, 87-88 (1981), 249-266.
- [10] A. LASCoux, M.P. SCHÜTZENBERGER, Treillis et bases des groupes de Coxeter, *Electron. J. Combin.*, 3 (1996).
- [11] L. MANIVEL, Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence, *Cours spécialisés 3*, Société Mathématique de France, Paris, 1998.
- [12] D. MUMFORD, *The red book of varieties and schemes*, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer, 1999.

- [13] S. RAMANAN, A. RAMANATHAN, Projective normality of flag varieties and Schubert varieties, *Invent. Math.*, 79 (1985), 217-224.
- [14] K. M. RYAN, On Schubert varieties in the flag manifold of $Sl(n, \mathbb{C})$, *Math. Ann.*, 276 (1987), 205-224.
- [15] A. ZELEVINSKY, Small resolutions of singularities of Schubert varieties, *Funct. Anal. Applic.*, 17 (1982), 142-144.

Manuscrit reçu le 24 février 2000,
révisé le 5 juin 2000,
accepté le 26 juillet 2000.

Auréliе CORTEZ,
Université Paris VI
Institut de Mathématiques
Équipe d'Analyse Algébrique - Case 82
175, rue du Chevaleret
75013 Paris (France).
cortez@math.jussieu.fr