ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Tien-Cuong DINH

Sur les endomorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{C}^2$

Tome 51, nº 2 (2001), p. 431-459.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_2_431_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
51, 2 (2001), 431–459

SUR LES ENDOMORPHISMES POLYNOMIAUX PERMUTABLES DE $\mathbb{C}^2$

par Tien-Cuong DINH

Introduction.

Soient X une variété complexe et f_1, f_2 deux endomorphismes holomorphes de X. On considère l'équation fonctionnelle suivante :

$$f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1. \tag{1}$$

Cette équation possède des solutions triviales $f_i = h^{n_i} := h \circ \cdots \circ h$ (n_i fois) où h est un endomorphisme holomorphe de X. Pour cette raison, on suppose par la suite que

$$f_1^n \neq f_2^m \text{ pour tout } (n,m) \neq (0,0). \tag{2}$$

Soit σ un automorphisme holomorphe de X. Le couple (f_1, f_2) vérifie (1)(2) si et seulement si $(\sigma^{-1} \circ f_1 \circ \sigma, \sigma^{-1} \circ f_2 \circ \sigma)$ la vérifie. On dit que le couple $(\sigma^{-1} \circ f_1 \circ \sigma, \sigma^{-1} \circ f_2 \circ \sigma)$ est *conjugué* au couple (f_1, f_2).

Dans $\mathbb{C}$, si les f_i sont des polynômes de degrés $d_i \geqslant 2$, le problème (1) (2) est résolu par Julia et Fatou [7], [5]. Pour f_i les fractions rationnelles de degrés $d_i \geqslant 2$ de $X = \mathbb{P}^1$, le même problème est résolu par Ritt et par Eremenko [10], [4] (*voir* également [9]). Notons $w = [w_0 : w_1 : \cdots : w_k]$ les

Mots-clés : Endomorphismes permutables – Orbifold – Critiquement finie.
Classification math. : 30D05.

coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^k$ et $z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ ses coordonnées affines $(z_i := w_i/w_0)$. Voici les solutions de (1) (2) pour $X = \mathbb{P}^1$ à une classe de conjugaison près :

1. $(f_1, f_2) = (z^{\pm d_1}, \lambda z^{\pm d_2})$ pour une certaine racine de l'unité λ;

2. $(f_1, f_2) = (\pm \mathrm{T}_{d_1}, \pm \mathrm{T}_{d_2})$ où T_d est le polynôme de Tchebychev de degré d défini par $\mathrm{T}_d(\cos t) := \cos dt$. Les signes $\pm$ sont choisis selon la parité des d_i. Les solutions sont les quatres couples $(\pm \mathrm{T}_{d_1}, \pm \mathrm{T}_{d_2})$ pour les d_i impairs, un seul couple $(\mathrm{T}_{d_1}, \mathrm{T}_{d_2})$ (à une classe de conjugaison près) pour les autres cas;

3. Il existe un tore complexe $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$, une fonction elliptique $F : \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1$, des applications affines $\Lambda_i(z) = a_i z + b_i$ qui préservent le groupe Γ et vérifient $f_i \circ F = F \circ \Lambda_i$, $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$ sur $\mathbb{T}$. Toutes les fonctions F et les applications Λ_i sont décrites dans [4]. Les fonctions f_1 et f_2 s'appellent *fractions de Lattès*. Les caractérisations des applications de Lattès se trouvent dans [2], [1].

Nous donnons ci-dessous quelques exemples des endomorphismes permutables de $X = \mathbb{C}^2$. Pour simplifier les notations, $\mathrm{T}_d z_i$ signifiera la valeur de T_d en z_i.

Exemple 1. — $f_1(z_1, z_2) := (z_1^{d_1}, \pm \mathrm{T}_{d_1} z_2)$ et $f_2(z_1, z_2) := (\lambda z_1^{d_2}, \pm \mathrm{T}_{d_2} z_2)$ sont permutables, où λ est une certaine racine de l'unité et les signes $\pm$ sont choisis selon la parité des d_i (*voir* le cas $X = \mathbb{P}^1$).

Exemple 2. — $f_i(z_1, z_2) := (\pm \mathrm{T}_{d_i} z_1, \pm \mathrm{T}_{d_i} z_2)$ ou $(\pm \mathrm{T}_{d_i} z_2, \pm \mathrm{T}_{d_i} z_1)$ sont permutables où les signes $\pm$ sont choisis selon la parité des d_i.

Exemple 3. — Soient P_i, Q_i les polynômes homogènes à deux variables, de degré d_i et sans facteur commun. Supposons que les $[P_i : Q_i]$ définissent sur $\mathbb{P}^1$ deux endomorphismes permutables. Alors il existe des constantes $\lambda_i \neq 0$ telles que les $f_i := (\lambda_i P_i, \lambda_i Q_i)$ définissent des endomorphismes holomorphes permutables de $\mathbb{C}^2$ qui se prolongent holomorphiquement à l'infini en des endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^2$.

Exemple 4. — Soient h_1, h_2 deux endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^1$ et π l'application holomorphe de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^2$ qui définit un revêtement ramifié à deux feuillets et vérifie $\pi(x, y) = \pi(y, x)$. Si $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$ sont les coordonnées de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, on a $\pi([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) = [x_0 y_0 : x_0 y_1 + x_1 y_0 : x_1 y_1]$. Soient $F_i(a, b) := (h_i a, h_i b)$ deux endomorphismes de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Il existe des endomorphismes holomorphes f_i de $\mathbb{P}^2$ tels que $f_i \circ \pi = \pi \circ F_i$. Lorsque h_1, h_2 sont permutables, les f_i sont permutables. Lorsque les h_i sont des polynômes, f_1, f_2 sont polynomiaux.

De même manière, on peut construire des endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^k$. Pour $k \geqslant 3$, d'autres exemples sont construits dans [13]. Les automorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{C}^2$ sont étudiés dans [8].

Notons $\mathcal{P}H_d$ l'ensemble des endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ qui se prolongent holomorphiquement à l'infini. Notre résultat principal est :

THÉORÈME 1.— *Soient $f_1 \in \mathcal{P}H_{d_1}$ et $f_2 \in \mathcal{P}H_{d_2}$ vérifiant les conditions (1), (2) où $d_1 \geqslant 2$ et $d_2 \geqslant 2$. Alors le couple (f_1, f_2) est conjugué à l'un des couples décrits dans les exemples 1-4.*

Un *orbifold* est un couple $\mathcal{O} = (X, n)$, où X est une variété complexe et n est une fonction à valeur dans $\mathbb{N}_+ \cup \{\infty\}$, définie sur l'ensemble des hypersurfaces irréductibles de X ; cette fonction est égale à 1 sauf sur un ensemble localement fini d'hypersurfaces. *Une application holomorphe* d'un orbifold $\mathcal{O}$ dans un autre $\mathcal{O}' = (X', n')$ de même dimension est une application holomorphe ouverte f de $X \setminus H$ dans X' telle que $n'(f(\mathcal{D})) = \mathrm{mult}(f, \mathcal{D})n(\mathcal{D})$ pour toute hypersurface irréductible $\mathcal{D}$ de X, où H est la réunion des hypersurfaces H_j vérifiant $n(H_j) = \infty$ et $\mathrm{mult}(f, \mathcal{D})$ est la multiplicité de f en un point générique de $\mathcal{D}$ (on dira simplement *la multiplicité* de f sur $\mathcal{D}$). Lorsque f est un revêtement ramifié au-dessus de $X' \setminus H'$, on dit que f définit *un revêtement* $\mathcal{O}$ au-dessus de $\mathcal{O}'$, où H' est la réunion des hypersurfaces H'_j vérifiant $n'(H'_j) = \infty$. Observons que si X est compacte et si $f : X \longrightarrow X$ est une application holomorphe ouverte qui définit un revêtement d'un orbifold $\mathcal{O}$ dans lui-même, alors l'ensemble critique $\mathcal{C}$ de f est prépériodique, c'est-à-dire $f^n\mathcal{C} = f^m\mathcal{C}$ pour certains $0 \leqslant n < m$. Une telle application s'appelle *critiquement finie*. Si f^n définit un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même, f définit également un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même.

Dans [4], Eremenko a montré que si f_i vérifient (1) (2) pour $X = \mathbb{P}^1$, il existe un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^1, n)$ tel que les f_i définissent des revêtements de $\mathcal{O}$ dans lui-même. On déduit de ce résultat et du théorème 1 que :

COROLLAIRE 1.— *Sous l'hypothèse du théorème 1, il existe un orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^2, n)$ tel que les applications f_i définissent des revêtements de $\mathcal{O}$ dans lui-même. En particulier, les applications f_i sont critiquement finies.*

Récemment, nous avons démontré que ce corollaire est vrai en dimension quelconque sous l'hypothèse $d_1^n \neq d_2^m$ pour tout $(n, m) \neq (0, 0)$. Cette hypothèse est nécessaire au cas de dimension 3 et plus [3].

Dans le paragraphe 2, nous donnons quelques propriétés des suites d'itérés de f_1 et f_2. On montre que si (f_1^m, f_2^n) appartient aux exemples 1–4, (f_1, f_2) sera conjugué à l'un des couples décrits dans ces exemples (lemme 2). Par conséquent, au cours de la preuve du théorème 1, on peut toujours remplacer les f_i par leurs itérés. On note $f_i|\infty$ la restriction de f_i à la droite infinie $\{w_0 = 0\}$ et $\tilde{\mathrm{T}}_d(x) := 2\mathrm{T}_d(x/2)$. D'après le lemme 2, il suffit de considérer les cas suivants : $(f_{1|\infty}, f_{2|\infty}) = (x^{d_1}, x^{d_2})$, $(f_{1|\infty}, f_{2|\infty}) = (\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}, \tilde{\mathrm{T}}_{d_2})$ et le cas où les $f_{i|\infty}^n$ ne sont pas conjugués aux polynômes pour tout $n \geqslant 1$, c'est-à-dire elles sont des fractions de Lattès.

Dans le paragraphe 3, nous donnons quelques propriétés de l'ensemble critique d'une application holomorphe ouverte et de leur image. Nous donnons également le comportement asymptotique de f_i et son ensemble critique au point super-attractif à l'infini lorsque ce point existe.

La preuve du théorème 1 se constitue par 3 derniers paragraphes correspondant au 3 cas cités ci-dessus. L'idée principale est de montrer que près de l'infini l'orbite de l'ensemble critique de f_i est analogue à celui des applications décrites dans les exemples 1-4, c'est-à-dire que f_i définit un revêtement d'un orbifold dans lui-même. Ceci permet d'écrire des équations fonctionnelles qui impliqueront que ces applications et celles dans les exemples 1-4 sont identiques. Par exemple, une équation du type $\Phi(f_1) = \Phi.W^2$ où Φ et W sont des polynômes, vient du fait que la courbe $\{\Phi = 0\}$ est invariante et son image réciproque est la réunion d'elle-même avec la courbe $\{W = 0\}$ qui est une courbe critique de multiplicité 1. Pour identifier les applications f_i avec les applications dans les exemples 1-4, on utilise les ensembles algébriques exceptionnels (totalement invariants) de f_1, f_2 et la divisibilité de polynômes.

Dans les paragraphes 2-5 on note $\mathcal{C}_i \cup \{w_0 = 0\}$ l'ensemble critique de f_i et on écrit dans les coordonnées affines $f_i = (f_{i1}, f_{i2})$. Alors $\mathcal{C}_i$ est une courbe algébrique de degré $2d_i - 2$ compté avec les multiplicités. Pour simplifier les notations, fa et $f^{-1}a$ signifieront l'image et l'image réciproque de a par f.

Remerciement. — L'idée de travailler sur ce problème est issue de conversations fructueuses avec Nessim Sibony. Je tiens à l'en remercier ici.

2. Quelques propriétés de suites d'itérés.

LEMME 1.— *Soient $f_1 \in \mathcal{P}H_{d_1}$ et $f_2 \in \mathcal{P}H_{d_2}$. Supposons que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ et $f^n_{1|\infty} = f^m_{2|\infty}$. Alors il existe $n', m' \geqslant 1$ tels que $f_1^{n'} = f_2^{m'}$.*

Preuve. — Il suffit de considérer $n = m = 1$. Comme $f_{1|\infty} = f_{2|\infty}$, on a $d_1 = d_2$. Posons $d := d_1 = d_2$. On peut écrire les f_i dans les coordonnées homogènes :

$$f_1(w) := [w_0^d : P(w_1, w_2) + w_0 R(w) : Q(w_1, w_2) + w_0 S(w)]$$
$$f_2(w) := [w_0^d : \lambda P(w_1, w_2) + w_0 \tilde{R}(w) : \lambda Q(w_1, w_2) + w_0 \tilde{S}(w)]$$

où P, Q sont homogènes de degré d, R, S, $\tilde{R}$, $\tilde{S}$ sont homogènes de degré $d-1$ et $\lambda \neq 0$. La relation $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ entraîne $\lambda = \lambda^d$. Quitte à remplacer f_i par f_i^{d-1}, on peut supposer que $\lambda = 1$. Supposons que $f_1 \neq f_2$. Soit $0 < \alpha \leqslant d$ le nombre naturel minimal tel que

$$f_i(w) = [w_0^d : P^* + w_0^\alpha R_i^* + w_0^{\alpha+1} U_i : Q^* + w_0^\alpha S_i^* + w_0^{\alpha+1} T_i]$$

où P^*, Q^* sont homogènes de degré d et ne contiennent aucun monôme dont la puissance de w_0 est supérieure ou égale à α, R_i^*, S_i^* sont homogènes de degré $d-\alpha$, indépendants de w_0 et U_i, T_i sont homogènes de degré $d-\alpha-1$. Considérons deux polynômes suivants en variable w_0 et à coefficients dans $\mathbb{C}[w_1, w_2]$:

$$P(P^* + w_0^\alpha R_i^*, Q^* + w_0^\alpha S_i^*) - P(P^*, Q^*).$$

Comme $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, les coefficients de w_0^α dans ces polynômes sont égaux :

$$P_1(P, Q) R_1^* + P_2(P, Q) S_1^* = P_1(P, Q) R_2^* + P_2(P, Q) S_2^*$$

où $P_1 := \partial P / \partial w_1$ et $P_2 := \partial P / \partial w_2$. Par conséquent,

$$P_1(P, Q)(R_1^* - R_2^*) + P_2(P, Q)(S_1^* - S_2^*) = 0.$$

De même,

$$Q_1(P, Q)(R_1^* - R_2^*) + Q_2(P, Q)(S_1^* - S_2^*) = 0.$$

Comme α est maximal, $R_1^* - R_2^*$ et $S_1^* - S_2^*$ ne sont pas tous nuls. On en déduit que $P_1/P_2 = Q_1/Q_2$. L'application $f_{i|\infty} = [P : Q]$ est donc constante. C'est la contradiction recherchée. □

Soit f un endomorphisme holomorphe de degré $d \geqslant 2$ de $\mathbb{P}^k$. On note $E(f)$ l'hypersurface (éventuellement vide ou réductible) maximale et complètement invariante par f, c'est-à-dire $f^{-1}E(f) = E(f)$. Cette hypersurface existe, elle s'appelle *l'hypersurface exceptionelle* de f [12] et on a $E(f) = E(f^n)$ pour tout $n \geqslant 1$. Dans $\mathbb{P}^1$, $\#E(f) \leqslant 2$; si $\#E(f) = 2$, f est conjugué à $z^{\pm d}$; si $\#E(f) = 1$, f est conjugué à un polynôme. Dans $\mathbb{P}^2$, $\deg E(f) \leqslant 3$; si $\deg E(f) = 1$, f est conjugué à un endomorphisme polynomial ; si $\deg E(f) = 2$, f est conjugué à $[w_p^d : w_q^d : P]$ où $\{p,q\}$ est une permutation de $\{0,1\}$ et P est un polynôme homogène de degré d ; si $\deg E(f) = 3$, f est conjugué à $[w_p^d : w_q^d : w_r^d]$ où $\{p,q,r\}$ est une permutation de $\{0,1,2\}$ [6].

Lemme 2. — *Sous l'hypothèse du théorème 1, si (f_1^m, f_2^n) se trouve dans les exemples 1-4, (f_1, f_2) est conjugué à l'un des couples décrits dans ces exemples.*

Preuve. — Cas 1. Supposons que (f_1^m, f_2^n) se trouve dans l'exemple 1. Alors l'ensemble exceptionel de f_i est la réunion de deux droites dont l'une est l'infini. Quitte à changer les coordonnées, on peut supposer que $f_1 = (z_1^{d_1}, P(z))$ et $f_2 = (\lambda z_1^{d_2}, Q(z))$ avec $\lambda \neq 0$. Comme les deuxièmes composantes de f_1^m, f_2^n sont indépendantes de z_1, le polynômes P, Q sont indépendants de z_1. On a donc $P \circ Q = Q \circ P$ et $P^m = \pm \mathrm{T}_{d_1^m}$, $Q^n = \pm \mathrm{T}_{d_2^n}$. Par suite, (P, Q) est conjugué à $(\pm \mathrm{T}_{d_1}, \pm \mathrm{T}_{d_2})$ et (f_1, f_2) est conjugué au couple décrit dans l'exemple 1.

Cas 2. Supposons que (f_1^m, f_2^n) se trouve dans l'exemple 2. On a $f_1^{2m} = (\mathrm{T}_{d_1^{2m}} z_1, \mathrm{T}_{d_1^{2m}} z_2)$ et $f_2^{2n} = (\mathrm{T}_{d_2^{2n}} z_1, \mathrm{T}_{d_2^{2n}} z_2)$. Posons $d := d_2^{2n}$ et $f := f_2^{2n} = (\mathrm{T}_d z_1, \mathrm{T}_d z_2)$. Il existe un point $a \in \mathbb{C}^2$ fixe pour f_1 et périodique pour f car l'ensemble des points fixes de f_1 est invariant par f. Quitte à remplacer f par f^l on peut supposer que a est fixe pour f. Comme $f = (\mathrm{T}_d z_1, \mathrm{T}_d z_2)$, il existe $(t_1^*, t_2^*) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = (\cos t_1^*, \cos t_2^*) = (\cos dt_1^*, \cos dt_2^*)$. Posons $\varphi(t_1, t_2) := (\cos(t_1 - t_1^*), \cos(t_2 - t_2^*))$ une application holomorphe d'un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ dans un voisinage de a dans $\mathbb{C}^2$. Supposons par la suite que $\cos t_i^* \neq \pm 1$; pour le cas où par exemple $\cos t_1^* = 1$, il suffit de remplacer $\cos(t_1 - t_1^*)$ dans φ par $\cos\sqrt{t_1 - t_1^*}$. L'application φ est un biholomorphisme local. Soient $g := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ et $g_1 := \varphi^{-1} \circ f_1 \circ \varphi$. On a $g(t_1, t_2) = (dt_1, dt_2)$ et $g \circ g_1 = g_1 \circ g$. Utilisant les développements de Taylor de g et g_1, on montre facilement que g_1 est linéaire. Posons $g_1(t_1, t_2) = (\alpha t_1 + \beta t_2, \alpha' t_1 + \beta' t_2)$. Soit $f_1 = (P, Q)$. On a $\cos(\alpha t_1' + \beta t_2') = P(\cos t_1', \cos t_2')$ où $t_i' := t_i - t_i^*$. Comme le membre à droite est périodique de période $(2\pi, 2\pi)$, α et β sont entiers. L'égalité précédente implique que $\sin\alpha t_1'\sin\beta t_2' = \cos\alpha t_1'\cos\beta t_2' - P(\cos t_1', \cos t_2')$. Si $\alpha\beta \neq 0$, $\sin\alpha t_1'$ s'écrit en fonction de $\cos t_1'$. Ceci est impossible car $\sin\alpha t_1'$ est impaire et non identiquement nulle. Donc $\alpha\beta = 0$. De même, on obtient $\alpha'\beta' = 0$. Comme f_1 et g_1 sont ouvertes, on a $\alpha = \beta' = 0$ ou $\alpha' = \beta = 0$. On en déduit facilement que $P = \pm \mathrm{T}_{d_1} z_1$ ou $\pm \mathrm{T}_{d_1} z_2$. Le polynôme Q l'est aussi. On conclut que (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 2.

Cas 3. Supposons que (f_1^m, f_2^n) se trouve dans l'exemple 3. Alors f_1^m et f_2^n sont homogènes. Par conséquent, f_1 et f_2 sont homogènes et (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 3.

Cas 4. Supposons maintenant que (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 4. Soit π l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ avec $\pi(x, y) = (x + y, xy)$ (*voir* l'exemple 4). Quitte à remplacer (m, n) par $(2m, 2n)$, on peut supposer que $f_1^m \circ \pi = \pi \circ \tilde{F}_1$ et $f_2^n \circ \pi = \pi \circ \tilde{F}_2$ avec $\tilde{F}_1(x, y) := (\mathrm{T}_{d_1^m} x, \mathrm{T}_{d_1^m} y)$, $\tilde{F}_2(x, y) := (\mathrm{T}_{d_2^n} x, \mathrm{T}_{d_2^n} y)$ ou $\tilde{F}_1(x, y) = (\lambda_1 x^{d_1^m}, \lambda_1 y^{d_1^m})$, $\tilde{F}_2(x, y) = (\lambda_2 x^{d_2^n}, \lambda_2 y^{d_2^n})$. Comme f_1^m définit un revêtement d'un certain orbifold $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^2, n)$ dans lui-même, f_1 définit également un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même. Observons que la courbe $H := \{z_1^2 - 4z_2 = 0\}$ est invariante par f_1^m, f_2^n et $n(H) = 2$. Le fait que f_i définit un revêtement de $\mathcal{O}$ dans lui-même implique qu'il existe des polynômes R_i vérifiant

$$f_{i1}^2 - 4f_{i2} = (z_1^2 - 4z_2) R_i^2.$$

Posons $H_i := (H_{i1}, H_{i2}) = f_i \circ \pi$, on a

$$H_{i1}^2 - 4H_{i2} = (x - y)^2 R_i^2(x + y, xy).$$

Ces égalités signifient qu'il existe des applications F_i de degré au plus d_i vérifiant $\pi \circ F_i = H_i$. On peut choisir les F_i telles que $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$, $F_1^m = \tilde{F}_1$ et $F_2^n = \tilde{F}_2$. Comme F_1^m, F_2^n se prolongent en des endomorphismes holomorphes de degrés d_1^m et d_2^n de $\mathbb{P}^2$, les applications F_1 et F_2 se prolongent également en des endomorphismes holomorphes de degrés d_1 et d_2 de $\mathbb{P}^2$. Comme dans les cas 2 et 3, on montre que $F_i = (\pm\mathrm{T}_{d_i} x, \pm\mathrm{T}_{d_i} y)$, $(\pm\mathrm{T}_{d_i} y, \pm\mathrm{T}_{d_i} x)$, $(\lambda_i x^{d_i}, \lambda_i y^{d_i})$ ou $(\lambda_i y^{d_i}, \lambda_i x^{d_i})$. Les deux premiers cas (resp. les deux derniers) donnent les mêmes applications f_i. Par conséquent, (f_1, f_2) appartient à l'exemple 4. □

PROPOSITION 1.— *Sous l'hypothèse du théorème 1, pour toute composante irréductible A de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, il existe deux couples de nombres entiers naturels $(n, m) \neq (n', m')$ tels que $f_1^n f_2^m A = f_1^{n'} f_2^{m'} A$. De plus, il existe un entier N qui ne dépend que du nombre des composantes de $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ tel que n, m, n', m' soient majorés par N.*

Remarque 1. — Ceci reste valable pour les endomorphismes ouverts permutables d'une variété quelconque tels que les ensembles critiques des f_i contiennent un nombre fini de composantes irréductibles. Cette proposition est démontrée en collaboration avec N. Sibony.

Preuve. — Il suffit de considérer $A \subset \mathcal{C}_1$. La relation $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ implique

$$f_1'(f_2(z)).f_2'(z) = f_2'(f_1(z)).f_1'(z).$$

D'où

$$\mathcal{C}_2 \cup f_2^{-1}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1 \cup f_1^{-1}(\mathcal{C}_2). \tag{3}$$

Supposons qu'il n'existe pas n, m, n', m' vérifiant cette proposition. Alors la suite $\{f_2^n A\}_{n \geqslant 1}$ contient une infinité de courbes différentes. Ceci implique qu'il existe un n tel que $f_2^n A \not\subset \mathcal{C}_1$ car $\mathcal{C}_1$ ne contient qu'un nombre fini de courbes irréductibles. On choisit le n minimal possible. Posons $A' := f_2^{n-1} A \subset \mathcal{C}_1$. La relation (3) implique que $A' \subset \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ et donc $f_1^{-1} A' \subset \mathcal{C}_2 \cup f_2^{-1}\mathcal{C}_1$.

Supposons que pour tout $m \geqslant 0$, $f_1^{-m} A' \subset \mathcal{C}_2$. Comme $\mathcal{C}_2$ ne contient qu'un nombre fini de composantes, il existe $m_1 < m_2$ et une composante $A'' \subset \mathcal{C}_2$ vérifiant $A' = f_1^{m_1} A'' = f_1^{m_2} A''$. Par conséquent, $f_2^{n-1} A = f_2^{n-1} f_1^{m_2 - m_1} A$. C'est contradiction.

Soit $m \geqslant 1$ le nombre minimal vérifiant $f_1^{-m} A' \not\subset \mathcal{C}_2$. Comme $f_1^{-m+1} A' \subset \mathcal{C}_2$, la relation (3) implique $f_1^{-m} A' \subset \mathcal{C}_2 \cup f_2^{-1}\mathcal{C}_1$. Le fait que $f_1^{-m} A' \not\subset \mathcal{C}_2$ implique que $f_1^{-m} A'$ contient une composante de $f_2^{-1}\mathcal{C}_1$. Il existe une composante A_2 de $\mathcal{C}_1$ telle que $f_2 A' = f_1^m A_2$. D'où $f_2^n A = f_1^m A_2$.

De même, il existe une suite $\{A_i\}$ de composantes de $\mathcal{C}_1$ avec $A_1 = A$ et des n_i, $m_i \geqslant 1$ avec $n_1 := n$ et $m_1 := m$ tels que $f_2^{n_i} A_i = f_1^{m_i} A_{i+1}$. Il existe $1 \leqslant l < j$ tels que $A_l = A_j$. On en déduit que $f_2^p f_1^s A = f_2^r A$ pour $r := n_1 + \cdots + n_{j-1}$, $s := m_l + \cdots + m_{j-1}$ et $p := n_1 + \cdots + n_{l-1}$. On a abouti une contradiction.

L'existence du nombre entier N est évidente. □

3. Germes holomorphes et ensembles critiques.

Soient f une application ouverte d'un domaine $U \subset \mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, H et H' deux hypersurfaces de U. Pour tout $a \in U$, on note $\mathrm{mult}(f, a)$ *la* *multiplicité* de f en a, c'est-à-dire le nombre de préimages dans U' d'un point b générique suffisamment proche de $f(a)$, où U' est un voisinage suffisamment petit de a. On note $\mathrm{mult}(f, H)$ *la multiplicité* de f sur H, c'est-à-dire la multiplicité de f en un point générique de H et $\mathrm{mult}(H \cap H', c)$ la multiplicité de l'intersection $H \cap H'$ en $c \in H \cap H'$. Posons $\mathrm{m}_f(H) := \mathrm{mult}(f, H) - 1$. Alors $\mathrm{m}_f(H) > 0$ si et seulement si H appartient à l'ensemble critique de f avec la multiplicité $\mathrm{m}_f(H)$. Dans la suite, f est un germe d'application holomorphe, ouverte, définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ à l'image dans $\mathbb{C}^2$ et $\mathcal{C}$ son ensemble critique.

LEMME 3. — *Supposons que $f(x, y) = (x^d + \mathrm{o}(x^d), g(x, y))$ avec $d \geqslant 2$. Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, ..., $\mathcal{C}_m$ et $\{x = 0\}$ les composantes irréductibles de $\mathcal{C}$. Posons $n_i := \mathrm{m}_f(\mathcal{C}_i)$ et $m_i := \mathrm{mult}(\mathcal{C}_i \cap \{x = 0\}, 0)$. Alors $\sum m_i n_i = \mathrm{mult}(h, 0) - 1 = \mathrm{m}_h(0)$, où $h := f|_{\{x=0\}}$.*

Preuve. — Soit J le jacobien de f. Alors $\sum m_i n_i$ est la multiplicité en 0 de la restriction de $|J|/x^{d-1}$ sur $\{x = 0\}$. D'autre part,

$$|J| = x^{d-1} \begin{vmatrix} d + \mathrm{o}(1) & \mathrm{O}(x) \\ g_x & g_y \end{vmatrix}$$

où $g_x := \partial g / \partial x$ et $g_y := \partial g / \partial y$. Par conséquent,

$$\sum m_i n_i = \mathrm{mult}(g_y(0, y), 0) = \mathrm{mult}(g(0, y), 0) - 1 = \mathrm{mult}(h, 0) - 1.$$

□

LEMME 4. — *Soient f, h définis dans le lemme 3 et A une courbe lisse qui coupe $\{x = 0\}$ transversalement en 0. Soient A_i les composantes irréductibles de $f^{-1}A$, $n_i := \mathrm{mult}(f, A_i)$ et $m_i := \mathrm{mult}(A_i \cap \{x = 0\}, 0)$. Alors $\mathrm{mult}(f, 0) = d.\mathrm{mult}(h, 0) = d. \sum m_i n_i$.*

Preuve. — Quitte à remplacer f par $f \circ \sigma$, on peut supposer que $A = \{y = 0\}$, où σ est une application holomorphe inversible. Alors 0 est une solution de multiplicité $\mathrm{mult}(f, 0)$ de l'équation $f(x, y) = 0$. Posons $f = (l, g)$. La solution de l'équation $l = 0$ est $\{x = 0\}$ avec la multiplicité d. Comme $f^{-1}A = \{g = 0\}$, on a

$$\mathrm{mult}(f, 0) = d.\mathrm{mult}(\{g = 0\} \cap \{x = 0\}, 0) = d.\mathrm{mult}(h, 0) = d \sum m_i n_i.$$

□

Dans la suite, on note f_1, f_2 deux germes d'application holomorphe ouverte définies au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ à l'image dans $\mathbb{C}^2$ tels que

$f_1(0) = f_2(0) = 0$ et $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Notons $\mathcal{C}_i$ l'ensemble critique de f_i.

LEMME 5.— *Supposons que $f_i(x,y) = (x^{d_1} + \mathrm{o}(x^{d_1}), a_i y + y h_i)$ où $h_i(0) = 0$, $a_i \neq 0$ et $a_1^n \neq a_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_+$. Soit $\mathcal{C}$ un germe de surface de Riemann en 0 (éventuellement singulier) tel que $f_1\mathcal{C} = f_2\mathcal{C}$. Alors $\mathcal{C}$ est l'une des deux courbes invariantes $\{x = 0\}$ et $\{y = 0\}$.*

Remarque 2.— Toute application holomorphe ouverte $f_i(x,y) = (x^{d_1} + \mathrm{o}(x^{d_1}), g(x,y))$ avec $g(0) = 0$ et $|g_y(0)| > 1$ est conjuguée à une application du type considéré dans le lemme. En effet, la variété stable $V := \{z \text{ tel que } \lim f_i^n(z) = 0\}$ est une courbe lisse qui coupe la variété instable $\{x = 0\}$ transversalement en 0 [11, p. 27]. Il suffit de changer de coordonnées de façon que $\{y = 0\}$ soit égale à V. Pour deux applications permutables f_1 et f_2 de ce type, on vérifie sans peine que leurs variétés stables sont égales.

Preuve.— Supposons que $\mathcal{C} \neq \{x = 0\}$ et $\mathcal{C} \neq \{y = 0\}$. On peut écrire $\mathcal{C} = u(D)$ où D est un disque de $\mathbb{C}$ centré en 0, $u(t) = (t^l, ct^m + \mathrm{o}(t^m))$ est une application holomorphe de D dans $\mathbb{C}^2$ et $c \neq 0$. On a

$$f_i \circ u(t) = (t^{ld_i} + \mathrm{o}(t^{ld_i}), a_i c t^m + \mathrm{o}(t^m)).$$

Comme $f_1\mathcal{C} = f_2\mathcal{C}$, on a $ld_1 = ld_2$ et $(a_1 c)^{ld_1} = (a_2 c)^{ld_2}$. D'où $d_1 = d_2$ et $a_1^{ld_1} = a_2^{ld_1}$. C'est la contradiction recherchée. □

Soit $h(x,y) = \sum_{k,l \geqslant 1} a_{kl} x^k y^l$ une fonction holomorphe définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$d_\alpha := \min_{a_{kl} \neq 0} \alpha k + l.$$

Alors on peut écrire $h = h_\alpha + \mathrm{o}_\alpha(y^{d_\alpha})$, où $h_\alpha(x,y) := \sum_{\alpha k + l = d_\alpha} a_{kl} x^k y^l$ et $\mathrm{o}_\alpha(y^{d_\alpha})$ est une fonction vérifiant $\mathrm{o}_\alpha(y^{d_\alpha}) = \mathrm{o}(t^{d_\alpha})$ quand $x = \mathrm{O}(t^\alpha)$ et $y = \mathrm{O}(t)$. Considérons $h = ay^d + xg(x,y)$ avec $a \neq 0$ et g holomorphe. On définit un nombre rationnel $\alpha_h \geqslant 1$ par

$$\alpha_h := \max\{1, \min_{d_\alpha = d} \alpha\}.$$

PROPOSITION 2.— *Soient $f_i = (x^{d_i} + \mathrm{o}(x^{d_i}), h_i)$ et $\alpha := \max(\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2})$ où $h_i = y^{d_i} + xg_i(x,y)$. Supposons que $d_1^m \neq d_2^n$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2 - (0,0)$. Soient $P_i(y) := h_{i,\alpha}(1,y)$. Alors $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$ et l'une des conditions suivantes est vraie :*

1. $\alpha = 1$, (P_1, P_2) *est conjugué à* $(y^{d_1}, \gamma y^{d_2})$ *avec* $\gamma^{d_1 - 1} = 1$;

2. $\alpha = 1$, (P_1, P_2) *est conjugué à* $(\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}, \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_2})$;

3. $\alpha = 2$, $\beta^{-1}P_i(\beta y) = \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}(y)$ *où* $\beta^{d_i - 1} = 1$.

Preuve. — Si $\alpha = 1$, $[x^{d_i} : h_{i,\alpha}]$ définissent deux endomorphismes polynomiaux permutables de $\mathbb{P}^1$ dont $[x : y]$ sont les coordonnées homogènes. D'où $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$. Comme $d_1^m \neq d_2^n$ pour $(m,n) \neq (0,0)$, (P, Q) est conjugué à $(y^{d_1}, \gamma y^{d_2})$ ou à $(\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}, \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_2})$. L'une des conditions 1 ou 2 est vraie.

Supposons maintenant que $\alpha = p/q$ avec p, q premiers entre eux et $p > q \geqslant 1$. La relation $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ appliquée à $x = t^p$ et $y = at^q$ nous donne $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1$. Comme $d_1^m \neq d_2^n$ pour $(m,n) \neq (0,0)$, (P_1, P_2) est conjugué à $(a^{d_1}, \gamma a^{d_2})$ ou à $(\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}, \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_2})$.

Le coefficient de $a^{d_i - 1}$ dans $P_i(a)$ est nul car $\alpha > 1$. Alors si (P_1, P_2) est conjugué à $(a^{d_1}, \gamma a^{d_2})$, il sera égal à $(a^{d_1}, \gamma' a^{d_2})$. Ceci est impossible (*voir* la définition de $\alpha = \max(\alpha_{h_1}, \alpha_{h_2})$). Alors (P_1, P_2) est conjugué à $(\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}, \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_2})$.

Par définition de α, $P_i(a) = a^m P_i^*(a^p)$ pour un certain polynôme P_i^*. Alors l'ensemble des zéros de P_i est stable par la rotation $a \longmapsto \sqrt[p]{1}\, a$. On en déduit que $p = 2$, donc $q = 1$ et $\alpha = 2$ car les zéros de $\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}$ sont alignés.

Finalement, il existe une application linéaire $\sigma(a) := \beta a + \theta$ avec $\beta \neq 0$ telle que $\sigma^{-1} \circ P_i \circ \sigma = \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}$. Si d_i est pair (ou impair) les fonctions $\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}$ et P_i le sont aussi. De plus, le coefficient de $y^{d_i - 1}$ dans $P_i(y)$ est nul ; ceux de y^{d_i} dans P_i et dans $\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}$ sont 1. Par conséquent, on a $\theta = 0$ et $\beta^{d_i - 1} = 1$. □

COROLLAIRE 2. — *Si la condition 3 de la proposition 2 est vraie, alors il existe une courbe* $\mathcal{D} = \{x = \beta^2 y^2/4 + \mathrm{o}(y^2)\}$ *invariante par* f_1 *et* f_2 *telle que* $\overline{f_i^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} = \mathcal{C}_i$. *De plus,* $\mathrm{mult}(f_i, \mathcal{C}_i) = 2$ *et*

1. *Si* d_i *est impair,* $\mathcal{C}_i$ *est une réunion de* $(d_i - 1)/2$ *courbes* $\mathcal{D}_r = \{x = \beta^2 y^2/r + \mathrm{o}(y^2)\}$ *où* $r \in \mathbb{R}^+$ *et* $\pm\sqrt{r} \in \tilde{\mathrm{T}}_{d_i}^{-1}\{\pm 2\} \setminus \{\pm 2\}$.

2. *Si* d_i *est pair,* $\mathcal{C}_i$ *est une réunion de* $d_i/2 - 1$ *courbes* $\mathcal{D}_r = \{x = \beta^2 y^2/r + \mathrm{o}(y^2)\}$ *et d'une courbe* $\mathcal{D}_0$ *qui coupe* $\{x = 0\}$ *transversalement où* $r \in \mathbb{R}^+$ *et* $\pm\sqrt{r} \in \tilde{\mathrm{T}}_{d_i}^{-1}\{\pm 2\} \setminus \{\pm 2, 0\}$.

Preuve. — On peut supposer que $i = 1$. Quitte à effectuer le changement de coordonnées $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, \beta x_2)$, on peut supposer que $\beta = 1$.

On écrit

$$f_j = (x^{d_j} + \mathrm{o}(x^{d_j}), \pm x^{d_j/2}\tilde{\mathrm{T}}_{d_j}(y/\sqrt{x}) + \mathrm{o}_2(y^{d_j})).$$

Soit τ l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\tau(t,a) := (t^2, at)$. Cette application est localement inversible sauf sur $\{t=0\}$. On considère $F_j := \tau^{-1} \circ f_j \circ \tau$. Avec les f_j décrits ci-dessus, on peut trouver des F_j holomorphes au voisinage de $\{t=0\}$ vérifiant $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$ et

$$F_j(t,a) = (t^{d_j} + \mathrm{o}(t^{d_j}), \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_j}(a) + \mathrm{O}(t)).$$

Soit $\mathcal{C}'_j \cup \{t=0\}$ l'ensemble critique de F_j. On a $\tau\mathcal{C}'_j = \mathcal{C}_j$. Fixons un N et un R suffisament grands. Il existe un $\epsilon > 0$ tel que les applications F_j^l soient définies sur $\{|t| < \epsilon\} \times \{|a| < R\}$ pour tout $l = 1, 2, \ldots, N$. On considère ici le cas où d_1 est pair et les signes $\pm$ sont les $+$; les autres cas seront traités de même manière.

Considérons un $b \in \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}^{-1}\{2\} \setminus \{0,2\}$. Observons que 2 est fixe répulsif pour $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}$ et b est un point critique d'ordre 1 de $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}$. D'après le lemme 3 appliqué à F_j en $(0,b)$, il existe une courbe $\mathcal{D}'_b \subset \mathcal{C}'_j$ qui coupe $\{t=0\}$ transversalement en $(0,b)$. La proposition 1 s'applique également pour les F_j. Il existe $(m,n) \neq (m',n')$ tels que $F_1^m F_2^n \mathcal{D}'_b = F_1^{m'} F_2^{n'} \mathcal{D}'_b$ et m, n, m', n' soient plus petits que $N-1$. On en déduit que $F_1^m F_2^n (F_1 \mathcal{D}'_b) = F_1^{m'} F_2^{n'} (F_1 \mathcal{D}'_b)$. Or $F_1 \mathcal{D}'_b$ passe par $(0,2)$ qui est un point fixe de F_1 et F_2, le lemme 5 (appliqué à $F_1^m F_2^n$ et $F_1^{m'} F_2^{n'}$) montre que $F_1 \mathcal{D}_b$ est invariante par F_1 et F_2. Cette courbe invariante, notée $\mathcal{D}'$, est la variété stable de F_1 et F_2 en $(0,2)$; elle est unique, lisse et donc indépendante de b ; elle coupe $\{t=0\}$ transversalement (*voir* la remarque 2). La courbe $\mathcal{D}'$ est définie par une équation du type $a = 2 + \mathrm{O}(t)$. Ceci implique que $\mathcal{D} := \tau^{-1}\mathcal{D}'$ est définie par $y^2 = 4x + x\tilde{\mathrm{o}}(1)$ où la notation $\tilde{\mathrm{o}}(1)$ signifie une fonction multi-valente tendant vers 0 quand $x \to 0$. D'après le lemme 4 appliqué à τ en $(0,2)$, on a $\mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{x=0\}) = 2$. Comme $\{x=0\}$ est tangente à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ est lisse et irréductible. Elle est invariante par f_1, f_2 et définie par une équation du type $x = y^2/4 + \mathrm{o}(y^2)$. Posons $r := b^2$, $\mathcal{D}_r := \tau^{-1}\mathcal{D}'_b$. De même manière, on prouve que $\mathcal{D}_r = \{x = y^2/r + \mathrm{o}(y^2)\}$. On a $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{C}_1$. Il y a $d_1/2 - 1$ tels nombres r différents. Comme $\mathrm{mult}(f_1|_{\{x=0\}}, 0) = d_1$, le lemme 3 implique que $\mathcal{C}_1$ est la réunion des $\mathcal{D}_r$ et d'une autre courbe $\mathcal{D}_0$ qui coupe $\{x=0\}$ transversalement en 0. Observons qu'il existe une composante $\mathcal{D}''$ de $\tau^{-1}(f_1\mathcal{D}_0)$ passant par $c = (0, \pm 2)$ et $(n,m) \neq (n',m')$ tels que $F_1^n F_2^m \mathcal{D}'' = F_1^{n'} F_2^{m'} \mathcal{D}''$. On obtient $F_1^n F_2^m (F_1 \mathcal{D}'') = F_1^{n'} F_2^{m'} (F_1 \mathcal{D}'')$. Comme $F_1(\mathcal{D}'')$ passe par $(0,2)$, on montre exactement comme ci-dessus que $F_1\mathcal{D}'' = \mathcal{D}'$. Ceci implique que $\mathcal{D}''$ est la composante de $\tau^{-1}(\mathcal{D})$ qui passe par c. Par conséquent, $f_1\mathcal{D}_0 = \tau(\mathcal{D}'') = \mathcal{D}$ et donc $\mathcal{D}_0 \subset f_1^{-1}\mathcal{D}$. Comptant les multiplicités avec le lemme 4 (appliqué à f_1) on constate que $f_1^{-1}\mathcal{D}$ contient seulement les $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{D}_0$ et $\mathcal{D}$. □

4. Preuve du théorème 1 : premier cas.

Dans ce paragraphe, on suppose que $f_{i|\infty} = [w_1^{d_i} : w_2^{d_i}]$ (*voir* l'introduction). D'après le lemme 1, on a $(f_{1|\infty})^n \neq (f_{2|\infty})^m$ pour tout $(n,m) \neq (0,0)$. Donc $d_1^n \neq d_2^m$ pour tout $(n,m) \neq (0,0)$. Soient $a = [0 : 0 : 1]$ et $a' = [0 : 1 : 0]$. En utilisant les coordonnées locales $x := w_0/w_2$, $y := w_1/w_2$, au voisinage de a, on peut écrire $f_i(x,y) = (x^{d_i} + \mathrm{o}(x^{d_i}), h_i)$ où $h_i = y^{d_i} + xg_i$.

D'après la proposition 2, il existe une application linéaire $\sigma(z_1) = \beta z_1 + \theta$ telle que l'une des conditions suivantes soit vraie :

1. $\sigma^{-1} \circ f_{11} \circ \sigma = z_1^{d_1}$ et $\sigma^{-1} \circ f_{21} \circ \sigma = \gamma z_1^{d_2}$ avec $\gamma^{d_1-1} = 1$;
2. $\sigma^{-1} \circ f_{i1} \circ \sigma = \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i} z_1$;
3. $f_{i1} = \pm\beta^{-1} z_2^{d_i/2}\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}(\beta z_1/\sqrt{z_2}) + \Xi_i$ où $\Xi_i = \sum_{k+2l<d_i} b_{ikl} z_1^k z_2^l$.

Quitte à remplacer f_i par f_i^2, on peut supposer que les signes $\pm$ sont les $+$. Comme $h_i = y^{d_i} + xg_i$, dans les conditions 1, 2, on a $\beta^{d_i-1} = 1$. Quitte à effectuer le changement de coordonnées $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + \theta/\beta, z_2)$ dans les conditions 1, 2, on peut supposer que $\theta = 0$. Alors dans ., on peut supposer que $\sigma = \mathrm{Id}$; dans 2 et 3, en utilisant le changement $(z_1, z_2) \mapsto (\beta z_1, z_2)$, on peut également supposer que $\beta = 1$ et $\sigma = \mathrm{Id}$. De même pour a', l'une des conditions suivantes est vraie :

1′. $f_{i2} = z_2^{d_i}$;

2′. $f_{i2} = \tilde{\mathrm{T}}_{d_i} z_2$;

3′. $f_{i2} = \beta'^{-1} z_1^{d_i/2}\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}(\beta' z_2/\sqrt{z_1}) + \Xi_i'$ où $\Xi_i' = \sum_{2k+l<d_i} b'_{ikl} z_1^k z_2^l$, $\beta'^{d_i-1} = 1$.

Il est clair que si les conditions 3 et 3′ sont fausses, le couple (f_1, f_2) se trouve dans les exemples 1-3 à une classe de conjugaison près. La preuve du théorème 1 sera complétée par les propositions qui suivent.

Proposition 3. — *Si les conditions 1, 3′ ou 1′,3 sont réalisées, le couple (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 4 à une classe de conjugaison près.*

Preuve. — On peut supposer que $1'$ et 3 sont vraies. D'après le corollaire 2, il existe une courbe algébrique $\mathcal{D}$ invariante tangente à $\{w_0 = 0\}$ en a qui est image de composantes de $\mathcal{C}_i$. L'ensemble exceptionnel de $f_i|_{\mathcal{D}}$ est de cardinal au plus 2 et doit contenir les points d'intersection de $\mathcal{D}$ avec $\{w_0 = 0\} \cup \{w_2 = 0\}$. Par conséquent, $\mathcal{D}$ coupe à $\{w_0 = 0\}$ uniquement en a et $\mathcal{D}$ coupe $\{w_2 = 0\}$ en un seul point, noté $b = (b_1, 0)$. D'après le corollaire 2 (appliqué à f_1 et f_2 en a), on a $\mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\}, a) = 2$. Par suite, $\mathcal{D}$ est une courbe rationnelle de degré 2. Quitte à effectuer le changement de coordonnées $z_1 \mapsto z_1 - b_1$, on peut supposer que $b = 0$. Alors l'application $f_{i|\{w_2=0\}}$ possède deux points exceptionnels fixes 0 et $[0:1:0]$; elle est donc égale à $z_1^{d_i}$. Appliquant la proposition 2 en b, on constate que $\Xi_i = 0$. On vérifie facilement que les $f_i = (z_1^{d_i/2}\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}(z_1/\sqrt{z_2}), z_2^{d_i})$ sont conjuguées aux applications construites dans l'exemple 4 pour $h_i(x) = x^{d_i}$. □

PROPOSITION 4. — *Les conditions 2, $3'$ (ou $2'$, 3) ne sont pas réalisées simultanément.*

Preuve. — Supposons, par exemple, que 2 et $3'$ sont vraies. Soit $\mathcal{D}$ la courbe algébrique invariante de f_i passant par a' qui est décrite dans le corollaire 2. Elle est algébrique car elle est image de composantes de $\mathcal{C}_i$. La courbe $\mathcal{D}$ est tangente à $\{w_0 = 0\}$ en un point unique a'. D'après le corollaire 2, $\mathcal{D}$ est une courbe rationnelle de degré 2. Le point a' étant exceptionnel et fixe pour $f_{1|\mathcal{D}}$, l'application f_1 agit sur $\mathcal{D}$ comme un polynôme de degré d_1. Par conséquent, il y a au plus $d_1 - 1$ points critiques de $f_{1|\mathcal{D}}$ qui sont différents de a'.

Posons $\mathcal{E}_s = \{z_1 = s\}$. Observons que $I := \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}^{-1}\{\pm 2\} \setminus \{\pm 2\}$ est l'ensemble critique de $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}$. Comme $f_{11} = \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_1)$, si $s \in I$ et si $\mathcal{E}_s$ coupe $\mathcal{D}$ transversalement en z alors z est un point critique de $f_{1|\mathcal{D}}$. De plus, il y a une seule droite $\mathcal{E}_s$ tangente à $\mathcal{D}$; les autres coupent $\mathcal{D}$ transversalement en deux points car $\mathcal{D}$ est une courbe rationnelle ne passant pas par $[0:0:1]$. On en déduit que $f_{1|\mathcal{D}}$ possède au moins $2(d_1 - 2)$ points critiques différents de a' car $\#I = d_1 - 1$. C'est la contradiction recherchée. □

PROPOSITION 5. — *Les conditions 3, $3'$ ne sont pas réalisées simultanément.*

Preuve. — Supposons que 3, $3'$ sont vraies. Pour simplifier les calculs on suppose que $\beta' = 1$. Quitte à remplacer f_i par l'un de ses itérés, on peut supposer que $d_i >> 1$. D'après le corrollaire 2, il existe une courbe algébrique invariante $\mathcal{D}$ tangente à $\{w_0 = 0\}$ en exactement deux points a et a' telle que $f_i^{-1}\mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \mathcal{C}_i$. Cette courbe $\mathcal{D}$ est de degré 4 et éventuellement réductible. D'après les conditions 3 et 3′, quitte à effectuer un changement de coordonnées du type $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 + \alpha, z_2 + \beta)$, on peut supposer que $\mathcal{D}$ est définie par $\Phi = 0$ où

$$\Phi(z) = z_1^2 z_2^2 - 4z_1^3 - 4z_2^3 + rz_1^2 + uz_1z_2 + vz_2^2 + \mathrm{o}(|z|^2)$$

est un polynôme de degré 4. D'après le corollaire 2, il existe un polynôme W tel que $\Phi(f_1) = \Phi.W^2$.

Soit Δ_j la somme des termes $z_1^m z_2^n$ de f_{11} qui vérifient $m+2n = d_1 - j$. Posons $\Theta_j(\alpha) := \Delta_j(\alpha, 1)$. Montrons que $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$. Posons $z_1 = \alpha t$ et $z_2 = t^2$. Notons W_j la somme des termes $z_1^m z_2^n$ de W qui vérifient $m + 2n = 3d_1 - 3 - j$. Posons $V_j(\alpha) := W_j(\alpha, 1)$. D'après les conditions 3, 3′, on a $f_{11}(\alpha t, t^2) = \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)t^{d_1} + \Theta_1(\alpha)t^{d_1-1} + \mathrm{o}(t^{d_1-1})$, $f_{12}(\alpha t, t^2) = t^{2d_1} + \mathrm{o}(t^{2d_1-1})$. On peut écrire $W(at, t^2) = V_0(\alpha)t^{3d_1-3} + V_1(\alpha)t^{3d_1-4} + \mathrm{o}(t^{3d_1-4})$. En identifiant les coefficients de t^{6d_1} et t^{6d_1-1} dans l'équation $\Phi(f_1) = \Phi W^2$, on obtient $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}^2(\alpha) - 4 = (\alpha^2 - 4)V_0^2(\alpha)$ et $2\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)\Theta_1(\alpha) = 2(\alpha^2 - 4)V_0(\alpha)V_1(\alpha)$. La relation $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}^2(\alpha) - 4 = (\alpha^2 - 4)V_0^2(\alpha)$ implique que V_0 est la dérivée de $\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}$ et les polynômes $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)$, $(\alpha^2 - 4)V_0(\alpha)$ sont premiers entre eux. On peut supposer que $V_0 = \tilde{\mathrm{T}}'_{d_1}$. Le polynôme $\Theta_1(\alpha)$ est divisible par le polynôme $2(\alpha^2 - 4)V_0(\alpha)$ qui est de degré $d_1 + 1$. On en déduit que $\Theta_1 = 0$ car $\deg \Theta_1 < d_1$. On a également $V_1 = 0$. Alors f_{11} ne contient aucun terme $z_1^m z_2^n$ avec $m + 2n = d_1 - 1$. De même manière, on montre que f_{12} ne contient aucun terme $z_1^m z_2^n$ avec $2m + n = d_1 - 1$. Par suite, on peut écrire $f_{11}(\alpha t, t^2) = \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)t^{d_1} + \Theta_2(\alpha)t^{d_1-2} + \mathrm{o}(t^{d_1-2})$, $f_{12}(\alpha t, t^2) = t^{2d_1} + \mathrm{o}(t^{2d_1-2})$ et $W = V_0(\alpha)t^{3d_1-3} + V_2(\alpha)t^{3d_1-5} + \mathrm{o}(t^{3d_1-5})$. En identifiant les coefficients de t^{6d_1-2} dans l'équation $\Phi(f_1) = \Phi W^2$, on obtient

$$2\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)\Theta_2(\alpha) = 2V_0(\alpha)[(\alpha^2 - 4)V_2(\alpha) + vV_0(\alpha)].$$

Par conséquent, $\Theta_2(\alpha)$ est divisible par $V_0(\alpha)$ et donc $\Theta_2 = 0$.

On peut donc écrire $f_{11}(\alpha t, t^2) = \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)t^{d_1} + \Theta_3(\alpha)t^{d_1-3} + \mathrm{o}(t^{d_1-3})$. Comme le coefficient de $z_1 z_2^{d_1-2}$ (resp. $z_2^{d_1-1}$) dans f_{12} est égal à $-d_1$ (resp. 0), on a $f_{12}(\alpha t, t^2) = t^{2d_1} - d_1\alpha t^{2d_1-3} + \mathrm{o}(t^{2d_1-3})$. On a également $W = V_0(\alpha)t^{3d_1-3} + V_2(\alpha)t^{3d_1-5} + V_3(\alpha)t^{3d_1-6} + \mathrm{o}(t^{3d_1-6})$. En identifiant les coefficients de t^{6d_1-3} dans l'équation $\Phi(f_1) = \Phi W^2$, on obtient

$$2\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)[\Theta_3(\alpha) - d_1\alpha\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)] = 2V_0(\alpha)[(\alpha^2 - 4)V_3(\alpha) + u\alpha V_0(\alpha)].$$

Par conséquent, $\Theta_3(\alpha) - d_1\alpha\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)$ est divisible par $V_0(\alpha) = \tilde{\mathrm{T}}'_{d_1}(\alpha)$.

L'application f_1^2 doit vérifier une propriété analogue. Par les calculs simples, on constate que le polynôme

$$\tilde{\mathrm{T}}'_{d_1} \circ \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)\Theta_3(\alpha) - d_1\alpha \left[\frac{d_1-2}{2}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1^2}(\alpha) - \frac{1}{2}\tilde{\mathrm{T}}'_{d_1} \circ \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)\right]$$

est divisible par $\tilde{\mathrm{T}}'_{d_1^2}(\alpha)$. Comme $\tilde{\mathrm{T}}'_{d_1^2}$ est divisible par $\tilde{\mathrm{T}}'_{d_1} \circ \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}$, le polynôme $\alpha\tilde{\mathrm{T}}_{d_1^2}(\alpha)$ est divisible par $\tilde{\mathrm{T}}'_{d_1} \circ \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(\alpha)$. Le polynôme $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1^2}$ et sa dérivée sont premiers entre eux. On a abouti à une contradiction. □

5. Preuve du théorème 1 : deuxième cas.

Dans ce paragraphe, on suppose que $f_{i|\infty} = [w_1^{d_i} : w_1^{d_i}\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}(w_2/w_1)]$ (*voir* l'introduction). D'après le lemme 1, on a $(f_{1|\infty})^n \neq (f_{2|\infty})^m$ pour tout $(n,m) \neq (0,0)$. Donc $d_1^n \neq d_2^m$ pour tout $(n,m) \neq (0,0)$. Comme dans le paragraphe précédent, on utilise la proposition 2 et le corollaire 2 pour les applications f_1 et f_2 en $a := [0:0:1]$. Quitte à remplacer f_i par f_i^n et à effectuer un changement de coordonnées, l'une des conditions suivantes sera vraie :

1. $f_{i1} = z_1^{d_i}$;
2. $f_{i1} = \tilde{\mathrm{T}}_{d_i} z_1$;
3. $f_{i1} = z_2^{d_i/2}\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}(z_1/\sqrt{z_2}) + \Xi_i$ où $\Xi_i = \sum_{k+2l<d_i} b_{ikl} z_1^k z_2^l$.

Soient $b := [0:1:2]$ et $c := [0:1:-2]$.

LEMME 6.— *Supposons que d_i est impair. Il existe une courbe $\mathcal{D}$ invariante par f_1 et f_2, passant par a, b et c telle que* $\mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\}, a) = 2$, $\mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\}, b) = \mathrm{mult}(\mathcal{D} \cap \{w_0 = 0\}, c) = 1$ *et* $f_i^{-1}\mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \mathcal{C}_i$. *De plus, on a* $\mathrm{mult}(f_i, \mathcal{C}_i) = 2$ *et* $\mathrm{mult}(\mathcal{C}_i \cap \{w_0 = 0\}, d) = 1$ *pour tout $d \in \mathcal{C}_i \cap \{w_0 = 0\}$ et $d \neq a$.*

Preuve.— On peut supposer que $i = 1$. Soient U un voisinage suffisamment petit de $\{w_0 = 0\}$ et A_p les composantes irréductibles de $\mathcal{C}_1 \cap U$ qui ne passent pas par a. Observons que b et c sont fixes et que l'ensemble critique de $f_{1|\infty}$ est égal à $I \cup \{a\}$ où $I := (f_{1|\infty})^{-1}\{b,c\} \setminus \{b,c\}$. D'après le lemme 3, A_p coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un point de I et $\mathrm{mult}(f_1, A_p) = 2$. D'après la proposition 1, il existe $(n,m) \neq (n',m')$ tels que $f_1^n f_2^m A_p = f_1^{n'} f_2^{m'} A_p$. Ceci implique $f_1^n f_2^m (f_1 A_p) = f_1^{n'} f_2^{m'} (f_1 A_p)$. D'après le lemme 5, $f_1 A_p$ est la variété stable de f_1 et f_2 en b ou en c. Posons $\mathcal{D}'$ la courbe algébrique invariante par f_1 et f_2 qui contient les $f_1 A_p$.

Si la condition 1 est vraie, $\mathcal{D}'$ ne passe pas par a. Il suffit de poser $\mathcal{D} := \mathcal{D}' \cup \{w_1 = 0\}$.

Si la condition 2 est vraie, $\mathcal{D}'$ ne passe pas par a. Il suffit de poser $\mathcal{D} := \mathcal{D}' \cup \{w_1 = 2\} \cup \{w_1 = -2\}$.

Lorsque la condition 3 est vraie, on pose $\mathcal{D} := \mathcal{D}'$ si $\mathcal{D}'$ passe par a, sinon $\mathcal{D}$ est la réunion de $\mathcal{D}'$ avec la courbe algébrique contenant la courbe algébrique invariante passant par a qui est décrite dans le corollaire 2. On a $\overline{f_1^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} \subset \mathcal{C}_1$ et $\deg \overline{f_1^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} = 2d_1 - 2 \geqslant \deg \mathcal{C}_1$. D'où $\overline{f_1^{-1}\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}} = \mathcal{C}_1$ et $\operatorname{mult}(f_1, \mathcal{C}_1) = 2$. □

LEMME 7. — *Supposons que d_i est pair. Il existe une droite L invariante par f_1, f_2, passant par b. La courbe $\overline{f_i^{-1}L \setminus L}$ contient une droite L' passant par c. La réunion des composantes de $\mathcal{C}_i$ qui ne passent pas par a, est égale à $H_i := \overline{f_i^{-1}(L \cup L') \setminus (L \cup L')}$. De plus, H_i coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement et* $\operatorname{mult}(f_i, H_i) = 2$.

Preuve. — On peut supposer que $i = 1$. Observons que $b = f(c)$ est un point fixe et que l'ensemble critique de $f_{1|\infty}$ est égal à $I \cup \{a\}$ où $I := (f_{1|\infty})^{-1}\{b, c\} \setminus \{b, c\}$. On utilise les notations du lemme 6. Soit A_p une composante telle que $f_1 A_p$ passe par b. On démontre comme dans le lemme 6 que $A := f_1 A_p$ est invariante.

D'après les lemmes 3 et 4, $f_1^{-1}A$ contient une courbe $B \not\subset \mathcal{C}_1$ qui coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en c. Ceci implique que la courbe algébrique irréductible, contenant A (notée L) ne peut pas passer par a. En effet, dans le cas contraire, le corollaire 2 entraîne $B \subset \overline{f_1^{-1}L \setminus L} \subset \mathcal{C}_1$ ce qui est impossible. La courbe L coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un seul point. Elle est donc une droite. La courbe algébrique irréductible L' qui contient B coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un point unique c. Elle est également une droite. En utilisant les lemmes 3 et 4 et comptant les multiplicités, on montre que $H_1 \subset \mathcal{C}_1$, H_1 coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement et $\operatorname{mult}(f_1, H_1) = 2$. □

PROPOSITION 6. — *Si la condition 3 est vraie, le couple (f_1, f_2) se trouve dans l'exemple 4 à une classe de conjugaison près.*

Preuve. — On considère le cas où d_1 est impair. Le cas contraire sera traité de même manière. Soit $\mathcal{D}$ la courbe définie dans le lemme 6. C'est une courbe invariante de degré 4. Comme $f_{1|\mathcal{D}}$ possède plus que deux points exceptionnels, $\mathcal{D}$ est réductible. Il y a donc deux cas possibles.

Supposons que $\mathcal{D}$ est la réunion d'une courbe irréductible $\mathcal{E}$ de degré 3 et d'une droite L. Montrons que ce cas est impossible. L'application $f_1|\mathcal{E}$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$ car il possède deux points exceptionnels (qui se trouvent dans $\{w_0 = 0\}$). Notons $I := \mathcal{E} \cap L$. Alors $\overline{f_1^{-1}L \setminus L}$ passe par $J := (f_{1|\mathcal{E}})^{-1}I \setminus I$. Comme $\deg \overline{f_1^{-1}L \setminus L} = (d_1 - 1)/2$, on a $\#J \leqslant 3(d_1 - 1)/2$. On en déduit que $\#I = 1$ car $f_{1|\mathcal{E}}$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$. On note d le point d'intersection de $\mathcal{E}$ et L. La droite L est tangente à $\mathcal{E}$ en d. C'est donc un point fixe de f_1. L'application $f_{1|\mathcal{E}}$ étant conjuguée à $x^{\pm d_1}$, la valeur propre de f_1 en d suivant la direction tangente à $\mathcal{E}$ est égale à $\pm d_1$. On déduit facilement que la valeur propre de f_1 en d suivant la direction L est différente de 0. Les applications f_i agissant sur L comme des polynômes permutables, $f_{1|L}$ est conjugué à x^{d_1} ou à $\pm\mathrm{T}_{d_1}$. Si $f_{1|L}$ est conjugué à x^{d_1}, le fait que la valeur propre de $f_{1|L}$ en d est différente de 0 implique que $f_{1|L}$ est régulier en chaque point de $K := (f_{1|L})^{-1}d \setminus \{d\}$ et que $\#K = d_1 - 1$. L'ensemble $\overline{f_1^{-1}\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}$ passe par K. Donc K appartient à $\mathcal{C}_1$. On en déduit que la courbe $\overline{f_1^{-1}L \setminus L}$ passe par K. On a abouti à une contradiction car $\deg \overline{f_1^{-1}L \setminus L} < \#K$. Sinon $f_{1|L}$ est égale à $\pm\mathrm{T}_{d_1}(x)$ où x est une coordonnée de L. Si $d \notin \{x = \pm 2\}$, alors $(f_{1|L})^{-1}(d)$ est de cardinal $d_1 - 1$ et disjoint de l'ensemble critique de $f_{1|L}$. Comme le cas précédent, on obtient une contradiction. Alors $d \in \{x = \pm 2\}$. On suppose par exemple que $f_{1|L} = \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(x)$ et $d = \{x = 2\}$. Comme $\mathcal{E}$ ne passe pas par $\{x = -2\}$, la courbe $\overline{f_1^{-1}\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}}$ ne rencontre pas $K := (f_{1|L})^{-1}\{x = -2\}$. Comme les points de K sont critiques pour $f_{1|L}$, la courbe $\mathcal{C}_1$ passe par K. Comme $\mathcal{C}_1 = \overline{f_1^{-1}(\mathcal{E} \cup L) \setminus (\mathcal{E} \cup L)}$, la courbe $\overline{f_1^{-1}L \setminus L}$ passe par K. Le fait que $\deg \overline{f_1^{-1}L \setminus L} = \#K = d_1 - 1$ implique que $\overline{f_1^{-1}L \setminus L}$ coupe L transversalement en K. Fixons un point $e \in K$. Au voisinage de e, l'ensemble critique de f_1 est une courbe lisse, son image est lisse et l'image réciproque de son image est une réunion de deux courbes lisses qui se coupent transversalemment. On vérifie sans peine que cette situation ne se produit jamais.

La courbe $\mathcal{D}$ contient donc une courbe rationnelle R tangente à $\{w_0 = 0\}$ en a. D'après le corollaire 2 appliqué à f_i au point a, quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que $R = \{z_1^2 - 4z_2 = 0\}$. On a $\overline{f_i^{-1}R \setminus R} \subset \mathcal{C}_i$. De plus, la multiplicité de f_i sur cette courbe est égale à 2. Par conséquent, il existe des polynômes R_i tels que ${f_{i1}}^2 - 4f_{i2} = (z_1^2 - 4z_2)R_i^2(z_1, z_2)$. Soit π l'application de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\pi(x, y) = (x + y, xy)$ (*voir* l'exemple 4). Posons $h_i := (h_{i1}, h_{i2}) = f_i \circ \pi$. On a $h_{i1}^2 - 4h_{i2} = (x - y)^2 R_i^2(x + y, xy)$. Ceci implique qu'il existe des applications F_i telles que $h_i = \pi \circ F_i$. Les F_i sont définies par

$$F_i = (F_{i1}, F_{i2}) = \left(\frac{h_{i1} \pm (x-y)R_i(x+y, xy)}{2}, \frac{h_{i1} \mp (x-y)R_i(x+y, xy)}{2} \right).$$

On peut choisir les signes de sorte que $F_1 \circ F_2 = F_2 \circ F_1$. Observons que $[w_2^{d_i/2} \tilde{\mathrm{T}}_{d_i}(w_1/\sqrt{w_2})] \circ \pi = w_1^{d_i} + w_2^{d_i}$. On vérifie sans peine que $h_{i1} = x^{d_i} + y^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$ et $h_{i2} = x^{d_i}y^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$ où $\nu := (x, y)$. Par suite, $F_{i1} = x^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$ et $F_{i2} = y^{d_i} + \mathrm{o}(|\nu|^{d_i})$. On a également $F_{i1}(x, y) = F_{i2}(y, x)$. En utilisant le paragraphe précédent pour le couple (F_1, F_2), on constate que ce couple est conjugué à un des couples des exemples 1-4. Comme aucune composante de $f_i\mathcal{C}_i$ n'est incluse dans $\mathcal{C}_i$, F_i vérifie une propriété analogue. De plus, $F_{i|\infty} = [x^{d_i} : y^{d_i}]$. Par conséquent, il existe un automorphisme σ de $\mathbb{P}^2$ qui préserve l'infini et qui vérifie $\sigma^{-1} \circ F_i \circ \sigma = (\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}x, \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}y)$ ou $(\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}y, \pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}x)$. Quitte à remplacer f_i par f_i^4, on peut supposer que $\sigma^{-1} \circ F_i \circ \sigma = (\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}x, \tilde{\mathrm{T}}_{d_i}y)$. Comme $F_{i|\infty} = [x^{d_i} : y^{d_i}]$, on a $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (\alpha x + \beta, \alpha' y + \beta')$. Comme $F_{i1}(x, y) = F_{i2}(y, x)$, on a $\sigma_1^{-1} \circ \tilde{\mathrm{T}}_{d_i} \circ \sigma_1 = \sigma_2^{-1} \circ \tilde{\mathrm{T}}_{d_i} \circ \sigma_2$. On en déduit que $\sigma_1\{\pm 2\} = \sigma_2\{\pm 2\}$ car l'ensemble de Julia de $\tilde{\mathrm{T}}_{d_i}$ est $[-2, 2]$. Ceci implique que $\beta = \beta'$ et $\alpha = \pm\alpha'$. On montre sans peine que $\alpha = -\alpha'$ est possible seulement si les d_i sont impairs et $\beta = \beta' = 0$. Dans ce cas, rien n'est changé si l'on remplace α' par α. On peut donc supposer que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. Il est clair maintenant que (f_1, f_2) est conjugué à un couple construit dans l'exemple 4. □

PROPOSITION 7. — *La condition 2 est fausse.*

Preuve. — Supposons que la condition 2 est vraie. Considérons d'abord le cas où d_1 et d_2 sont impairs. Alors $\mathcal{D}$ est la réunion de $\mathcal{F} := \{z_1 = 2\}$, de $\mathcal{F}' = \{z_1 = -2\}$ et d'une courbe invariante R de degré 2 passant par $\{b, c\}$ qui est irréductible ou une réunion de deux droites.

Si R est irréductible, l'application f_1 agit sur R comme un polynôme de degré d_1 dont les points b, c sont exceptionnels. Par conséquent, $f_{1|R}$ est conjugué à $x^{\pm d_1}$ et il n'a pas de point critique différent de b et c. Comme la condition 2 est vraie, si $s \in \tilde{T}^{-1}\{\pm 2\}$ et si $\{z_1 = s\}$ coupe R transversalement en z, alors z est un point critique de $f_{1|R}$. On a abouti une contradiction.

La courbe R est donc une réunion de deux droites L et L' qui sont invariantes par f_1. La droite L passe par b et la droite L' passe par c. Quitte à effectuer un changement de coordonnées du type $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2 + \alpha)$, on peut suppser que L est la droite $z_2 - 2z_1 = 0$. Il existe $v \in \mathbb{C}$ tel que

$L = \{z_2 + 2z_1 + v = 0\}$. D'après le lemme 6, il existe des polynômes T et V tels que

$$(4) \qquad f_{12} - 2f_{11} = (z_2 - 2z_1)T^2 \text{ et } f_{12} + 2f_{11} + v = (z_2 + 2z_1 + v)V^2.$$

On peut écrire $f_{12} = z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1) + \Delta + \mathrm{o}(|z|^{d_1-1})$ où Δ est homogène de degré $d_1 - 1$. On a $f_{11} = \tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_1) = z_1^{d_1} + \mathrm{o}(|z|^{d_1-1})$ car il est un polynôme impair. Observons que les points critiques de $\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}$ sont tous de multiplicité 2 et s'envoient aux points fixes ± 2. Ceci signifie qu'il existe des polynômes homogènes R et S tels que $z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1) - 2z_1^{d_1} = (z_2 - 2z_1)R^2$ et $z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1) + 2z_1^{d_1} = (z_2 + 2z_1)S^2$. Il est clair que $(z_2 - 2z_1)R$ et $(z_2 + 2z_1)S$ sont premiers entre eux. On peut donc écrire $T = R + \Delta_1 + \mathrm{o}(|z|^{(d_1-3)/2})$ et et $V = S + \Delta_2 + \mathrm{o}(|z|^{(d_1-3)/2})$ où Δ_1 et Δ_2 sont homogènes de degré $(d_1 - 3)/2$. D'après (4), on a

$$(5) \qquad \Delta = 2(z_2 - 2z_1)R\Delta_1 = S[2(z_2 + 2z_1)\Delta_2 + vS].$$

Ceci implique que Δ est divisible par $(z_2 - 2z_1)R$ et par S. Comme $(z_2 - 2z_1)R$ et S sont premiers entre eux, Δ est divisible par $(z_2 - 2z_1)RS$. Alors $\Delta = 0$ car $\deg \Delta < \deg(z_2 - 2z_1)RS$. On en déduit que $2(z_2 + 2z_1)\Delta_2 + vS = 0$. Par suite, Δ_2 est divisible par S. On obtient $\Delta_2 = 0$ et donc $v = 0$ car $\deg \Delta_2 < \deg S$. Les droites L et L' se coupent en 0. Soit $I := (f_{1|L})^{-1}(0) \setminus \{0\}$. Alors $f_1^{-1}L'$ passe par I. C'est la contradiction recherchée car $\#I = d_1 - 1$ et $\deg f_1^{-1}L' = (d_1 + 1)/2$.

Supposons maintenant que d_1 est pair. On peut supposer que $L = \{z_2 - 2z_1 = 0\}$ et $L' = \{z_2 + 2z_1 + v = 0\}$. Il existe des polynômes R et S tels que $z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1) - 2z_1^{d_1} = (z_2 - 2z_1)(z_2 + 2z_1)R^2$ et $z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1) + 2z_1^{d_1} = S^2$. Il existe aussi des polynômes T et V tels que $f_{12} - 2f_{11} = (z_2 - 2z_1)(z_2 + 2z_1 + v)T^2$ et $f_{12} + 2f_{11} + v = V^2$. Comme dans le cas précédent, on montre que $v = 0$ et que $f_1^{-1}L'$ passe par $I := (f_{1|L})^{-1}(0)$. On aboutit également à une contradiction. □

Proposition 8. — *Si la condition 1 est vraie, le couple (f_1, f_2) est conjugué à un couple d'applications polynomiales homogènes.*

Preuve. — Quitte à remplacer f_i par un de ses itérés, on peut supposer que d_i est suffisamment grand. On considère le cas où d_1, d_2 sont impairs. Les autres cas seront traités de même manière. D'après le lemme 6, on peut choisir un système de coordonnées tel que $\mathcal{D} = \{\Phi = 0\}$ où

$$\Phi(z) = (z_2 - 2z_1)(z_2 + 2z_1) + u(z_2 - 2z_1) + v$$

est un polynôme de degré deux. Soit $0 \leqslant \delta \leqslant d_1 - 1$ tel qu'on puisse écrire

$$f_1 = (f_{11}, f_{12}) = (z_1^{d_1}, Q + \Delta + \mathrm{o}(|z|^{\delta})) \tag{6}$$

où $Q := z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1)$ et Δ est homogène de degré δ. D'après le lemme 6, il existe un polynôme W tel que $\Phi(f_1) = \Phi.W^2$. Soient R et S des polynômes homogènes vérifiant $z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1) - 2z_1^{d_1} = (z_2 - 2z_1)R^2$ et $z_1^{d_1}\tilde{\mathrm{T}}_{d_1}(z_2/z_1) + 2z_1^{d_1} = (z_2 - 2z_1)S^2$. Alors $(z_2 - 2z_1)R$ et $(z_2 + 2z_1)S$ sont premiers entre eux.

Montrons que $u = 0$. On prend $\delta = d_1 - 1$. Quitte à remplacer W par $-W$ au cas nécessaire, on peut écrire $W = RS + \Delta_W + \mathrm{o}(|z|^{d_1-2})$ où Δ_W est homogène de degré $d_1 - 2$. La relation $\Phi(f_1) = \Phi.W^2$ implique

$$\begin{aligned} &[(z_2 - 2z_1)R^2 + (z_2 + 2z_1)S^2]\Delta \\ &= RS[2(z_2 - 2z_1)(z_2 + 2z_1)\Delta_W + u(z_2 - 2z_1)RS]. \end{aligned} \tag{7}$$

Alors Δ est divisible par $(z_2 - 2z_1)RS$. Comme $\deg \Delta < \deg(z_2 - 2z_1)RS$, on a $\Delta = 0$ et donc $2(z_2 + 2z_1)\Delta_W + uRS = 0$. Par suite, Δ_W est divisible par RS. On obtient $\Delta_W = 0$ et donc $u = 0$ car $\deg \Delta_W < \deg RS$.

De même manière, en utilisant $\delta = d_1 - 2$, on obtient $v = 0$.

Soit δ l'entier minimal vérifiant (6). On peut écrire $W = RS + \Delta_W + \mathrm{o}(|z|^{\delta-1})$ où Δ_W est homogène de degré $\delta - 1$. On montre exactement comme ci-dessus que $\Delta = 0$. La minimalité de δ implique que f_{12} est homogène. □

6. Preuve du théorème 1 : troisième cas.

Dans ce paragraphe, on suppose que les $f_{i|\infty}^n$ ne sont pas conjugués ni à $z^{\pm d_i^n}$ ni à $\pm\tilde{\mathrm{T}}_{d_1^n}$ (*voir* l'introduction). On montrera que f_1 et f_2 sont homogènes. D'après [4], $f_{i|\infty}$ définissent des revêtements de $\mathcal{O}$ dans lui-même, où $\mathcal{O} = (\mathbb{P}^1, n)$ est l'un des orbifolds $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ qui seront décrits plus tard. Il existe également un tore complexe $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\Gamma$ de dimension 1, des applications affines $\Lambda_i(x) = a_i x + b_i$ préservant le groupe discret Γ et une fonction elliptique $F : \mathbb{T} \to \mathbb{P}^1$ tels que $f_i \circ F = F \circ \Lambda_i$. On a $d_i = |a_i|^2$ et donc tout point périodique de f_i est répulsif. En tout point fixe de f_i, la valeur propre de f_i est égale à a_i. L'orbifold $\mathcal{O}_m$ est défini par le couple $(\mathbb{P}^1, n_m)$, où n_m est une fonction sur $\mathbb{P}^1$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_+$ qui est égale à 1 sauf en s points ($s = 3$ ou 4). On note $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$

ces s points. Alors l'ensemble $\{\alpha_j\}_{j=1}^s$ est invariant par f_1 et f_2. Quitte à remplacer f_1, f_2 par $f_1 \circ f_2^n$ et $f_1 \circ f_2^m$ avec $n \neq m$ convenables, on peut supposer que si α_j est périodique pour f_1, il est également périodique pour f_2 et réciproquement. Une fois que l'on a montré que $f_1 \circ f_2^n$ et $f_1 \circ f_2^m$ sont homogènes, les applications f_1 et f_2 le sont aussi. Maintenant, quitte à remplacer f_i par l'un de ses itérés, on peut supposer que tout point périodique α_j est fixe. Par définition des orbifolds et leur description [4], on a les cas suivants :

1. Pour $\mathcal{O}_1$, $s = 3$ et $n_1(\alpha_j) = 3$ pour $j = 1, 2, 3$ et $a_i \in \mathbb{Z}[\omega]$ avec $\omega = \exp(i\pi/3)$. Si d_i n'est pas divisible par 3, $d_i = 1$ modulo 3. Les α_j sont tous fixes répulsifs pour $f_{i|\infty}$ et l'image réciproque de α_j est constituée par lui-même et $(d_i - 1)/3$ autres points; la multiplicité de $f_{i|\infty}$ sur chacun de ces $(d_i - 1)/3$ points est égale à 3.

Sinon, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_j pour $j = 2, 3$ est constituée par $d_i/3$ points de multiplicité 3; celle de α_1 est constituée par les α_j et $d_i/3 - 1$ autres points de multiplicité 3.

2. Pour $\mathcal{O}_2$, $s = 3$ et $n_2(\alpha_1) = 6$, $n_2(\alpha_2) = 3$, $n_2(\alpha_3) = 2$ et $a_i \in \mathbb{Z}[\omega]$ avec $\omega = \exp(i\pi/3)$. Si d_i n'est pas divisible par 2 ni par 3, $d_i = 1$ modulo 6. Les α_j sont tous fixes répulsifs pour f_i et l'image réciproque de α_1 (resp. α_2 et α_3) est constituée par lui-même et $(d_i - 1)/6$ (resp. $(d_i - 1)/3$ et $(d_i - 1)/2$) autres points de multiplicité 6 (resp. 3 et 2).

Si d_i est divisible par 2 mais non point par 3, alors $d_i = 4$ modulo 6. Dans ce cas, α_1 et α_2 sont fixes et $f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_3 est constituée par $d_i/2$ points de multiplicité 2; celle de α_2 (resp. α_1) est constituée par lui-même (resp. lui-même et α_3 avec la multiplicité 3) et $(d_i - 1)/3$ (resp. $(d_i - 4)/6$) autres points de multiplicité 3 (resp. 6).

Si d_i est divisible par 3 mais non point par 2, alors $d_i = 3$ modulo 6. Dans ce cas, α_1 et α_3 sont fixes et $f_i(\alpha_2) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_2 est constituée par $d_i/3$ points de multiplicité 3; celle de α_3 (resp. α_1) est constituée par lui-même (resp. lui-même et α_2 avec la multiplicité 2) et $(d_i - 1)/2$ (resp. $(d_i - 3)/6$) autres points de multiplicité 2 (resp. 6).

Si d_i est divisible par 6, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_3 (resp. α_2) est constituée par $d_i/2$ (resp. $d_i/3$) points de multiplicité 2 (resp. 3); celle de α_1 est constituée par lui-même, α_3 avec la multiplicité 3, α_2 avec la multiplicité 2 et $d_i/6$ points de multiplicité 6.

3. Pour $\mathcal{O}_3$, $s = 3$ et $n_1(\alpha_1) = 4$, $n_1(\alpha_2) = 4$, $n_1(\alpha_3) = 2$ et $a_i \in \mathbb{Z}[i]$. Si d_i n'est pas divisible par 2, $d_i = 1$ modulo 4. Dans ce cas, les α_j sont fixes répulsifs. L'image réciproque de α_3 (resp. α_2 ou α_1) est constituée par lui-même et $(d_i - 1)/2$ (resp. $(d_i - 1)/4$) autres points de multiplicité 2 (resp. 4).

Sinon, quitte à remplacer f_i par f_i^2, on peut supposer que d_i est divisible par 4. Alors $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_3 (resp. α_2) est constituée par $d_i/2$ (resp. $d_i/4$) points de multiplicité 2 (resp. 4) ; celle de α_1 est constituée par lui-même, α_2 avec multiplicité 1, α_3 avec multiplicité 2 et $d_i/4 - 1$ autres points de multiplicité 4.

4. Pour $\mathcal{O}_4$, $s = 4$ et $n_1(\alpha_j) = 2$ pour $j = 1, 2, 3, 4$. Si d_i n'est pas divisible par 2, alors tous les α_j sont fixe répulsifs. L'image réciproque de chaque α_j est constituée par lui-même et $(d_i - 1)/2$ autres points de multiplicité 2.

Sinon, il y a deux cas possibles. Pour le premier cas, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_3) = f_i(\alpha_4) = \alpha_1$. L'image réciproque de α_j pour $j = 2, 3, 4$ est constituée par $d_i/2$ points de multiplicité 2 ; celle de α_1 est constituée par les α_j avec la multiplicité 1 et $d_i/2 - 2$ autres points de multiplicité 2.

Pour le second cas, $f_i(\alpha_1) = f_i(\alpha_3) = \alpha_1$ et $f_i(\alpha_2) = f_i(\alpha_4) = \alpha_2$. L'image réciproque de α_j pour $j = 3, 4$ est constituée par $d_i/2$ points de multiplicité 2 ; celle de α_j pour $j = 1, 2$ est constituée par α_j, α_{j+2} avec la multiplicité 1 et $d_i/2 - 1$ autres points de multiplicité 2.

Observons que dans tous les cas, on a

$$\sum_j \frac{n(\alpha_j) - 1}{n(\alpha_j)} = 2.$$

Soit r le nombre des α_j qui sont fixes par f_1 et f_2. Alors $r = 1$, 2 ou s.

LEMME 8.— *Si $r = s$, il existe une courbe L de $\mathbb{P}^2$ invariante par f_1 et f_2 ; elle coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$. De plus, $f_i^{-1}L = L \cup \mathcal{C}_i$ et $\mathrm{mult}(f_i, A)$ égale à la multiplicité de $f_{i|\infty}$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$ pour toute composante A de $\mathcal{C}_i$.*

Preuve.— Il suffit de montrer la proposition pour $i = 1$. L'indépendance de L en i est simple. Soit U un voisinage assez petit de $\{w_0 = 0\}$ tel que $\mathcal{C}_1 \cap U$ soit la réunion des courbes irréductibles A_p ; chaque A_p coupe $\{w_0 = 0\}$ en un seul point β_p. D'après le lemme 3, β_p appartient à l'ensemble critique de $f_{1|\infty}$. Par chaque point α_j passe une seule courbe lisse, stable par f_1 et f_2. Cette courbe coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en α_j (*voir* la remarque 2). Fixons un A_p. Soit $\alpha_j = f_1(\beta_p)$. On choisit un système de coordonnées local (x,y) pour un voisinage de α_j tel que $\alpha_j = (0,0)$, $\{x = 0\} = \{w_0 = 0\}$ soit la variété instable, $\{y = 0\}$ soit la variété stable et tel que $f_i(x,y) = (x^{d_i} + \mathrm{o}(x^{d_i}), a_i y + xyg_i(x,y))$. Comme $(f_{1|\infty})^n \neq (f_{2|\infty})^m$ pour tous entiers positifs n, m, on a $a_1^n a_2^m \neq a_1^{n'} a_2^{m'}$ pour tous $(n,m) \neq (n',m')$. On va montrer que $f_1 A_p$ est la variété stable de f_1 en α_j. Il est clair que $f_1 A_p \neq \{x = 0\}$. D'après la proposition 1, $f_1^n f_2^m A_p = f_1^{n'} f_2^{m'} A_p$ pour certains couples $(n,m) \neq (n',m')$. D'où $f_1^n f_2^m (f_1 A_p) = f_1^{n'} f_2^{m'} (f_1 A_p)$. D'après le lemme 5 (appliqué aux applications $f_1^n f_2^m$ et $f_1^{n'} f_2^{m'}$), $f_1 A_p$ est la variété stable $\{y = 0\}$ de f_1 et f_2 en α_j.

Soit $L := f_1(\mathcal{C}_1)$. Comme les variétés stables coupent $\{w_0 = 0\}$ transversalement, L coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en $\{\alpha_j\}_{j=1}^s$. Donc $\deg L = s$. Les A_p sont les composantes irréductibles de $\overline{f_1^{-1} L \setminus L} \cap U$. Soient $\beta_p := A_p \cap \{w_0 = 0\}$ et $\alpha_{j_p} := f_1(\beta_p)$ avec $1 \leqslant j_p \leqslant s$. Posons $m_p := \mathrm{mult}(f_1, A_p)$ et $n_p := \mathrm{mult}(A_p \cap \{w_0 = 0\}, \beta_p)$. D'après le lemme 4, on a $\sum_{j_p = j} m_p n_p = d_1 - 1$, et $m_p n_p \leqslant \mathrm{mult}(f_{1|\infty}, \beta_p) = n(\alpha_{j_p})$. On sait que $\deg \mathcal{C}_1 = 2(d_1 - 1)$ compté avec les multiplicités. D'après le lemme 3, on a $\sum (m_p - 1) n_p = 2(d_1 - 1)$. Le fait que $m_p \leqslant n(\alpha_{j_p})$ implique que

$$\begin{aligned}
\sum_p (m_p - 1) n_p &= \sum_p \frac{m_p - 1}{m_p} m_p n_p \leqslant \sum_p \frac{n(\alpha_{j_p}) - 1}{n(\alpha_{j_p})} m_p n_p \\
&= \sum_j \frac{n(\alpha_j) - 1}{n(\alpha_j)} \sum_{j_p = j} m_p n_p = \sum_j \frac{n(\alpha_j) - 1}{n(\alpha_j)} (d_1 - 1) \\
&= 2(d_1 - 1).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $m_p = n(\alpha_{j_p}) = \mathrm{mult}(f_1|\infty, \beta_p)$ et donc $n_p = 1$ pour tout p. Par suite, les courbes A_p sont disjointes. Il est clair maintenant que $\mathcal{C}_1 = \overline{f_1^{-1} L \setminus L}$ et $\mathrm{mult}(f_1, A)$ est égale à la multiplicité de $f_{1|\infty}$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$ pour toute composante A de $\overline{f_1^{-1} L \setminus L}$. □

LEMME 9.— *Si $r = 1$, il existe une droite $L \neq \{w_0 = 0\}$ invariante par f_1, f_2 et passant par α_1. L'ensemble $f_i^{-1} L$ se constitue par L, par des courbes L' et $H_i \subset \mathcal{C}_i$. La courbe L' coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en $\alpha_2, \dots, \alpha_s$ et $f_i^{-1} L' = \overline{\mathcal{C}_i \setminus (H_i \cup L')}$. Pour chaque composante A de $\mathcal{C}_i$, $\mathrm{mult}(f_i, A)$ est égale à la multiplicité de $f_{i|\infty}$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$.*

Preuve.— On peut supposer que $i = 1$. On considère le cas où $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$. Les autres cas seront traités de même manière.

Soient U, A_p, β_p définies dans la preuve du lemme 8. Fixons un p tel que $f_1 A_p \cap \{w_0 = 0\} = \alpha_1$. Comme dans le lemme 8, on montre que $f_1 A_p$ est la variété stable de f_1 en α_1. Soit L la courbe algébrique contenant $f_1 A_p$. On a $\overline{f_1^{-1} L \setminus L} \subset \mathcal{C}_1$. De plus, la courbe L coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en un point unique α_1 car $\mathcal{C}_1 \cap \{w_0 = 0\}$ s'envoie au point α_1. Elle est donc une droite. Soient B_q, C_ν, D_ξ les composantes irréductibles de $\overline{f_1^{-1} L \setminus L} \cap U$ telles que $C_\nu \cap \{w_0 = 0\} = \alpha_2$, $D_\xi \cap \{w_0 = 0\} = \alpha_3$ et $B_q \cap \{w_0 = 0\} =: \beta_q \neq \alpha_2, \alpha_3$ où les indices q, ν et ξ prennent leurs valeurs dans certains ensembles. On note m_q, m_ν, m_ξ les multiplicités de f_1 sur B_q, C_ν, D_ξ et n_q, n_ν, n_ξ les multiplicités de l'intersection de B_q, C_ν, D_ξ avec $\{w_0 = 0\}$ respectivement.

D'après les lemmes 4 et 3, on a $\sum m_q n_q = d_1 - 6$, $\sum m_\nu n_\nu = 2$, $\sum m_\xi n_\xi = 3$, $\sum (m_q - 1) n_q = 5(d_1/6 - 1)$, $\sum (m_\nu - 1) n_\nu = 1$, $\sum (m_\xi - 1) n_\xi = 2$, $m_q n_q \leqslant 6$, $m_\nu n_\nu \leqslant 2$ et $m_\xi n_\xi \leqslant 3$. Donc

$$\begin{aligned} 5\left(\frac{d_1}{6} - 1\right) &= \sum (m_q - 1) n_q \\ &= \sum \frac{m_q - 1}{m_q} m_q n_q \leqslant \sum \frac{6-1}{6} m_q n_q = 5\left(\frac{d_1}{6} - 1\right). \end{aligned}$$

D'où $m_q = 6 = \mathrm{mult}(f_{1|\infty}, \beta_q)$ et $n_q = 1$. De même, $m_\nu = 2 = \mathrm{mult}(f_{1|\infty}, \alpha_2)$, $n_\nu = 1$, $m_\xi = 3 = \mathrm{mult}(f_{1|\infty}, \alpha_3)$ et $n_\xi = 1$. Il y a donc $d_1/6 - 1$ composantes B_q ; sur chaque B_q la multiplicité de f_1 est égale à 6 ; il y a une seule composante C_ν avec la multiplicité 2 et une seule composante D_ξ avec la multiplicité 3. Ces composantes sont disjointes et coupent $\{w_0 = 0\}$ transversalement. Posons $C := C_\nu$ et $D := D_\xi$. Soit A_p une composante vérifiant $f_1 A_p \cap \{w_0 = 0\} = \alpha_2$. Comme dans le lemme 8, on montre que $f_1^2 A_p$ est la variété stable de f_1 en α_1. D'où $f_1 A_p = C$. Soient F_η les composantes irréductibles de $f_1^{-1} C \cap U$, $\beta_\eta := F_\eta \cap \{w_0 = 0\}$, $m_\eta := \mathrm{mult}(f_1, F_\eta)$ et $n_\eta := \mathrm{mult}(F_\eta \cap \{w_0 = 0\}, \beta_\eta)$. D'après les lemmes 3 et 4, on a $\sum m_\eta n_\eta = d_1$, $\sum (m_\eta - 1) n_\eta = 2d_1/3$ et $m_\eta n_\eta \leqslant 3$. D'où

$$\frac{2}{3} d_1 = \sum (m_\eta - 1) n_\eta = \sum \frac{m_\eta - 1}{m_\eta} m_\eta n_\eta \leqslant \sum \frac{3-1}{3} m_\eta n_\eta = \frac{2}{3} d_1.$$

Ceci implique que $n_\eta = 1$, $m_\eta = 3 = \mathrm{mult}(f_{1|\infty}, \beta_\eta)$. Les F_η appartiennent à $\mathcal{C}_1$; chacune est de multiplicité 3 et coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement. La courbe $f_1^{-1} D$ vérifie une propriété analogue. On a $f_1^{-1} L' = \overline{\mathcal{C}_1 \setminus (H \cup L')}$ et pour chaque composante A de $\mathcal{C}_1$, $\mathrm{mult}(f_1, A)$ est égale à la multiplicité de $f_{1|\infty}$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$. $\square$

LEMME 10.— *Si $r = 2$ et si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$, il existe deux droites L et L' invariantes par f_1 et f_2 ; L passe par α_1 et L' passe par α_j avec $j = 2$ ou 3. La courbe $f_i^{-1}L$ est la réunion de L, d'une droite Λ passant par α_l et d'une autre courbe H_i $(l \neq 1, j)$. La courbe $f_i^{-1}L'$ est la réunion de L' et d'une autre courbe H_i'. On a $\mathcal{C}_i = \Lambda \cup f_i^{-1}\Lambda \cup H_i \cup H_i'$. Pour toute composante irréductible A de $\mathcal{C}_i$,* $\mathrm{mult}(f_i, A)$ *est égale à la multiplicité de $f_{i|\infty}$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$.*

Preuve.— Si d_i est pair, on a $j = 2$ et $l = 3$; si d_i est divisible par 3, on a $j = 3$ et $l = 2$. Comme dans les lemmes précédents, on montre qu'il existe une courbe algébrique invariante passant par α_1 et α_j. L'image réciproque de cette courbe par f_i contient des composantes de $\mathcal{C}_i$, où les multiplicités de f_i sont égales à $n(\alpha_1)$ et $n(\alpha_j)$. Comme $n(\alpha_1) \neq n(\alpha_j)$, cette courbe invariante est réductible. Elle est donc la réunion de deux droites L et L'. On montre tout comme dans les lemmes précédents que $f_i^{-1}L$ contient Λ passant par α_l, que $\mathcal{C}_i = \Lambda \cup f_i^{-1}\Lambda \cup H_i \cup H_i'$ et que $\mathrm{mult}(f_i, A)$ est égale à la multiplicité de $f_{i|\infty}$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$ pour toute composante A de $\mathcal{C}_i$. □

LEMME 11.— *Si $r = 2$ et si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_4$, il existe une courbe algébrique $\mathcal{D}$ invariante par f_1 et f_2 ; cette courbe est de degré 2 et passe par α_1 et α_2. La courbe $f_i^{-1}\mathcal{D}$ est la réunion de $\mathcal{D}$, d'une courbe $\mathcal{D}'$ de degré 2 passant par α_3 et α_4 et d'une autre courbe H_i. On a $\mathcal{C}_i = H_i \cup f_i^{-1}\mathcal{D}'$. Pour toute composante irréductible A de $\mathcal{C}_i$,* $\mathrm{mult}(f_i, A)$ *est égale à 2.*

Preuve.— Comme dans les lemmes précédents, on montre qu'il existe une courbe algébrique $\mathcal{D}$ invariante par f_1 et f_2 et coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en α_1 et α_2. Cette courbe est alors de degré 2. L'ensemble $f_i^{-1}(\mathcal{D})$ est la réunion d'une courbe $\mathcal{D}'$ et d'une courbe H_i. La courbe $\mathcal{D}'$ coupe $\{w_0 = 0\}$ transversalement en α_3 et α_4. La courbe $\mathcal{D}'$ est également de degré 2. On a aussi $\mathcal{C}_i = H_i \cup f_i^{-1}\mathcal{D}'$. On montre comme dans les lemmes précédents que $\mathrm{mult}(f_i, A)$ est égale à la multiplicité de $f_{i|\infty}$ en chaque point de $A \cap \{w_0 = 0\}$ (c'est-à-dire égale à 2) pour toute composante A de $\mathcal{C}_i$. □

PROPOSITION 9.— *Le couple (f_1, f_2) est conjugué à un couple d'applications polynomiales homogènes.*

Preuve.— Nous allons traiter seulement le cas où $r = s$ et $\mathcal{O} = \mathcal{O}_4$. Ce cas nous semble le plus compliqué. La preuve est essentiellement valable pour les autres cas.

Quitte à remplacer f_1 par l'un de ses itérés, on peut supposer que d_1 est suffisamment grand. On choisit un système de coordonnées tel que $\alpha_1 = [0:1:0]$, $\alpha_2 = [0:0:1]$, $\alpha_3 = [0:1:1]$, $\alpha_4 = [0:1:\alpha]$ et la courbe L soit définie par l'équation $\Phi = 0$ où $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ et

$$\Phi(z) = z_1 z_2(z_2 - z_1)(z_2 - \alpha z_1) + b z_1^2 z_2 + c z_1 z_2^2 + d z_1 + u z_2 + v$$

est un polynôme de degré 4. Soit $0 \leqslant \delta \leqslant d_1 - 1$ un nombre naturel tel qu'on puisse écrire

$$f_1(z) = (f_{11}, f_{12}) = (P + \Delta_1 + \mathrm{o}(|z|^\delta), Q + \Delta_2 + \mathrm{o}(|z|^\delta)) \tag{8}$$

où P, Q (resp. Δ_1 et Δ_2) sont homogènes de degré d_1 (resp. δ). D'après le lemme 8, il existe un polynôme W tel que $\Phi(f_1) = \Phi.W^2$. On pose $\Delta_3 := \Delta_2 - \Delta_1$ et $\Delta_4 := \alpha\Delta_2 - \Delta_1$. Par définition de $\mathcal{O}_4$, il existe des polynômes homogènes R, S, T et V de degré $(d_1-1)/2$ tels que $P = z_1 R^2$, $Q = z_2 S^2$, $Q - P = (z_2 - z_1)T^2$ et $\alpha Q - P = (z_2 - \alpha z_1)V^2$. Observons que $z_1 R$, $z_2 S$, $(z_2 - z_1)T$ et $(z_2 - \alpha z_1)V$ sont deux à deux premiers entre eux car P et Q sont premiers entre eux. On a $W = RSTV + \mathrm{o}(|z|^{2(d_1-1)})$.

Montrons que $b = c = 0$. Considérons $\delta = d_1 - 1$. On écrit $W = RSTV + \Delta + \mathrm{o}(|z|^{2d_1-3})$ où Δ est homogène de degré $2d_1 - 3$. On obtient de l'équation $\Phi(f_1) = \Phi W^2$ que

$$\begin{aligned}
&z_1 z_2(z_2 - z_1)R^2S^2T^2\Delta_4 + z_1 z_2(z_2 - \alpha z_1)R^2S^2V^2\Delta_3 \\
&+ z_1(z_2 - z_1)(z_2 - \alpha z_1)R^2T^2V^2\Delta_2 + z_2(z_2 - z_1)(z_2 - \alpha z_1)S^2T^2V^2\Delta_1 \\
&= RSTV[(b z_1^2 z_2 + c z_1 z_2^2)RSTV + 2 z_1 z_2(z_2 - z_1)(z_2 - \alpha z_1)\Delta].
\end{aligned} \tag{9}$$

Cette égalité implique que Δ_1 (resp. Δ_2, Δ_3 et Δ_4) est divisible par $z_1 R$ (resp. $z_2 S$, T et V). On pose $\Delta_1 = z_1 R \Delta_1'$, $\Delta_2 = z_2 S \Delta_2'$, $\Delta_3 = T\Delta_3'$ et $\Delta_4 = V\Delta_4'$. Par définition de Δ_3 et de T on a

$$z_2 S \Delta_2' - z_1 R \Delta_1' = T\Delta_3' \tag{10}$$

$$z_2 S^2 - z_1 R^2 = (z_2 - z_1)T^2. \tag{11}$$

On obtient de ces relations que

$$z_1 R(S\Delta_1' - R\Delta_2') = T[(z_2 - z_1)T\Delta_2' - S\Delta_3']. \tag{12}$$

Par conséquent, $S\Delta_1' - R\Delta_2'$ est divisible par T car $z_1 R$ et T sont premiers entre eux. De même manière, à l'aide de Δ_4 et de V, on montre que $S\Delta_1' - R\Delta_2'$ est divisible par V. Comme T et V sont premiers entre eux, $S\Delta_1' - R\Delta_2'$ est divisible par TV. Mais $\deg(S\Delta_1' - R\Delta_2')$ est plus petit que

$\deg TV$. Donc $S\Delta_1' - R\Delta_2' = 0$. Ceci implique que Δ_1' est divisible par R. On en déduit que $\Delta_1' = \Delta_2' = 0$ car $\deg \Delta_1' < \deg R$. On obtient aussi $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ et $b = c = 0$.

De même manière, avec $\delta = d_1 - 2$, on montre que $d = u = 0$ et ensuite avec $\delta = d_1 - 3$, on montre que $v = 0$.

On choisit δ minimal tel que (8) soit vrai. Alors $\delta \leqslant d_1 - 4$. En utilisant l'équation $\Phi(f_1) = \Phi W^2$, on peut écrire $W = RSTV + \Delta + o(|z|^{d_1-2+\delta})$ où Δ est homogène de degré $d_1 - 2 + \delta$. On montre exactement comme ci-dessus que $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. La minimalité de δ implique que f_1 est homogène. De même manière, on montre que f_2 est homogène. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. BERTELOOT, J.J. LOEB, Une caractérisation des exemples de Lattès de $\mathbb{P}^k$, à paraître dans Bull. S.M.F.

[2] T.C. DINH, Sur les applications de Lattès de $\mathbb{P}^k$, Prépublication, http :// xxx.arXiv.org/abs/math.CV/, à paraître dans J. Maths. Pures Appl.

[3] T.C. DINH et N. SIBONY, Sur les endomorphismes permutables de $\mathbb{P}^k$, Prépublication, http ://xxx.arXiv.org/abs/math.CV/0007017.

[4] A.E. EREMENKO, On some functional equations connected with iteration of rational function, Leningrad. Math. J., 1, No. 4 (1990), 905-919.

[5] P. FATOU, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, J. Math., 2 (1923), 343.

[6] J.E. FORNÆSS, N. SIBONY, Complex dynamics in higher dimension I, Astérique, 222 (1994), 201-213.

[7] G. JULIA, Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 39 (1922), 131-215.

[8] S. LAMY, Alternative de Tits pour Aut$[\mathbb{C}^2]$, à paraître dans J. of Algebra.

[9] G. LEVIN, F. PRZYTYCKI, When do two functions have the same Julia set ?, Proc. Amer. Math. Soc., 125, no. 7 (1997), 2179-2190.

[10] J.F. RITT, Permutable rational functions, Trans. Amer. Math. Soc., 25 (1923), 399-448.

[11] D. RUELLE, Elements of differentiable dynamics and bifucation theory, Academic Press, 1989.

[12] N. SIBONY, Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$, Panoramas et Synthèses, 8 (1999), 97-185.

[13] A.P. VESELOV, Integrable mappings and Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR 292 (1987), 1289-1291; English transl. in Soviet Math. Dokl., 35 (1987).

Manuscrit reçu le 2 novembre 1999,
révisé le 18 mai 2000,
accepté le 16 novembre 2000.

Tien-Cuong DINH,
Université Paris-Sud
Bâtiment 425 Mathématique
UMR 8628
91405 Orsay cedex (France).
TienCuong.Dinh@math.u-psud.fr