ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Ali BAKLOUTI & Jean LUDWIG

Entrelacement des restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents

Tome 51, nº 2 (2001), p. 395-429.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_2_395_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
51, 2 (2001), 395–429

ENTRELACEMENT DES RESTRICTIONS DES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS

par A. BAKLOUTI & J. LUDWIG

0. Introduction.

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On considère une représentation unitaire et irréductible π associée à une orbite coadjointe $\Omega_f = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^\star$ d'une forme linéaire f. Si H est un sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, alors d'après Corwin et Greenleaf [3], la désintégration de $\pi_{|H}$ en irréductibles s'obtient comme suit. Soit μ_π une mesure finie sur Ω_π qui est équivalente à la mesure G-invariante. Alors

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\Omega_\pi/H}^{\oplus} \sigma_\phi d\dot{\mu}_\pi(\phi) \tag{1}$$

où $p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \mathfrak{h}^\star$ est la projection canonique et $\sigma_\phi \in \hat{H}$ est associée à $p(\phi) \in \mathfrak{h}^\star$.

L'application de Kirillov $K_H : \mathfrak{h}^\star \longrightarrow \hat{H}$ induit un homéomorphisme de l'espace des orbites $\mathfrak{h}^\star/H$ sur $\hat{H}$. On considère finalement la mesure $\nu = \nu_H^\pi = (K_H \circ p)_\star(\mu_\pi)$, l'image de μ_π par l'application $K_H \circ p : \mathfrak{g}^\star \longrightarrow \hat{H}$. Pour $\sigma \in \hat{H}$, on désigne par $n_\pi(\sigma)$ le nombre des $H-$orbites contenues dans $\Gamma(\pi, \sigma) = \Omega_\pi \cap p^{-1}(\Omega_\sigma^H)$. Alors

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\hat{H}}^{\oplus} n_\pi(\sigma) \sigma d\nu(\sigma) \tag{2}$$

Mots-clés : Groupe de Lie nilpotent– Représentation – Orbite – Désintégration – Polarisation – Ensemble algébrique.
Classification math. : 22-XX.

ce qui a été démontré par Corwin et Greenleaf [3], [4] et Lipsman [11].

Ce même résultat a été généralisé par Lipsman dans le cadre des groupes complètement résolubles (cf. [12]) et par Fujiwara pour les groupes résolubles exponentiels quelconques (cf. [5]). Le but de cet article est de présenter dans le cas nilpotent un espace de désintégration *concret* et un opérateur d'entrelacement *précis* pour $\pi_{|H}$.

Le papier se compose de quatre sections. Dans la première nous introduisons certaines notations et définitions et dans la deuxième nous donnons une nouvelle désintégration abstraite en irréductibles des restrictions des représentations unitaires et irréductibles. Pour faire cela, nous choisissons une base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z} = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ de $\mathfrak{g}$, telle que $\mathcal{D} = \mathfrak{h} \cap \mathcal{Z}$ soit une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{h}$ et nous en extrayons une base de Malcev $\mathcal{X} = \{X_1, \dots, X_r\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$. Nous prenons certaines familles de polynômes réels $\{R_1, \dots, R_r\}$ en k variables à valeurs dans $\mathfrak{g}$ et une application polynomiale R_0 de $\mathbb{R}^k$ dans H et nous posons

$$R(t) = R_0(t) \cdot \prod_{i=r}^{1} \exp R_i(t) \ ; \quad t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k.$$

L'image de l'application R est contenue dans G. On l'applique à $f \in \mathfrak{g}^\star$ ce qui nous donne la partie $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$ de l'orbite Ω_π. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$ définit une mesure $d\lambda^{R,\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$. Nous montrons dans 2.6 un théorème de désintégration abstrait :

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi).$$

Dans la troisième section, nous indiquons un opérateur d'entrelacement unitaire et explicite. Nous devons d'abord préciser l'espace de désintégration. Prenons pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star$ la polarisation de Vergne $\mathfrak{b}(\phi)$ en ϕ associée à la base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z}$. De même, nous prenons la polarisation de Vergne $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ en $\phi_\mathfrak{h} = \phi_{|\mathfrak{h}}$ associée à $\mathcal{D}$. Soit $B(\phi) = \exp \mathfrak{b}(\phi), B(\phi_\mathfrak{h}) = \exp \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$. Nous réalisons la représentation π comme

$$\pi = \pi_f = \pi_{f,B(f)} = \operatorname{ind}_{B(f)}^G \chi_f.$$

Le problème technique le plus difficile est de trouver les bonnes mesures invariantes sur les espaces quotients $H/B(\phi_\mathfrak{h})$ et $B(\phi_\mathfrak{h})/B(\phi_\mathfrak{h}) \cap B(\phi)$, où $\phi \in \mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$. Une telle mesure sur $H/B(\phi_\mathfrak{h})$ est déterminée par une base de Malcev $\mathcal{X}(\phi)$ de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ et la mesure sur $B(\phi_\mathfrak{h})/B(\phi_\mathfrak{h}) \cap B(\phi)$ est décrite par une base de Malcev $\mathcal{Y}(\phi)$ de $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$. Nous montrons dans 3.1.3 qu'il existe une partition de $\mathfrak{g}^\star$ en un nombre fini de parties algébriques $\mathcal{L}_\epsilon, \epsilon \in E$, telle qu'il existe un choix de bases $\mathcal{X}(\phi), \mathcal{Y}(\phi)$ qui est continu sur $\mathcal{L}_\epsilon$ pour tout ϵ. Nous prenons pour $\phi = \mathrm{Ad}^\star(R(t))f = R(t)f \in \mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$ la représentation irréductible $\sigma_\phi = \mathrm{ind}_{B(\phi_\mathfrak{h})}^H \chi_{\phi_\mathfrak{h}}$. La base $\mathcal{X}(\phi)$ nous permet d'identifier l'espace de σ_ϕ avec $L^2(\mathbb{R}^m)$ où m est le cardinal de $\mathcal{X}(\phi)$. Ainsi l'espace $\int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}}^\oplus \mathcal{H}_{\sigma_\phi} d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi)$ de la désintégration de $\pi_{|H}$ sera tout simplement isomorphe à l'espace $L^2(\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}, L^2(\mathbb{R}^m))$.

L'opérateur d'entrelacement est construit à l'aide de la famille des opérateurs d'entrelacement infinitésimaux (voir 2.3)

$$T_\phi : S(G/B(f), f) \to S(H/B(\phi_\mathfrak{h}), \phi_\mathfrak{h}), (\phi \in \mathcal{T}^{R,\mathcal{X}})$$

$$T_\phi \xi(h) = \int_{B(\phi_\mathfrak{h})/B(\phi_\mathfrak{h})\cap B(\phi)} \xi(\mathrm{hug})\chi_\phi(u) d_{B(\phi_\mathfrak{h}), B(\phi_\mathfrak{h})\cap B(\phi)}(u)$$

qui envoie l'espace de Schwartz $S(G/B(f), f)$ de π sur l'espace correspondant de σ_ϕ (voir 2.4) et où $g \in G$ est tel que $\mathrm{Ad}^\star(g)f = \phi$.

Dans le théorème 3.2.3 nous prouvons finalement qu'il existe un choix continu par morceaux de bases $\mathcal{X}(\phi), \mathcal{Y}(\phi), \phi \in \mathfrak{g}^\star$, tel que pour toute famille d'applications (R_i) avec les propriétés de 2.5 l'opérateur

$$U : S(G/B(f), f) \to \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}}^\oplus \mathcal{H}_{\sigma_\phi} d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi),$$

$$U(\xi)(R(t)f) = T_{R(t)f}\xi; \quad t \in \mathbb{R}^k,$$

soit une isométrie qui s'étend continûment en un opérateur d'entrelacement unitaire.

Nous faisons une preuve par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Nous prenons les sous-algèbres $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_k$, où l'idéal $\mathfrak{g}_k$ est défini par $\mathfrak{g}_k = \mathrm{vect}\{Z_k, \ldots, Z_n\}$. Si $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{h}_k \neq \mathfrak{h}$ pour un k, alors nous appliquons l'hypothèse de récurrence aux couples $(G, H_k = \exp \mathfrak{h}_k)$ et (H_k, H). Dans cette partie nous utilisons un lemme de composition d'intégrales pour montrer que l'opérateur infinitésimal T_ϕ est la composition des deux opérateurs infinitésimaux associés aux passage de G à H_k et de H_k à H (voir 3.1.5).

S'il n'y a pas de tel k, alors $H = H_k$ pour un certain k et $H_{k-1} = G$. C'est dans cette situation que nous devons construire explicitement nos bases et prouver que U est un opérateur unitaire, en distinguant un certain nombre de cas spéciaux.

Dans la quatrième section, nous étudions des exemples.

1. Généralités.

1.1. Notations et rappels.

Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. En notant exp l'application exponentielle, on écrira $G = \exp \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{v}$ un espace vectoriel réel de dimension finie. On note $\mathfrak{v}^\star$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{v}$. Si $u_1, ..., u_p$ ($p \in \mathbb{N}$) désignent des vecteurs linéairement indépendants de $\mathfrak{v}$, on note $\mathrm{vect}(u_1, ..., u_p)$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{v}$ engendré par ces vecteurs. Étant donné $f \in \mathfrak{g}^\star$ et $X \in \mathfrak{g}$, on note $\langle f, X\rangle$ l'image de X par f. Le noyau de la forme bilinéaire B_f définie par $B_f(X,Y) = \langle f, [X,Y]\rangle$ se note $\mathfrak{g}(f)$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{g}(f) = \{X \in \mathfrak{g}; B_f(X,Y) = 0 \ \text{ pour tout } \ Y \in \mathfrak{g}\}.$$

On dit qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est subordonnée à f si elle est totalement isotrope pour B_f. On note $M(f,\mathfrak{g})$ l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ qui sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux pour B_f. Un élément de $M(f,\mathfrak{g})$ sera appelé polarisation (réelle) au point f. Soit $\mathfrak{m}$ un élément de $M(f,\mathfrak{g})$ et $M = \exp \mathfrak{m}$. Par abus de language, on appellera aussi polarisation en f le sous-groupe M associé de G. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre subordonnée à $f \in \mathfrak{g}^\star$. Donnons-nous le caractère χ_f du sous-groupe analytique $H = \exp \mathfrak{h}$ correspondant à f par $\chi_f(\exp X) = e^{-i\langle f, X\rangle}$, quel que soit $X \in \mathfrak{h}$.

On construit la représentation induite $\tau = \tau_{f,H} = \mathrm{ind}_H^G \chi_f$ de G. Par définition même d'une représentation induite, τ se réalise par translations à gauche dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\tau$ des fonctions mesurables ξ sur G vérifiant

$$\xi(gh) = \chi_f(h^{-1})\xi(g) \tag{3}$$

quels que soient g dans G et h dans H, et de carré intégrable sur G/H pour la mesure $G-$invariante. Une telle représentation sera aussi appelée monomiale.

Soit $K : \mathfrak{g}^\star/G \longrightarrow \hat{G}$ la bijection de Kirillov. Pour $\pi \in \hat{G}$, on notera Ω_π l'orbite correspondante $\Omega_\pi = K^{-1}(\pi)$. On munit $\mathfrak{g}^\star/G$ et $\hat{G}$ de leurs structures topologiques et boréliennes habituelles. Il est bien connu que K est un isomorphisme borélien, même un homéomorphisme, de $\mathfrak{g}^\star/G$ sur $\hat{G}$ ([2], [9]). On confondra parfois les classes d'équivalence dans $\hat{G}$ avec leurs représentantes, et la relation d'équivalence entre deux représentations π_1, π_2 se notera $\pi_1 \simeq \pi_2$.

Lorsque g décrit G, on notera $d_G(g)$ ou dg une mesure de Haar sur G et $d\dot{g} = d_{G,H}$ une mesure invariante sur un espace homogène G/H de G.

Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ une action unipotente de G sur V. Soit v_0 un vecteur $G-$invariant non nul dans V. Quand on pose, pour x arbitrairement fixé dans V, $L_x = x + \mathbb{R}v_0$, il se produit deux possibilités : soit $L_x \cap G\cdot x = \{x\}$, soit $L_x \cap G\cdot x = L_x$. En d'autre termes, la droite L_x rencontre l'orbite $G\cdot x$ en un seul point, ou bien y est complètement contenue. Selon ces deux possibilités, qui ne dépendent que de l'orbite, une orbite sera dite respectivement non-saturée ou saturée (cf. [13]). De façon plus générale, si V_0 est un sous-espace G-invariant de V, alors nous disons qu'une orbite $G \cdot x$ dans V est saturée par rapport à V_0, si $G \cdot x + V_0 = G \cdot x$.

Soit $\phi \in \mathfrak{g}^\star$. On donne maintenant une construction d'une polarisation au point ϕ due à Vergne [14]. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}_{n+1} = (0)$ une chaîne d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\dim \mathfrak{g}_j = n - j + 1$; soit $\phi_j = \phi_{|\mathfrak{g}_j}$. Alors

$$\mathfrak{b}(\phi) = \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{g}_j(\phi_j)$$

est un élément de $M(\phi, \mathfrak{g})$. Dans la suite nous dirons que $\mathfrak{b}(\phi)$ est la polarisation de Vergne en ϕ associée à la suite d'idéaux $(\mathfrak{g}_i)$, $i = 1, ..., n$.

2. Désintégration des restrictions des représentations.

2.1. Bases de Jordan-Hölder et bases de Malcev.

a) Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{Z} = \{Z_1, ..., Z_n\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$, ce qui veut dire que les sous-espaces $\mathfrak{g}_j = \mathrm{vect}(Z_j, ..., Z_n)$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ pour tout j. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Nous aurons besoin de bases de Malcev $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_r\}$ de $\mathfrak{g}$ relatives à $\mathfrak{h}$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}$ est la somme directe des $\mathbb{R}X_i$ et de $\mathfrak{h}$ et les sous-espaces $\mathfrak{k}_i = \mathrm{vect}(X_i, \cdots, X_r, \mathfrak{h})$ sont des sous-algèbres pour tout $i = 1, ..., r$. Pour déterminer une telle base, considérons l'ensemble indice $J = \{j_1, ..., j_r\}$ des $1 \leqslant j \leqslant n$, tels que $Z_j \notin \mathfrak{g}_{j+1} + \mathfrak{h}$. Nous posons $X_i = Z_{j_i}, i = 1, ..., r$. En même temps, nous remplaçons pour $j \notin J$ le vecteur Z_j par un vecteur $Z_j + U_j$, où $U_j \in \mathfrak{g}_{j+1}$ tel que le nouveau Z_j soit dans $\mathfrak{h}$. Nous pouvons donc toujours supposer que la base $\mathcal{Z}$ contient une base de Jordan-Hölder $\mathcal{D}$ de $\mathfrak{h}$. Nous disons que les bases $\mathcal{X}$ et $\mathcal{D}$ sont extraites de la base $\mathcal{Z}$.

b) Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Nous cherchons une base de Malcev de $\mathfrak{b}$ relative à $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. Pour obtenir une telle base, considérons comme dans a) l'ensemble indice $J_0 = \{1 \leqslant j \leqslant n; \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{g}_j = \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}+\mathfrak{g}_{j+1}\}$. Nous pouvons de nouveau supposer que le vecteur $Z_j, j \in J_0$, est dans $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. Nous obtenons ainsi une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.

Ensuite soit $J = \{1 \leqslant j \leqslant n; \mathfrak{b}+\mathfrak{g}_j\} = \mathfrak{b}+\mathfrak{g}_{j+1} \setminus J_0$ et de même pour $j \in J$ nous pouvons supposer que $Z_j \in \mathfrak{b}$. La partie $\{Z_j; j \in J\}$ nous donne une base de $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{b}+\mathfrak{a}/\mathfrak{a}$.

Finalement soit $K = \{1 \leqslant k \leqslant n; \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{g}_j \neq \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{g}_{j+1}\}$. Alors

$$\mathcal{X} = \{Z_k; k \in K\} \cup \{Z_j; j \in J\}$$

est une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{a}$ extraite d'une base de Jordan-Hölder, qui contient une base de Malcev $\mathcal{Y} = \{Z_j; j \in J\}$ de $\mathfrak{b}$ relative à $\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}$.

2.2. Mesures invariantes.

Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux sous-algèbres de $\mathfrak{g}$, et $A = \exp\mathfrak{a}$, $B = \exp\mathfrak{b}$ les sous-groupes de Lie associés. Soit $\mathcal{Y} = \{Y_1, ..., Y_l\}$ une base de Malcev de $\mathfrak{b}$ relative à $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. Alors l'application

$$E_{\mathcal{Y}} : \mathbb{R}^l \longrightarrow B/A\cap B$$
$$(t_1, ..., t_l) \longrightarrow \exp t_1Y_1 \cdots \exp t_lY_l(A\cap B)$$

est un difféomorphisme.

On obtient une mesure invariante $d_{\mathcal{Y}} = d_{A\cap B,A}$ sur $B/A\cap B$ de la manière suivante : pour toute fonction ξ continue à support compact dans $B/A\cap B$, soit

$$\int_{B/A\cap B} \xi(h)d_{\mathcal{Y}}(h) = \int_{\mathbb{R}^l} \xi(\exp t_1Y_1 \cdots \exp t_lY_l)dt_1 \cdots dt_l. \tag{4}$$

Bien sûr, toute mesure invariante non-nulle $d\mu$ sur $A/A\cap B$ étant un multiple c de $d_{\mathcal{Y}}$, on a $d\mu = d_{\mathcal{Y}'}$ où par exemple $\mathcal{Y}' = \{\frac{1}{c}Y_1, \ldots, Y_l\}$.

Supposons que la base de Malcev $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_r\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{a}$ soit extraite d'une base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z}$ de $\mathfrak{g}$ comme dans 2.1.b. Alors pour $x \in G$, $t \in \mathbb{R}^r$, nous avons

$$x \cdot E_{\mathcal{X}}(t) = E_{\mathcal{X}}(t(x))a(x,t),$$

où $a(x,t) \in A = \exp\mathfrak{a}$, $t(x) = (t_1(x), ..., t_r(x))$ et $t_j(x) = t_j + q_j(t_r, ..., t_{j+1}, x)$ pour certaines fonctions polynomiales q_j en x et $t_r, ..., t_{j+1}$ (voir [13], car on travaille avec des éléments d'une base de Jordan-Hölder).

Nous aurons besoin de la notion d'espace de Schwartz $S(G/P, f)$ où $P = \exp(\mathfrak{p})$ est un sous-groupe fermé connexe de G et où $\mathfrak{p}$ est subordonné à f. Nous posons

$$S(G/P, f) = \{\xi \in C^\infty(G), \xi(gp) = e^{\imath f(\log(p))}\xi(g); g \in G, p \in P, \\ \xi \circ E_{\mathcal{X}} \in S(\mathbb{R}^r).\}$$

Ici $\mathcal{X}$ désigne une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{p}$ et $E_{\mathcal{X}}$ le difféomorphisme correspondant de $\mathbb{R}^{\dim(G/P)} \to G/P$. La définition de $S(G/P, f)$ ne dépend pas de la base choisie $\mathcal{X}$ (voir [13]).

2.3. Rappelons que dans toute la suite de l'article, G désignera un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et $H = \exp \mathfrak{h}$ un sous-groupe analytique de G, π une représentation unitaire irréductible, $G \cdot f = \Omega_\pi \subset \mathfrak{g}^\star$ son orbite coadjointe associée.

Soient g un élément de G, posons $\phi = \mathrm{Ad}^\star(g)f$ et $\phi_\mathfrak{h} = \phi_{|_\mathfrak{h}} = (\mathrm{Ad}^\star(g)f)_{|_\mathfrak{h}}$. Soit $B = \exp \mathfrak{b}$ une polarisation au point f. Alors $B(\phi) = g \cdot B \cdot g^{-1} = \exp \mathfrak{b}(\phi) = \exp \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{b}$ est une polarisation en ϕ. On note $B(\phi_\mathfrak{h}) = \exp \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ une polarisation dans $\mathfrak{h}$ au point $\phi_\mathfrak{h} \in \mathfrak{h}^\star$. Soit $\mathcal{Y}(\phi)$ une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$. On remarque que l'intégrale

$$T_\phi\xi(h) = T_{B(\phi_\mathfrak{h}), B(\phi)}\xi(h) = \int_{B(\phi_\mathfrak{h})/B(\phi_\mathfrak{h}) \cap B(\phi)} \xi(\mathrm{hug})\chi_\phi(u) d_{\mathcal{Y}(\phi)}(u)$$

définie pour toute fonction ξ de $S(G/B, f)$ et h dans H, est une fonction C^∞ qui vérifie la relation de covariance (3) pour $B(\phi_\mathfrak{h})$, H et le caractère $\chi_{\phi_\mathfrak{h}}$.

Posons $\sigma_\phi = \sigma_{\phi_\mathfrak{h}, B(\phi_\mathfrak{h})} = \mathrm{ind}_{B(\phi_\mathfrak{h})}^H \chi_{\phi_\mathfrak{h}}$; un simple calcul montre que pour tout $h \in H$,

$$\sigma_\phi(h) \circ T_\phi \xi = T_\phi \circ \pi(h)\xi, \xi \in S(G/B, f). \tag{5}$$

Remarquons encore que par un changement de variable nous obtenons pour tout $h \in H$

$$T_\phi\xi(h) = \int_{g^{-1} \cdot B(\phi_\mathfrak{h}) \cdot g / g^{-1} \cdot B(\phi_\mathfrak{h}) \cdot g \cap B} \xi(\mathrm{hug})\chi_f(u) d_{\mathrm{Ad}(g)\mathcal{Y}(\phi_\mathfrak{h})}(u).$$

On va montrer que $T_\phi\xi$ est en fait un élément de $S(H/B(\phi_\mathfrak{h}), \phi_\mathfrak{h})$, c'est-à-dire un vecteur C^∞ de la représentation induite $\mathrm{ind}_{B(\phi_\mathfrak{h})}^H \chi_{\phi_\mathfrak{h}}$.

2.4. Proposition. — *Soit $\phi = \mathrm{Ad}^\star(g)f$, $B(\phi) = gBg^{-1}$, $\phi_\mathfrak{h} = \phi_{|\mathfrak{h}}$ et soit $B(\phi_\mathfrak{h})$ une polarisation en $\phi_\mathfrak{h}$. Il existe une constante positive C et* *une semi-norme P continue sur l'espace de Schwartz $S(G/B,f)$ telles que pour tout ξ dans $S(G/B,f)$ on ait*

$$\|T_\phi\xi\|_{L^2(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}))} \leqslant CP(\xi).$$

En particulier $T_\phi\xi \in S(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}),\phi_{\mathfrak{h}})$ pour tout $\xi \in S(G/B,f)$.

Preuve. — Nous allons montrer tout d'abord que pour tout ξ dans $S(G/B,f)$ nous avons

$$|T_{B(\phi_{\mathfrak{h}}),B(\phi)}\xi|_\infty \leqslant C_1P_1(\xi)$$

où C_1 est une constante positive et P_1 une semi-norme continue sur l'espace de Schwartz $S(G/B,f)$.

Prenons une base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z} = \{Z_1,\ldots,Z_n\}$ de $\mathfrak{g}$ qui contient une base de Jordan-Hölder $\mathcal{D}$ de $\mathfrak{h}$, une base de Malcev $\mathcal{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_l\}$ de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)$ comme dans (2.1.b) (ici on a pris $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}(\phi)$). Rappelons que d'après (2.1.b) $\mathcal{Y} = \{Y_1,\ldots,Y_l\} = \{X_{i_1},\ldots,X_{i_l}\}$ est contenu dans l'intersection de $\mathcal{D}$ avec une base de Malcev $\mathcal{X} = \{X_1,\ldots,X_r\}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$ et que $\mathcal{X}$ est en plus une partie de $\mathcal{Z}$.

Nous avons

$$T_\phi\xi(h) = \int_{B(\phi_{\mathfrak{h}})/B(\phi_{\mathfrak{h}})\cap B(\phi)} \xi(\text{hug})\chi_{\phi_{\mathfrak{h}}}(u)d_{\mathcal{Y}}(u).$$

Ainsi pour tout $h \in H$

$$\begin{aligned}|T_\phi\xi(h)| &= \Big|\int_{B(\phi_{\mathfrak{h}})/B(\phi_{\mathfrak{h}})\cap B(\phi)} \xi(\text{hug})\chi_{\phi_{\mathfrak{h}}}(u)d_{\mathcal{Y}}(u)\Big| \\ &\leqslant \int_{B(\phi_{\mathfrak{h}})/B(\phi_{\mathfrak{h}})\cap B(\phi)} |\xi(\text{hug})|d_{\mathcal{Y}}(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^l} |\xi(h\ \exp t_1Y_1\cdots\exp t_lY_lg)|dt_1\cdots dt_l.\end{aligned}$$

Écrivons $h = \exp a_1Z_1\cdots\exp a_nZ_n$ (où les a_i sont nuls, si Z_i n'est pas dans $\mathfrak{h}$) et

$$\begin{aligned}&h\cdot\exp t_1Y_1\cdots\exp t_lY_l \\ &= \exp a_1X_1\cdots\exp(t_1+q_1(h)Y_1)\exp(a_{i_l+1}+\cdots)X_{i_l+1} \\ &\quad\cdots\exp(t_l+q_l(t_1,...,t_{l-1},h))Y_l\cdots\exp(a_n+\cdots)X_r\cdot b\end{aligned}$$

où b est dans $B(\phi)\cap H$ et où les q_j sont des fonctions polynomiales en h et en $t_1,...,t_{j-1}$. Nous avons donc

$$|T_\phi\xi(h)| \leqslant P_1(\xi)\int_{\mathbb{R}^l}\prod_{k=1}^{l}(1+t_k^2)^{-1}dt_1\cdots dt_l$$

où

$$P_1(\xi) = \sup_{s_1,\ldots,s_r} \Big(\prod_{i=1}^{r} (1+s_i^2) |\xi(\exp s_r X_r \cdots \exp s_1 X_1 g)| \Big).$$

Comme la fonction $\mathbb{R}^r \ni (s_1, \ldots, s_r) \to \xi(\exp s_1 X_1 \cdots \exp s_r X_r g)$ est une fonction de Schwartz sur $\mathbb{R}^r$, nous voyons que P_1 est une norme continue sur $S(G/H, f)$.

Soit maintenant Q un polynôme sans zéros sur $H/B(\phi_{\mathfrak{h}})$ tel que $\frac{1}{Q}$ soit de carré intégrable.

Nous savons d'autre part que l'image de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ par $\sigma_\phi = \operatorname{ind}_{B(\phi_{\mathfrak{h}})}^{H} \chi_{\phi_{\mathfrak{h}}}$ est l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux sur $H/B(\phi_{\mathfrak{h}})$ (voir [13]).

Il en découle qu'il existe $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ tel que

$$Q \cdot T_\phi \xi = d\sigma_\phi(W) T_\phi \xi = T_\phi(d\pi(W)\xi).$$

Nous avons donc pour une base de Malcev $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$,

$$\begin{aligned}
\|T_\phi \xi\|^2_{L^2(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}))} &= \int_{H/B(\phi_{\mathfrak{h}})} |Q(h) T_\phi \xi(h)|^2 \frac{1}{Q^2(h)} d_{\mathcal{V}}(h) \\
&= \int_{H/B(\phi_{\mathfrak{h}})} |T_\phi(d\pi(W)\xi)(h)|^2 \frac{1}{Q^2(h)} d_{\mathcal{V}}(h) \\
&\leqslant |T_\phi(d\pi(W)\xi)|^2_\infty \int_{H/B(\phi_{\mathfrak{h}})} \frac{1}{Q^2(h)} d_{\mathcal{V}}(h) \\
&\leqslant C_1' P_1^2((d\pi(W)\xi)) \leqslant C^2 P^2(\xi)
\end{aligned}$$

pour une nouvelle semi-norme continue P de Schwartz et une constante C. Donc pour tout $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, on a $\|d\sigma_\phi(V) T_\phi \xi\|_2 \leqslant CP(d\pi(V)\xi)$, ce qui veut dire que $T_\phi \xi \in S(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}), \phi_{\mathfrak{h}})$. □

2.5. Soit maintenant $\mathcal{X} = \{X_1, \ldots, X_r\}$ une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$. Notons pour $j = 1, \ldots, r$, $G_j = \exp \mathfrak{g}_j$, où $\mathfrak{g}_j = \operatorname{vect}(X_j, \ldots, X_r, \mathfrak{h})$. Soit $\mathcal{D} = (X_{r+1}, \ldots, X_{r+p})$ une base de Malcev de $\mathfrak{h}$. Posons encore pour $j = 1, \ldots, r$ et $\phi \in \Omega_\pi$

$$d_j(\phi) = \operatorname{rang}(\langle \phi, [X_k, X_l] \rangle_{j \leqslant k, l \leqslant r+p}),$$

et soit

$$d_0 = 0, \; d_j = \sup_{\phi \in \Omega_\pi} d_j(\phi), \quad j = 1, \ldots, r.$$

Nous disons que $\phi \in \Omega_\pi$ est en position générale, si $d_j(\phi) = d_j$ pour tout j. Les éléments en position générale forment un ouvert de Zariski dans Ω_π.

Soit encore l'ensemble indice $L_{\mathcal{X}}^{H,G,f}$ défini par

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{X}}^{H,G,f} &= L^{H,G} = L^{H} = \big\{\{i_1 < \cdots < i_k\} \subset \{1,...,r\} \mid \\ &\text{pour tout}\, \phi \text{ en position générale dans } \Omega_\pi = \Omega_f, \\ &\text{la}\, G_j - \text{orbite de } \phi_{|\mathfrak{g}_j} \text{ est saturée par rapport à } \mathfrak{g}_{j+1}\big\} \\ &= \big\{j \in \{1,...,r\}; d_j = d_{j+1} + 2\big\}. \end{aligned}$$

Nous allons désintégrer la représentation $\pi_{|H}$ sur certaines parties $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$ de Ω_π qui ont la forme suivante.

Soit R_0 une fonction polynomiale en $t \in \mathbb{R}^k$ à valeurs dans $\mathfrak{h}$. Soit pour $j \notin L^{H,G}$ $R_j(t) = R_j(t_1,...,t_q)$ une fonction polynomiale où q est le plus petit indice tel que $i_q < j$. Posons aussi pour $j = i_q \in L^{H,G}$, $R_{i_q}(t) = t_q$.

En outre à l'aide des fonctions polynomiales R_j, $j = 0,...,r$, nous posons

$$R(t) = \exp R_0(t) \cdot \prod_{j=r}^{1} \exp R_j(t)X_j, \ t \in \mathbb{R}^k, \tag{6}$$

et

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}(f) = \mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\mathrm{Ad}^\star(R(t))f \mid t \in \mathbb{R}^k\}.$$

Nous disons que $t \in \mathbb{R}^k$ est en position générale, si $\mathrm{Ad}^\star(R(t))f$ est en position générale dans Ω_π. Les t en position générale forment évidemment un ouvert de Zariski noté $\mathbb{R}_0^k$ de $\mathbb{R}^k$. Nous prenons sur $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$ la mesure de Lebesgue $dT = dt_1 dt_2 \cdots dt_k$ que nous noterons $d\lambda = d\lambda^{R,\mathcal{X}}$.

2.6. PROPOSITION. — *L'application $t \mapsto \mathrm{Ad}^\star(R(t))f$ est injective sur $\mathbb{R}_0^k$.*

Preuve. — Soient $t = (t_1,...,t_k), t' = (t'_1,...,t'_k)$ en position générale tels que $\mathrm{Ad}^\star(R(t))f = \mathrm{Ad}^\star(R(t'))f$. Montrons par récurrence sur $m \in \{1,...,k\}$, que $t_m = t'_m$, si $t_1 = t'_1, \cdots, t_{m-1} = t'_{m-1}$. Soit $j = i_m \in L^{H,G}$ et soit

$$\phi_m = \mathrm{Ad}^\star\Big(\prod_{j'=j-1}^{1} \exp R_{j'}(t)X_{j'}\Big) f_{|\mathfrak{g}_j}.$$

Nous avons aussi d'après notre hypothèse sur t et t' et d'après les propriétés des fonctions $R_{j'}$,

$$\phi_m = \mathrm{Ad}^\star\Big(\prod_{j'=j-1}^{1} \exp R_{j'}(t')X_{j'}\Big) f_{|\mathfrak{g}_j}.$$

Ainsi comme $\mathrm{Ad}^\star(R(t))f = \mathrm{Ad}^\star(R(t'))f$ on a

$$\mathrm{Ad}^\star(g_{j+1} \exp t_m X_j)\phi_m = \mathrm{Ad}^\star(g'_{j+1} \exp t'_m X_j)\phi_m$$

pour certains $g_{j+1}, g'_{j+1} \in G_{j+1}$. Donc

$$\mathrm{Ad}^\star(\exp(t_m - t'_m)X_j g''_{j+1})\phi_m = \phi_m$$

pour un certain $g''_{j+1} \in G_{j+1}$. Comme $\mathrm{Ad}^\star(R(t))f$ est en position générale, la G_j-orbite de $\mathrm{Ad}^\star(R(t))f_{|\mathfrak{g}_j}$ est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_{j+1}$. Or ϕ_m est contenu dans cette orbite et ainsi le stabilisateur de ϕ_m est contenu dans $\mathfrak{g}_{j+1}$. Ainsi nécessairement $t_m = t'_m$. □

2.7. THÉORÈME. — *Soit G un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit H un sous-groupe de Lie fermé connexe de G de sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, π une représentation unitaire et irréductible de G liée à une forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^\star$ et soit $\mathcal{X}$ une base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ et $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$ l'ensemble décrit dans (2.5) relativement à cette base. Soit $d\lambda^{R,\mathcal{X}}$ la mesure sur $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$. Alors nous avons*

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi).$$

Preuve. — On fait une récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Notons comme dans (2.6), $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_r\}$ la base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{g}_1 = \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_2, ..., X_r)$ et $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$. Nous avons

$$H \subset G_1 \subset G.$$

On désigne par $\mathcal{X}_1 = \{X_2, ..., X_r\}$ la base de Malcev de $\mathfrak{g}_1$ relative à $\mathfrak{h}$. Il nous faut étudier les deux situations suivantes :

(1) L'orbite Ω_π est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_1$. Alors on a $1 \in L^{H,G}$. On note pour $t \in \mathbb{R}$,

$$R_j^t(t_2, ..., t_k) = R_j(t, t_2, ..., t_k) \tag{7}$$

qui est définie sur $\mathbb{R}^{k-1}$. Alors

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}_{|\mathfrak{g}_1} = \cup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{T}^{R^t,\mathcal{X}_1},$$

par suite la mesure $\lambda^{R,\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}$ coïncide avec $\lambda^{R^t,\mathcal{X}_1} \otimes dt$ sur $\cup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{T}^{R^t,\mathcal{X}_1}$.

D'autre part, on sait que

$$\pi_{|H} = \left(\pi_{|G_1}\right)_{|H} = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \pi^t_{1|H} dt \ ;$$

où $\pi_1^t(g_1) = \pi_1(\exp -tX_1 g_1 \exp tX_1)$, $g_1 \in G_1$ et où π_1 est associée à $f_{|\mathfrak{g}_1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence sur G_1 on obtient

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} (\pi_1^t)_{|H} dt \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \int_{\mathcal{T}^{R^t, \mathcal{X}_1}}^{\oplus} \sigma_{\phi_t} d\lambda^{R^t, \mathcal{X}_1}(\phi_t) dt$$
$$\simeq \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi).$$

(2) L'orbite Ω_π n'est pas saturée par rapport à $\mathfrak{g}_1$ et donc $1 \notin L^{H,G}$. Il en résulte que la première composante R_1 de la fonction R est constante. Dans ce cas on a

$$\pi_{|G_1} = \pi_{f_1} = \pi_1,$$

où $f_1 = f_{|\mathfrak{g}_1}$. En outre

$$\mathcal{T}_{|\mathfrak{g}_1}^{R,\mathcal{X}} = \mathcal{T}^{R^1, \mathcal{X}_1}$$

où $R^1 = (R_0, R_r ..., R_2)$ et où $\mathcal{T}^{R^1, \mathcal{X}_1} = \{\mathrm{Ad}^\star(R^1(t)) f_1, t \in \mathbb{R}^k\}$.

Nous avons finalement

$$\pi_{|H} = \pi_{1|H} \simeq \int_{\mathcal{T}^{R^1, \mathcal{X}_1}}^{\oplus} \sigma_{\phi_1} d\lambda^{R^1, \mathcal{X}_1}(\phi_1) \simeq \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}}^{\oplus} \sigma_\phi d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi).$$

□

3. Construction de l'opérateur d'entrelacement.

Dans cette partie de l'article nous préparons les outils, notamment certaines bases de Malcev, qui nous permettrons d'écrire l'opérateur d'entrelacement explicitement.

3.1. Construction de polarisations et de bases de Malcev.

3.1.1. DÉFINITION. — *Un ensemble algébrique réel M de $\mathbb{R}^N$ est par définition l'intersection d'un ouvert de Zariski et d'un fermé de Zariski, c'est-à-dire une partie M de $\mathbb{R}^N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, telle que $M = \{x \in \mathbb{R}^N : P_\alpha(x) = 0,\ Q_\alpha(x) \neq 0, \alpha \in A\}$ où les P_α et les $Q_\alpha, \alpha \in A$, sont des polynômes réels en nombre fini qui sont définis sur $\mathbb{R}^N$. Nous appelons polynôme P sur M toute restriction à M d'une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}^N$.*

3.1.2. DÉFINITION. — *Prenons pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star$ une famille $\mathcal{X}(\phi) = \{X_1(\phi), \ldots, X_{d_\phi}(\phi)\}$ de vecteurs dans $\mathfrak{g}$. Nous disons que $\mathcal{X}(\phi)$*

est continue (resp. polynomiale) en ϕ par morceaux s'il existe une partition finie $\mathfrak{g}^\star = \bigcup_{\mathcal{E}} \mathcal{L}_\epsilon$ en parties algébriques $\mathcal{L}_\epsilon$ et pour chaque ϵ un entier positif d_ϵ, tels que le nombre d_ϕ soit égal à d_ϵ pour tout ϕ dans $\mathcal{L}_\epsilon$ et tels que les applications $\phi \mapsto X_j(\phi)$ soient continues (resp. polynomiales) sur $\mathcal{L}_\epsilon$ pour tout ϵ et pour tout j.

3.1.3. PROPOSITION. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_n\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ qui contient une base de Jordan-Hölder $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_p\}$ de $\mathfrak{h}$. Soit pour $\phi \in \mathfrak{g}^\star$, $\mathfrak{b}(\phi)$ la polarisation de Vergne en ϕ associée à $\mathcal{Z}$ et $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ la polarisation de Vergne en $\phi_\mathfrak{h} = \phi_{|\mathfrak{h}}$ associée à $\mathcal{D}$. Soit $\mathcal{X}(\phi)$ la base de Malcev de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$, obtenue par extraction de la base $\mathcal{D}$. Alors $\mathcal{X}(\phi)$ est continue en $\phi_\mathfrak{h}$ par morceaux. De même il existe une base de Malcev $\mathcal{Y}(\phi)$ de $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h}), \phi \in \mathfrak{g}^\star$, qui est continue en $\phi_\mathfrak{h}$ par morceaux.*

Preuve. — Rappelons que la polarisation de Vergne $\mathfrak{b}(\phi)$ en ϕ associée à $\mathcal{Z}$ est définie par

$$\mathfrak{b}(\phi) = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{g}_j(\phi_j),$$

où $\mathfrak{g}_j = \mathrm{vect}\{Z_j, \ldots, Z_n\}$ et où $\phi_j = \phi_{|\mathfrak{g}_j}$. Montrons d'abord qu'il existe une base de Jordan-Hölder $\mathcal{U}(\phi)$ de $\mathfrak{b}(\phi)$ qui est polynomiale en ϕ par morceaux.

Nous voyons que pour $\phi \in \mathfrak{g}^\star$ on a $\mathfrak{g}_j(\phi_j) \not\subset \mathfrak{g}_{j+1}$ si et seulement si le rang i_j de la matrice

$$M(\phi, j) = (\langle \phi, [Z_r, Z_s] \rangle)_{j \leqslant r, s \leqslant n}$$

est égal au rang de la matrice $M(\phi, j+1)$. Il existe donc un déterminant Δ_{j+1, i_j} d'ordre i_j extrait de $M(\phi, j+1)$ non-nul et tout déterminant extrait Δ_{j, i_j+1} de $M(\phi, j)$ d'ordre $i_j + 1$ est 0.

Prenons donc pour $1 \leqslant j \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant n-j+1$, l'ensemble $\mathcal{D}_{j,i}$ de toutes les parties carrées D contenues dans $\{j, ..., n\}^2$ avec i^2 éléments. Ordonnons cet ensemble $\mathcal{D}_{j,i}$ totalement. Soit pour $D \in \mathcal{D}_{j,i}, \phi \in \mathfrak{g}^\star$,

$$\Delta_D(\phi) = \det\left(\langle \phi, [Z_u, Z_v] \rangle\right)_{(u,v) \in D}$$

et soit

$$\mathfrak{g}^\star_{j,i,D} = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star \ ; \ \ \Delta_{D'}(\phi) = 0, \ D' < D, \ \Delta_D(\phi) \neq 0\} (D \in \mathcal{D}_{j,i}).$$

Cette partie de $\mathfrak{g}^\star$ est algébrique. Il en est de même pour la partie

$$\mathfrak{r}^\star_{j,i,D} = \mathfrak{g}^\star_{j+1,i,D} \cap \{\phi \in \mathfrak{g}^\star \ ; \ \Delta_E(\phi) = 0, E \in \mathcal{D}_{j,i+1}\} (D \in \mathcal{D}_{j+1,i}),$$

qui est constituée des éléments de $\mathfrak{g}^\star_{j+1,i,D}$ pour lesquels le rang de la matrice $M(\phi, j)$ est égal au rang de la matrice $M(\phi, j+1)$ et aussi égal à i et pour la partie

$$\mathfrak{s}^\star_{j,i,D} = \mathfrak{g}^\star_{j,i,D} \cap \{\phi \in \mathfrak{g}^\star; \ \Delta_{D'}(\phi) = 0, D' \in \mathcal{D}_{j,i+1}\},$$

qui est l'ensemble des $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{j,i,D}$ pour lesquels la matrice $M(\phi, j)$ est de rang i.

Rappelons que pour les ϕ dans $\mathfrak{r}^\star_{j,i,D}$ la sous-algèbre $\mathfrak{g}_j(\phi_j)$ n'est pas contenue dans $\mathfrak{g}_{j+1}$.

En effet, il existe alors des solutions notées $U'_j(\phi) = U'_{j,D}(\phi)$ du système linéaire

$$\left\langle \phi, \left[Z_j + \sum_{r=j+1}^{n} \alpha_r Z_r, Z_k\right]\right\rangle = 0, k = j+1, ..., n,$$

et ce vecteur $U'_j(\phi)$ est contenu dans $\mathfrak{g}_j(\phi) \setminus \mathfrak{g}_{j+1}$.

Les solutions $U'_j(\phi) = Z_j + \sum_{r=j+1}^n \alpha_r(\phi) Z_r$, $\phi \in \mathfrak{r}^\star_{j,i,D}$, peuvent être choisies rationnelles telles que le dénominateur des fonctions rationnelles $\alpha_r(\phi)$ soit la fonction polynomiale Δ_D. En multipliant avec Δ_D nous obtenons des vecteurs $U_j(\phi) \in \mathfrak{g}_j(\phi) \setminus \mathfrak{g}_{j+1}$ qui varient polynomialement en $\phi \in \mathfrak{r}^\star_{j,i,D}$.

Soit P une partie de $\{1, ...n\}$. Il est clair maintenant que la partie

$$\mathfrak{g}^\star_P = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star, \mathfrak{g}_j(\phi_j) \not\subset \mathfrak{g}_{j+1}, j \in P, \mathfrak{g}_j(\phi_j) \subset \mathfrak{g}_{j+1}, j \notin P\}$$

est une réunion disjointe de parties algébriques. En outre les vecteurs $U_j(\phi), j \in P$, qu'on a construit en haut, forment une base de Jordan-Hölder, notée $\mathcal{U}(\phi)$, de $\mathfrak{b}(\phi)$ et cette base est polynomiale en ϕ sur ces parties algébriques.

En outre, il est évident que pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star_P$ la famille $\mathcal{B}(\phi) = \{Z_j\}_{j \notin P}$ forment une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$, qui est donc constante sur $\mathfrak{g}^\star_P$.

Nous faisons maintenant des constructions analogues pour la sous-algèbre $\mathfrak{h}$. En les combinant avec l'opération de restriction, nous trouvons une partition finie $\mathfrak{g}^\star = \bigcup_\epsilon \mathfrak{g}^\star_\epsilon$ en parties algébriques, pour tout ϵ une partie Q_ϵ de $\{1, ..., p\}$, pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star_\epsilon$ une base de Malcev $\mathcal{X}(\phi) = (D_l)_{l \notin Q_\epsilon}$ de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ qui est constante sur $\mathfrak{g}^\star_\epsilon$ et pour tout ϕ dans $\mathfrak{g}^\star_\epsilon$ une base de Jordan-Hölder $\mathcal{V}(\phi) = \{V_j(\phi) = D_j + \sum_{i>j} \alpha_{j,i}(\phi) D_i\}_{j\in Q_\epsilon}$ de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$, qui est polynomiale sur $\mathfrak{g}_\epsilon^\star$. En prenant des parties algébriques plus petites nous pouvons supposer en plus que pour tout ϵ il existe une partie $P_\epsilon \subset (1, ..., n)$ telle que les bases de Jordan-Hölder $(U_j(\phi))_{j\in P_\epsilon}$ construites plus haut soient polynomiales sur $\mathfrak{g}_\epsilon^\star$. Pour trouver la base de Malcev $\mathcal{Y}(\phi)$ de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$, $\phi \in \mathfrak{g}_\epsilon^\star$, il suffit de savoir que $Y \in \mathfrak{h}$ est dans $\mathfrak{b}(\phi)$, si et seulement si $\langle \phi, [Y, U_r(\phi)]\rangle = 0$, pour tout $r \in P_\epsilon$, car $\mathfrak{b}(\phi)$ est maximale isotrope pour ϕ et les $U_r(\phi)$ forment une base de $\mathfrak{b}(\phi)$. Soit pour $j \in \{1, \dots, l_\epsilon\}$, $\phi \in \mathfrak{g}_\epsilon^\star$, (où l_ϵ désigne le cardinal de P_ϵ)

$$N(\phi_{\mathfrak{h}}, j) = \Big[\langle \phi, \big[V_s(\phi), U_r(\phi)\big]\rangle_{\substack{j\leqslant s\leqslant p,\, s\in Q_\epsilon \\ 1\leqslant r\leqslant n,\, r\in P_\epsilon}}\Big].$$

On ne trouve alors pas de vecteurs de la forme $V_j(\phi) + \sum_{s>j} \alpha_s V_s(\phi)$ dans $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$, si et seulement si $\mathrm{rang}(N(\phi_{\mathfrak{h}}, j)) \neq \mathrm{rang}(N(\phi_{\mathfrak{h}}, j+1))$. Ainsi nous obtenons une partition de $\mathfrak{g}_\epsilon^\star = \bigcup_\Delta \mathfrak{g}_{\epsilon,\Delta}^\star$ en parties algébriques, pour tout Δ une partie Q_Δ de $\{1, \dots, l_\epsilon\}$ telle que $\mathcal{Y}(\phi) = \{V_j(\phi); j \in Q_\Delta\}$ soit une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ (obtenue par extraction de la base $\mathcal{V}(\phi)$) qui varie polynomialement sur $\mathfrak{g}_{\epsilon,\Delta}^\star$.

q.e.d.

Le lemme suivant nous permettra d'écrire la formule de la composition dans 3.1.5.

3.1.4. LEMME. — *Soit $(\mathfrak{g}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Pour $k \geqslant 1$, nous posons $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_k$. Soient $\phi_{\mathfrak{h}_k} = \phi_{|\mathfrak{h}_k}$, $\phi_{\mathfrak{h}} = \phi_{|\mathfrak{h}}$ et $\mathfrak{b}(\phi)$, $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$, $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ les polarisations de M. Vergne respectivement en ϕ dans $\mathfrak{g}$, en $\phi_{\mathfrak{h}_k}$ dans $\mathfrak{h}_k$ et en $\phi_{\mathfrak{h}}$ dans $\mathfrak{h}$ relativement aux suites de Jordan-Hölder $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} \cap \mathfrak{h}_k$ et $\mathcal{Z} \cap \mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \supset \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$, $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ et l'espace quotient $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$ est isomorphe à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}$.*

Preuve. — Soit $\mathfrak{a}(\phi)$ le plus grand idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{g}(\phi)$, c'est-à-dire

$$\mathfrak{a}(\phi) = \bigcap_{g\in G} \mathfrak{g}(\mathrm{Ad}^\star(g)\phi).$$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}(\phi)$ alors $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) = \mathfrak{h}_k$ et $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{h}$ et tout est clair. Nous pouvons donc supposer que $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{a}(\phi)$.

Nous savons qu'il existe alors j dans $\{1, ..., n\}$ tel que $\mathfrak{g}_j \not\subset \mathfrak{a}(\phi)$ mais que $\mathfrak{g}_{j+1} \subset \mathfrak{a}(\phi)$. Soit $Y \in \mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j+1}$. On pose alors

$$\mathfrak{g}^1 = \{U \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle \phi, [Y, U]\rangle = 0\},$$

$\mathfrak{g}^1$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$.

Nous allons utiliser une récurrence sur $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Le cas où cette dimension est 1 est trivial. Nous allons discuter les cas possibles suivants :

Cas 1 : Il existe $\sigma > j$ tel que $\mathfrak{g}_\sigma \not\subset \mathfrak{h}, \mathfrak{g}_{\sigma+1} \subset \mathfrak{h}$.

Soit $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_\sigma$. Si $k \leqslant \sigma$, alors $\mathfrak{h}'_k = \mathfrak{h}' + \mathfrak{g}_k = \mathfrak{h}_k$. Vu que $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) + \mathfrak{g}_\sigma$, et que $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'_k}) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$, la récurrence nous dit que

$$\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}).$$

Comme

$$\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) = \mathfrak{g}_\sigma + \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}),$$

on a

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h} \subset (\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}') \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$$

et comme

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}' = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_\sigma$$

on voit que

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) &\simeq \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}'/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}' \\ &\simeq \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}.\end{aligned}$$

Si $k > \sigma$, alors $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h}$ et il n'y a rien à prouver.

Nous pouvons donc admettre maintenant que $\mathfrak{g}_{j+1} \subset \mathfrak{h}$ et que $k \leqslant j$, car pour $k > j$, nous avons $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h}$.

Cas 2 : $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^1$.

Si $\mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{g}^1$, nous n'avons qu'à appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}^1$ avec la suite de Jordan-Hölder $(\mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{g}_k)_{k'}$ et $\mathfrak{h}$.

Sinon, soit $\mathfrak{h}^1_k = \mathfrak{h}_k \cap \mathfrak{g}^1$. Vu que $Y \in \mathfrak{h}_k$, nous avons $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}^1_k}) \subset \mathfrak{g}^1$. Maintenant l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{g}^1$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^1_k$ et à la suite de Jordan-Hölder $(\mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{g}_k)_{k'}$ nous donne la réponse.

Cas 3 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^1$ et $Y \in \mathfrak{h}$, c'est-à-dire $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{h}$.

Nous posons $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^1$, $\mathfrak{h}^1_k = \mathfrak{h}_k \cap \mathfrak{g}^1$. Dans cette situation, nous avons $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}^1_k}) \subset \mathfrak{g}^1$ et $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_1}) \subset \mathfrak{g}^1$, car $Y \in \mathfrak{h}$. Ainsi, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{h}_1$ et $\mathfrak{h}^1_k$ avec la suite de Jordan-Hölder $(\mathfrak{g}^1 \cap \mathfrak{g}_k)_{k'}$.

Cas 4 : $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}^1$, $Y \notin \mathfrak{h}$.

Nous posons $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}Y$. Comme $Y \in \mathfrak{g}_j$, nous avons $Y \in \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}'$, nous voyons donc que

$$\begin{aligned}&\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \simeq \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}'/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}'\\ &= \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap (\mathfrak{h} + \mathbb{R}Y)/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap (\mathfrak{h} + \mathbb{R}Y)\\ &= \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}.\end{aligned}$$

Il est aussi facile de voir que

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}), \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \subset \mathfrak{g}^1, \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}).$$

Pour les deux autres assertions, considérons d'abord le cas

Cas 4.1. La H'-orbite de $\phi_{\mathfrak{h}'}$ est saturée par rapport à $\mathfrak{h}$.

Alors on a $\dim \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) = \dim \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ et ainsi

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) = \big(\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{h}\big) + \mathbb{R}X_0(\phi), \quad \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) = \big(\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}^1\big) + \mathbb{R}Y,$$

où $X_0(\phi) \in \mathfrak{h}$ est un élément quelconque du stabilisateur de $\phi_{\mathfrak{h}}$ qui vérifie $\langle \phi, [X_0(\phi), Y]\rangle \neq 0$. Ainsi, l'hypothèse de récurrence appliquée à $\mathfrak{g}$ et à $\mathfrak{h}'$ nous dit que

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h}' \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}^1 + \mathbb{R}Y$$

et ainsi

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}).$$

D'autre part, de nouveau par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{g}^1 \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}).$$

Cas 4.2. La H'-orbite de $\phi_{\mathfrak{h}'}$ n'est pas saturée par rapport à $\mathfrak{h}$.

Alors on a $\dim \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) = \dim \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) + 1$, ainsi $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{h}$ et donc par l'hypothèse de récurrence pour $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}'$:

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$$

et $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}'}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$.

3.1.5. Corollaire (Formule de composition). — *Soit $\mathcal{Y}_{\mathfrak{h}_k}$ une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ et soit $\mathcal{Y}_{\mathfrak{h}}$ une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$. Alors $\mathcal{Y}_{\mathfrak{h}_k}$ est aussi une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$ et la base $\mathcal{Y}$ définie par*

$\mathcal{Y}=\mathcal{Y}_{\mathfrak{h}_k}\cup\mathcal{Y}_{\mathfrak{h}}$ est une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)$. En particulier pour tout $\xi\in S(G/B(\phi))$ nous avons

$$\int_{B(\phi_{\mathfrak{h}})/B(\phi_{\mathfrak{h}})\cap B(\phi)}\xi(h)d_{\mathcal{Y}}(h)$$
$$=\int_{B(\phi_{\mathfrak{h}})/B(\phi_{\mathfrak{h}})\cap B(\phi_{\mathfrak{h}_k})}\int_{B(\phi_{\mathfrak{h}_k})/B(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap B(\phi)}\xi(hb)d_{\mathcal{Y}_{\mathfrak{h}}}(h)d_{\mathcal{Y}_{\mathfrak{h}_k}}(b).$$

Preuve. — En effet, comme d'après 3.1.4, $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\supset\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi)\supset\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$, nous en déduisons que

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)\supset\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{h}\supset\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$$

et ainsi

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)=\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{h},$$

ce qui implique

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)\subset\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}).$$

En outre $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\supset\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{h}$ implique que

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{h}\supset\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\supset\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{h}$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{h}=\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}).$$

Ainsi

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)\simeq[\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})]\oplus[\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)].$$

D'autre part, comme d'après 3.1.4, $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{h}/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{h}\simeq\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})/\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$, nous voyons que

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi)&\simeq\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{h}/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi)\cap\mathfrak{h}\\&=\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})\cap\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi).\end{aligned}$$

La preuve du corollaire est une conséquence facile de ces identités. q.e.d.

3.1.6. Remarque. — Les bases de Malcev $\mathcal{Y}(\phi)$ de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}),\phi\in\mathfrak{g}^\star$, relatives à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})\cap\mathfrak{b}(\phi)$ construites dans 3.1.3 ont la propriété (I) suivante : pour tout $h\in H$, les mesures $d_{\mathcal{Y}(\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)}$ et $d_{\mathrm{Ad}(h)(\mathcal{Y}(\phi))}$ de $B((\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)_{\mathfrak{h}})/B(\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)\cap B((\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)_{\mathfrak{h}})$ coïncident. En effet, d'après 3.1.3, on a

$$\mathcal{Y}(\phi)=\Big\{V_j(\phi)=D_j+\sum_{i>j}\alpha_{j,i}(\phi)D_i\ ;\ j\in Q_\Delta\Big\}$$

pour $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{\epsilon,\Delta}$. Or

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(h)V_j(\phi) &= \mathrm{Ad}(h)D_j + \sum_{i>j} \alpha_{j,i}(\phi)\,\mathrm{Ad}(h)D_i \\ &= D_j + \sum_{i>j} \alpha'_{j,i}(\phi)D_i \in \mathfrak{b}((\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)_{\mathfrak{h}}),\end{aligned}$$

car les D_i forment une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{h}$. Donc pour $j \in Q_\Delta$,

$$\mathrm{Ad}(h)V_j(\phi) - V_j(\mathrm{Ad}^\star(h)\phi) \in \big(\mathrm{vect}(\{D_{j+1}, \ldots, D_p\}) \cap \mathfrak{b}((\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)_{\mathfrak{h}})\big),$$

et ainsi les mesures $d_{\mathrm{Ad}(h)(\mathcal{Y}(\phi))}$ et $d_{\mathcal{Y}(\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)}$ coïncident.

3.2. Description de l'opérateur d'entrelacement.

Nous allons décrire maintenant un opérateur d'entrelacement U pour la désintégration en irréductibles (1) de $\pi_{|H}$. Nous rappelons la notation $\sigma_\phi = \pi_{\phi_{\mathfrak{h}},\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})}$ pour la représentation irréductible $\mathrm{ind}_{B(\phi_{\mathfrak{h}})}^H \chi_{\phi_{\mathfrak{h}}}$ de H ($\phi \in \Omega_\pi$).

Pour $\xi \in S(G/B, f)$, on définit la fonction $T_\phi\xi$ pour tout $h \in H$ par

$$\begin{aligned}T_\phi\xi(h) &= T_{\phi,g_\phi}\xi(h) = T_{B(\phi_{\mathfrak{h}}),B(\phi)}\xi(h) \\ &= \int_{B(\phi_{\mathfrak{h}})/B(\phi_{\mathfrak{h}})\cap B(\phi)} \xi(\mathrm{hug}_\phi)\chi_\phi(u)d_{\mathcal{Y}(\phi)}(u),\end{aligned}$$

où g_ϕ est un élément de G tel que $\phi = \mathrm{Ad}^\star(g_\phi)f$. On vérifie facilement la relation de covariance suivante :

$$T_{\mathrm{Ad}^\star(h_0)\phi}\xi(h) = T_\phi\xi(h \cdot h_0), \quad h, h_0 \in H.$$

En particulier, si pour deux éléments $g, g' \in G$, on a $\phi = \mathrm{Ad}^\star(g)f = \mathrm{Ad}^\star(g')f$, alors $g^{-1}g' \in G(f) \subset B$ et donc $T_{\phi,g'} = e^{if(\log(g^{-1}g'))}T_{\phi,g}$.

Rappelons encore que, d'après (2.3), pour $\phi \in \Omega_\pi$, l'opérateur T_ϕ envoie $S(G/B, f)$ sur $S(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}), \phi_{\mathfrak{h}})$.

Considérons maintenant une partition en parties algébriques de $\mathfrak{g}^\star$ et donc aussi de

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \bigcup_\epsilon \mathcal{T}_\epsilon^{R,\mathcal{X}} = \bigcup_\epsilon (\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} \cap \mathfrak{g}^\star_\epsilon)$$

comme dans la proposition (3.1.3), telle que pour tout ϵ et tout $\phi \in \mathcal{T}_\epsilon^{R,\mathcal{X}}$ il existe une base $\mathcal{X}(\phi)$ de Malcev de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ et une base $\mathcal{Y}(\phi)$ de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$ qui varient continûment sur $\mathcal{T}_\epsilon^{R,\mathcal{X}}$. Nous remarquons alors que pour $\xi \in S(G/B, f)$ la fonction $(\phi, h) \mapsto T_\phi\xi(h)$ est continue sur $\mathcal{T}_\epsilon^{R,\mathcal{X}} \times H$ pour tout ϵ.

Soit $C(\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}, L^2)$ l'ensemble des applications

$$X : \mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} \longrightarrow \bigcup_{\phi \in \mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}} L^2(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}), \phi_{\mathfrak{h}})$$

telles que $(\phi, h) \mapsto X(\phi)(h)$ soient continues sur $\mathcal{T}_\epsilon^{R,\mathcal{X}} \times H$ pour tout ϵ et qui vérifient

$$\|X\|_2^2 = \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}} \|X(\phi)\|^2_{L^2(H/B(\phi_{|\mathfrak{h}}),\phi_{|\mathfrak{h}})} d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi) < \infty.$$

Nous définissons

$$L^2(\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}) = \int^{\oplus}_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}} L^2(H/B(\phi_{|\mathfrak{h}}), \phi_{|\mathfrak{h}}) d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi)$$

comme étant le complété de $C(\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}, L^2)$ pour la norme $\| \, \|_2$.

3.2.2. Définition. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{Z} = \{Z_1, ..., Z_n\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ contenant une base de Jordan-Hölder $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_p\}$ de $\mathfrak{h}$. Soit pour $\phi \in \mathfrak{g}^\star$, $\mathfrak{b}(\phi)$ (resp. $\mathfrak{b}(\phi_{|\mathfrak{h}})$) la polarisation de M. Vergne construite à partir de $\mathcal{Z}$ (resp. à partir de $\mathcal{D}$) en ϕ dans $\mathfrak{g}$ (resp. en $\phi_{\mathfrak{h}}$ dans $\mathfrak{h}$) et soit $\mathcal{X}(\phi)$ la base de Malcev de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ extraite de $\mathcal{D}$. Nous disons dans la suite qu'un choix $\mathcal{Y}(\phi), \phi \in \mathfrak{g}^\star$, de bases de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relatives à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$ est* acceptable, *s'il existe une partition $\mathfrak{g}^\star = \cup_{\epsilon \in E} \mathfrak{g}^\star_\epsilon$ finie de $\mathfrak{g}^\star$ en parties algébriques telle que les applications $\phi \mapsto \mathcal{X}(\phi)$, $\phi \mapsto \mathcal{Y}(\phi)$ soient continues sur $\mathfrak{g}^\star_\epsilon$ pour tout ϵ, telle que $\mathcal{Y}(\phi)$ vérifie la condition I de (3.1.6) et telle que pour tout $f \in \mathfrak{g}^\star$, pour toute application R avec les propriétés de (2.5), l'opérateur*

$$U : S(G/B, f) \to \int^{\oplus}_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}} L^2(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}), \phi_{\mathfrak{h}}) d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi),$$

$$U(\xi)(R(t)f)(h) = T_{R(t)f}\xi(h) = \int_{B(\phi_{\mathfrak{h}})/B(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap B(\phi)} \xi(huR(t))\chi_\phi(u) d_{\mathcal{Y}(\phi)}(u),$$

(où $\phi = R(t)f$), $\xi \in S(G/B, f), h \in H, t \in \mathbb{R}^k$, admette une extension unitaire.

3.2.3. Théorème. — *Un choix acceptable $\mathcal{Y}(\phi), \phi \in \mathfrak{g}^\star$, existe.*

Preuve. — On raisonne par récurrence sur $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Le cas où cette dimension vaut 1 est trivial.

On garde la base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z} = \{Z_1, ..., Z_n\}$ de $\mathfrak{g}$ telle que Z_n soit central. Soit $(\mathfrak{g}_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ la suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathcal{Z}$.

Nous notons comme avant pour $k \in \{1, ..., n\}$, $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_k$ et nous supposons en premier lieu qu'il existe $k \in \{1, ..., n\}$ tel que $\mathfrak{h}_k \neq \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_k \neq \mathfrak{g}$. Alors il est clair que $H \subset H_k \subset G$ où $H_k = \exp \mathfrak{h}_k$. Nous remarquons encore que

$$\pi_{|H} = \pi_{|H_k|H}.$$

Nous allons appliquer dans ce qui va suivre l'hypothèse de récurrence à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_k)$ et à $(\mathfrak{h}_k, \mathfrak{h})$.

L'hypothèse de récurrence nous donne une partition $\mathfrak{g}^\star = \cup_{\beta \in \mathcal{M}} \mathfrak{g}^\star_\beta$, et un choix acceptable de bases de Malcev $\mathcal{Y}_k(\phi)$ de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_\mathfrak{k}})$, une partition $\mathfrak{h}^\star = \cup_{\delta \in \mathcal{N}} (\mathfrak{h}^\star_k)_\delta$ et un choix acceptable de bases de Malcev $\mathcal{Y}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$ de $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h}), \phi \in \mathfrak{g}^\star$. Nous en tirons une partition de $\mathfrak{g}^\star$ qui fonctionne simultanément pour $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{h}_k$. En effet, pour $\mathfrak{g}^\star_{\beta,\delta} = \mathfrak{g}^\star_\beta \cap \mathfrak{g}^\star_\delta$ (où $\mathfrak{g}^\star_\delta = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star, \phi_{\mathfrak{h}_k} \in (\mathfrak{h}^\star_k)_\delta\}$), nous avons

$$\mathfrak{g}^\star = \bigcup_{(\beta,\delta) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}} \mathfrak{g}^\star_{\beta,\delta}.$$

Il est clair que cette partition de $\mathfrak{g}^\star$ est algébrique.

Soit $\mathcal{Y}'(\phi), \phi \in \mathfrak{g}^\star$ la base donnée par la proposition (3.1.3) et soit $\mathfrak{g}^\star = \cup_{\epsilon \in \mathcal{E}} \mathfrak{g}^\star_\epsilon$ la partition associée. Nous savons d'après la formule de composition (3.1.5) pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star$, pour tout $\xi \in C_c^\infty(G/B(\phi))$, que

$$\int_{B(\phi_\mathfrak{h})/B(\phi_\mathfrak{h}) \cap B(\phi_{\mathfrak{h}_k})} \int_{B(\phi_{\mathfrak{h}_k})/B(\phi_{\mathfrak{h}_k}) \cap B(\phi)} \xi(vu) d_{\mathcal{Y}_k(\phi)}(u) d_{\mathcal{Y}(\phi_{\mathfrak{h}_k})}(v)$$
$$= c(\phi) \int_{B(\phi_\mathfrak{h})/B(\phi_\mathfrak{h}) \cap B(\phi)} \xi(w) d_{\mathcal{Y}'(\phi)}(w),$$

où $c(\phi)$ est une constante non nulle. D'après la continuité en ϕ des bases $\mathcal{Y}_k(\phi)$, $\mathcal{Y}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$ et $\mathcal{Y}'(\phi)$ sur les parties algébriques $\mathfrak{g}^\star_{\beta,\delta} \cap \mathfrak{g}^\star_\epsilon$, nous pouvons déduire facilement que la fonction c est continue sur ces parties. Finalement, nous multiplions le premier vecteur de la base $\mathcal{Y}'(\phi)$ par le facteur $\frac{1}{c(\phi)}$ pour obtenir les bases $\mathcal{Y}(\phi)$. Comme par l'hypothèse de récurrence les bases $\mathcal{Y}_k(\phi)$ et $\mathcal{Y}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$ possèdent la propriété I, on voit que $c(\phi) = c(\mathrm{Ad}^\star(h)\phi)$ pour tout $h \in H$. Donc $\mathcal{Y}(\phi)$ a aussi cette propriété (I).

Soit $f \in \mathfrak{g}^\star$ et R une de nos applications pour f avec les propriétés (2.5). Soit $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_r\}$ la base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ extraite de $\mathcal{Z}$. Nous choisissons s tel que $X_{s-1} \notin \mathfrak{h}_k$ et $X_s \in \mathfrak{h}_k$. Soit p_0 le plus grand indice tel que $i_{p_0} \in L^H$, $X_{i_{p_0}} \in \mathfrak{h}_k$ et $X_{i_{p_0}-1} \notin \mathfrak{h}_k$. Écrivons $\bar{\mathcal{X}} = \{X_1, ..., X_{s-1}\}$ et pour $\bar{t} \in \mathbb{R}^{k-p_0}$,

$$\bar{R}(\bar{t}) = \prod_{j=s-1}^{1} \exp R_j(\bar{t}) X_j$$

et

$$\bar{R}^{\bar{t}}(t_0) = R_0(t_0, \bar{t}) \prod_{j=s}^{r} \exp R_j(t_0, \bar{t}) X_j \subset H_k, t_0 \in \mathbb{R}^{p_0}.$$

Alors pour tout $\bar{t} \in \mathbb{R}^{k-p_0}$, $\bar{R}^{\bar{t}}$ a les propriétés de (2.5). L'hypothèse de récurrence pour les couples $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_k)$ et $(\mathfrak{h}_k, \mathfrak{h})$ nous dit que l'opérateur

$$\bar{U} : S(G/B(f), f) \to \int_{\mathcal{T}^{\bar{R},\bar{\mathcal{X}}}}^{\oplus} L^2(H_k/B(\phi_{\mathfrak{h}_k}), \phi_{\mathfrak{h}_k}) d\lambda^{\bar{R},\bar{\mathcal{X}}}(\phi)$$

admet une extension unitaire d'après les propriétés des bases $\mathcal{Y}_k(\phi)$. De même, pour tout $\bar{t} \in \mathbb{R}^{k-p_0}$, l'opérateur

$$\begin{aligned}\bar{U}_{\bar{t}} : S(H_k/B((\bar{R}(\bar{t})f)_{\mathfrak{h}_k}), (\bar{R}(\bar{t})f)_{\mathfrak{h}_k})\\ \to \int_{\mathbb{R}^{p_0}}^{\oplus} L^2(H/B((\bar{R}^{\bar{t}}(t_0)(\bar{R}(\bar{t})f)_{\mathfrak{h}}), (\bar{R}^{\bar{t}}(t_0)(\bar{R}(\bar{t})f)_{\mathfrak{h}}) dt_0\end{aligned}$$

admet encore une extension unitaire grâce aux bases $\mathcal{Y}(\phi_{\mathfrak{h}_k})$. Donc globalement

$$U(\xi)(t^0, \bar{t})(h) = (T_{\bar{R}^{\bar{t}}(t_0)\bar{R}(\bar{t})f} T_{\bar{R}(\bar{t})f} \xi)(h)$$

définit une isométrie surjective car

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^k}^{\oplus} L^2(H/B((R(t)f)_{\mathfrak{h}}), (R(t)f)_{\mathfrak{h}}) dt\\ &= \int_{\mathbb{R}^{p_0}}^{\oplus} \int_{\mathbb{R}^{k-p_0}}^{\oplus} L^2(H/B((\bar{R}^{\bar{t}}(t_0)\bar{R}(\bar{t})f)_{\mathfrak{h}}), (\bar{R}^{\bar{t}}(t_0)\bar{R}(\bar{t})f)_{\mathfrak{h}}) dt_0 d\bar{t}.\end{aligned}$$

Dans le reste de la preuve, nous supposons qu'il n'existe plus de k pour lequel $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}_k$ et $\mathfrak{h}_k \neq \mathfrak{g}$. Ceci veut dire que $\mathfrak{h}$ est de codimension un dans $\mathfrak{g}$ si $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Soit k_0 le plus grand entier pour lequel $\mathfrak{h}_{k_0} \neq \mathfrak{h}$. Alors forcément, $\mathfrak{h}_{k_0} = \mathfrak{g}$ tenant compte de notre supposition.

Pour deux indices $i < j \in \{1, \ldots, n\}$ soit

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^\star_{i,j} = \big\{\phi \in \mathfrak{g}^\star,\ \langle \phi, [\mathfrak{g}, Z_q] \rangle = (0), q = j+1, ..., n,\\ \langle \phi, [Z_i, Z_j] \rangle \neq 0,\ \langle \phi, [Z_q, Z_j] \rangle = 0, q = i+1, ..., n.\big\}\end{aligned}$$

Les $\mathfrak{g}^\star_{i,j}$ nous donnent une partition algébrique de $\mathfrak{g}^\star$ qui est G-invariante.

Fixons i, j. On pose alors comme avant $Y = Z_j$ et pour $f \in \mathfrak{g}^\star_{i,j}$

$$\mathfrak{g}^1(f) = \{U \in \mathfrak{g} \text{ tel que } \langle f, [Y, U] \rangle = 0\},$$

$\mathfrak{g}^1(f)$ est un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Soit $G^1(f) = \exp \mathfrak{g}^1(f)$. Par définition de la polarisation $B = B(f)$, on a $B \subset G^1(f)$. Dans toute la preuve, nous posons pour $\xi \in S(G/B, f)$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\xi^t(g^1) = \xi(\exp tX g^1)$$

et

$$\xi_t(g^1) = \xi(g^1 \exp tX),$$

$g^1 \in G^1(f)$ et où $X \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}^1(f)$. Nous allons étudier les cas possibles suivants :

Cas 1 : Il existe $\sigma > j$ tel que $Z_\sigma \notin \mathfrak{h}, Z_{\sigma'} \in \mathfrak{h}$ pour tout $\sigma' > \sigma$.

Dans ce cas, $\mathcal{X} = \{Z_\sigma\}$ est la base de Malcev relative à $\mathfrak{h}$. En outre l'application R est une constante et $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{R_0 \cdot f\}$ où $R_0 \in H$. Pour $\xi \in S(G/B, f)$, notre opérateur est donné par

$$T_\phi \xi(h) = \xi(hR_0), \phi = \mathrm{Ad}^\star(R_0)f.$$

Nous avons $B(\phi_\mathfrak{h}) = B(\phi) \cap H$, $(\phi \in \mathfrak{g}^\star_{i,j})$. Ainsi $\mathcal{Y}(\phi) = \emptyset$ et la base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$ est égale à celle de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$, c'est-à-dire à $\mathcal{X}(\phi)$, $(\phi \in \mathfrak{g}^\star_{i,j})$. Il est clair maintenant que U est une bijection et on a

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \|T_\phi \xi\|^2_{L^2(H/B(\phi_\mathfrak{h}),\phi_\mathfrak{h})} \\
&= \int_{H/B(\phi_\mathfrak{h})} |\xi(uR_0)|^2 d_{\mathcal{X}(\phi)}(u) \\
&= \int_{G/B(\phi)} |\xi(uR_0)|^2 d_{\mathcal{X}(\phi)}(u) \\
&= \int_{G/B} |\xi(R_0 u)|^2 d_{\mathcal{X}(f)}(u) \\
&= \int_{G/B} |\xi(u)|^2 d_{\mathcal{X}(f)}(u) \\
&= \|\xi\|^2_{L^2(G/B,f)}.
\end{aligned}$$

Nous supposons désormais que $Z_\sigma \in \mathfrak{h}$ pour tout $\sigma > j$. Décomposons encore $\mathfrak{g}^\star_{i,j}$. Soit

$$\mathfrak{g}^\star_{ij0} = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star_{i,j}; \langle \phi, [Y, \mathfrak{h}]\rangle = (0)\}, \quad \mathfrak{g}^\star_{ij1} = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star_{i,j}; \langle \phi, [Y, \mathfrak{h}]\rangle \neq (0)\}.$$

Ces parties de $\mathfrak{g}^\star$ sont algébriques et G-invariantes, car $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Cas 2 : Étudions les ϕ et les f dans $\mathfrak{g}^\star_{ij0}$.

Dans cette situation, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^1(\phi) = \mathfrak{g}^1$ pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij0}$ (comme $\mathfrak{h}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$) et il est clair que toutes les $G-$orbites dans $\mathfrak{g}^\star_{ij0}$ sont saturées par rapport à $\mathfrak{h}$. Nous avons $\mathcal{X} = \{Z_i\} = \{X\}$ la base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij0}$. Ainsi $\mathcal{Y}(\phi) = \emptyset$ pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij0}$. En outre l'application R est donnée par

$R(t) = R_0(t)\exp tX$ où $R_0(t) \in H$ et $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\phi_t = R_0(t)\exp tXf,\ t \in \mathbb{R}\}$. Notre opérateur est donné par

$$T_\phi\xi(h) = \xi(hR_0(t)\exp tX),\ \phi = R_0(t)\exp tXf, \xi \in S(G/B,f).$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}} \|T_\phi\xi\|^2_{L^2(H/B(\phi_{\mathfrak{h}}),\phi_{\mathfrak{h}})} d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi)\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{H/B(\phi_t)} |\xi(hR_0(t)\exp tX)|^2 d_{\mathcal{X}(\phi_t)}(h)dt\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{H/B(f_t)} |\xi(R_0(t)h\exp tX)|^2 d_{\mathcal{X}(f_t)}(h)dt\, (f_t = \mathrm{Ad}^\star(\exp tX)f)\\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{H/B(f_t)} |\xi(h\exp tX)|^2 d_{\mathcal{X}(f_t)}(h)dt\\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\xi_t\|^2_{L^2(G^1/B(f_t),f_t)} dt,\\
&= \int_{\mathbb{R}} \|\xi^t\|^2_{L^2(G^1/B,f)} dt\\
&= \|\xi\|^2_{L^2(G/B,f)}.
\end{aligned}$$

En effet, les bases $\mathcal{X}(f)$ obtenues par extraction d'une base de Jordan-Hölder ont la propriété que $\mathcal{X}(\mathrm{Ad}^\star(g)f) = \mathcal{X}(f), g \in G, f \in \mathfrak{g}^\star$.

Soit a l'unique indice pour lequel $Z_a \notin \mathfrak{h}$. Nous allons faire un choix d'un entier $b \neq a$ de la manière suivante : si $Z_i \in \mathfrak{h}$, alors prenons $b = i$, sinon prenons un b qui appartient à $\{1, ..., i-1\}$. Nous posons maintenant

$$\mathfrak{g}^\star_{ij1}(b) = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij1} : \langle\phi, [Z_b, Y]\rangle \neq 0,\ \langle\phi, [Z_h, Y]\rangle = 0,\ h > b,\ h \neq i\}.$$

Remarquons que lorsque $Y \notin \mathfrak{h}$, alors $a = j$ et $Z_i \in \mathfrak{h}$, donc $b = i$.

Cas 3 : Supposons dans ce cas que $Y \in \mathfrak{h}$ et étudions les éléments de $\mathfrak{g}^\star_{ij1}(b)$.

Nous devons encore distinguer les ϕ suivant la saturation de $G\phi$ par rapport à $\mathfrak{h}$. Ceci donne lieu à deux sous-cas :

Cas 3.1 : Soit

$$\mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^{1}(b) = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij1}(b); \dim G\phi > \dim H\phi\}.$$

Précisons dans ce cas que pour $\phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^{1}(b)$, les orbites $G\phi$ sont saturées par rapport à $\mathfrak{h}$. En particulier, $\dim \mathfrak{b}(\phi) = \dim \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^{1}(b)$. Nous allons étudier encore deux autres sous-cas (3.1.1) et (3.1.2) :

Cas 3.1.1 : Soit ${\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1(2b)$ la partie de ${\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1(b)$ des ϕ tels que $\mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{h}$. Il n'est pas difficile de voir que ${\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1(2b)$ est une réunion disjointe d'ensembles algébriques ; en effet, ϕ appartient à ${\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1(2b)$ si et seulement si la G_a–orbite de $\phi_{|\mathfrak{g}_a}$ est saturée par rapport à $\mathfrak{g}_{a+1}$ et cette dernière condition met en jeu une condition polynomiale sur ϕ.

Comme $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ (d'après (3.1.4) pour $k = n$), on voit que $\mathfrak{b}(\phi) \subset \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ et donc pour des raisons de dimension, $\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$. Donc $\mathcal{Y}(\phi) = \emptyset$ et $\mathcal{X} = \{Z_a\}$. En outre,

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\phi_t = R_0(t) \exp tZ_a f,\ t \in \mathbb{R},\ R_0(t) \in H\}.$$

Ainsi

$$T_{\phi_t}\xi(h) = \xi(hR_0(t) \exp tZ_a) \ ; \quad \xi \in S(G/B, f), h \in H$$

et

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}} \|T_\phi \xi\|^2_{L^2(H/B(\phi_\mathfrak{h}),\phi_\mathfrak{h})} d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi) \\
&= \int_\mathbb{R} \int_{H/B((\phi_t)_\mathfrak{h})} |\xi(hR_0(t) \exp tZ_a)|^2 d_{\mathcal{X}(\phi_t)}(h)dt \\
&= \int_\mathbb{R} \int_{H/B} |\xi(R_0(t) \exp tZ_a h)|^2 d_{\mathcal{X}(f)}(h)dt \\
&= \|\xi\|^2_{L^2(G/B,f)}.
\end{aligned}$$

On voit facilement que U admet une extension unitaire.

Cas 3.1.2 : Prenons maintenant l'ensemble

$${\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1(3b) = \{\phi \in {\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1(b) \ : \ \mathfrak{b}(\phi) \not\subset \mathfrak{h}\}.$$

Ici aussi, cet ensemble est une réunion disjointe d'ensembles algébriques. Comme $Y \in \mathfrak{h}$, il existe donc un élément

$$U_a(\phi) = Z_a - e(\phi)Z_b + v(\phi)$$

dans $\mathfrak{b}(\phi)$ où $e(\phi)$ est tel que $\langle \phi, [Z_a - e(\phi)Z_b, Y]\rangle = 0$ si $b > a$ et $e(\phi) = 0$ sinon (voir (3.1.3)). De plus $v(\phi) \in \mathfrak{h}^1 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^1(\phi)$. Maintenant, nous stratifions ${\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1(3b)$ en des couches algébriques qu'on écrit par abus de notation $\mathfrak{g}^\star_\epsilon$ telles que les vecteurs $U_a(\phi)$ varient de manière continue en $\phi \in \mathfrak{g}^\star_\epsilon$ comme dans (3.1.3). D'autre part, à cause de sa dimension, $\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})$ est aussi une polarisation en ϕ et donc il existe un $Y'(\phi)$ dans $\mathfrak{h}$, tel que

$$\mathrm{ad}^\star(Y'(\phi))\phi(Z_a) \neq (0), \mathrm{ad}^\star(Y'(\phi))\phi(\mathfrak{h}) = (0).$$

Cela veut dire que $Y'(\phi) \in \mathfrak{h}(\phi_\mathfrak{h}) \setminus \mathfrak{g}(\phi)$ et tel que

$$Y'(\phi) = Z_\sigma + \sum_{q>\sigma, q\neq a} \alpha_q(\phi) Z_q.$$

Nous prenons une nouvelle partition algébrique H-invariante de ${\mathfrak{g}^{\star}_{ij1}}^{1}(3b)$, que nous allons noter encore pour simplifier $\{\mathfrak{g}^{\star}_{\epsilon}\}$, où les α_j sont des fonctions continues rationnelles sur $\mathfrak{g}^{\star}_{\epsilon}$. Ici encore $\sigma = \sigma_\epsilon$ dépend de ϵ.

En particulier, nous voyons que $\mathrm{Ad}(g)Y'(\phi) = Y'(\mathrm{Ad}^{\star}(g)\phi)$ modulo $\mathfrak{g}(\phi) \cap \mathfrak{g}_{\sigma+1}, g \in G$. Soit

$$\mathcal{Z}' = \{Z_a, Z_1, ..., Z_{a-1}, Z_{a+1}, ..., Z_n\}$$

qui est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Cette nouvelle base de Jordan-Hölder nous donne justement $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ comme polarisation de Vergne en $\phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{\epsilon}$. Nous savons aussi $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$. Ainsi, d'après le lemme (3.1.4), cas 4

$$\mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) + \mathbb{R}U_a(\phi), \quad \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) + \mathbb{R}Y'(\phi).$$

Donc $\{Y'(\phi)\}$ est une base de Malcev de $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ relative à $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$.

Soit V l'opérateur d'entrelacement de $\pi_f = \pi_{f,B(f)}$ et de $\pi'_f = \pi_{f,B(f_{\mathfrak{h}})}$, qui est unique à une constante près (voir [10]). On sait que

$$\begin{aligned} V(\xi)(u) &= d(f) \int_{B(f_{\mathfrak{h}})/B(f_{\mathfrak{h}})\cap B(f)} \xi(uv)\chi_f(v) d_{B(f_{\mathfrak{h}}),B(f)}(v) \\ &= d(f) \int_{\mathbb{R}} \xi(u \ \exp sY'(f))\chi_f(\exp sY'(f))ds, \\ &\qquad\qquad \xi \in S(G/B(f), f), u \in G, \end{aligned}$$

où $d(f)$ est une constante positive et $H-$invariante qui sert à rendre V unitaire et qui est continue en $f \in \mathfrak{g}^{\star}_{\epsilon}$. En effet, un simple calcul (un calcul analogue sera fait dans le cas (4.1) ci-dessous) montre que

$$d(f) = |\langle f, [U_a(f), Y'(f)]\rangle|^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi la $H-$invariance découle directement de (3.1.6).

Comme maintenant $\mathfrak{b}(f_{\mathfrak{h}})$ est la polarisation de Vergne en f associée à la base $\mathcal{Z}'$, l'opérateur d'entrelacement U' entre l'espace de π'_f et sa désintégration en irréductibles $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L^2(H/B((\phi_t)_{\mathfrak{h}}), (\phi_t)_{\mathfrak{h}})dt$ ont été décrits dans le cas (3.1.1) plus haut. En effet

$$U'(\xi')(\phi_t)(h) = \xi'(hR(t)), \ \xi' \in S(G/B', f), \ h \in H, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ici $B' = B(f_{\mathfrak{h}})$. Donc $U = U' \circ V$ définit un opérateur d'entrelacement entre π et $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} L^2(H/B((\phi_t)_{\mathfrak{h}}), (\phi_t)_{\mathfrak{h}})dt$. Nous constatons ainsi pour $\phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{\epsilon}$,

$\xi \in S(G/B, f)$, $t \in \mathbb{R}$, $h \in H$, que

$$\begin{aligned} U(\xi)(\phi_t)(h) &= U' \circ V(\xi)(\phi_t)(h) = V(\xi)(hR(t)) \\ &= d(f) \int_{\mathbb{R}} \xi(hR(t) \exp sY'(f))\chi_f(\exp sY'(f))ds \\ &= d(f) \int_{\mathbb{R}} \xi(h(R(t) \exp sY'(f)R(t)^{-1})R(t))\chi_f(\exp sY'(f))ds \\ &= d(f) \int_{B((\phi_t)_{\mathfrak{h}})/B(\phi_t)\cap B((\phi_t)_{\mathfrak{h}})} \\ &\qquad\qquad \xi(hvR(t))\chi_{\phi_t}(v)d_{B((\phi_t)_{\mathfrak{h}}),B(\phi_t)}(v) \\ &= T_{\phi_t}\xi(h), \end{aligned}$$

si on pose $\mathcal{Y}(\phi) = \left\{\frac{1}{d(\phi)} Y'(\phi)\right\}$, $\phi \in \mathfrak{g}^\star_\epsilon$. Finalement, on remarque que la base $\mathcal{Y}(\phi)$ possède la propriété (I) de (3.1.6) requise.

Cas 3.2 : Nous posons maintenant

$$\mathfrak{g}^\star_{ij1}{}^0(b) = \{\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij1}(b); \dim G\phi = \dim H\phi\}$$

et prenons les ϕ dans $\mathfrak{g}^\star_{ij1}{}^0(b)$.

On constate alors pour des raisons de non-saturation que $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}$ est une polarisation en $\phi_{\mathfrak{h}}$. Ainsi d'après le lemme (3.1.4), nous avons $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ et $\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$. Donc $\mathcal{Y}(\phi)$ est de nouveau vide pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij1}{}^0(b)$. En outre $L^{H,G,\phi}_{\mathcal{X}} = \emptyset$ et $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = R_0 f$ pour un certain $R_0 \in H$, ainsi $T_\phi\xi(h) = \xi(hR_0)$ pour $\phi = R_0 f$. Ainsi U est simplement une translation.

Cas 4 : Nous allons étudier maintenant $\mathfrak{g}^\star_{ij1}(b)$ dans le cas où $Y \notin \mathfrak{h}$. Comme déjà annoncé plus haut (juste avant le cas 3), nous avons $a = j$ et $b = i$ et donc l'ensemble algébrique $\mathfrak{g}^\star_{ij1}(i)$ sera noté tout simplement $\mathfrak{g}^\star_{ij1}$.

Nous avons donc $\mathfrak{g} = \mathbb{R}Y + \mathfrak{h}$ et $Z_i \in \mathfrak{h}$.

Cas 4.1 : Étudions d'abord $\mathfrak{g}^\star_{ij1}{}^1$, c'est-à-dire l'ensemble des $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij1}$ tels que $\dim G\phi > \dim H\phi$.

Nous sommes dans la situation où $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \not\subset \mathfrak{g}^1(\phi)$ à cause de la saturation de l'orbite $G\phi$ par rapport à $\mathfrak{h}$ et on a aussi

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h} + \mathbb{R}Y_0(\phi), \quad \mathfrak{b}(\phi) = \mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}^1(\phi) + \mathbb{R}Y,$$

et en plus

$$\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}^1(\phi) = \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}.$$

Soit pour $k = 1, ..., i-1, i+1, ..., n$

$$Z_k(\phi) = Z_k - \frac{\langle \phi, [Z_k, Y] \rangle}{\langle \phi, [Z_i, Y] \rangle} Z_i, \ \phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^1.$$

La partie

$$\mathcal{Z}^1(\phi) = \{Z_1(\phi), ..., Z_{i-1}(\phi), Z_{i+1}, ..., Z_n\}$$

est une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}^1(\phi)$ et

$$\mathcal{Z}(\phi) = \{Z_i\} \cup \mathcal{Z}^1(\phi)$$

est une nouvelle base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ pour laquelle la polarisation de Vergne en ϕ est égale à $\mathfrak{b}(\phi)$ pour tout $\phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^1$. Soit $\mathcal{B}^1(\phi)$ la base de Malcev de $\mathfrak{g}^1(\phi)$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$ extraite de $\mathcal{Z}^1(\phi)$. Alors

$$\mathcal{C}(\phi) = \{Z_i\} \cup \mathcal{B}^1(\phi)$$

est une base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$ et la mesure $d_{\mathcal{C}(\phi)}$ de l'espace quotient $G/B(\phi)$ est égale à la mesure définie par la base de Malcev $\mathcal{B}(\phi)$ relative à $\mathfrak{b}(\phi)$ extraite de la base de Jordan-Hölder $\mathcal{Z}$. Nous remarquons que

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{h}/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \simeq \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^1(\phi)/\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) \cap \mathfrak{g}^1(\phi)\\
&= \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^1(\phi)/\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h} \simeq (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}^1(\phi) + \mathbb{R}Y)/(\mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h} + \mathbb{R}Y\\
&= \mathfrak{g}^1(\phi)/\mathfrak{b}(\phi).
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{B}^1(\phi) \subset \mathfrak{h}$ est aussi une base de Malcev de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$. Nous avons aussi la base de Malcev $\mathcal{X}(\phi)$ de $\mathfrak{h}$ relative à $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}})$ qui est extraite de $\mathcal{D}$. Donc il existe un nombre positif $m(\phi)$ tel que pour les deux mesures invariantes $d_{\mathcal{B}^1(\phi)}$ et $d_{\mathcal{X}(\phi)}$ de l'espace quotient $H/B(\phi_{\mathfrak{h}})$ on ait

$$d_{\mathcal{B}^1(\phi)} = m(\phi) d_{\mathcal{X}(\phi)}, \quad \phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^1.$$

La fonction $\phi \mapsto m(\phi)$ est évidemment $G-$invariante et non nulle sur $\mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^1$.

Prenons un élément

$$X_0(\phi) = Z_i + \sum_{\substack{l \neq j \\ l \neq i}} \alpha_l(\phi) Z_l(\phi)$$

du stabilisateur de la restriction de ϕ à $\mathfrak{h}, \phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^1$, qui n'est pas contenu dans $\mathfrak{g}^1(\phi)$ (voir cas 4.1 du lemme (3.1.4)).

Comme auparavant, nous stratifions $\mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^1$ en des strates algébriques qu'on note tout simplement $\mathfrak{g}^{\star}_{\epsilon}$ de façon que les fonctions $\alpha_l(\phi), l \neq i, \ l \neq j$ et $m(\phi)$ varient de manière continue sur $\mathfrak{g}^{\star}_{\epsilon}$.

À cause de la saturation, on voit que $R(t) = R_0(t) \exp tY, t \in \mathbb{R}$, avec $R_0(t) \in H$, et que

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}(f) = \{\phi_t = R_0(t) \exp tYf \ ; \ t \in \mathbb{R}\}.$$

D'après l'expression de $X_0(\phi)$ et la remarque (3.1.6) nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X_0(\phi_t) = \mathrm{Ad}(R_0(t))X_0(f) \text{ modulo } \mathfrak{b}((\phi_t)_\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{b}((\phi_t)_\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{b}(\phi_t).$$

Quant à $\mathcal{Y}(\phi)$, $\phi \in \mathfrak{g}^{\star}_{ij1}{}^1$, l'espace quotient

$$\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h})/\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{b}(\phi) \simeq \mathbb{R}X_0(\phi) + \mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{b}(\phi)/\mathfrak{b}(\phi_\mathfrak{h}) \cap \mathfrak{b}(\phi)$$

est isomorphe à $\mathbb{R}$. Ainsi nous pouvons prendre $\mathcal{Y}(\phi) = \{c(\phi)X_0(\phi)\}$ pour un certain scalaire positif $c(\phi) = c$ que nous allons déterminer.

Soit

$$\alpha = \alpha(\phi) = \frac{1}{2\pi}\langle \phi, [X_0(\phi), Y]\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \phi, [Z_i, Y]\rangle.$$

Notre opérateur U agit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
U\xi(\phi_t)(h) &= \int_{B((\phi_t)_\mathfrak{h})/B((\phi_t)_\mathfrak{h}) \cap B(\phi_t)} \xi(huR_0(t)\exp tY) e^{\langle -iR(t)f, \log u\rangle} d_{\mathcal{Y}(\phi_t)}(u) \\
&= c(f)^{-1} e^{it\phi(Y)} \int_\mathbb{R} \xi(h \exp s\, \mathrm{Ad}(R_0(t))X_0(f) R_0(t)) \\
&\qquad\qquad e^{-is\langle R_0(t)\exp tYf, \mathrm{Ad}(R_0(t))X_0(f)\rangle} ds \\
&= c(f)^{-1} e^{it\phi(Y)} \int_\mathbb{R} \xi(hR_0(t) \exp sX_0(f)) \\
&\qquad\qquad e^{-is\langle R_0(t)\exp tYf, \mathrm{Ad}(R_0(t))X_0(f)\rangle} ds \\
&= c(f)^{-1} e^{it\phi(Y)} \int_\mathbb{R} \xi(hR_0(t) \exp sX_0(f)) e^{-is\langle \exp tYf, X_0(f)\rangle} ds \\
&= c(f)^{-1} e^{it\phi(Y)} \int_\mathbb{R} \xi(hR_0(t) \exp sX_0(f) e^{-is\langle f, X_0(f)\rangle} e^{-2i\pi st\alpha} ds.
\end{aligned}$$

Calculons la norme de $U(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\|U(\xi)\|_2^2 &= \int_\mathbb{R} \int_{H/B((\phi_t)_\mathfrak{h})} |U(\xi)(\phi_t)(h)|^2 d_{\mathcal{X}(\phi_t)}(h) dt \\
&= \int_\mathbb{R} \int_{H/B((\phi_t)_\mathfrak{h})} |U(\xi)(\phi_t)(R_0(t)^{-1}h)|^2 d_{\mathcal{X}(\phi_t)}(h) dt \\
&= \int_\mathbb{R} \int_{H/B(f^t_\mathfrak{h})} |U(\xi)(\phi_t)(hR_0(t)^{-1})|^2 d_{\mathcal{X}(f^t)}(h) dt,
\end{aligned}$$

(où $f^t = \exp tYf,\ t \in \mathbb{R}$)

$$= \frac{1}{c(f)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{H/B(f^t_{\mathfrak{h}})} \left| \int_{\mathbb{R}} \xi(h \exp sX_0(f)) e^{-is\langle f, X_0(f)\rangle} e^{-i2\pi st\alpha} ds \right|^2 d_{\mathcal{X}(f^t)}(h)dt$$

$$= \frac{1}{c(f)^2} \int_{\mathbb{R}} \int_{H/B(f^t_{\mathfrak{h}})} |\xi(h \exp \alpha t X_0(f))|^2 d_{\mathcal{X}(f^t)}(h)dt$$

(d'après la formule de Plancherel)

$$= \frac{1}{c(f)^2 m(f)} \int_{\mathbb{R}} \int_{G^1/B(f^t)} |\xi(h \exp \alpha t Z_i)|^2 d_{\mathcal{B}^1(f^t)}(h)dt$$

$$= \frac{1}{c(f)^2 m(f)} \int_{\mathbb{R}} \int_{G^1/B(f)} |\xi(h \exp \alpha t Z_i)|^2 d_{\mathcal{B}^1(f)}(h)dt$$

(comme $B(f^t) = B(f)$, $t \in \mathbb{R}$)

$$= \frac{1}{c(f)^2} \frac{1}{|\alpha| m(f)} \int_{G/B(f)} |\xi(x)|^2 d_{\mathcal{B}(f)}(x) = \frac{1}{c(f)^2} \frac{1}{|\alpha| m(f)} \|\xi\|_2^2.$$

Ainsi, nous devons prendre

$$\mathcal{Y}(\phi) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\alpha(\phi)|}\sqrt{m(\phi)}} X_0(\phi) \right\}, \quad \phi \in {\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1.$$

Comme $\alpha(\phi) = \frac{1}{2\pi}\langle \phi, [X_0(\phi), Y]\rangle$, nous voyons que $\alpha(\mathrm{Ad}^\star(h)\phi) = \alpha(\phi)$ pour tout $h \in H, \phi \in {\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^1$, et les bases $\mathcal{Y}(\phi)$ ont la propriété (I).

Cas 4.2 : Ce dernier cas traite la situation où les ϕ sont dans ${\mathfrak{g}^\star_{ij1}}^0$ qui est l'ensemble des $\phi \in \mathfrak{g}^\star_{ij1}$ tels que $\dim G\phi = \dim H\phi$. Comme précédemment, on a $\mathfrak{b}(\phi_{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{b}(\phi) \cap \mathfrak{h}$ et l'opérateur U est simplement une translation.

q.e.d.

4. Exemples.

4.1. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension 4 avec la base $\{X, U, Y, Z\}$ et les crochets non nuls

$$[X, U] = Y, [X, Y] = Z.$$

On désigne par G le groupe de Lie associé, on pose $f = Z^\star$ et $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie engendrée par (X, Z). Soit $H = \exp \mathfrak{h}$.

Soit $\mathcal{Z} = \{X, U, Y, Z\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ et $B = \exp \operatorname{vect}(U, Y, Z)$ la polarisation de Vergne en $f = Z^\star$ par rapport à la base $\mathcal{Z}$. La base de Malcev de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ est $\mathcal{X} = \{U, Y\}$. Relativement à cette base, on a

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\exp tYf,\ t \in \mathbb{R}\} = \{Z^\star + tX^\star,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

En outre, pour $\xi \in S(G/B, f)$ nous avons

$$U(\xi)(\exp yYf)(\exp zZ \cdot \exp xX) = e^{iz} e^{ixy} \hat{\xi}(y),$$

où $\hat{\xi}$ est la transformée de Fourier usuelle de ξ dans la direction $\mathbb{R}X$.

4.2. Supposons maintenant que $\mathfrak{h} = \operatorname{vect}(U, Z)$. La base $\mathcal{X}$ devient alors $\{X, Y\}$. Relativement à cette base, on a

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\exp tXf,\ t \in \mathbb{R}\},$$

et donc

$$U(\xi)(\exp xXf)(\exp zZ \cdot \exp uU) = e^{iz} e^{-i\frac{x^2 u}{2}} \xi(\exp xX).$$

pour tout $\xi \in S(G/B, f)$.

4.3. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension 5, donnée par la base $\{X_1, ..., X_5\}$ et les crochets non nuls

$$[X_5, X_4] = X_3, [X_5, X_3] = X_2, [X_5, X_2] = X_1.$$

On désigne par G le groupe de Lie associé, on pose $f = X_1^\star$ et $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie engendrée par le vecteur (X_2). Soit $H = \exp \mathfrak{h}$.

Soit $\mathcal{Z} = \{X_5, ..., X_1\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ et $B = \exp \operatorname{vect}(X_1, ..., X_4)$ la polarisation de Vergne en f par rapport à la base $\mathcal{Z}$.

Ici, la base $\mathcal{X}$ est

$$\mathcal{X} = \{X_5, X_4, X_3, X_1\}.$$

Relativement à cette base, on a

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\exp x_5 X_5 f, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

Soit π la représentation correspondante à $X_1^\star$ et χ_λ le caractère de H défini par

$$\chi_\lambda(\exp tX_2) = e^{-2i\pi\lambda t},$$

alors on a

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_\lambda d\lambda.$$

On a

$$U(\xi)(\exp x_5X_5f)(\exp x_2X_2) = e^{-ix_2x_5}\hat{\xi}(\exp x_5X_5)$$

pour tout $\xi \in S(G/B, f)$.

4.4. Supposons maintenant que $\mathfrak{h} = \mathrm{vect}(X_5, X_1)$ et la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \mathrm{vect}(X_1, X_5) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_2) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_2, X_3) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_2, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

On a alors

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} \simeq \{\exp x_2X_2f, x_2 \in \mathbb{R}\} \simeq \{X_1^\star + x_2X_5^\star, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

et

$$\pi_{|H} \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_{X_1^\star+\lambda X_5^\star}\, d\lambda$$

où $\chi_{X_1^\star+\lambda X_5^\star}$ est le caractère défini sur $\mathfrak{h}$. On a

$$U(\xi)(\exp x_2X_2f)(\exp x_1X_1 \exp x_5X_5) = e^{ix_1}e^{-ix_2x_5}\hat{\xi}(x_2)$$

pour tout $\xi \in S(G/B, f)$.

4.5. Supposons maintenant que $f = X_1^\star + X_3^\star$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{vect}(X_5, X_2, X_1)$, soit la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_3) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

Nous voyons que $\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{f\}$ il en résulte que $\pi_{|H}$ est irréductible. La polarisation de Vergne en $f_{\mathfrak{h}}$ est $B_1 = \exp\mathrm{vect}(X_1, X_2)$ qui est incluse dans B.

L'opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)f(\exp x_1X_1 \exp x_2X_2 \exp x_5X_5) = e^{ix_1}e^{-ix_2x_5}\xi(\exp x_5X_5)$$

pour tout $\xi \in S(G/B, f)$.

4.6. Importance du choix des bases.

On va montrer dans cet exemple que le choix de la base de Malcev $\mathcal{X}$ de $\mathfrak{g}$ relative à $\mathfrak{h}$ doit être nécessairement comme dans (2.1). On reprend l'exemple précédent, $\mathfrak{h}$ étant la sous-algèbre de Lie engendrée par le vecteur central (X_1). Soit $H = \exp\mathfrak{h}$.

Prenons la suite suivante de Malcev relative à $\mathfrak{h}$, qui n'est pas extraite de $\mathcal{Z}$:

$$\mathfrak{h} \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_5) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2, X_3) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, X_5, X_2, X_3, X_4) = \mathfrak{g}.$$

Relativement à cette base, on a

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\exp tX_2 f,\ t \in \mathbb{R}\} = \{X_1^\star + tX_5^\star,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Avec cette base notre opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(\exp x_2X_2f)(\exp x_1X_1) = e^{ix_1}\xi(e)$$

pour tout $\xi \in S(G/B, f)$. Donc U ne peut pas être une isométrie.

4.7. Importance du choix des polarisations.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie engendrée par les vecteurs X, P, Y, Q, Z, A, C avec les crochets

$$[X, Y] = [P, Q] = [A, C] = Z.$$

Soit $\mathfrak{h} = \mathrm{vect}(X, P, Y, Q, Z), f = Z^\star$, et soit $\mathcal{Z} = \{C, A, X, Y, P, Q, Z\}$ une base de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$. Donc la base de Jordan-Hölder associée à $\mathfrak{h}$ obtenue par la procédure d'extraction comme dans le paragraphe (2.1) est

$$\mathcal{D} = \{X, Y, P, Q, Z\}$$

et la suite de Malcev relative à $\mathfrak{h}$ est

$$\mathfrak{h} \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, A) \subset \mathrm{vect}(\mathfrak{h}, A, C).$$

Il est clair que les $G-$orbites en position générale sont saturées par rapport à la sous-algèbre $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}A$, il en résulte que

$$\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}} = \{\phi_\alpha = \exp \alpha C f,\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

La polarisation de Vergne B en $f = Z^\star$ est dans cet exemple $B = \exp \mathrm{vect}(A, Y, Q, Z)$, et la polarisation qu'on doit prendre dans $\mathfrak{h}$ en $(\phi_\alpha)_{\mathfrak{h}}$ est $\mathrm{vect}(Y, Q, Z)$. Ainsi $\mathcal{X}(\phi) = \{X, P\}$.

Notre opérateur d'entrelacement est alors donné pour tout $\xi \in S(G/B, f)$ et $h \in H$ par

$$U(\xi)(\phi_\alpha)(h) = \xi(h \exp \alpha C).$$

Vérifions qu'on a bien un opérateur isométrique :

$$\|U(\xi)\|_2^2 = \int_{\mathcal{T}^{R,\mathcal{X}}} \int_{H/B(\phi_{\mathfrak{h}})} |U(\xi)(\phi_\alpha)(h)|^2 d_{\mathcal{X}(\phi)}(h) d\lambda^{R,\mathcal{X}}(\phi_\alpha)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} |\xi(\exp xX \exp pP \exp \alpha C)|^2 dx dp d\alpha = \|\xi\|^2_{L^2(G/B)}.$$

On va montrer maintenant que le choix de la polarisation B est important. Prenons par exemple la polarisation $B' = \mathrm{vect}(Y, Q, Z, C)$ en f, l'opérateur d'entrelacement sera donc

$$U(\xi)(\phi_\alpha)(h) = \xi(h \exp \alpha C) = \xi(h)$$

pour tout $\xi \in S(G/B', f)$ et $h \in H$. Cet opérateur ne dépend pas de α, donc on ne peut pas avoir une isométrie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BAKLOUTI et J. LUDWIG, Désintégration des représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents, Journal of Lie Theory, Volume 9, Number 1 (1999), 157–191.

[2] I. BROWN, Dual Topology of a nilpotent Lie group, Ann. Sci. École Normale Sup., 6 (1973), 407–411.

[3] L. CORWIN and F.P. GREENLEAF, A canonical approach to multiplicity formulas for induced and restricted representations of nilpotent Lie groups, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLI (1988), 1051–1088.

[4] L. CORWIN and F.P. GREENLEAF, Spectrum and Multiplicities for Restrictions of Unitary Representation in Nilpotent Lie Groups, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 135, No 2 (1988), 233–267.

[5] H. FUJIWARA, Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels, Invent. Math., 104 (1991), 647–654.

[6] R.E. HOWE, On the connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities, Pacific Journal of Mathematics, 73 (1977), 329–364.

[7] J. LUDWIG and H. ZAHIR, On the Nilpotent $\star$ - Fourier Transform, Letters in Mathematical Physics, 30 (1994), 23–34.

[8] G. GRÉLAUD, On representations of simply connected nilpotent and solvable Lie groups, Prépublication n° 76, Univ. de Poitiers, 1993.

[9] A.A. KIRILLOV, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Mat. Nauk, 17 (4) (1962), 57–110 (in Russian).

[10] G. LION, Intégrale d'entrelacement sur des groupes de Lie nilpotents et indices de Maslov, Lect. Notes in Math., 587 (1977), 160–176.

[11] R. LIPSMAN, Orbital parameters for induced and restricted representation, Trans. Amer. Math. Soc., 313 (1989), 433–473.

[12] R. LIPSMAN, Restricting Representations of Completely Solvable Lie Groups, Can. J. Math., Vol. XLII, N° 5 (1990), 790–824.

[13] L. PUKANSKY, Leçons sur les représentations des groupes, Dunod, Paris, 1967.

[14] M. VERGNE, Construction de sous-algèbres subordonnées à un élément du dual d'une algèbre de Lie résoluble, C. R. Acad. Sci., (Paris) 270 (1970), 173–175; 704–707.

Manuscrit reçu le 2 décembre 1999,
révisé le 13 septembre 2000,
accepté le 16 novembre 2000.

Ali BAKLOUTI,
Faculté des Sciences de Sfax
Département de Mathématiques
Route de Soukra
3038 Sfax (Tunisie).
Ali.Baklouti@fss.rnu.tn

Jean LUDWIG,
Université de Metz
Département de Mathématiques
Ile du Saulcy
57045 Metz Cedex 01 (France).
ludwig@poncelet.sciences.univ-metz.fr