ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Dietrich HÄFNER

**Complétude asymptotique pour l'équation des ondes dans une classe d'espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats**

Tome 51, n° 3 (2001), p. 779-833.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_3_779_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**51**, 3 (2001), 779–833

# COMPLÉTUDE ASYMPTOTIQUE POUR L'ÉQUATION DES ONDES DANS UNE CLASSE D'ESPACES-TEMPS STATIONNAIRES ET ASYMPTOTIQUEMENT PLATS

**par Dietrich HÄFNER**

## Table des matières.



*Mots clés :* Théorie de la diffusion – Espaces-temps stationnaires – Équation des ondes – Complétude asymptotique – Vitesse asymptotique.
*Classification math :* 35L05 – 35P25 – 35Q75 – 58J45 – 58J50.

## 1. Introduction.

Dans cet article, nous démontrons la complétude asymptotique pour l'équation des ondes dans des espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats.

Les premiers résultats de complétude asymptotique pour des champs scalaires en relativité générale ont été établis pour la métrique de Schwarzschild : par Dimock pour l'équation des ondes en 1985 (voir [6]), puis par Bachelot pour l'équation de Klein-Gordon en 1994 (voir [3]). Grâce à la symétrie sphérique de la métrique de Schwarzschild, on peut se ramener à un problème en une dimension d'espace. La complétude asymptotique pour une équation de type Schrödinger est alors établie par une méthode de perturbation à trace, la complétude asymptotique pour l'équation des ondes suit par le principe d'invariance. L'équation des ondes dans la métrique de Schwarzschild est à l'infini une perturbation en $r^{-2}$ de l'équation des ondes en espace-temps plat (coordonnées de Regge-Wheeler) ; cette décroissance semble être typique dans des situations où toute la matière de l'univers se trouve dans une région finie de l'espace. Des méthodes de perturbation à trace ne sont pas adaptées à des situations avec moins de symétrie que la métrique de Schwarzschild, puisque $r^{-2}\chi(\Delta)$ ($\chi$ fonction régulière, convenablement choisie) est à trace seulement en dimension 1.

Des situations géométriques plus compliquées sont considérées dans [4]. Les auteurs développent une théorie de la diffusion pour l'équation des ondes sur des variétés riemanniennes non compactes. Ils utilisent les résultats de [7] où on trouve la construction d'un opérateur conjugué pour l'opérateur de Laplace-Beltrami pour différents comportements de la métrique dans les bouts de la variété. Le passage d'une équation de Schrödinger à l'équation des ondes est établi par l'observation qu'une théorie de Mourre pour un opérateur $L^2$ entraîne une théorie de Mourre pour l'opérateur $L$. La complétude asymptotique est alors démontrée par un principe d'absorption limite.

Le point commun des travaux cités consiste dans le fait qu'ils considèrent des espaces-temps statiques. Dans ces espaces-temps, l'équation des ondes peut être décrite par une équation du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} i\partial_t f & = Lf, \\ f|_{t=0} & = (f_0, f_1), \end{cases}$$

où

$$L := \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Dans des espaces-temps stationnaires, on ne peut pas en général diagonaliser $L$. En effet, $L$ possède la forme

$$L = \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -a^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b & b \\ b & -b \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad [b, a] \neq 0.$$

Nous considérons dans cet article des métriques *stationnaires* et *asymptotiquement plates*, i.e. $a \to -\Delta, b \to 0$ dans un certain sens. Notre démonstration de la complétude asymptotique est basée sur une estimation de Mourre et des estimations de propagation.

L'article est organisé de la façon suivante : après avoir décrit les espaces-temps considérés, nous montrons comment on peut décrire l'évolution par un groupe unitaire. Nous exigeons d'abord seulement une décroissance très faible vers la métrique plate. Ceci permet d'établir l'estimation de Mourre, des estimations de propagation et finalement la construction de la vitesse asymptotique $P^+$. Nous décrivons ensuite le spectre de l'observable $P^+$. Pour une décroissance d'ordre $O(< x >^{-1-\epsilon})$, nous démontrons finalement la complétude asymptotique.

## 2. Une classe d'espaces-temps stationnaires.

Dans cette section, nous décrivons l'espace-temps et l'équation des ondes associée.

### 2.1. L'espace-temps.

On se place sur une variété lorentzienne $(\mathcal{M}, g)$ de dimension $n + 1$ orientable et orientable en temps, globalement hyperbolique, stationnaire et asymptotiquement plate. Nous choisissons la signature $(+, -, \ldots, -)$ pour la métrique lorentzienne $g$. Un espace-temps est *globalement hyperbolique* s'il existe une hypersurface $\Sigma$ de type espace telle que toute courbe de type temps inextensible rencontre $\Sigma$ en un point et un seul. $\Sigma$ est appelée une *surface de Cauchy*. Un espace-temps *stationnaire* est un espace-temps avec un champ de Killing global $X$ de type temps. Par un théorème de Geroch, un espace-temps globalement hyperbolique est homéomorphe à $\mathbb{R} \times \Sigma$, $\Sigma$ surface de Cauchy (voir [10]). Dans le cas d'un *espace-temps globalement hyperbolique et stationnaire* pour lequel le champ $X$ est complet, l'homéomorphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathbb{R} \times \Sigma$ peut être décrit d'une façon particulièrement agréable. Soit $\Phi_t$ le flot du champ $X$. Alors l'homéomorphisme est donné par

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \Sigma &\to \mathcal{M} \\ (t,p) &\mapsto \Phi_t(p). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nous considérons la même représentation de cet espace-temps que dans [14] :

Si l'on introduit des coordonnées locales $x^i$ sur $\Sigma$, on obtient des coordonnées sur $\mathcal{M}$ par l'homéomorphisme (2.1). Comme on emploie le paramètre de Killing, la métrique est dans ces coordonnées indépendante de $t$. Remarquons aussi que dans ces coordonnées, le champ $X$ est égal à $\frac{\partial}{\partial t}$. Soit ${}^n g$ la métrique riemannienne induite par $g$ sur $\Sigma$. Soit $N(\Sigma)$ le vecteur normal dirigé vers le futur sur $\Sigma$. Le champ de Killing s'écrit sur $\Sigma$ sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \equiv\right) X = \alpha N(\Sigma) + \beta$$

avec $\alpha$ une fonction scalaire et $\beta$ un champ de vecteurs sur $\Sigma$. Comme $X$ est de type temps, on a

$$\alpha > 0, \quad \alpha^2 -{}^n g(\beta,\beta) > 0.$$

Dans les coordonnées $(t, x^i)$, la métrique s'écrit sous la forme

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \alpha^2 - \beta^i\beta_i & -\beta_j \\ -\beta_i & -({}^n g)_{ij} \end{pmatrix}.$$

Ici et pour toute la suite, les indices latins vont de 1 à $n$ et les indices grecs de 0 à $n$. $\eta_{\mu\nu}$ désigne la métrique de Minkowski et les indices en haut désignent la métrique duale.

Nous considérons le cas $\Sigma = \mathbb{R}^n$ et nous introduisons les conditions suivantes qui signifient que l'espace-temps $\mathcal{M}$ est asymptotiquement plat ($< x > := \sqrt{x^2+1}$) :

*Condition générale.* — Il existe des coordonnées $x$ sur $\Sigma = \mathbb{R}^n$ tel que, si l'on note x=$(t,x)$,

$$g = \sum_{\mu,\nu=0}^{n} g_{\mu\nu}(\mathrm{x}) d\mathrm{x}^\mu d\mathrm{x}^\nu \quad \text{on a} \tag{2.2}$$

$$g_{\mu\nu} \quad \text{est indépendant de} \quad t, \tag{2.3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g_{00}(x) > 0, \tag{2.4}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad -\sum_{ij} g_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \tag{2.5}$$

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

$$\partial_x^\alpha (g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}) \in O(< x >^{-\epsilon-|\alpha|}). \tag{2.6}$$

Ces conditions sont également vérifiées pour la métrique duale et les estimations sont uniformes :

LEMME 2.1. — *Dans les coordonnées ci-dessus, on a :*

$$g^{\mu\nu} \quad \textit{est indépendant de} \quad t, \tag{2.7}$$

$$\exists C_1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad g^{00}(x) \geqslant C_1, \tag{2.8}$$

$$\exists C_2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ -\sum_{jk} g^{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant C_2 \sum_j |\xi_j|^2, \tag{2.9}$$

$$\exists \epsilon > 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

$$\partial_x^\alpha (g^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}) \in O(< x >^{-\epsilon-|\alpha|}). \tag{2.10}$$

*Si l'on note $\hat{g}_{kl}$ l'inverse de $g^{kl}$, alors on obtient*

$$\partial_x^\alpha (\hat{g}_{kl} + \delta_{kl}) \in O(< x >^{-\epsilon-|\alpha|}). \tag{2.11}$$

*Démonstration.* — Nous posons

$$\begin{aligned} \gamma &= g_{00}, \\ {}^t b &= (g_{01}, \ldots, g_{0n+1}), \\ A &= (g_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}. \end{aligned}$$

Alors

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & {}^t b \\ b & A \end{pmatrix},$$
$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \delta & -\delta^t(A^{-1}b) \\ -\delta(A^{-1}b) & A^{-1} + \delta A^{-1}b^t(A^{-1}b) \end{pmatrix}$$

avec $\delta = \frac{1}{\gamma - <b, A^{-1}b>}$. $\delta$ est positif, $A, A^{-1}$ et $A^{-1} + \delta A^{-1}b^t(A^{-1}b)$ ont toutes la signature $(-, ..., -)$. Si $(g_{\mu\nu})$ est asymptotiquement plate, alors $(g^{\mu\nu})$ l'est aussi et les estimations sont uniformes en dehors d'une boule assez grande et à l'intérieur de la boule à cause de la compacité de la boule. □

## 2.2. Équation des ondes associée.

Posons $|g| = |\det g|$. L'opérateur des ondes associé à $g$ est donné par

$$\Box_g := |g|^{-\frac{1}{2}} \sum_{\mu,\nu} \partial_\mu |g|^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} \partial_\nu. \tag{2.12}$$

L'équation des ondes

$$\begin{cases} \Box_g u &= 0, \\ u|_{t=0} &= u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} &= u_1 \end{cases} \tag{2.13}$$

s'écrit en coordonnées de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - i\tilde{b}\partial_t u + \tilde{a}u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \end{cases} \tag{2.14}$$

avec

$$\tilde{a} = \frac{1}{g^{00}|g|^{\frac{1}{2}}} \sum_{jk} \partial_j |g|^{\frac{1}{2}} g^{jk} \partial_k, \tag{2.15}$$

$$\tilde{b} = \frac{i}{g^{00}|g|^{\frac{1}{2}}} \sum_k \partial_k g^{0k} |g|^{\frac{1}{2}} + \frac{i}{g^{00}} \sum_k g^{0k} \partial_k. \tag{2.16}$$

Soit $\tilde{\mathcal{H}} := L^2(\mathbb{R}^n, |g|^{\frac{1}{2}} g^{00} dx)$, $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Considérons maintenant la transformation unitaire

$$U : \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{H}} & \rightarrow & \mathcal{H} \\ f & \mapsto & \sqrt{g^{00}}|g|^{\frac{1}{4}} f. \end{array}$$

Posons $a := U\tilde{a}U^{-1}, b := U\tilde{b}U^{-1}$. On obtient

$$a = \frac{1}{\sqrt{g^{00}}|g|^{\frac{1}{4}}} \sum_{jk} \partial_j |g|^{\frac{1}{2}} g^{jk} \partial_k \frac{1}{\sqrt{g^{00}}|g|^{\frac{1}{4}}}, \tag{2.17}$$

$$b = i \sum_k \partial_k \frac{g^{0k}}{g^{00}} + \frac{g^{0k}}{g^{00}} \partial_k. \tag{2.18}$$

On expliquera dans le paragraphe suivant la réalisation autoadjointe de $a$ et $b$.

### 2.3. Le cadre abstrait.

Considérons alors une équation des ondes abstraite sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de la forme suivante :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - ib\partial_t u + au = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1. \end{cases} \tag{2.19}$$

Nous supposons pour la suite :

$$a, b \quad \text{autoadjoints}, \tag{2.20}$$

$$a \geqslant 0, \quad 0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(a), \tag{2.21}$$

$$D(b) \supset D(a^{\frac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad \forall u \in D(a^{\frac{1}{2}}), \quad ||bu|| \leqslant C(||a^{\frac{1}{2}}u|| + ||u||). \tag{2.22}$$

On introduit l'échelle d'espaces de Sobolev abstraits suivante :

$\mathcal{H}^2 := D(a)$, $\mathcal{H}^1 := D(a^{\frac{1}{2}})$, $\mathcal{H}^0 := \mathcal{H}$. Sur $\mathcal{H}^1$ nous introduisons la norme $||u||_1^2 := (au, u)$ (comme $0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(a)$ il s'agit en effet d'une norme). Soit $\mathcal{H}_0^1$ le complété de $\mathcal{H}^1$ pour cette norme. Pour $f = (f_0, f_1) \in \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}$, nous posons

$$||f||_{\mathcal{E}}^2 = ||f_1||^2 + (af_0, f_0) \quad \text{(norme d'énergie)}$$

et nous définissons l'espace d'énergie $\mathcal{E} = \mathcal{H}_0^1 \oplus \mathcal{H}$ comme le complété de $\mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}$ pour cette norme. Remarquons que la norme d'énergie est formellement conservée par l'évolution

$$\begin{aligned} \partial_t(||\partial_t u||^2 + (au, u)) &= 2\mathrm{Re}(\partial_t u, \partial_t^2 u) + 2\mathrm{Re}(au, \partial_t u) \\ &= 2\mathrm{Re}(\partial_t u, ib\partial_t u) = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Nous réécrivons l'équation des ondes comme un système de premier ordre

$$\begin{cases} i\partial_t f = Rf \\ f|_{t=0} = (u_0, u_1) \end{cases} \tag{2.24}$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -ia & -b \end{pmatrix}.$$

LEMME 2.2. — *$R$ est autoadjoint sur $\mathcal{E}$ avec domaine $D(R) = \mathcal{H}^2 \oplus \mathcal{H}^1$.*

*Démonstration.* — $R$ est clairement symétrique. Il reste alors à démontrer que $R$ est fermé et que $\mathrm{Im}(R \pm i) = \mathcal{E}$.

$R$ fermé : Soit $f^m \in D(R)$, $\quad f^m \to f$, $\quad Rf^m \to g$. Alors

$$\begin{array}{rcll} f_0^m & \to & f_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_0^1, & f_1^m \to f_1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}, \\ if_1^m & \to & g_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_0^1, & \text{i.e.} \quad ia^{\frac{1}{2}} f_1^m - a^{\frac{1}{2}} g_0 \to 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}, \\ -iaf_0^m - bf_1^m & \to & g_1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}. & \end{array}$$

Comme $f_1^m \to f_1$, $\quad ia^{\frac{1}{2}} f_1^m \to a^{\frac{1}{2}} g_0$ et $a^{\frac{1}{2}}$ est fermé (car autoadjoint), on a $f_1 \in D(a^{\frac{1}{2}})$, $if_1 = g_0$. Comme $(a+1)^{\frac{1}{2}}$ domine $b$, on a

$$bf_1^m \to bf_1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H} \quad \text{et alors} \quad -iaf_0^m \to g_1 + bf_1 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}.$$

En utilisant que $a^{\frac{1}{2}} f_0^m \in D(a^{\frac{1}{2}})$, ceci montre (comme $a^{\frac{1}{2}}$ est autoadjoint) que

$$a^{\frac{1}{2}} f_0 \in D(a^{\frac{1}{2}}), -iaf_0 = g_1 + bf_1, \quad \text{i.e.} \quad (f_0, f_1) \in D(R), \quad Rf = g.$$

$\mathrm{Im}(R \pm i) = \mathcal{E}$ : Il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}(R \pm i)$ dense dans $\mathcal{E}$. En effet si ceci est vrai, alors

$$\begin{aligned} &\forall g \in \mathcal{E}, \quad \exists f^m \in D(R) \quad g^m := (R+i)f^m \to g \\ &\Rightarrow \mathrm{Im}((R+i)(f^k - f^m), f^k - f^m) = \|f^k - f^m\|^2 \leqslant \|f^k - f^m\| \|g^k - g^m\|, \end{aligned}$$

et donc $f^m$ est de Cauchy dans $\mathcal{E}$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(R+i)$ est dense, il suffit de démontrer que $\mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H} \subset \mathrm{Im}(R+i)$. Nous devons résoudre

$$\begin{aligned} &\begin{cases} if_1 + if_0 = g_0 \\ -iaf_0 - bf_1 + if_1 = g_1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} f_1 = -ig_0 - f_0 \\ af_0 + ibf_0 + f_0 = ig_1 - ig_0 + bg_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme $g_0 \in \mathcal{H}^1$, $ig_1 - ig_0 + bg_0 \in \mathcal{H}$. La deuxième équation peut être résolue par Lax-Milgram. On obtient une solution $f_0 \in \mathcal{H}^2$. Alors $f_1 \in \mathcal{H}^1$, i.e. $(f_0, f_1) \in D(R)$. $\square$

*Transformation unitaire.* — Il est utile d'introduire l'application unitaire suivante :

$$\begin{aligned}
U(a) \quad &: \quad \mathcal{E} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \\
U(a) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} & i \\ a^{\frac{1}{2}} & -i \end{pmatrix}, \\
U^{-1}(a) = U^*(a) \quad &= \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a^{-\frac{1}{2}} & a^{-\frac{1}{2}} \\ -i & i \end{pmatrix}, \\
L := U(a)RU^{-1}(a) \quad &= \quad \begin{pmatrix} a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & -a^{\frac{1}{2}} - \frac{b}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.1. — $D(U(a)RU^{-1}(a)) = U(a)D(R) = \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1$.

*Démonstration.* — On a

$$\begin{aligned}
D(U(a)RU^{-1}(a)) &= \{(f_0, f_1) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} | U^{-1}(a)(f_0, f_1) \in D(R)\} \\
&= \{(f_0, f_1) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} | (a^{-\frac{1}{2}}(f_0 + f_1), i(-f_0 + f_1)) \in D(R)\} \\
&= \mathcal{H}^1 \oplus \mathcal{H}^1,
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $f_0 + f_1, f_0 - f_1 \in \mathcal{H}^1$ entraîne $f_0, f_1 \in \mathcal{H}^1$. □

L'évolution est décrite par un groupe unitaire $e^{-itL}$.

Nous allons maintenant démontrer que l'équation des ondes décrite dans le paragraphe 2.2 entre dans ce cadre abstrait. Ici et par la suite, nous allons utiliser le calcul pseudodifférentiel et en particulier la quantification de Weyl, voir Appendice B. On vérifie aisément que les symboles des opérateurs introduits dans le paragraphe 2.2 vérifient les conditions suivantes que nous allons imposer pour toute la suite :

$$a(x, \xi) - \xi^2 \in S^{2,-\epsilon}, \tag{2.25}$$

$$b(x, \xi) \in S^{1,-\epsilon}. \tag{2.26}$$

LEMME 2.3. — *Les deux opérateurs $a^w, b^w$ vérifient les conditions (2.20)-(2.22). En particulier $a^w$ est autoadjoint avec domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ et $b^w$ est essentiellement autoadjoint avec domaine $H^1(\mathbb{R}^n)$.*

*Démonstration..* — $a^w$ est autoadjoint avec domaine $H^2(\mathbb{R}^n)$ puisqu'il est un opérateur elliptique du deuxième ordre. $a^w \geqslant 0, 0 \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(a^w)$ par la condition (2.9). Pour démontrer que $b^w$ est essentiellement autoadjoint sur

$H^1(\mathbb{R}^n) = D((a^w+1)^{\frac{1}{2}})$, on utilise le théorème de Nelson [16, Theorem X.37] :

$(a^w + 1)^{\frac{1}{2}}$ est autoadjoint sur $H^1(\mathbb{R}^n)$. Grâce au lemme 2.1, $b^w$ est bien défini sur $H^1(\mathbb{R}^n)$ et on a

$$||b^w u|| \leqslant C||(a^w + 1)^{\frac{1}{2}} u||, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Comme opérateur agissant sur $\mathcal{S}$,

$$[(a^w + 1)^{\frac{1}{2}}, b^w] = d^w$$

avec $d \in S^{1,0}$, ce qui donne

$$|(b^w\phi, (a^w + 1)^{\frac{1}{2}}\phi) - ((a^w + 1)^{\frac{1}{2}}\phi, b^w\phi)| \leqslant ||(a^w + 1)^{\frac{1}{4}}\phi||$$

d'abord pour $\phi \in \mathcal{S}$ et puis pour $\phi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ par densité. □

## 2.4. Absence de valeurs propres.

À partir de maintenant, nous allons renforcer la condition de décroissance pour la métrique

$$(2.27) \qquad \exists \delta > \frac{1}{2}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad \partial_x^\alpha g^{0k} \in O(< x >^{-\delta-|\alpha|}).$$

THÉORÈME 2.1. — *Sous la condition supplémentaire (2.27), L ne possède pas de valeurs propres.*

*Démonstration.* — On démontre l'absence de valeurs propres pour $R$. Supposons par l'absurde que $R$ possède une valeur propre $\lambda$. Ceci est équivalent à

$$\exists (f_0, f_1) \in D(R) \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} f_1 = -i\lambda f_0 \\ af_0 - \lambda b f_0 - \lambda^2 f_0 = 0, \end{cases}$$
$$\text{i.e.} \quad f_0 \in H^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad af_0 - \lambda b f_0 - \lambda^2 f_0 = 0,$$

i.e. $\lambda^2$ est valeur propre de l'opérateur $a - \lambda b$. On a

$$\begin{aligned} a - \lambda b = & \sum_{jk} \partial_j \frac{g^{jk}}{g^{00}} \partial_k - i\lambda \sum_k \frac{g^{0k}}{g^{00}} \partial_k \\ & - i\lambda \sum_k \partial_k \frac{g^{0k}}{g^{00}} + \sum_{kj} \frac{1}{\sqrt{g^{00}}|g|^{\frac{1}{4}}} \partial_j \left( |g|^{\frac{1}{2}} g^{jk} \partial_k \left( \frac{1}{\sqrt{g^{00}}|g|^{\frac{1}{4}}} \right) \right). \end{aligned}$$

On utilise maintenant [13, Theorem 1.2]. La propriété de prolongement unique est vérifiée. Ceci suit par exemple du théorème de prolongement unique de [2]. Avec les notations de [13], on a

$$\begin{aligned}
a_{kl}(x) &= -\frac{g^{kl}}{g^{00}},\\
b_l(x) &= \lambda \sum_k \hat{g}_{kl} g^{0k},\\
c(x) &= \sum_{kl} \frac{1}{\sqrt{g^{00}}|g|^{\frac14}} \partial_k \left( |g|^{\frac12} g^{kl} \partial_l \left( \frac{1}{\sqrt{g^{00}}|g|^{\frac14}} \right)\right) + \sum_{kl} g^{0k} \hat{g}_{kl} g^{0l}.
\end{aligned}$$

Les conditions de [13, Theorem 1.2] sont alors vérifiées grâce à (2.7)-(2.11) et (2.27). Il s'ensuit $\lambda = 0$. Mais l'opérateur $a$ n'a pas la valeur propre 0 en vertu de (2.9). □

## 3. Estimation de Mourre.

Dans cette section, nous allons établir une estimation de Mourre pour $L$. On démontre d'abord une estimation de Mourre pour $a$, puis pour $a^{\frac12}$ et finalement pour $L$.

### 3.1. Rappels.

Nous rappelons les conditions de Mourre. Soient $H, A$ deux opérateurs autoadjoints. On dit que le couple $(H, A)$ vérifie les conditions de Mourre si

(M1′) $D(A) \cap D(H)$ est dense dans $D(H)$,

(M2′) $e^{isA}$ préserve $D(H)$, $\sup_{|s|\leqslant 1} ||He^{isA}u|| < \infty, \quad \forall u \in D(H)$,

(M3′) $[H, iA]$ définie comme forme quadratique sur $D(H) \cap D(A)$ est bornée inférieurement, fermable et s'étend en un opérateur borné de $D(H)$ dans $\mathcal{H}$ :

$$|[H, iA](u, v)| \leqslant C||Hu||||v||, \quad \forall u, v \in D(H) \cap D(A).$$

Il a été remarqué dans [8] que le théorème du viriel reste valable sous les conditions

(M1) $e^{isA}$ préserve $D(H)$,

(M2) $[H, iA]$ définie comme forme quadratique sur $D(H) \cap D(A)$ s'étend en un opérateur borné de $D(H)$ dans $\mathcal{H}$ :

$$|[H, iA](u, v)| \leqslant C||Hu||||v||, \quad \forall u, v \in D(H) \cap D(A).$$

(M1′), (M2′) et (M1) sont en effet même équivalentes.

Nous rappelons également la condition $H \in C^k(A)$ $(k \geqslant 1)$ (voir [1]). Un opérateur borné $B$ est de classe $C^k(A, \mathcal{H})$ si et seulement si

$$\text{(ABG) } \mathbb{R} \ni s \to e^{isA} B e^{-isA} \text{ est } C^k \text{ pour la topologie forte de } B(\mathcal{H}).$$

La condition $H \in C^k(A)$ dit qu'il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H)$ tel que $(z - H)^{-1} \in C^k(A, \mathcal{H})$.

(M1)-(M2) impliquent $H \in C^1(A)$ et le théorème du viriel est vrai sous la seule condition $H \in C^1(A)$ (voir [1]).

### 3.2. Estimation de Mourre pour $a$.

On établit d'abord une estimation de Mourre pour $a$. Soit

$$\begin{aligned} c &:= \frac{1}{2}(< x, D > + < D, x >) \quad \left(D = \frac{1}{i}\nabla\right) \quad \text{et} \\ D(c) &= \{\Phi \in L^2(\mathbb{R}^n) | c\Phi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

L'opérateur $c$ est le générateur infinitésimal du groupe unitaire $T_t = e^{itc}$ défini par

$$T_t\Phi(x) := e^{\frac{nt}{2}} \Phi(e^t x), \quad \Phi \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Remarquons d'abord

LEMME 3.1. — *$C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^m) \cap D(c)$,* $\quad \forall m, s \in \mathbb{N}$.

*Démonstration.* — Soit $\phi \in C_0^\infty(\{|x| < 1\}), \phi \geqslant 0, \int \phi = 1$. Soit en plus $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $||\partial_x^\alpha \chi||_\infty \leqslant 1, \quad \forall |\alpha| \leqslant s$ et $\chi = 1$ sur $\{|x| < 1\}$. On pose

$$\begin{aligned} F_n &: H^s \cap D(c) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^m), \\ u &\mapsto \chi\left(\frac{x}{n}\right) \hat{\phi}\left(\frac{D}{n}\right) u. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} &1) \quad F_n \to \mathbb{1} \quad \text{fortement dans} \quad H^s, \\ &2) \quad F_n \to \mathbb{1} \quad \text{fortement dans} \quad D(c). \end{aligned}$$

1) En effet,

$$F_n \to \mathbb{1} \quad \text{fortement dans} \quad L^2 \quad \text{et}$$
$$[<D>^s, F_n] <D>^{-s+1} \in O(n^{-1})$$

par le calcul pseudodifférentiel.

2) On a

$$\begin{aligned} [c, F_n] &= e_n^w + O(n^{-1}) \quad \text{avec} \\ e(x,\xi)_n &= \chi\left(\frac{x}{n}\right) \frac{\xi}{n} \nabla_\xi \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{n}\right) - \frac{x}{n} \nabla_x \chi\left(\frac{x}{n}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{n}\right). \end{aligned}$$

Clairement,

$$e_n^w \to 0 \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\mathbb{R}^m),$$

ce qui termine la démonstration. □

LEMME 3.2. — i) *Le couple* $(a^w, c)$ *vérifie les conditions de Mourre.*

ii) *Soit* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. *Alors il existe un opérateur compact* $K$ *tel que*

$$\chi(a^w)[ia^w, c]\chi(a^w) = 2\chi(a^w)a^w\chi(a^w) + K.$$

*Démonstration.* — i) $e^{isc}$ préserve $H^2(\mathbb{R}^n)$ (voir par exemple [15]), la condition (M1) est alors vérifiée. Comme opérateur agissant sur $\mathcal{S}$, on a

$$[ia^w, c] = d^w \quad \text{avec} \quad d(x,\xi) = \nabla_\xi a(x,\xi)\xi - \nabla_x a(x,\xi)x,$$

ce qui donne l'estimation souhaitée par un argument de densité en utilisant le lemme 3.1.

ii) Par la proposition B.1 et le théorème B.2 on obtient en utilisant (2.25)

$$\begin{aligned} \chi(a^w)[ia^w, c]\chi(a^w) &= (\chi(a(x,\xi))(\nabla_\xi a(x,\xi)\xi - \nabla_x a(x,\xi)\xi)\chi(a(x,\xi)))^w \\ &\quad + k_1^w \\ &= 2\chi(a^w)a^w\chi(a^w) + k^w, \end{aligned}$$

où $k_1^w$ et $k^w$ sont des opérateurs compacts. Ceci montre ii). □

### 3.3. Estimation de Mourre pour $a^{\frac{1}{2}}$.

Dans ce paragraphe, nous établissons une estimation de Mourre pour la racine de $a$. Pour $\chi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$, on considère toujours la fonction $\mathbb{R}^+ \ni \lambda \to \chi(\lambda^{\frac{1}{2}})$ comme prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^-$. De cette façon, l'expression $\chi(a(x,\xi)^{\frac{1}{2}})$ est bien définie, même si $a(x,\xi)$ n'est pas nécessairement positif.

Soient $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ ou $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]-\infty,0[)$, $\chi\tilde{\chi} = \chi$. Le lemme 3.2 entraîne en particulier que $a^w \in C^1(c)$ et $\chi(a^w) : D(c) \to D(c)$ (voir [1]). Alors les opérateurs $\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})c\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})$ resp. $\tilde{\chi}(-(a^w)^{\frac{1}{2}})c\tilde{\chi}(-(a^w)^{\frac{1}{2}})$ sont bien définis sur $D(c)$. Comme opérateurs symétriques définis de manière dense, ils sont fermables. On note $c_{\tilde{\chi}}$ la fermeture. Comme $a^w \in C^1(c)$ on a $\tilde{\chi}(a^w) \in C^1(c\,;\mathcal{H})$ par [1, Theorem 6.2.5] et donc $c_{\tilde{\chi}}$ autoadjoint par [1, Lemma 7.2.15].

LEMME 3.3. — i) *Le couple* $((a^w)^{\frac{1}{2}}, c_{\tilde{\chi}})$ *vérifie les conditions de Mourre.*

ii) $\chi(a^w)[i(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_{\tilde{\chi}}]\chi(a^w) = \chi(a^w)(a^w)^{\frac{1}{2}}\chi(a^w) + k^w$ *avec un opérateur* $k^w$ *compact.*

*Démonstration.* — On ne traite que le cas $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$, la démonstration de l'autre cas étant analogue.

i) Vérifions (M1). Il s'agit de démontrer que $e^{isc_{\tilde{\chi}}}$ préserve $D((a^w)^{\frac{1}{2}})$. Soit $\chi_1 = 1 + \chi_2$ avec $\chi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\chi_2 = -1$ sur $\{|x| \leqslant R\}$. Montrons d'abord que pour $R$ suffisamment grand on a

$$\chi_1(a^w)e^{isc_{\tilde{\chi}}} = \chi_1(a^w). \tag{3.1}$$

Le lemme 3.2 entraîne

$$\chi_1(a^w) : D(c) \to D(c).$$

Soit $u \in \mathcal{H}$ et $v = \chi_1(a^w)u$. Montrons que $e^{isc_{\tilde{\chi}}}v = v$. Pour ceci, posons

$$v_\epsilon = \chi_1(a^w)(1 + i\epsilon c)^{-1}u \in D(c).$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_s e^{isc_{\tilde{\chi}}} v_\epsilon &= e^{isc_{\tilde{\chi}}} i c_{\tilde{\chi}} v_\epsilon = 0 \quad (R \text{ suffisamment grand}) \\ &\Rightarrow e^{isc_{\tilde{\chi}}} v_\epsilon = v_\epsilon, \\ v_\epsilon \to v \quad &\text{dans} \quad \mathcal{H} \quad \text{entraîne} \quad e^{isc_{\tilde{\chi}}} v = v. \end{aligned}$$

On a alors $e^{isc_{\tilde{\chi}}}\chi_1(a^w) = \chi_1(a^w)$ et donc (3.1) par dualité. Par multiplication avec des fonctions caractéristiques, on obtient pour $R$ suffisamment grand,

$$\mathbb{1}_{\{|\lambda| \geqslant R\}}(a^w)e^{isc_{\tilde{\chi}}} = \mathbb{1}_{\{|\lambda| \geqslant R\}}(a^w).$$

Pour voir que $e^{isc_{\tilde{\chi}}}$ préserve $D((a^w)^{\frac{1}{2}})$, il suffit d'écrire

$$(a^w)^{\frac{1}{2}} e^{isc_{\tilde{\chi}}} = (a^w)^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{|\lambda| \geqslant R\}}(a^w) + (a^w)^{\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{\{|\lambda| \leqslant R\}}(a^w) e^{isc_{\tilde{\chi}}}.$$

Vérifions (M2). Soit $\bar{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ tel que $\tilde{\chi}\bar{\chi} = \tilde{\chi}$. Alors

$$\begin{aligned} [(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_{\tilde{\chi}}] &= \tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})[\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})(a^w)^{\frac{1}{2}} \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}, c]\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}), \\ \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})(a^w)^{\frac{1}{2}} \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) &\in \Psi^{-\infty,0}, \quad \text{donc} \\ [(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_{\tilde{\chi}}] &\in \Psi^{-\infty,0}. \end{aligned}$$

$[(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_{\tilde{\chi}}]$ possède alors une extension à un opérateur borné, en particulier (M2) est vérifiée.

ii) On a

$$\chi(a^w)[i(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_{\tilde{\chi}}]\chi(a^w) = \chi(a^w)[i\tilde{\chi}(a^w)(a^w)^{\frac{1}{2}} \tilde{\chi}(a^w), c]\chi(a^w). \tag{3.2}$$

Soit $h(\lambda) = \tilde{\chi}(\lambda)\sqrt{\lambda}\tilde{\chi}(\lambda)$. On a

$$\tilde{\chi}(a^w)(a^w)^{\frac{1}{2}} \tilde{\chi}(a^w) = (h(a))^w + f^w$$

avec $f \in S^{-1,-1}$ en vertu du théorème B.2. $[f^w, c]$ est donc compact par la proposition B.1 et le lemme B.3. Par le lemme C.1, on a $[i(h(a))^w, c] = e^w$ avec

$$e(x,\xi) = h'(a(x,\xi))(\nabla_\xi a(x,\xi)\xi - \nabla_x a(x,\xi)x).$$

Ceci entraîne grâce à (2.25), (3.2), la proposition B.1, le théorème B.2 et le lemme B.3

$$\chi(a^w)[i(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_{\tilde{\chi}}]\chi(a^w) = (\chi(a)e\chi(a))^w + k_1^w$$

avec un opérateur $k_1^w$ compact. On a

$$\begin{aligned} &(\chi(a)e\chi(a))(x,\xi) \\ &\qquad = \chi(a(x,\xi))\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}(x,\xi)(\nabla_\xi a(x,\xi)\xi - \nabla_x a(x,\xi)x)\chi(a(x,\xi)) \end{aligned}$$

puisque $\tilde{\chi} = 1$ sur supp$\chi$. Maintenant on utilise le lemme précédent pour $a(x,\xi)$, i.e.

$$\begin{aligned} &\chi(a(x,\xi))(\nabla_\xi a(x,\xi)\xi - \nabla_x a(x,\xi)x)\chi(a(x,\xi)) \\ &\qquad = 2\chi(a(x,\xi))a(x,\xi)\chi(a(x,\xi)) + k_2(x,\xi) \end{aligned}$$

et $k_2^w$ compact. Pour obtenir le résultat, on applique de nouveau la proposition B.1, le théorème B.2 et le lemme B.3. □

### 3.4. Estimation de Mourre pour $L$.

Avec cette préparation, nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal de cette section. Soit

$$L_0 = \begin{pmatrix} (a^w)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -(a^w)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad L_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b^w & b^w \\ b^w & -b^w \end{pmatrix}$$

et $D(L) = D(L_0) = D(L_1) = H^1 \oplus H^1$. $L_0, L$ sont autoadjoints avec ce domaine, $L_1$ est essentiellement autoadjoint. Pour $\chi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ ou $\chi \in C_0^\infty(]-\infty,0[)$, nous posons

$$C_\chi = \begin{pmatrix} c_\chi & 0 \\ 0 & c_\chi \end{pmatrix}, \quad D(C_\chi) = D(c_\chi) \oplus D(c_\chi).$$

Théorème 3.1

(i) *Pour tout* $\chi \in C_0^\infty(]0,\infty[) \cup C_0^\infty(]-\infty,0[)$, *on a :* $L \in C^2(C_\chi)$.

(ii) *Pour tout* $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[) \cup C_0^\infty(]-\infty,0[)$ *avec* $\chi\tilde{\chi} = \chi$, *on a :*

$$\chi(L)[iL, C_{\tilde{\chi}}]\chi(L) = \chi(L)L\chi(L) + K \quad \textit{avec} \quad K \quad \textit{compact.} \tag{3.3}$$

(iii) *Pour tout* $\lambda > 0$ *et* $\delta > 0$, *on peut trouver un voisinage ouvert* $\Delta$ *de* $\lambda$ *t.q. pour tout* $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[), \tilde{\chi} = 1$ *sur* $\Delta$ :

$$\mathbb{1}_\Delta(L)[iL, C_{\tilde{\chi}}]\mathbb{1}_\Delta(L) \geqslant (\lambda - \delta)\mathbb{1}_\Delta(L). \tag{3.4}$$

*On a une propriété analogue pour* $\lambda < 0$.

*Démonstration.* — On ne démontre le théorème que pour le cas que $\chi, \tilde{\chi}$ sont supportées dans $]0,\infty[$, la démonstration de l'autre cas étant analogue.

i) On montre d'abord que le couple $(L, C_\chi)$ vérifie les conditions de Mourre :

(M1) $e^{isC_\chi}$ préserve $D(L)$ puisque $e^{isc_\chi}$ préserve $H^1$.

(M2) Comme opérateur agissant sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$, on a :

$$[iL, C_\chi] = \begin{pmatrix} [i(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_\chi] & 0 \\ 0 & -[i(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_\chi] \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -[ib^w, c_\chi] & [ib^w, c_\chi] \\ [ib^w, c_\chi] & -[ib^w, c_\chi] \end{pmatrix}.$$

On a déjà vu que $[(a^w)^{\frac{1}{2}}, c_\chi]$ possède une extension à un opérateur borné. Une application du théorème B.2 et de la proposition B.1 montre que $c_\chi$

est un opérateur pseudodifférentiel avec un symbole dans $S^{-\infty,1}$. Il suit de la proposition B.1 que

$$[b^w, c_\chi] \in \Psi^{-\infty,-\epsilon}$$

donc $[ib^w, c_\chi]$ borné et même compact. Alors pour $f \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ :

$$||[iL, C_\chi]f|| \leqslant C_0||f||.$$

Grâce à la densité de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ dans $D(L)$, $[iL, C_\chi]$ s'étend à un opérateur borné de $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

On a en particulier $L \in C^1(C_\chi)$. La dérivée de $s \mapsto e^{isC_\chi}(z - L)^{-1}e^{-isC_\chi}$ au point $s = 0$ est égale à : $(z - L)^{-1}[iL, C_\chi](z - L)^{-1}$. Pour démontrer $L \in C^2(C_\chi)$, il s'agit de montrer que cette dérivée est dans $C^1(C_\chi\,; \mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$. Par la règle de Leibniz ([1, Proposition 5.1.5]), il suffit de démontrer $[iL, C_\chi] \in C^1(C_\chi\,; \mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$, ce qui par [1, Lemma 6.2.9] revient à estimer le commutateur $ad^2_{C_\chi}(L)$. Sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ on a

$$ad^2_{C_\chi} L = \begin{pmatrix} ad^2_{c_\chi}(a^w)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -ad^2_{c_\chi}(a^w)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -ad^2_{c_\chi} b^w & ad^2_{c_\chi} b^w \\ ad^2_{c_\chi} b^w & -ad^2_{c_\chi} b^w \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} &ad_{c_\chi}(a^w)^{\frac{1}{2}} \in \Psi^{-\infty,0} \quad \text{et} \quad c_\chi \in \Psi^{-\infty,1}, \quad \text{donc} \\ &ad^2_{c_\chi}(a^w)^{\frac{1}{2}} \in \Psi^{-\infty,0}. \end{aligned}$$

De façon similaire

$$ad^2_{c_\chi} b^w \in \Psi^{-\infty,-\epsilon}.$$

On obtient alors l'estimation souhaitée d'abord sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ et par densité sur $D(C_\chi)$.

(ii) On a grâce au lemme précédent et grâce au fait que $\chi(a^w)[ib^w, c_{\tilde\chi}]\chi(a^w)$ et $\chi(a^w)b^w\chi(a^w)$ sont compacts :

$$\begin{aligned} \chi(L_0)[iL, C_{\tilde\chi}]\chi(L_0) &= \begin{pmatrix} \chi(a^w)[(a^w)^{\frac{1}{2}}, ic_{\tilde\chi}]\chi(a^w) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \chi(a^w)[-b^w, ic_{\tilde\chi}]\chi(a^w) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \chi(a^w)(a^w)^{\frac{1}{2}}\chi(a^w) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \chi(a^w)b^w\chi(a^w) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + K \\ &= \chi(L_0)L\chi(L_0) + K \end{aligned}$$

avec un opérateur $K$ compact. On termine en remarquant que $\chi(L)-\chi(L_0)$ est compact par le lemme C.5 et que $[iL, C_{\tilde{\chi}}]$ est borné.

(iii) En multipliant par des fonctions caractéristiques des deux côtés, on obtient (3.3) aussi pour les fonctions caractéristiques. Soit $0 \neq \lambda$, alors

$$s - \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{1}_{[\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]}(L) = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}(L) = 0.$$

Comme $K$ est compact, ceci montre que $K\mathbb{1}_{[\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]}(L)$ tend vers 0 en norme lorsque $\epsilon$ tend vers 0. □

## 4. Estimations de propagation.

Dans cette section, on démontre plusieurs estimations de propagation qui vont être cruciales pour la construction de la vitesse asymptotique et pour la démonstration de la complétude asymptotique. Un opérateur $A$ qui agit sur $\mathcal{H}$ agit sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ par

$$A(u_1, u_2) = (Au_1, Au_2).$$

Si $A(t)$ est une fonction à valeur dans les opérateurs sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, alors sa dérivée de Heisenberg est définie comme

$$\mathbf{D}A(t) \ := \frac{d}{dt}A(t) + i[L, A(t)].$$

Pour $\Phi \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, nous posons

$$\Phi_t = e^{-itL}\Phi.$$

Nous posons également $\mu \ := \min\{\frac{1}{2}, \epsilon\}$.

### 4.1. Estimation de vitesse maximale.

L'estimation de vitesse maximale est donnée par la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1.— (i) *Soit* $1 < \theta_1 < \theta_2, \chi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ *ou* $\chi \in C_0^\infty(]-\infty,0[)$ *et* $\Phi \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. *Alors*

$$\int_1^\infty \left|\left|\mathbb{1}_{[\theta_1,\theta_2]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L)\Phi_t\right|\right|^2 \frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2. \tag{4.1}$$

(ii) *Soit* $F \in C^\infty(\mathbb{R}), F' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *et* $\operatorname{supp} F \subset ]1,\infty[$. *Alors*

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} F\left(\frac{|x|}{t}\right) e^{-itL} = 0. \tag{4.2}$$

*Démonstration.* — (i) Nous ne traitons que le cas $\chi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$, l'autre cas étant analogue. Soit $1 < \theta_0 < \theta_1 < \theta_2, \tilde{\chi}, \bar{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ avec $\chi\bar{\chi} = \chi, \bar{\chi}\tilde{\chi} = \bar{\chi}, f \in C_0^\infty([\theta_0,\infty[), f = 1$ sur $[\theta_1,\theta_2]$. On définit :

$$\begin{aligned} F(s) \ &:= \int_{-\infty}^{s} f^2(s_1)ds_1, \\ \Theta(t) \ &:= \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})F\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} -\mathbf{D}\Theta(t) \ &= t^{-1}\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{|x|}{t}\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) \\ &- \chi(L)[iL_0,\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})F\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})]\chi(L) \\ &- \chi(L)[iL_1,\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})F\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})]\chi(L) \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned} \tag{4.3}$$

On estime $R_1, R_2, R_3$.

$$R_2 = -\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\Big[i\tilde{g}(a^w), F\Big(\frac{|x|}{t}\Big)\Big]\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\chi(L) \tag{4.4}$$

avec $\tilde{g}(\lambda) = \tilde{\chi}(\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}\tilde{\chi}(\sqrt{\lambda})$. Par le lemme C.3, on a :

$$\begin{aligned} &\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\left[i\tilde{g}(a^w), F\left(\frac{|x|}{t}\right)\right]\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) \\ &\qquad = \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\Big(\Big\{\tilde{g}(a), F\Big(\frac{|x|}{t}\Big)\Big\}\Big)^w\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) + O(t^{-2}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Utilisant en plus la proposition B.1 et le théorème B.2 on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\Big[i\tilde{g}(a^w), F\Big(\frac{|x|}{t}\Big)\Big]\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) &= \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\frac{1}{t}r_t^w\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) + O(t^{-2}) \\ &= \frac{1}{t}\tilde{r}_t^w + O(t^{-1-\mu}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

avec

$$\begin{aligned} r_t(x,\xi) &= \tilde{g}'(a(x,\xi))\nabla_\xi a(x,\xi) f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{x}{|x|},\\ \tilde{r}_t(x,\xi) &= \bar{\chi}(\sqrt{a(x,\xi)})\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a(x,\xi)}}\nabla_\xi a(x,\xi) f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{x}{|x|}\bar{\chi}(\sqrt{a(x,\xi)}) \end{aligned}$$

puisque $\tilde{\chi} = 1$ sur supp$\bar{\chi}$. Ceci entraîne :

$$|\tilde{r}_t(x,\xi)| \leqslant f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}^2(\sqrt{a(x,\xi)}) + O(t^{-\epsilon}).$$

Notons aussi que $\tilde{r}_t^w$ est borné uniformément en $t$ et supporté en $\frac{|x|}{t} \geqslant \epsilon_1 > 0$. Grâce au lemme C.5, ceci permet de remplacer $\chi(L)$ par $\chi(L_0)$ dans (4.4) (modulo une erreur $O(t^{-1-\mu})$), de même pour $R_1$. En utilisant le théorème B.2 et la proposition B.1, on obtient :

$$R_1 + R_2 = \begin{pmatrix} q_t^w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(t^{-1-\mu}) \tag{4.7}$$

avec

$$\begin{aligned} q_t(x,\xi) &\geqslant \frac{1}{t} f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{|x|}{t}\chi^2(\sqrt{a(x,\xi)}) - \frac{1}{t} f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi^2(\sqrt{a(x,\xi)})\\ &\quad + O(t^{-1-\mu})\\ &\geqslant \frac{1}{t}(\theta_0 - 1) f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi^2(\sqrt{a(x,\xi)}) + O(t^{-1-\mu}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Avec les notations de [5], on a que $q_t$ et $f^2(\frac{|x|}{t})\chi^2(\sqrt{a(x,\xi)}) \in S(1, \frac{dx^2}{<t>^2} + d\xi^2)$. Nous pouvons alors appliquer l'inégalité de Gårding dans la version de [5, Proposition D.5.4.] et nous obtenons en utilisant aussi le théorème B.2 et la proposition B.1 :

$$R_1 + R_2 \geqslant \frac{1}{t}\chi(L_0) f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L_0)(\theta_0 - 1) + O(t^{-1-\mu}).$$

Il reste à estimer le dernier terme. On a

$$\begin{aligned} &[iL_1, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) F\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})]\\ &\qquad = \frac{i}{2}\left[b^w, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) F\Big(\frac{|x|}{t}\Big)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\right]\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Grâce au lemme C.3, ceci est $O(t^{-1-\epsilon})$. Soit, en rassemblant :

$$-\mathbf{D}\Theta(t) \geqslant \frac{1}{t}(\theta_0 - 1)\chi(L_0) f^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L_0) + O(t^{-1-\mu}).$$

On utilise de nouveau le lemme C.5 pour remplacer $\chi(L_0)$ par $\chi(L)$. La partie (i) suit alors de [5, Lemma B.4.1].

(ii) Soit $F$ comme dans les conditions de la partie (ii) et $\chi$ comme dans les conditions de la partie (i). Nous pouvons supposer $F \geqslant 0$ et $F(s) = 1$ pour $s \geqslant R_0$. Soit $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \tilde{f} = 1$ sur supp$F'$ et supp$\tilde{f} \subset ]\theta_1, \infty[$. Alors

$$\mathbf{D}\Theta(t) = -t^{-1}\chi(L_0)\tilde{f}\left(\frac{|x|}{t}\right)B(t)\tilde{f}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L_0) + O(t^{-1-\mu}) \tag{4.9}$$

et $B(t)$ borné uniformément en $t$. En effet,

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Theta(t) &= -t^{-1}\chi(L_0)\tilde{f}\left(\frac{|x|}{t}\right)F'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{|x|}{t}\tilde{f}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L_0)\\ &\quad + \chi(L_0)[i\tilde{\chi}(L_0)L_0\tilde{\chi}(L_0), F\left(\frac{|x|}{t}\right)]\chi(L_0) + O(t^{-1-\mu})\end{aligned} \tag{4.10}$$

d'après ce qu'on a déjà vu dans la partie (i) de la démonstration. De même on obtient par le calcul précédent :

$$\left[i\tilde{\chi}(L_0)L_0\tilde{\chi}(L_0), F\left(\frac{|x|}{t}\right)\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}e_t^w & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(t^{-2})$$

avec

$$e_t(x,\xi) = \tilde{g}'(a(x,\xi))\nabla_\xi a(x,\xi)F'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{x}{|x|},$$

ce qui montre :

$$\begin{aligned}&\chi(L_0)\left[i\tilde{\chi}(L_0)L_0\tilde{\chi}(L_0), F\left(\frac{|x|}{t}\right)\right]\chi(L_0)\\ &\qquad = -t^{-1}\chi(L_0)\tilde{f}\left(\frac{|x|}{t}\right)B_2(t)\tilde{f}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L_0) + O(t^{-2})\end{aligned}$$

avec un opérateur uniformément borné $B_2(t)$.

En utilisant (i), on s'aperçoit que la limite

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta(t)e^{-itL} \tag{4.11}$$

existe. Si en plus le support de $F$ est compact, alors de nouveau par (i) :

$$\int_1^\infty (\Phi_t, \Theta(t)\Phi_t)\frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2. \tag{4.12}$$

Donc si $F$ vérifie la condition (ii) et $F$ possède un support compact, la limite (4.11) est égale à zéro.

Prenons maintenant des fonctions $F_1 \in C^\infty(\mathbb{R}), f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $\mathrm{supp} F_1 \subset ]\theta_0, \infty[$, $F_1 = 1$ dans un voisinage de $\infty$, et $F_1' = f^2$. Posons

$$\Theta_R(t) := \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})F_1\left(\frac{|x|}{Rt}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L).$$

$$-\mathbf{D}\Theta_R(t) = \frac{1}{t}\chi(L_0)f^2\left(\frac{|x|}{Rt}\right)\frac{|x|}{Rt}\chi(L_0) - \frac{1}{t}\chi(L_0)\begin{pmatrix} e^w_{tR} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\chi(L_0) + O((tR)^{-1-\mu})$$

avec

$$e_{tR}(x,\xi) = \tilde{g}'(a(x,\xi))\nabla_\xi a(x,\xi) f^2\left(\frac{|x|}{Rt}\right)\frac{x}{R|x|}.$$

Soit, en rassemblant

$$-\mathbf{D}\Theta_R(t) = \begin{pmatrix} r^w_{tR} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(t^{-1-\mu})$$

avec

$$r_{tR}(x,\xi) \geqslant \frac{1}{t}\left(\theta_0 - \frac{1}{R}\right) f^2\left(\frac{|x|}{Rt}\right)\chi^2(\sqrt{a(x,\xi)}) + O((tR)^{-1-\mu}).$$

Par les arguments déjà utilisés dans (i)

$$-\mathbf{D}\Theta_R(t) \geqslant \frac{1}{t}\left(\theta_0 - \frac{1}{R}\right)\chi(L)f^2\left(\frac{|x|}{Rt}\right)\chi(L) + O\left((tR)^{-1-\mu}\right)$$

si $R > \frac{1}{\theta_0}$. En particulier

$$-\mathbf{D}\Theta_R(t) \geqslant O((tR)^{-1-\mu}) \quad \text{si} \quad R > \frac{1}{\theta_0}.$$

Alors pour $t_0 \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta_R(t)e^{-itL} &= e^{it_0L}\Theta_R(t_0)e^{-it_0L} + \int_{t_0}^\infty e^{isL}(\mathbf{D}\Theta_R(s))e^{-isL}ds \\ &\leqslant e^{it_0L}\Theta_R(t_0)e^{-it_0L} + O(t_0^{-\mu}R^{-1-\mu}). \qquad (4.13) \end{aligned}$$

Pour $t_0$ fixé, les termes de droite de (4.13) tendent fortement vers zéro lorsque $R \to \infty$. Alors

$$s-\lim_{R\to\infty}(s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta_R(t)e^{-itL}) = 0. \qquad (4.14)$$

Remarquons que pour $R \geqslant 1$, la fonction $F_1(|x|) - F_1(\frac{|x|}{R})$ possède un support compact inclus dans $]\theta_0, \infty[$. Alors

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}(\Theta_1(t) - \Theta_R(t))e^{-itL} = 0. \qquad (4.15)$$

Si on laisse tendre dans (4.15) $R$ vers l'infini, on obtient en utilisant (4.14),

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta_1(t)e^{-itL} = 0.$$

Utilisant le fait que $L$ ne possède pas de valeurs propres, nous pouvons supprimer la troncature $\chi(L)$ par un argument de densité. □

### 4.2. Estimation de vitesse microlocale.

Soient $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ ou $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]-\infty,0[)$ t.q. $\chi\tilde{\chi} = \chi, \tilde{g}(\lambda) = \tilde{\chi}(\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}\tilde{\chi}(\sqrt{\lambda})$ (resp.$\tilde{g}(\lambda) = -\tilde{\chi}(-\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}\tilde{\chi}(-\sqrt{\lambda})$). L'opérateur $v^w$ pour

$$v(x,\xi) := \tilde{g}'(a(x,\xi))\nabla_\xi a(x,\xi)$$

est appelé la *vitesse locale*. Comme $v(x,\xi) \in S^{0,0}$ à valeurs réelles $v^w$ est un opérateur autoadjoint borné. On obtient :

PROPOSITION 4.2. — *Soit* $0 < \theta_1 < \theta_2, \Phi \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. *Alors,*

$$\int_1^\infty ||\mathbb{1}_{[\theta_1,\theta_2]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v^w\right)\chi(L)\Phi_t||^2\frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2. \tag{4.16}$$

*Démonstration.* — Nous ne traitons de nouveau que le cas $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$. Soit $\bar{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ t.q. $\chi\bar{\chi} = \chi$ et $\bar{\chi}\tilde{\chi} = \bar{\chi}$. Soient $0 < \theta_1 < \theta_2 < \theta_3, \theta_3 > 1$ et $R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $R = 0$ dans un voisinage de zéro, $\nabla^2 R \geqslant 0$ et $R(x) = \frac{1}{2}x^2 - c$ pour $|x| > \theta_1$ ($c$ convenable). Soit $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ t.q. $J = 1$ sur $[0,\theta_3]$. On pose

$$M(t) := \frac{1}{2} < v^w - \frac{x}{t}, \nabla R\left(\frac{x}{t}\right) > + \frac{1}{2} < \nabla R\left(\frac{x}{t}\right), v^w - \frac{x}{t} > + R\left(\frac{x}{t}\right), \tag{4.17}$$

$$\Theta(t) := \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)M(t)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L). \tag{4.18}$$

$\Theta(t)$ est borné uniformément en $t$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\Theta(t) = &- \frac{1}{t}\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{|x|}{t}M(t)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) + hc \\
&+ \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{d}{dt}M(t)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) \\
&+ \chi(L)\Big[iL_0, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)M(t)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\Big]\chi(L) \\
&+ \chi(L)\Big[iL_1, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)M(t)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\Big]\chi(L) \\
= &\; R_1 + R_2 + R_3 + R_4.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Remarquons tout de suite que $R_1 = \chi(L)\tilde{R}_1\chi(L)$ avec $\tilde{R}_1 \in O(t^{-1})$. Utilisant les lemmes C.2 et C.5, on a

$$\begin{aligned} R_1 =& -\frac{1}{t}\chi(L)J'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{|x|}{t}M(t)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L) + hc + O(t^{-1-\mu}) \\ =& \frac{1}{t}\chi(L)\tilde{j}_1\left(\frac{|x|}{t}\right)B_1(t)\tilde{j}_1\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L) + O(t^{-1-\mu}) \end{aligned}$$

avec un opérateur uniformément borné $B_1(t)$ et $\tilde{j}_1 = 0$ dans un voisinage de $\{|x| \leqslant 1\}$. Ceci est intégrable grâce à la proposition 4.1.

Soit

$$m(x,\xi,t) := J\left(\frac{|x|}{t}\right)\left(< v(x,\xi) - \frac{x}{t}, \nabla R\left(\frac{x}{t}\right) > + R\left(\frac{x}{t}\right)\right)J\left(\frac{|x|}{t}\right).$$

Grâce au lemme C.3 :

$$\begin{aligned} R_3 =& \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})(\{\tilde{g}(a), m\})^w\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\chi(L) \\ &+ O(t^{-1-\mu}). \end{aligned}$$

Calculons alors le crochet de Poisson :

$$\begin{aligned} &\{\tilde{g}(a), m\}(x,\xi) \\ =& \frac{2}{t} < v(x,\xi), J'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{x}{|x|} > (< v(x,\xi) - \frac{x}{t}, \nabla R\left(\frac{x}{t}\right) > + R(\frac{x}{t}))J\left(\frac{|x|}{t}\right) \\ &+ J\left(\frac{|x|}{t}\right)(v(x,\xi)(\nabla_x v(x,\xi) - \frac{1}{t}\mathbb{I})\nabla R\left(\frac{x}{t}\right) + \frac{1}{t} < v(x,\xi), \nabla R\left(\frac{x}{t}\right) > \\ &+ \frac{1}{t} < v(x,\xi), \nabla^2 R\left(\frac{x}{t}\right)\left(v(x,\xi) - \frac{x}{t}\right) >)J\left(\frac{|x|}{t}\right) \\ &+ e_t(x,\xi) \end{aligned}$$

avec $e_t \in S(< x >_t^{-1-\mu}, \gamma(t))$. De nouveau $R_3 = \chi(L)\tilde{R}_3\chi(L)$ avec $\tilde{R}_3 \in O(t^{-1})$ et l'erreur qu'on fait en remplaçant $\chi(L)$ par $\chi(L_0)$ est d'ordre $O(t^{-1-\mu})$. En utilisant les lemmes C.2 et C.5, on obtient en rassemblant :

$$\begin{aligned} R_2 + R_3 =& \frac{1}{t}\chi(L)\tilde{j}_2\left(\frac{|x|}{t}\right)B_2(t)\tilde{j}_2\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L) + 2\frac{1}{t}\chi(L_0)J\left(\frac{|x|}{t}\right) \\ &\times < v^w - \frac{x}{t}, \nabla^2 R\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right) > J\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L_0) + O(t^{-1-\mu}) \end{aligned}$$

avec $\tilde{j}_2$ supportée en dehors de $\{|x| \leqslant 1\}$ et $B_2(t)$ borné uniformément. Le premier terme est intégrable le long de l'évolution grâce à la proposition 4.1.

$$R_4 = \chi(L)\left[ib^w, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)M(t)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\right]\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\chi(L).$$

Ceci est $O(t^{-1-\mu})$ grâce au lemme C.3. Soit, en rassemblant :

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}\Theta(t) &= \frac{1}{t}\chi(L_0)J\left(\frac{|x|}{t}\right)\left(< v^w - \frac{x}{t}, \nabla^2 R\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right) > +hc\right) \\
&\quad \times J\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L_0) + L^1(dt) \\
&= \frac{1}{t}\chi(L_0)\left(< v^w - \frac{x}{t}, J^2\left(\frac{|x|}{t}\right)\nabla^2 R\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right) > +hc\right)\chi(L_0) \\
&\quad + L^1(dt) \\
&\geqslant \frac{1}{t}\chi(L_0)\left(< v^w - \frac{x}{t}, \mathbb{1}_{[\theta_1,\theta_2]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right) > +hc\right)\chi(L_0) + L^1(dt).
\end{aligned}$$

De nouveau on peut remplacer $\chi(L_0)$ par $\chi(L)$ modulo une erreur $O(t^{-1-\mu})$ et l'affirmation suit de [5, Lemma B.4.1]. □

LEMME 4.1.— Soit $0 < \theta_1 < \theta_2$. Alors

$$s - \lim_{t\to\infty} \mathbb{1}_{[\theta_1,\theta_2]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v^w\right)\chi(L)e^{-itL} = 0.$$

*Démonstration.*— De nouveau nous ne traitons que le cas $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$. Soit $\bar{\chi}$ comme dans la démonstration de la proposition 4.2. Soit $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ t.q. $0 \notin \operatorname{supp} J$, $J(x) = 1$ pour $\theta_1 \leqslant |x| \leqslant \theta_2$. Alors

$$\begin{aligned}
&s - \lim_{t\to\infty} J\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v^w\right)\chi(L)e^{-itL} \\
&= s - \lim_{t\to\infty} \tilde{\chi}(L_0)J\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v^w\right)\chi(L_0)e^{-itL}.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ceci suit des lemmes C.2, C.3 et C.5. Soit

$$\begin{aligned}
\Theta(t) :&= \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\left(v^w - \frac{x}{t}\right)J\left(\frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\tilde{\chi}^2(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) \\
&\quad \times J\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L). \\
-\mathbf{D}\Theta(t) &= -\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\frac{x}{t^2}J\left(\frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\tilde{\chi}^2(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) \\
&\quad \times J\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) + hc
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) \left(v^w - \frac{x}{t}\right) < \frac{x}{t^2}, \nabla J\left(\frac{x}{t}\right) > \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\tilde{\chi}^2(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) \\
&\quad \times J\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) + hc \\
&- \chi(L)[iL_0, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\left(v^w - \frac{x}{t}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})]\tilde{\chi}^2(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) \\
&\quad \times J\left(\frac{x}{t}\right)(v^w - \frac{x}{t})\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) + hc \\
&- \chi(L)[iL_1, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\left(v^w - \frac{x}{t}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})]\tilde{\chi}^2(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) \\
&\quad \times J\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) + hc \\
&= R_1 + R_2 + R_3 + R_4.
\end{aligned}
$$

Considérons d'abord $R_3$ :

$$
\begin{aligned}
R_3 = &-\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})[i\tilde{g}(a^w), \left(v^w - \frac{x}{t}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)]\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \\
&\times \tilde{\chi}^2(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L) + hc.
\end{aligned}
$$

Soit

$$
m(x,\xi,t) = \left(v\,(x,\xi) - \frac{x}{t}\right) J\left(\frac{x}{t}\right).
$$

Par le lemme C.3

$$
\left[i\tilde{g}(a^w), \left(v^w - \frac{x}{t}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\right] = (\{\tilde{g}(a), m\})^w + O(t^{-2}).
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&\{\tilde{g}(a), m\}(x,\xi) \\
&= \frac{1}{t}\left(v(x,\xi) - \frac{x}{t}\right) < v(x,\xi), \nabla J\left(\frac{x}{t}\right) > +v(x,\xi)\left(\nabla_x v(x,\xi) - \frac{1}{t}\mathbb{1}\right) \\
&\times J\left(\frac{x}{t}\right) + e_t(x,\xi)
\end{aligned}
$$

avec $e_t(x,\xi) \in S(< x >_t^{-1-\mu}, \gamma(t))$. De nouveau on peut échanger $\chi(L)$ (resp. $\tilde{\chi}(L)$) et $\chi(L_0)$ (resp. $\tilde{\chi}(L_0)$), l'erreur étant d'ordre $O(t^{-1-\mu})$. Alors

$$
\begin{aligned}
R_3 = &-\frac{1}{t}\chi(L_0)\left(\left(v^w - \frac{x}{t}\right) < v^w, \nabla J\left(\frac{x}{t}\right) > -v^w\, J\left(\frac{x}{t}\right)\right) \\
&\times \tilde{\chi}^2(L_0)J\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right)\chi(L_0) + hc + O(t^{-1-\mu}).
\end{aligned}
$$

$$
R_4 = \chi(L)\left[ib^w, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\left(v^w - \frac{x}{t}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\bar{\chi}\left((a^w)^{\frac{1}{2}}\right)\right]\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\chi(L).
$$

Ceci est d'ordre $O(t^{-1-\mu})$ par le lemme C.3. Notons que dans l'expression pour $R_1$ et $R_2$, on peut aussi échanger $L_0$ et $L$ en commettant une erreur d'ordre $O(t^{-1-\mu})$. Soit, en rassemblant :

$$-\mathbf{D}\Theta(t) = \frac{2}{t}\Theta(t) - \frac{1}{t}\chi(L)\left(v^w - \frac{x}{t}\right) < v^w - \frac{x}{t}, \nabla J\left(\frac{x}{t}\right) > \tilde{\chi}^2(L)J\left(\frac{x}{t}\right) \\ \times \left(v^w - \frac{x}{t}\right)\chi(L) + hc + O(t^{-1-\mu}).$$

Ceci est intégrable le long de l'évolution par la proposition 4.2. On a alors l'existence de la limite

$$\lim_{t\to\infty}(\Phi_t, \Theta(t)\Phi_t).$$

De nouveau par la proposition précédente :

$$\int_1^\infty (\Phi_t, \Theta(t)\Phi_t)\frac{dt}{t} < \infty,$$

la limite en question est alors égale à zéro. □

### 4.3. Estimation de vitesse minimale.

PROPOSITION 4.3. — *Soit* $\chi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ *ou* $\chi \in C_0^\infty(]-\infty,0[)$, $\Phi \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ *et* $0 < \theta_0 < 1$. *Alors*

(4.21) i) $$\int_1^\infty \left|\left|\mathbb{1}_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L)\Phi_t\right|\right|^2\frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2,$$

(4.22) ii) $$s - \lim_{t\to\infty}\mathbb{1}_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)e^{-itL} = 0.$$

*Démonstration.* — Nous ne traitons de nouveau que le cas $\chi \in C_0^\infty(]0,\infty[)$. Soit $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ avec $\chi\tilde{\chi} = \chi$.

i) Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer que pour $J \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec supp$J \subset \{|x| < 1\}$, $J = 1$ sur $\{|x| \leqslant \theta_0\}$, on a

$$\int_1^\infty ||J\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L)\Phi_t||^2\frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2.$$

Nous allons utiliser la proposition A.1 avec

$$B := < x >, \quad D(B) = \{(f,g) \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} | (< x > f, < x > g) \in \mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\}.$$

$C_{\tilde{\chi}}$ est bien défini et symétrique sur $D(B)$ puisque $<x>\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})<x>^{-1}$ est borné, donc $D(B) \subset D(C_{\tilde{\chi}})$. On a $B \geqslant 1$ et $\pm C_{\tilde{\chi}} \leqslant c_0 B$. De plus,

$$\begin{aligned} [c_{\tilde{\chi}}, <x>] &\in \Psi^{-\infty,1}, \\ [c_{\tilde{\chi}}, <x>] <x>^{-1} &\in \Psi^{-\infty,0}, \end{aligned}$$

donc $[C_{\tilde{\chi}}, B]B^{-1}$ borné. En utilisant

$$\left\| J\left(\frac{|x|}{t}\right) - J\left(\frac{<x>}{t}\right) \right\| = O(t^{-1}),$$

on obtient l'estimation si $\theta_0$ et les supports de $J$ et $\chi$ sont assez petits. Supposons maintenant $J$ supportée dans $]0,1[$. Par les lemmes C.2 et C.5, la proposition 4.2 reste valable si l'on remplace $\chi(L)$ par $\chi(L_0)$. Pour avoir l'estimation souhaitée, il suffit alors de démontrer :

$$\begin{aligned} &\chi((a^w)^{\frac{1}{2}}) < \left(\frac{x}{t} - v^w\right), J\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v^w\right) > \chi((a^w)^{\frac{1}{2}}) \\ &\qquad \geqslant c_1 \chi((a^w)^{\frac{1}{2}}) J\left(\frac{x}{t}\right) \chi((a^w)^{\frac{1}{2}}) + O(t^{-\sigma}) \end{aligned}$$

avec $c_1, \sigma > 0$. On note $\chi_1$ la fonction $\chi \circ \sqrt{}$. On a :

$$\begin{aligned} &\chi_1(a^w) < \left(\frac{x}{t} - v^w\right), J\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v^w\right) > \chi_1(a^w) \\ &= \ (\chi_1(a) < \left(\frac{x}{t} - v\right), J\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v\right) > \chi_1(a))^w + O(t^{-\epsilon}). \end{aligned}$$

Au niveau des symboles :

$$\begin{aligned} \left|\chi_1(a(x,\xi))v(x,\xi)J\Big(\frac{x}{t}\Big)\right| &= \left|\chi_1(a(x,\xi))\frac{1}{\sqrt{a(x,\xi)}}\nabla_\xi a(x,\xi)J\Big(\frac{x}{t}\Big)\right| \\ &\leqslant \chi_1(a(x,\xi))J\Big(\frac{x}{t}\Big) + O(t^{-\epsilon}), \quad \text{donc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\chi_1(a(x,\xi)) < \left(\frac{x}{t} - v(x,\xi)\right), J\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t} - v(x,\xi)\right) > \chi_1(a(x,\xi)) \\ &\geqslant \chi_1(a(x,\xi))\left(\frac{x}{t} - 1\right)^2 J\left(\frac{x}{t}\right)\chi_1(a(x,\xi)) + O(t^{-\epsilon}) \\ &\geqslant c_0\chi_1(a(x,\xi))J\left(\frac{x}{t}\right)\chi_1(a(x,\xi)) + O(t^{-\epsilon}) \end{aligned}$$

avec $c_0 > 0$ puisque supp$J \subset\ ]0,1[$. En utilisant l'inégalité de Gårding et de nouveau le lemme C.5, on obtient (4.21) si le support de $\chi$ est assez petit. Supposons maintenant que $\chi$ est une fonction arbitraire dans $C_0^\infty(]0,\infty[)$. Nous pouvons écrire

$$\chi = \sum_{j=1}^{m} \chi_j,$$

où les $\chi_j$ sont des fonctions $C_0^\infty(]0,\infty[)$ avec un support suffisamment petit tel que

$$\int_1^\infty ||1\!\!1_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi_j(L)\Phi_t||^2\frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2, \quad j=1,.....,m.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\begin{aligned}&\int_1^\infty \left(1\!\!1_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi_i(L)\Phi_t | 1\!\!1_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi_j(L)\Phi_t\right)\frac{dt}{t}\\ &\leqslant \left(\int_1^\infty \left|\left|1\!\!1_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi_i(L)\Phi_t\right|\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac12}\left(\int_1^\infty \left|\left|1\!\!1_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi_j(L)\Phi_t\right|\right|^2\frac{dt}{t}\right)^{\frac12}\\ &\leqslant C||\Phi||^2.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_1^\infty \left|\left|1\!\!1_{[0,\theta_0]}\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L)\Phi_t\right|\right|^2\frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2,$$

ce qui termine la démonstration.

ii) suit de la même façon que i) en utilisant le lemme 4.1 et la proposition A.1. Utilisant le fait que $L$ ne possède pas de valeurs propres, on peut supprimer la troncature $\chi(L)$. □

## 5. Vitesse asymptotique.

Dans cette section, nous construisons la vitesse asymptotique et nous décrivons ses propriétés fondamentales. Pour un espace localement compact $Y$ et un espace de Banach $E$, on note $C_\infty(Y,E)$ l'ensemble des fonctions $f \in C(Y,E)$ qui vérifient $\lim_{y\to\infty} f(y) = 0$. L'espace $C_\infty(Y,\mathbb{C})$ va être noté $C_\infty(Y)$. Par la suite on va toujours identifier (en tant qu'algèbres) $C_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^2)$ et $C_\infty(\mathbb{R}^n\times\{+,-\})$, resp. $C_\infty(\mathbb{R}^n\times\{+,-\})\otimes C_\infty(\mathbb{R})$ et $C_\infty(\mathbb{R}^n\times\{+,-\}\times\mathbb{R})$.

### 5.1. Théorème principal.

THÉORÈME 5.1. — (i) *Pour tout* $f=(f_1,f_2)\in C_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^2)$ *il existe*

$$s-\lim_{t\to+\infty} e^{itL}\begin{pmatrix} f_1(\frac{x}{t}) & 0\\ 0 & f_2(\frac{x}{t})\end{pmatrix}e^{-itL} =: \gamma^+(f)\in B(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}).$$

*$\gamma^+ : C_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^2) \to B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ est un $*$-morphisme de $C^*$-algèbres. On a : $[L, \gamma^+(f)] = 0$ pour tout $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^2)$. On pose $\mathcal{U}^+ := \mathrm{Im}\gamma^+$.*

(ii) *On a*

$$\gamma^+(f) = s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} f_1(\frac{D}{|D|}) & 0 \\ 0 & f_2(-\frac{D}{|D|}) \end{pmatrix} e^{-itL}.$$

(iii) *On a*

$$I := \mathrm{Ker}(\gamma^+) = \{f \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\}) | \quad f|_{\mathrm{S}^{n-1}\times\{+,-\}} = 0\},$$

*ce qui donne les isomorphismes suivants :*

$$\begin{tikzcd} C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\})/I \arrow[rr, "\simeq", "\gamma^+"'] \arrow[dr, "\simeq"] & & \mathcal{U}^+ \\ & C(\mathrm{S}^{n-1} \times \{+,-\}) \arrow[ur, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

*en particulier $\sigma(\mathcal{U}^+) = S^{n-1} \times \{+,-\}$.*

(iv) *On considère le $*$-morphisme de $C^*-$algèbres*

$$\Gamma^+ : \begin{array}{ccccc} C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\}) & \otimes & C_\infty(\mathbb{R}) & \to & B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \\ g & \otimes & h & \mapsto & \gamma^+(g)h(L). \end{array}$$

*On pose*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^+ &:= \mathrm{Im}\Gamma^+, \\ \mathcal{N} &:= \mathrm{S}^{n-1} \times \{+\} \times \mathbb{R}^+ \cup \mathrm{S}^{n-1} \times \{-\} \times \mathbb{R}^-. \end{aligned}$$

*On a*

$$J := \mathrm{Ker}(\Gamma^+) = \{f \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\} \times \mathbb{R}) \quad | \quad f|_{\mathcal{N}} = 0\},$$

*ce qui donne les isomorphismes suivants :*

$$\begin{tikzcd} C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\} \times \mathbb{R})/J \arrow[rr, "\simeq", "\Gamma^+"'] \arrow[dr, "\simeq"] & & \mathcal{W}^+ \\ & C_\infty(\mathcal{N}) \arrow[ur, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

*en particulier $\sigma(\mathcal{W}^+) = \mathcal{N}$.*

*Remarque.*

1) Nous pouvons associer à l'algèbre $\mathcal{U}^+$ une observable par une des deux façons suivantes :

a) Pour $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, on a

$$\gamma^+(f,f) = s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} f(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & f(\frac{x}{t}) \end{pmatrix} e^{-itL}.$$

Si de plus $f(0) = 1$, on a

$$s - \lim_{R\to\infty} \left( s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} f(\frac{x}{Rt}) & 0 \\ 0 & f(\frac{x}{Rt}) \end{pmatrix} e^{-itL} \right) = \mathbb{1}$$

en vertu de la proposition 4.1. Par [5, Proposition B.2.1], il existe un vecteur d'opérateurs autoadjoints qui commutent $P^+$ t.q.

$$\gamma^+(f,f) = f(P^+), \quad \forall f \in C_\infty(\mathbb{R}^n).$$

Le lemme C.5 entraîne que $P^+$ commute avec $L$.

b) Par (ii), la limite

$$V^+ \ := s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} \frac{D}{|D|} & 0 \\ 0 & -\frac{D}{|D|} \end{pmatrix} e^{-itL}$$

existe. On a clairement

$$\begin{aligned} f(V^+) &= f(P^+), \quad \forall f \in C_\infty(\mathbb{R}^n), \quad \text{i.e.} \\ V^+ &= P^+, \end{aligned}$$

en particulier $P^+$ borné. On appelle $V^+ = P^+$ la *vitesse asymptotique*. Considérons

$$\kappa \ : \begin{array}{ccc} C_\infty(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{U}^+ \\ f & \mapsto & \gamma^+(f,f). \end{array}$$

Par (iii), on a

$$\operatorname{Ker}(\kappa) = \{f \in C_\infty(\mathbb{R}^n) | \quad f|_{\mathbb{S}^{n-1}} = 0\},$$

i.e. $\sigma(P^+) = \mathbb{S}^{n-1}$. En utilisant (iv), on peut calculer le spectre joint :

$$\sigma(P^+, L) = \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} V_1^+ &:= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} \frac{D}{|D|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} e^{-itL}, \\ V_2^+ &:= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{D}{|D|} \end{pmatrix} e^{-itL}, \end{aligned}$$

alors

$$\sigma(V_1^+, L) = \mathrm{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+, \quad \sigma(V_2^+, L) = \mathrm{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^-.$$

2) On peut voir (iii), (iv) comme une version très faible de la complétude asymptotique. Pour (iii), (iv), on a seulement besoin d'une décroissance $O(< x >^{-\epsilon})$ à l'infini tandis qu'on aura besoin de $O(< x >^{-1-\epsilon})$ pour la complétude asymptotique (courte portée).

### 5.2. Existence de la vitesse asymptotique.

Dans ce paragraphe, on démontre l'existence de la vitesse asymptotique et on donne une formule équivalente.

Proposition 5.1. — *Soit $J = (J_1, J_2) \in C_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^2)$.*

i) *Il existe*

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} J_1(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & J_2(\frac{x}{t}) \end{pmatrix} e^{-itL} = : \gamma^+(J).$$

ii) $\forall J \in C_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^2) \quad [\gamma^+(J), L] = 0.$

iii) Si $\mathrm{supp} J_i \subset \{|x| < 1\}$ ou $\mathrm{supp} J_i \subset \{|x| > 1\}$ $(i = 1, 2)$, alors $\gamma^+(J_1, J_2) = 0$.

*Démonstration.* — i) Par densité, on peut supposer $J_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $J_i$ constante dans un voisinage de zéro. Grâce à la proposition 4.3, nous pouvons supposer que cette constante est égale à zéro. De nouveau, nous supposons $\chi, \tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0, \infty[)$ et nous choisissons $\tilde{\chi}$ comme dans la démonstration de la proposition 4.2. Dans un premier temps, on va démontrer l'existence de

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta(t)e^{-itL} \tag{5.1}$$

avec

$$\Theta(t) := \chi(L)\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\left(J_1\left(\frac{x}{t}\right) + < v^w - \frac{x}{t}, \nabla J_1\left(\frac{x}{t}\right) >\right)\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(L).$$

Toujours avec les mêmes arguments :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Theta(t) &= \chi(L_0)\Big(- < v^w - \frac{x}{t}, \nabla^2 J_1\left(\frac{x}{t}\right)\frac{x}{t^2} > + \Big[i\tilde{\chi}(L_0)L_0\tilde{\chi}(L_0), J_1\left(\frac{x}{t}\right) \\ &\quad + < v^w - \frac{x}{t}, \nabla J_1\left(\frac{x}{t}\right) > \Big]\Big)\chi(L_0) + O(t^{-1-\mu}) \\ &= \frac{1}{t}\chi(L_0) < v^w - \frac{x}{t}, \nabla^2 J_1\left(\frac{x}{t}\right)\left(v^w - \frac{x}{t}\right) > \chi(L_0) + O(t^{-1-\mu}).\end{aligned}$$

Ceci est intégrable le long de l'évolution grâce à la proposition 4.2, ce qui donne l'existence de la limite (5.1). Grâce aux lemmes 4.1, C.2 et C.5, on a :

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta(t)e^{-itL} = s-\lim_{t\to\infty}\chi(L)e^{itL}\begin{pmatrix} J_1(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & J_2(\frac{x}{t})\end{pmatrix} e^{-itL}\chi(L).$$

On obtient le même résultat pour $\chi$ supportée dans $]-\infty,0[$ si l'on remplace $J_1$ par $J_2$ dans l'observable. Ensuite on utilise que $\{\chi(L)u|\chi\in C_0^\infty(]0,\infty[)\cup C_0^\infty(]-\infty,0[), u\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\}$ est dense dans $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.

ii) suit du lemme C.5.

iii) suit des propositions 4.1 et 4.3 par un argument de densité. □

PROPOSITION 5.2. — *Soit $g=(g_1,g_2)\in C_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^2)$. Alors*

$$\gamma^+(g) = s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\begin{pmatrix} g_1(\frac{D}{|D|}) & 0 \\ 0 & g_2(-\frac{D}{|D|})\end{pmatrix} e^{-itL}.$$

*Démonstration.* — Il suffit de supposer $g_i\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Montrons d'abord

$$(5.2)\quad s-\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} g_1(v^w)-g_1(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & g_2(v^w)-g_2\left(\frac{x}{t}\right)\end{pmatrix} J\left(\frac{x}{t}\right)e^{-itL}\chi(L)=0$$

pour tout $J\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ et $\chi\in C_0^\infty(]0,\infty[)$, $v^w$ comme dans la proposition 4.2. Notons que $v^w$ dépend de la troncature $\chi$. Par le théorème B.2 et le lemme C.5, on a

$$\begin{aligned}
&s-\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} g_1(v^w)-g_1(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & g_2(v^w)-g_2(\frac{x}{t})\end{pmatrix} J\left(\frac{x}{t}\right)e^{-itL}\chi(L)\\
=&s-\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} (g_1(v))^w-g_1\left(\frac{x}{t}\right) & 0 \\ 0 & (g_2(v))^w-g_2(\frac{x}{t})\end{pmatrix} J\left(\frac{x}{t}\right)\chi(L_0)e^{-itL}\\
=&s-\lim_{t\to\infty}\left((g_1(v))^w-g_1\left(\frac{x}{t}\right)\right)J\left(\frac{x}{t}\right)\chi(L_0)e^{-itL}.
\end{aligned}$$

On a

$$g_1(v(x,\xi))-g_1\left(\frac{x}{t}\right)=\int_0^1\nabla g_1\left(\tau v(x,\xi)+(1-\tau)\frac{x}{t}\right)\left(v(x,\xi)-\frac{x}{t}\right)d\tau,$$

alors par la proposition B.1,

$$\begin{aligned}
(g_1(v))^w-g\left(\frac{x}{t}\right) &= B(t)\left(v^w-\frac{x}{t}\right)+C(t),\\
\lim_{t\to\infty}C(t)J\left(\frac{x}{t}\right) &= 0
\end{aligned}$$

et $B(t)$ borné uniformément en $t$. (5.2) suit alors du lemme 4.1. Nous affirmons maintenant que

$$s - \lim_{t\to\infty} \left(g_1(v^w) - g_1\left(\frac{D}{|D|}\right)\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\chi\left((a^w)^{\frac{1}{2}}\right) = 0.$$

Par un argument similaire au précédent, il suffit de démontrer :

$$\lim_{t\to\infty} \left(v^w - \frac{D}{|D|}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\chi\left((a^w)^{\frac{1}{2}}\right) = 0. \tag{5.3}$$

Soit $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ avec $\chi\tilde{\chi} = \chi$ et $\tilde{\chi}\tilde{\chi} = \tilde{\chi}$. Alors

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} &\left(v^w - \frac{D}{|D|}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\chi\left((a^w)^{\frac{1}{2}}\right)\\ &= \lim_{t\to\infty} \left(v^w - \frac{D}{|D|}\right) \tilde{\chi}\left((a^w)^{\frac{1}{2}}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\chi((a^w)^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

par le lemme C.3. Utilisant le lemme C.4, on obtient :

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to\infty} \left(v^w - \frac{D}{|D|}\right) \tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{x}{t}\right)\chi(a^w)^{\frac{1}{2}})\\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{D}{|D|}(\tilde{\chi}(|D|) - \tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}))J\left(\frac{x}{t}\right)\chi((a^w)^{\frac{1}{2}})\\ &+ \lim_{t\to\infty}(v^w\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}) - \frac{D}{|D|}\tilde{\chi}(|D|))J\left(\frac{x}{t}\right)\chi((a^w)^{\frac{1}{2}})\\ &= \lim_{t\to\infty} d^w J\left(\frac{x}{t}\right)\chi((a^w)^{\frac{1}{2}})\end{aligned}$$

avec $d^w = (d_1^w, d_2^w, d_3^w)$ et

$$\begin{aligned}d_i(x,\xi) &= \tilde{\chi}(a^{\frac{1}{2}}(x,\xi))\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}(x,\xi)\partial_{\xi_i}a(x,\xi) - \frac{\xi_i}{|\xi|}\tilde{\chi}(|\xi|)\\ &= (\hat{\chi}(a(x,\xi)) - \hat{\chi}(|\xi|^2))\partial_{\xi_i}a(x,\xi) + \hat{\chi}(|\xi|^2)(\partial_{\xi_i}a(x,\xi) - 2\xi_i),\end{aligned}$$

où $\hat{\chi}(\lambda) = \frac{1}{2}\tilde{\chi}(\lambda^{\frac{1}{2}})\lambda^{-\frac{1}{2}}$. Il s'ensuit $\lim_{t\to\infty} d^w J(\frac{x}{t})\chi((a^w)^{\frac{1}{2}}) = 0$ par le lemme C.4, ce qui montre (5.3). De la même façon,

$$\lim_{t\to\infty}(g_2(v^w) - g_2\left(-\frac{D}{|D|}\right) J\left(\frac{x}{t}\right)\chi(-(a^w)^{\frac{1}{2}}) = 0$$

si $\mathrm{supp}\chi \subset ]-\infty, 0[$. En rassemblant :

$$\begin{aligned}s - \lim_{t\to\infty} &\begin{pmatrix} g_1(\frac{D}{|D|}) - g_1(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & g_2(-\frac{D}{|D|}) - g_2(\frac{x}{t})\end{pmatrix} J\left(\frac{x}{t}\right)e^{-itL}\chi(L)\\ =s - \lim_{t\to\infty} &\begin{pmatrix} g_1(v^w) - g_1(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & g_2(v^w) - g_2(\frac{x}{t})\end{pmatrix} J\left(\frac{x}{t}\right)e^{-itL}\chi(L) = 0,\end{aligned}$$

ce qui montre

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\begin{pmatrix} g_1(\frac{D}{|D|})-g_1(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & g_2(-\frac{D}{|D|})-g_2(\frac{x}{t}) \end{pmatrix} J\left(\frac{x}{t}\right)e^{-itL}\chi(L)=0.$$

La proposition suit maintenant d'un argument de densité. □

### 5.3. Spectre de la vitesse asymptotique.

La proposition suivante décrit le spectre de la vitesse asymptotique.

PROPOSITION 5.3. — (i) *On a :*

$$I := \mathrm{Ker}(\gamma^+) = \{f\in C_\infty(\mathbb{R}^n\times\{+,-\}) \mid \ f|_{\mathrm{S}^{n-1}\times\{+,-\}}=0\}, \tag{5.4}$$

*ce qui donne les isomorphismes suivants :*

$$\begin{tikzcd} C_\infty(\mathbb{R}^n\times\{+,-\})/I \arrow[rr, "\simeq", "\gamma^+"'] \arrow[dr, "\simeq"] & & \mathcal{U}^+ \\ & C(\mathrm{S}^{n-1}\times\{+,-\}) \arrow[ur, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

*en particulier* $\sigma(\mathcal{U}^+)=\mathrm{S}^{n-1}\times\{+,-\}$.

(ii) *On a :*

$$J := \mathrm{Ker}(\Gamma^+) = \{f\in C_\infty(\mathbb{R}^n\times\{+,-\}\times\mathbb{R}) \mid f|_{\mathcal{N}}=0\}, \tag{5.5}$$

*ce qui donne les isomorphismes suivants :*

$$\begin{tikzcd} C_\infty(\mathbb{R}^n\times\{+,-\}\times\mathbb{R})/J \arrow[rr, "\simeq", "\Gamma^+"'] \arrow[dr, "\simeq"] & & \mathcal{W}^+ \\ & C_\infty(\mathcal{N}) \arrow[ur, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

*en particulier* $\sigma(\mathcal{W}^+)=\mathcal{N}$.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que pour tout $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\chi(L) = s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(\tilde{L})e^{-itL}, \quad \text{où} \tag{5.6}$$

$$(5.7)\qquad \tilde{L} = \begin{pmatrix} |D| & 0 \\ 0 & -|D| \end{pmatrix}.$$

En effet, on a grâce à la proposition 5.2

$$\chi(L) = s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(L) \begin{pmatrix} J(\frac{x}{t}) & 0 \\ o & J(\frac{x}{t}) \end{pmatrix} e^{-itL}$$

pour $J \in C_0^\infty(\{1-\epsilon < |x| < 1+\epsilon\})$ $(0<\epsilon<1)$ et $J|_{S^{n-1}} = 1$. Donc

$$\begin{aligned} \chi(L) &= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}(\chi(L)-\chi(\tilde{L})) \begin{pmatrix} J(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & J(\frac{x}{t}) \end{pmatrix} e^{-itL} \\ &+ s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(\tilde{L}) \begin{pmatrix} J(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & J(\frac{x}{t}) \end{pmatrix} e^{-itL} \\ &= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(\tilde{L})e^{-itL} s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} J(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & J(\frac{x}{t}) \end{pmatrix} e^{-itL} \\ &= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(\tilde{L})e^{-itL} \end{aligned}$$

en vertu du lemme C.5 et de la proposition 5.2. Montrons d'abord (5.5).

"$\supset$"

Par (5.6) on a pour tout $g \otimes h \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\}) \otimes C_\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$\Gamma^+(g\otimes h)$$
$$(5.8)\qquad = s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} g(\frac{D}{|D|},+)h(|D|) & 0 \\ 0 & g(-\frac{D}{|D|},-)h(-|D|) \end{pmatrix} e^{-itL}.$$

Par densité, on obtient pour tout $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\} \times \mathbb{R}^n)$ :

$$(5.9)\, \Gamma^+(f) = s - \lim_{t\to\infty} e^{itL} \begin{pmatrix} f(\frac{D}{|D|},+,|D|) & 0 \\ 0 & f(-\frac{D}{|D|},-,-|D|) \end{pmatrix} e^{-itL},$$

en particulier $\Gamma^+(f) = 0, \quad$ si $\quad f|_{\mathcal{N}} = 0$.

"$\subset$"

Soit $g \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\} \times \mathbb{R})$ avec $g_+(.,.)|_{S^{n-1}\times\mathbb{R}^+} := g(.,+,.)|_{S^{n-1}\times\mathbb{R}^+} \neq 0$. Il faut alors démontrer $\Gamma^+(g) \neq 0$. Soit $(\xi_0,\lambda_0) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ avec $g_+(\xi_0,\lambda_0) \neq 0$, $1 > r_1 > r_0 > 0$, $J \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec supp$J \subset ]-\infty, 1[$ t.q. $J = 1$ sur $]-\infty, r_1[$ et $j := -J' \geqslant 0$. Supposons d'abord que le support de $g_+$ soit petit : $g_+ \in C_0^\infty(\{|x-\xi_0| < r_0\} \times \mathbb{R})$. Nous supposons également $g_+ \geqslant 0$. Alors

$$J(|\xi-\xi_0|)g_+(\xi,\lambda) = g_+(\xi,\lambda), \tag{5.10}$$

$$j(|\xi-\xi_0|)|\xi-\xi_0| \geqslant r_1 j(|\xi-\xi_0|), \tag{5.11}$$

$$g_+(\xi,\lambda)|\xi-\xi_0| \leqslant r_0 g_+(\xi,\lambda). \tag{5.12}$$

Soit $\chi, \tilde{\chi}, \bar{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ t.q. $\chi\tilde{\chi}=\chi$ et $\bar{\chi}\tilde{\chi}=\bar{\chi}$. Considérons l'observable

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}(t) &= \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})J(|\frac{x}{t}-\xi_0|)\begin{pmatrix} g_+^2(\frac{D}{|D|},|D|) & 0 \\ 0 & g_-^2(-\frac{D}{|D|},-|D|)\end{pmatrix} \\ &\times J\Big(|\frac{x}{t}-\xi_0|\Big)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})\chi(L).\end{aligned}$$

On obtient grâce à (5.9) et aux lemmes C.2, C.5 :

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\tilde{\Theta}(t)e^{-itL} = \chi(L)\Gamma^+(g)\chi(L).$$

D'autre part toujours par les lemmes C.2, C.5 :

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\tilde{\Theta}(t)e^{-itL} = s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta(t)e^{-itL} \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned}\Theta(t) &:= \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right) \\ &\times \bar{\chi}((a^w)^{\frac12})\chi(L).\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Theta(t) &= \frac{1}{t}\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})j\Big(|\frac{x}{t}-\xi_0|\Big) < \frac{\frac{x}{t}-\xi_0}{|\frac{x}{t}-\xi_0|}, \frac{x}{t} > g_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right) \\ &\times J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})\chi(L) + hc + \chi(L)[iL_0, \bar{\chi}((a^w)^{\frac12}) \\ &\times J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})]\chi(L) + hc \\ &+ \chi(L)[iL_1, \bar{\chi}((a^w)^{\frac12})J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right) \\ &\times J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})]\chi(L) + hc \\ &= R_1 + R_2 + R_3.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}R_2 &= \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac12})\Big[i\tilde{g}(a^w), J\Big(|\frac{x}{t}-\xi_0|\Big)g_+^2\Big(\frac{D}{|D|},|D|\Big)J\Big(|\frac{x}{t}-\xi_0|\Big)\Big] \\ &\times \bar{\chi}((a^w)^{\frac12})\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\chi(L).\end{aligned}$$

Par le lemme C.3, il suffit de calculer le crochet de Poisson :

$$\left\{\tilde{g}(a)(x,\xi), J\Big(|\frac{x}{t}-\xi_0|\Big)g_+^2\left(\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|\right)J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)\right\}$$

$$= -2 < v(x,\xi), j\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)\frac{\frac{x}{t}-\xi_0}{|\frac{x}{t}-\xi_0|}\frac{1}{t}g_+^2\left(\frac{\xi}{|\xi|},|\xi|\right)J\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right) >$$

$$(5.13)\ +e_t(x,\xi)$$

avec $e_t \in S(<x>_t^{-1-\mu},\gamma(t))$. Remarquons aussi que par un argument déjà utilisé plusieurs fois, nous pouvons remplacer $\chi(L)$ par $\chi(L_0)$ modulo une erreur $O(t^{-1-\mu})$. Soit $\hat{g}_+ \in C_0^\infty(\{|x-\xi_0|<r_0\}\times\mathbb{R})$ avec $g_+\hat{g}_+ = g_+$. Alors

$$\begin{aligned}
&R_1+R_2\\
&= \frac{1}{t}\chi(L_0)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right) < \frac{\frac{x}{t}-\xi_0}{|\frac{x}{t}-\xi_0|},\xi_0-v^w >\\
&\times \hat{g}_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)\chi(L_0)+hc\\
&+\frac{1}{t}\chi(L_0)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)|\frac{x}{t}-\xi_0|(Jj)\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)\chi(L_0)\\
&+O(t^{-1-\mu})\\
&= \frac{1}{t}\chi(L_0)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right) < \frac{\frac{x}{t}-\xi_0}{|\frac{x}{t}-\xi_0|},\xi_0-\frac{D}{|D|} >\\
&\times \hat{g}_+^2\Big(\frac{D}{|D|},|D|\Big)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)\chi(L_0)+hc\\
&+\frac{1}{t}\chi(L_0)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)|\frac{x}{t}-\xi_0|(Jj)\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)\chi(L_0)\\
&+O(t^{-1-\mu})\\
&+\frac{1}{t}\chi(L_0)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right) < \frac{\frac{x}{t}-\xi_0}{|\frac{x}{t}-\xi_0|},\frac{D}{|D|}-v^w >\\
&\times \hat{g}_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+\Big(\frac{D}{|D|},|D|\Big)\chi(L_0).
\end{aligned}$$

Par le lemme C.3,

$$\left[\bar{\chi}(L_0), g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)\frac{\frac{x}{t}-\xi_0}{|\frac{x}{t}-\xi_0|}\right] \in O(t^{-1}).$$

Le dernier terme est alors égal à

$$\frac{1}{t}\chi(L_0)g_+\Big(\frac{D}{|D|},|D|\Big)(Jj)^{\frac12}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right) < \frac{\frac{x}{t}-\xi_0}{|\frac{x}{t}-\xi_0|},\bar{\chi}(L_0)\left(\frac{D}{|D|}-v^w\right)\bar{\chi}(L_0)$$

$$\times \hat{g}_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)^{\frac{1}{2}}\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)\chi(L_0)+O(t^{-2}).$$

Ceci est $O(t^{-1-\mu})$ comme on l'a déjà vu dans la démonstration de la proposition 5.2. On a $R_3 \in O(t^{-1-\mu})$ en vertu du lemme C.3. En rassemblant :

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\Theta(t) &\geqslant (r_1-r_0)\frac{1}{t}\chi(L_0)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)(Jj)\left(|\frac{x}{t}-\xi_0|\right)g_+\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)\chi(L_0)\\ &\quad + O(t^{-1-\mu}),\\ \mathbf{D}\Theta(t) &\geqslant R(t)\in L^1(dt).\end{aligned}$$

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\chi(L)\Gamma^+(g)\chi(L) &= e^{it_0L}\Theta(t_0)e^{-it_0L}+\int_{t_0}^{\infty}e^{itL}(\mathbf{D}\Theta(t))e^{-itL}dt\\ &\geqslant e^{it_0L}\Theta(t_0)e^{-it_0L}-\int_{t_0}^{\infty}||R(t)||dt.\end{aligned}$$

En choisissant $t_0$ assez grand, on peut rendre l'intégrale aussi petite qu'on veut. Nous affirmons que

$$\lim_{t_0\to\infty}||e^{it_0L}\Theta(t_0)e^{-it_0L}|| \tag{5.14}$$

est différente de zéro. Soit

$$\begin{aligned}L_{t_0,\xi_0} &= \begin{pmatrix}(a^w_{t_0,\xi_0})^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & -(a^w_{t_0,\xi_0})^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}b^w_{t_0,\xi_0} & -b^w_{t_0,\xi_0}\\ -b^w_{t_0,\xi_0} & b^w_{t_0,\xi_0}\end{pmatrix},\\ a_{t_0,\xi_0}(x,\xi) &= a(x+t_0\xi_0,\xi),\quad b_{t_0,\xi_0}(x,\xi)=b(x+t_0\xi_0,\xi).\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}&e^{it_0\xi_0D}\Theta(t_0)e^{-it_0\xi_0D}\\ &=\chi(L_{t_0,\xi_0})\bar{\chi}((a^w_{t_0,\xi_0})^{\frac{1}{2}})J\left(|\frac{x}{t_0}|\right)g_+^2\left(\frac{D}{|D|},|D|\right)J\left(|\frac{x}{t_0}|\right)\\ &\times\bar{\chi}\left((a^w_{t_0,\xi_0})^{\frac{1}{2}}\right)\chi(L_{t_0,\xi_0}).\end{aligned}$$

Ceci tend fortement vers $\chi(\tilde{L})g_+^2(\frac{D}{|D|},|D|)\chi(\tilde{L})$ qui est clairement différent de zéro si $\chi(\lambda_0)\neq 0$. Mais

$$||e^{it_0L}\Theta(t_0)e^{-it_0L}|| = ||e^{it_0\xi_0D}\Theta(t_0)e^{-it_0\xi_0D}||$$

ce qui montre que (5.14) est différente de zéro et alors $\chi(L)\Gamma^+(g)\chi(L)\neq 0$ et donc $\Gamma^+(g)\neq 0$.

Soit maintenant $g$ comme avant mais le support de $g$ pas nécessairement petit, on ne suppose également pas $g \geqslant 0$. Nous choisissons $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\} \times \mathbb{R})$ avec $f(\xi_0, +, \lambda_0) \neq 0$, $f \geqslant 0, f(.,+,.) \in C_0^\infty(\{|x - \xi_0| < r_0\} \times \mathbb{R})$ et $g \neq 0$ sur le support de $f$. On a

$$\Gamma^+(g)\Gamma^+\Big(\frac{f}{g}\Big) = \Gamma^+(f) \neq 0, \quad \text{alors} \quad \Gamma^+(g) \neq 0.$$

La démonstration de (5.4) est incluse dans la démonstration de (5.5). En effet, si $g \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\})$ avec $g|_{S^{n-1}\times\{+,-\}} = 0$, alors $\gamma^+(g) = 0$ par la proposition 5.2. Pour $g \in C_\infty(\mathbb{R}^n \times \{+,-\})$ avec $g(.,+) \neq 0$, nous choisissons $h \in C_\infty(\mathbb{R})$ tel que $gh|_{S^{n-1}\times\{+\}\times\mathbb{R}^+} \neq 0$. Donc $\Gamma^+(gh) = \gamma^+(g)h(L) \neq 0$, en particulier $\gamma^+(g) \neq 0$. □

## 6. Complétude asymptotique.

Nous allons comparer les deux dynamiques $e^{-itL}$ et $e^{-it\tilde{L}}$, où $\tilde{L}$ est donné par (5.7). Comme nous l'avons déjà annoncé, il faudra renforcer les conditions sur le comportement asymptotique de la métrique afin d'obtenir la complétude asymptotique. Au lieu de (2.25), (2.26) du paragraphe 2.3, nous exigeons maintenant l'existence d'un $\epsilon > 0$ t.q. :

$$a(x,\xi) - \xi^2 \in S^{2,-1-\epsilon}, \tag{6.1}$$

$$b(x,\xi) \in S^{1,-1-\epsilon}. \tag{6.2}$$

THÉORÈME 6.1. — *On a l'existence de*

$$s - \lim_{t\to+\infty} e^{itL}e^{-it\tilde{L}}, \tag{6.3}$$

$$s - \lim_{t\to+\infty} e^{it\tilde{L}}e^{-itL}. \tag{6.4}$$

*Si (6.3) est égale à $\Omega_{\rm sr}^+$, alors (6.4) est égale à $\Omega_{\rm sr}^{+*}$ et on a $\Omega_{\rm sr}^{+*}\Omega_{\rm sr}^+ = \mathbb{1} = \Omega_{\rm sr}^+\Omega_{\rm sr}^{+*}$. De plus,*

$$L = \Omega_{\rm sr}^+\tilde{L}\Omega_{\rm sr}^{+*}, \tag{6.5}$$

$$P^+ = \Omega_{\rm sr}^+ \begin{pmatrix} \frac{D}{|D|} & 0 \\ 0 & -\frac{D}{|D|} \end{pmatrix} \Omega_{\rm sr}^{+*}, \tag{6.6}$$

*en particulier $\sigma_{\rm sc}(L) = \varnothing$ et $(P^+)^2 = \mathbb{1}$.*

*Démonstration.* — Démontrons d'abord l'existence de (6.3). Soit $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ avec $J = 1$ dans un voisinage de 1 et $\chi, \bar{\chi}, \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ t.q.

$\chi\bar{\chi} = \chi$. On pose

$$\Theta(t) := \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(\tilde{L}).$$

Grâce à la proposition 5.2 on a

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{L}}J\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(\tilde{L})e^{-it\tilde{L}} = \chi(\tilde{L}).$$

Par un argument de densité, il suffit de démontrer l'existence de

$$\begin{aligned}
&s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}e^{-it\tilde{L}}\chi^2(\tilde{L})\\
&= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(\tilde{L})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(\tilde{L})e^{-it\tilde{L}}\\
&= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(\tilde{L})\bar{\chi}(\sqrt{-\Delta})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}(\sqrt{-\Delta})\chi(\tilde{L})e^{-it\tilde{L}}\\
&= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(\tilde{L})\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(\tilde{L})e^{-it\tilde{L}}\\
&= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(\tilde{L})e^{-it\tilde{L}}\\
&= s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}\Theta(t)e^{-it\tilde{L}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé plusieurs fois les lemmes C.2, C.3, C.4 et C.5. On calcule :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Theta(t) + iL\Theta(t) - i\Theta(t)\tilde{L}\\
&= -\frac{1}{t}\chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{|x|}{t}\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\chi(\tilde{L})\\
&+ \chi(L)\left[iL, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})\right]\chi(\tilde{L})\\
&+ \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})(iL - i\tilde{L})\bar{\chi}(|D|)\chi(\tilde{L})\\
&= I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Soit $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ avec $\tilde{\chi}\chi = \chi$, $\tilde{\chi}\bar{\chi} = \bar{\chi}$. Utilisant les lemmes C.3 et C.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \chi(L)[iL_0, \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})]\chi(\tilde{L}) + O(t^{-2})\\
&= \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})[i\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})(a^w)^{\frac{1}{2}}\tilde{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}), J\left(\frac{|x|}{t}\right)]\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\\
&\quad\times\bar{\chi}\left((a^w)^{\frac{1}{2}}\right)\chi(\tilde{L}) + O(t^{-2})
\end{aligned}$$

$$= \chi(L_0)\left(\frac{1}{2} < v^w, J'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{x}{|x|t} > +hc\right)\bar{\chi}(|D|)\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\chi(\tilde{L}) + O(t^{-\frac{3}{2}})$$
$$= \chi(L_0)\left(\frac{1}{2} < v^w, J'\left(\frac{|x|}{t}\right)\frac{x}{|x|t} > +hc\right)\begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\chi(\tilde{L}) + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right).$$

On a

$$J\left(\frac{|x|}{t}\right)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})b^w\bar{\chi}(|D|) \in O(t^{-1-\epsilon})$$

par le lemme C.2. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} I_3 = {} & \chi(L)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})J\Big(\frac{|x|}{t}\Big)\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})((a^w)^{\frac{1}{2}} - |D|) \\ & \times \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0\\ 0 & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\bar{\chi}(|D|)\chi(\tilde{L}) + O(t^{-1-\epsilon}). \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})((a^w)^{\frac{1}{2}} - |D|)\bar{\chi}(|D|) = {} & (\bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}})(a^w)^{\frac{1}{2}} - \bar{\chi}(|D|)|D|)\bar{\chi}(|D|) \\ & + (\bar{\chi}(|D|) - \bar{\chi}((a^w)^{\frac{1}{2}}))|D|\bar{\chi}(|D|). \end{aligned}$$

Donc on a $I_3 \in O(t^{-1-\epsilon})$ par les lemmes C.2 et C.4. En rassemblant, on obtient

$$\frac{d}{dt}\Theta(t) + iL\Theta(t) - i\Theta(t)\tilde{L} = \chi(L)j\left(\frac{|x|}{t}\right)B(t)j\left(\frac{|x|}{t}\right)\chi(L) + O(t^{-1-\epsilon})$$

avec $B(t)$ uniformément borné et $j = j_1 + j_2$ avec $j_1$ supportée dans $\{\delta \leqslant |x| \leqslant 1-\delta\}$ et $j_2$ supportée dans $\{|x| \geqslant 1+\delta\}$ ($\frac{1}{2} > \delta > 0$). Ceci est intégrable grâce aux propositions 4.1, 4.3.

Afin de démontrer l'existence de (6.4), nous remarquons d'abord que grâce à la proposition 5.2

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{itL}J\left(\frac{|x|}{t}\right)e^{-itL}\chi(L) = \chi(L).$$

Utilisant un argument de densité, on s'aperçoit qu'il suffit de démontrer l'existence de

$$s - \lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{L}}e^{-itL}\chi^2(L).$$

Ceci est égal à $s - \lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{L}}\Theta^*(t)e^{-itL}$ et l'existence de cette limite suit des mêmes arguments que l'existence de la limite (6.3). Montrons maintenant (6.5). Comme

$$\begin{aligned}\Omega_{\mathrm{sr}}^{+} &= s-\lim_{t\to+\infty} e^{itL}e^{-it\tilde{L}}\\ &= s-\lim_{t\to+\infty} e^{i(t+s)tL}e^{-i(t+s)\tilde{L}}\\ &= e^{isL}\Omega_{\mathrm{sr}}^{+}e^{-is\tilde{L}} \quad \text{on a}\\ \Omega_{\mathrm{sr}}^{+}e^{is\tilde{L}} &= e^{isL}\Omega_{\mathrm{sr}}^{+},\\ \Omega_{\mathrm{sr}}^{+} &: H^1\oplus H^1 \to H^1\oplus H^1.\end{aligned}$$

On obtient (6.5) par la formule de Stone. (6.6) suit de

$$\begin{aligned}&s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}\begin{pmatrix}\frac{D}{|D|} & 0\\ 0 & -\frac{D}{|D|}\end{pmatrix}e^{-itL}\\ &\quad = s-\lim_{t\to\infty} e^{itL}e^{-it\tilde{L}}\begin{pmatrix}\frac{D}{|D|} & 0\\ 0 & -\frac{D}{|D|}\end{pmatrix} s-\lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{L}}e^{-itL}.\end{aligned}$$ □

On pose

$$\tilde{R}=\begin{pmatrix}0 & i\\ i\Delta & 0\end{pmatrix},\quad D(\tilde{R})=H^2\oplus H^1.$$

COROLLAIRE 6.1. — *On a l'existence de*

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{itR}e^{-it\tilde{R}}, \tag{6.7}$$

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{R}}e^{-itR}. \tag{6.8}$$

*Si (6.7) est égale à* $\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+}$, *alors (6.8) est égale à* $\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+*}$ *et on a*

$$\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+*}\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+}=\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+}\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+*}=\mathbb{1},\quad R=\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+}\tilde{R}\Gamma_{\mathrm{sr}}^{+*}.$$

*Démonstration.* — À partir du théorème 6.1, on obtient l'existence des limites

$$\begin{aligned}&s-\lim_{t\to\infty} e^{itR}U^*(a^w)U(-\Delta)e^{-it\tilde{R}},\\ &s-\lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{R}}U^*(-\Delta)U(a^w)e^{-itR}.\end{aligned}$$

Il s'agit alors de démontrer

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{itR}(\mathbb{1}-U^*(a^w)U(-\Delta))e^{-it\tilde{R}}=0, \tag{6.9}$$

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{R}}(\mathbb{1}-U^*(-\Delta)U(a^w))e^{-itR}=0. \tag{6.10}$$

Nous allons démontrer (6.10), la démonstration de (6.9) est analogue. (6.10) est équivalent à

$$s-\lim_{t\to\infty} e^{it\tilde{L}}(U(-\Delta)U^*(a^w)-\mathbb{1})e^{-itL}=0. \tag{6.11}$$

Comme $\sigma_{\mathrm{pp}}(L)=\varnothing$, il suffit de démontrer

$$s-\lim_{t\to\infty}(U(-\Delta)U^*(a^w)-\mathbb{1})e^{-itL}\chi(L)=0$$

pour tout $\chi\in C_0^\infty(]0,\infty[)\cup C_0^\infty(]-\infty,0[)$. Comme $\sigma_{\mathrm{sc}}(L)=\varnothing$, ceci va suivre de

$$(U(-\Delta)U^*(a^w)-\mathbb{1})\chi(L)\quad\text{compact.}$$

Comme $\chi(L)-\chi(L_0)$ est compact (lemme C.5 (iii)), il suffit de démontrer que

$$(U(-\Delta)U^*(a^w)-\mathbb{1})\chi(L_0)\quad\text{est compact.} \tag{6.12}$$

Rappelons que

$$\begin{aligned} U(-\Delta) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{-\Delta} & i\\ \sqrt{-\Delta} & -i\end{pmatrix},\\ U^*(a^w) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}(a^w)^{-\frac12} & (a^w)^{-\frac12}\\ -i & i\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc on a

$$(U(-\Delta)U^*(a^w)-\mathbb{1})=\frac12(\sqrt{-\Delta}(a^w)^{-\frac12}-\mathbf{1})\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}.$$

Nous allons supposer $\chi\in C_0^\infty(]0,\infty[)$. (6.12) va suivre de

$$(\sqrt{-\Delta}-(a^w)^{\frac12})\chi((a^w)^{\frac12})\quad\text{compact.}$$

On pose $\hat{\chi}(\lambda)=\lambda^{\frac12}\chi(\lambda^{\frac12})$. On a

$$(\sqrt{-\Delta}-(a^w)^{\frac12})\chi((a^w)^{\frac12})=\hat{\chi}(-\Delta)-\hat{\chi}(a^w)+\sqrt{-\Delta}(\chi((a^w)^{\frac12})-\chi(\sqrt{-\Delta})).$$

Ceci est un opérateur compact grâce au lemme C.4. □

## A. Estimations de propagation.

Les estimations de propagation abstraites sont dues à Sigal et Soffer. Nous suivons la présentation dans [9] où on peut trouver la démonstration de la proposition suivante :

PROPOSITION A.1. — *Soient $H$ et $A$ deux opérateurs autoadjoints sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On suppose que*

i) *la fonction* $s \mapsto e^{isA}(H+i)^{-1}e^{-isA}$ *appartient à* $C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}, B(\mathcal{H}))$,

ii) *$H, A$ vérifient une estimation de Mourre sur un intervalle $\Delta$ :*

$$\mathbb{1}_\Delta(H)[H, iA]\mathbb{1}_\Delta(H) \geqslant c_0 \mathbb{1}_\Delta(H), \quad c_0 > 0,$$

iii) *il existe un autre opérateur autoadjoint $B$ tel que*

$D(B) \subset D(A)$,

$\pm A \leqslant c_0 B$ *et* $1 \leqslant B$,

$[A, B]B^{-1} \in B(\mathcal{H})$.

*Alors pour tout $f \in C_0^\infty(\Delta)$ et $\epsilon_0 > 0$ assez petit,*

$$\int_1^{+\infty} \left\| F\Big(\frac{B}{t} \leqslant \epsilon_0\Big) f(H) e^{-itH}\Phi \right\|^2 \frac{dt}{t} \leqslant C||\Phi||^2, \quad \forall \Phi \in \mathcal{H}$$

$$\text{et} \quad s - \lim_{t\to+\infty} F\Big(\frac{B}{t} \leqslant \epsilon_0\Big) f(H) e^{-itL} = 0.$$

## B. Opérateurs pseudodifférentiels.

Nous considérons la métrique

$$\gamma(t) = \frac{dx^2}{<x>_t^2} + \frac{d\xi^2}{<\xi>^2} \quad \text{avec} \quad <x>_t^2 = x^2 + t^2 + 1.$$

Nous noterons

$d \in S(f(t) <\xi>^k <x>_t^m, \gamma(t))$ si et seulement si

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta d(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta} f(t) <\xi>^{k-|\alpha|} <x>_t^{m-|\beta|}$,

$d^w \in \Psi(f(t) <\xi>^k <x>_t^m, \gamma(t))$ si et seulement si

$d \in S(f(t) <\xi>^k <x>_t^m, \gamma(t))$.

Nous allons souvent écrire $\gamma$ au lieu de $\gamma(0)$ et $c \in S^{k,m}$ au lieu de $c \in S(<\xi>^k <x>^m, \gamma)$, de même pour $\Psi^{k,m}$.

Les théorèmes et lemmes de cet appendice sont les analogues des théorèmes et lemmes de l'appendice D.6-D.8 de [5]. Les démonstrations sont analogues en ajoutant la décroissance en $\xi$ et en vérifiant l'uniformité des estimations par rapport à $t$.

LEMME B.1. — *Pour tout* $m, k \in \mathbb{R}$,

$$< x >_t^m < D >^k < x >_t^{-m} < D >^{-k}$$

*est borné uniformément en* $t$.

*Démonstration.* — On démontre le lemme d'abord pour le cas où $m$ et $k$ sont des entiers. Après on procède par interpolation. □

Par ce lemme, les définitions suivantes sont équivalentes :

DÉFINITION B.1.

$$\begin{aligned} H_t^{m,k} &:= \{\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) | < x >_t^m < D >^k \Phi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \\ H_t^{m,k} &:= \{\Phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) | < D >^k < x >_t^m \Phi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}. \end{aligned}$$

Nous allons souvent écrire $H^{m,k}$ au lieu de $H_0^{m,k}$. On a le critère de Beals suivant :

THÉORÈME B.1. — *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $A_t$ *est un opérateur sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *t.q.* $ad_D^\alpha ad_x^\beta A_t$ *est borné de* $H_t^{m-|\alpha|,k-|\beta|}$ *dans* $H_t^{0,0}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, m, k \in \mathbb{R}$ *et*

$$||ad_D^\alpha ad_x^\beta A_t||_{H_t^{m-|\alpha|,k-|\beta|} \to H_t^{0,0}} \leqslant C_{\alpha,\beta} f(t).$$

(ii) $A_t$ *est un opérateur sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *t.q.* $ad_D^\alpha ad_x^\beta A_t$ *est borné de* $H_t^{m_0+m-|\alpha|,k_0+k-|\beta|}$ *dans* $H_t^{m_0,k_0}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, m_0, m, k_0, k \in \mathbb{R}$ *et*

$$||ad_D^\alpha ad_x^\beta A_t||_{H_t^{m_0+m-|\alpha|,k_0+k-|\beta|} \to H_t^{m_0,k_0}} \leqslant C_{\alpha,\beta} f(t).$$

(iii) $A_t = a_t^w(x, D)$ *avec* $a_t \in S(f(t) < x >_t^m < \xi >^k, \gamma(t))$.

LEMME B.2. — *Soit* $Q(.)$ *une forme quadratique sur* $(\mathbb{R}^n)' \times \mathbb{R}^n$ *et* $a \in S(< x >_t^k < \xi >^m, \gamma(t))$. *Alors*

$$e^{iQ(D_x, D_\xi)} a \in S(< x >_t^k < \xi >^m, \gamma(t)).$$

On pose

$$\begin{aligned} &S_{\text{pr}}(f(t) < x >_t^m < \xi >^k, \gamma(t)) \\ &:= \ S(f(t) < x >_t^m < \xi >^k, \gamma(t))/S(f(t) < x >_t^{m-1} < \xi >^{k-1}, \gamma(t)). \end{aligned}$$

Pour $a_t \in S(f(t) < x >_t^m < \xi >^k, \gamma(t))$ on note $\sigma_{\text{pr}}(a_t)$ la projection canonique sur $S_{\text{pr}}(f(t) < x >_t^m < \xi >^k, \gamma(t))$.

Si $A_t \in \Psi(f(t) < x >_t^m < \xi >^k, \gamma(t))$ et $A_t = a_t^w(x, D)$, alors on définit le symbole principal de $A_t$ par

$$\sigma_{\mathrm{pr}}(A_t) = \sigma_{\mathrm{pr}}(a_t).$$

On a la proposition suivante :

PROPOSITION B.1.— *Soit* $A_i(t) \in \Psi(f_i(t) < x >_t^{m_i} < \xi >^{k_i}, \gamma(t))$ $i = 1, 2$. *Alors*

$$A_1(t)A_2(t) \in \Psi(f_1(t)f_2(t) < x >_t^{m_1+m_2} < \xi >^{k_1+k_2}, \gamma(t))$$

*et*

$$[A_1(t), A_2(t)] \in \Psi(f_1(t)f_2(t) < x >_t^{m_1+m_2-1} < \xi >^{k_1+k_2-1}, \gamma(t)).$$

*De plus*

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathrm{pr}}(A_1(t)A_2(t))\\ &= \sigma_{\mathrm{pr}}(A_1(t))\sigma_{\mathrm{pr}}(A_2(t)) \in S_{\mathrm{pr}}(f_1(t)f_2(t) < x >_t^{m_1+m_2} < \xi >^{k_1+k_2}, \gamma(t))\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathrm{pr}}([A_1(t), A_2(t)])\\ &= \frac{1}{i}\{\sigma_{\mathrm{pr}}(A_1(t)), \sigma_{\mathrm{pr}}(A_2(t))\}\\ &\in S_{\mathrm{pr}}(f_1(t)f_2(t) < x >_t^{m_1+m_2-1} < \xi >^{k_1+k_2-1}, \gamma(t)).\end{aligned}$$

Soit $S^k$ la classe des symboles sur $\mathbb{R}$, i.e. des fonctions qui vérifient l'estimation suivante :

$$|\partial_t^l f(t)| \leqslant C_k < t >^{k-l}$$

pour $k = 0, 1, 2, \ldots$. Le théorème suivant est un cas particulier de [11, Theorem 1].

THÉORÈME B.2.— *Soit* $a^w \in \Psi(< \xi >^m, \gamma)$ *un opérateur autoadjoint elliptique et* $f \in S^k(\mathbb{R})$. *Alors* $f(a^w) \in \Psi(< \xi >^{km}, \gamma)$ *et le symbole principal de* $f(a^w)$ *est* $f(a)$.

Si le symbole d'un opérateur pseudodifférentiel décroît dans les deux directions, alors l'opérateur associé est compact :

LEMME B.3.— *Soit* $a \in S^{-\delta, -\epsilon}$ *avec* $\delta, \epsilon > 0$. *Alors* $a^w$ *est compact.*

## C. Estimations de commutateurs.

Rappelons d'abord les hypothèses sur les opérateurs pseudodifférentiels intervenant dans l'article. Les symboles $a$ et $b$ vérifient ($\epsilon > 0$) :

$$a(x,\xi) - \xi^2 \in S^{2,-\epsilon}, \quad b(x,\xi) \in S^{1,-\epsilon}.$$

Pour $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]0,\infty[)$ resp. $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(]-\infty,0[)$, on avait posé

$$\tilde{g}(\lambda) = \tilde{\chi}(\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}\tilde{\chi}(\sqrt{\lambda}) \quad \text{resp.} \quad \tilde{g}(\lambda) = -\tilde{\chi}(-\sqrt{\lambda})\sqrt{\lambda}\tilde{\chi}(-\sqrt{\lambda}).$$

On avait également posé

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \begin{pmatrix} |D| & 0 \\ 0 & -|D| \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} (a^w)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -(a^w)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \\ L_1 &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -b^w & b^w \\ b^w & -b^w \end{pmatrix}, \quad L = L_0 + L_1. \end{aligned}$$

LEMME C.1. — *Soient* $c, d \in S(<x>^k<\xi>^m, \gamma)$ *et* $[c^w, d^w] = e^w$. *Alors*

$$\begin{aligned} e(x,\xi) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\nabla_x c(x+\tau D_\xi, \xi - \tau D_x) D_\xi \\ &\quad - \nabla_\xi c(x+\tau D_\xi, \xi-\tau D_x) D_x) d\tau d(x,\xi) \\ &= \frac{1}{i}\{c,d\}(x,\xi) + \Gamma d(x,\xi), \ \text{où} \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned} \Gamma := \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - |\tau|\right)^2 d\tau \Big( &\sum_{|\alpha|=3} \partial_x^\alpha c(x+\tau D_\xi, \xi-\tau D_x) D_\xi^\alpha \\ -3 &\sum_{|\alpha|=2,|\beta|=1} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c(x+\tau D_\xi, \xi-\tau D_x) D_\xi^\alpha D_x^\beta \\ +3 &\sum_{|\alpha|=1,|\beta|=2} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta c(x+\tau D_\xi, \xi-\tau D_x) D_\xi^\alpha D_x^\beta \\ - &\sum_{|\beta|=3} \partial_\xi^\beta c(x+\tau D_\xi, \xi-\tau D_x) D_x^\beta \Big). \end{aligned} \tag{C.2}$$

*Démonstration.* — Il faut comprendre l'identité comme identité entre opérateurs agissants sur $\mathcal{S}$. On peut alors développer le membre de gauche :

$[c^w, d^w] = e^w$ avec

$$\begin{aligned} e(x,\xi) &= e^{\frac{i}{2}(<D_{x_1},D_{\xi_2}>-<D_{x_2},D_{\xi_1}>)} c(x_1,\xi_1)d(x_2,\xi_2)|_{x=x_1=x_2,\xi=\xi_1=\xi_2} \\ &\quad - e^{\frac{i}{2}(<D_{x_1},D_{\xi_2}>-<D_{x_2},D_{\xi_1}>)} d(x_1,\xi_1)c(x_2,\xi_2)|_{x=x_1=x_2,\xi=\xi_1=\xi_2} \\ &= : \mathcal{F}(c,d)(x,\xi). \end{aligned}$$

On pose $\mathcal{G}(c,d)(x,\xi) := e(x,\xi)$. Maintenant on remarque que grâce au théorème 18.4.10 de [12], $(c,d) \to (\mathcal{F}(c,d) - \mathcal{G}(c,d))(x,\xi)$ est faiblement continue au sens de la définition 18.4.9 de [12]. Il est bien connu que $\mathcal{F} - \mathcal{G} = 0$ sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. L'affirmation suit du fait qu'une forme faiblement continue est uniquement déterminée par sa restriction sur $C_0^\infty$. □

Le lemme suivant permet de se ramener à un cas où les deux opérateurs possèdent un symbole dans une classe dépendante d'un paramètre. Ceci évite d'utiliser la formule explicite du lemme C.1. Nous notons $C_b^\infty(Y)$ l'ensemble des fonctions $C^\infty$ et bornées avec toutes leurs dérivées sur $Y$.

LEMME C.2. — *Soit $c \in S(1,\gamma)$ et $J \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $J = 0$ dans un voisinage de zéro. Alors il existe $\tilde{J} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{J} = 0$ dans un voisinage de zéro avec $J\tilde{J} = J$ et*

$$c^w J\left(\frac{x}{t}\right) = \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right) c^w J\left(\frac{x}{t}\right) + O(t^{-\infty}).$$

*Démonstration.* — Soit $J = 0$ sur $B_{4\epsilon}(0)$ et $\tilde{J} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $\tilde{J} = 0$ sur $B_\epsilon(0)$ et $\tilde{J} = 1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\epsilon}(0)$, en particulier $J\tilde{J} = J$. On a :

$$\begin{aligned} &\left(1 - \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right)\right) c^w J\left(\frac{x}{t}\right) u \\ &= \int\int e^{i<x-y,\xi>} \left(1 - \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right)\right) c\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) J\left(\frac{y}{t}\right) u(y)dyd\xi. \end{aligned}$$

Soit $L_\xi = \frac{<x-y,D_\xi>}{|x-y|^2}$, alors ${}^tL_\xi e^{i<x-y,\xi>} = e^{i<x-y,\xi>}$, donc

$$\begin{aligned} &\left(1 - \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right)\right) c^w J\left(\frac{x}{t}\right) u \\ &\qquad = \iint e^{i<x-y,\xi>} \left(1 - \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right)\right) L_\xi^m c\left(\frac{x+y}{2},\xi\right) J\left(\frac{y}{t}\right) u(y)dyd\xi. \end{aligned}$$

On a :

$$\frac{|y|}{t} \leqslant 4\epsilon \Rightarrow J\left(\frac{y}{t}\right) = 0,$$
$$\frac{|x|}{t} \geqslant 2\epsilon \Rightarrow 1 - \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{|y|}{t} \geqslant 4\epsilon \quad \text{et} \quad \frac{|x|}{t} \leqslant 2\epsilon\right) \Rightarrow \frac{|x-y|}{t} \geqslant 2\epsilon.$$

Alors ($m$ suffisamment grand) :

$$\begin{aligned}
&\left|\left|\left(1 - \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right)\right) c^w J(\frac{x}{t})u\right|\right|^2 \\
&= \int_{\frac{|x|}{t} \leqslant 2\epsilon} \left| \iint e^{i<x-y,\xi>} \left(1 - \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right)\right) L_\xi^m c\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) J\left(\frac{y}{t}\right) u(y) dy d\xi \right|^2 dx \\
&\leqslant C \int_{\frac{|x|}{t} \leqslant 2\epsilon} \left| \int_{\frac{|x-y|}{t} \geqslant 2\epsilon} \frac{1}{|x-y|^m} |u(y)| dy \right|^2 dx \\
&\leqslant C \left( \int_{\frac{|x|}{t} \leqslant 2\epsilon} \left( \int_{\frac{|x-y|}{t} \geqslant 2\epsilon} \frac{1}{|x-y|^{2m}} dy \right) dx \right) ||u||^2 \leqslant C t^{2(n-m)} ||u||^2.
\end{aligned}$$

$m$ étant arbitraire, ceci donne le résultat. □

Le lemme suivant décrit une situation que l'on rencontre souvent au cours de l'article. Il dit essentiellement que, dans la situation décrite, il suffit de calculer le crochet de Poisson pour calculer le commutateur.

LEMME C.3. — *Soit* $0 \geqslant k \geqslant -1$, $c \in S(< x >^k, \gamma)$, $m_i \in S(1, \gamma)$ $(i = 1, ..., l)$, $J_i \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ *avec* $J_i = 0$ *dans un voisinage de zéro ou* $J_i = 1$. *Supposons qu'il existe* $i \in \{1, ..., l\}$ *avec* $J_i = 0$ *dans un voisinage de zéro. Soit*

$$\begin{aligned}
M_t &:= J_1\left(\frac{x}{t}\right) m_1^w J_2\left(\frac{x}{t}\right) ...... J_l\left(\frac{x}{t}\right) m_l^w, \\
m_t(x,\xi) &:= J_1\left(\frac{x}{t}\right) m_1(x,\xi) J_2\left(\frac{x}{t}\right) ...... J_l\left(\frac{x}{t}\right) m_l(x,\xi).
\end{aligned}$$

*Alors*

(i) $[c^w, M_t] \in O(t^{k-1})$,

(ii) $[i\tilde{g}(a^w), M_t] = (\{\tilde{g}(a), m_t\})^w + O(t^{-2})$.

*Démonstration.* — (i) En utilisant le lemme C.2, on peut toujours supposer $J_1, ..., J_l \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec $J_i = 0$ dans un voisinage de zéro $(1 \leqslant i \leqslant l)$ et $m_l = 1$. De nouveau par le lemme C.2, on a

$$[c^w, M_t] = \left[\tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right) c^w \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right), M_t\right] + O(t^{-\infty})$$

avec $\tilde{J}J_i = J_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l)$. Remarquons aussi que par [5, Proposition D.4.5], le lemme C.2 et la proposition B.1,

$$\begin{aligned} M_t &= m_t^w + k_t^w \quad \text{avec} \quad k_t \in S(<x>_t^{-1}, \gamma(t)), \\ \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right) c^w \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right) &= c_t^w + O(t^{-2}) \quad \text{avec} \quad c_t(x,\xi) = \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right) c(x,\xi) \tilde{J}\left(\frac{x}{t}\right). \end{aligned}$$

On a clairement $c_t \in S(<x>_t^k, \gamma(t))$ et $m_t \in S(1, \gamma(t))$ ce qui donne

$$\begin{aligned} &[c_t^w, m_t^w] \in \Psi(<x>_t^{k-1}, \gamma(t)), \\ &[c_t^w, k_t^w] \in \Psi(<x>_t^{k-2}, \gamma(t)) \qquad \text{(proposition B.1)}. \end{aligned}$$

En rassemblant :

$$[c^w, M_t] = [c_t^w, m_t^w] + O(t^{k-2}) = O(t^{k-1}).$$

(ii) Grâce au théorème B.2, on a

$$\tilde{g}(a^w) = (\tilde{g}(a))^w + d^w \quad \text{avec} \quad d \in S^{0,-1}.$$

Grâce à la partie (i) du lemme, $[d^w, M_t] \in O(t^{-2})$. Alors

$$[i\tilde{g}(a^w), M_t] = [ig_t^w, m_t^w] + O(t^{-2})$$

avec $g_t(x,\xi) = \tilde{J}(\frac{x}{t})\tilde{g}(a(x,\xi))\tilde{J}(\frac{x}{t})$ et $\tilde{J}$ comme dans la démonstration de la partie $(i)$. Nous utilisons le lemme C.1. Considérons d'abord $\Gamma_{g_t} m_t$. Soit $|\alpha| + |\beta| = 3$. On a :

$$\begin{aligned} &\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g_t \in S(<x>_t^{-|\alpha|} <\xi>^{-\infty}, \gamma(t)) \quad \text{et} \\ &\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta m_t \in S(<x>_t^{-|\beta|} <\xi>^{-|\alpha|}, \gamma(t)), \end{aligned}$$

ce qui donne en utilisant le lemme B.2 :

$$\begin{aligned} &\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g_t(x + \tau D_\xi, \xi - \tau D_x) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta m_t \\ &\quad = e^{i\tau(<D_x, D_\eta> - <D_y, D_\xi>)} \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta g_t(x,\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta m_t(y,\eta)|_{x=y,\xi=\eta} \\ &\qquad \in S(<x>_t^{-3} <\xi>^{-\infty}, \gamma(t)). \end{aligned}$$

Alors $(\Gamma_{g_t} m_t)^w \in O(t^{-3})$. On termine en remarquant que $\{g_t, m_t\} = \{\tilde{g}(a), m_t\}$ puisque $\tilde{J} = 1$ sur $\mathrm{supp} J_i \quad (1 \leqslant i \leqslant l)$. □

Les lemmes suivants comparent dans un certain sens $a^w, -\Delta$ resp. $L, L_0$ et $\tilde{L}$.

LEMME C.4. — *Soit* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $J \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $J = 0$ *dans un voisinage de zéro et* $\alpha \in \mathbb{N}$. *Alors*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad \sigma_{\text{pr}}(\chi(a^w) - \chi(-\Delta)) = \chi(a(x,\xi)) - \chi(|\xi|^2) \in S^{-\infty,-\epsilon}, \\ &\text{(ii)} \quad (-\Delta)^\alpha(\chi(a^w) - \chi(-\Delta)) \quad \textit{est compact}, \\ &\text{(iii)} \quad (-\Delta)^\alpha(\chi(a^w) - \chi(-\Delta))J\Big(\frac{|x|}{t}\Big) \in O(t^{-\epsilon}). \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer (i). (ii) suit par la proposition B.1 et le lemme B.3. (iii) suit de (i) par la proposition B.1. La première égalité dans (i) suit du théorème B.2. Ensuite on a

$$\begin{aligned} &\chi(a(x,\xi)) - \chi(|\xi|^2) \\ &= \int_0^1 \chi'(\tau a(x,\xi) + (1-\tau)|\xi|^2) d\tau (a(x,\xi) - |\xi|^2) \in S^{-\infty,-\epsilon}. \end{aligned}$$ □

LEMME C.5. — *Soit* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *et* $J \in C_b^\infty(\mathbb{R})$, $J = 0$ *dans un voisinage de zéro. Alors*

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad (a) \quad (\chi(L) - \chi(L_0))J(\frac{x}{t}) \in O(t^{-\min\{\frac{1}{2},\epsilon\}}), \\ &\qquad\ \ (b) \quad (\chi(\tilde{L}) - \chi(L_0))J(\frac{x}{t}) \in O(t^{-\min\{\frac{1}{2},\epsilon\}}), \\ &\text{(ii)} \qquad\quad \left[\chi(L), \begin{pmatrix} J(\frac{x}{t}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \in O(t^{-\min\{\frac{1}{2},\epsilon\}}), \\ &\text{(iii)} \quad (a) \quad \chi(L) - \chi(L_0) \quad \textit{compact}, \\ &\qquad\ \ (b) \quad \chi(\tilde{L}) - \chi(L_0) \quad \textit{compact}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* — Soit $\tilde{\chi}$ une extension presque analytique de $\chi$ avec

$$\tilde{\chi}|_{\mathbb{R}} = \chi, \quad |\bar{\partial}\tilde{\chi}(z)| \leqslant C_N|\text{Im}z|^N, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

(i)$(a)$ Par la formule de Helffer-Sjöstrand,

$$\begin{aligned} &(\chi(L) - \chi(L_0))J(\frac{x}{t}) \\ &= \frac{i}{2\pi}\int \bar{\partial}\tilde{\chi}(z)(z-L)^{-1}\begin{pmatrix} b^w & -b^w \\ -b^w & b^w \end{pmatrix} J(\frac{x}{t})(z-L_0)^{-1} dz \wedge d\bar{z} \\ &+ \frac{i}{2\pi}\int \bar{\partial}\tilde{\chi}(z)(z-L)^{-1}\begin{pmatrix} b^w & -b^w \\ -b^w & b^w \end{pmatrix}(z-L_0)^{-1} \\ &\times [L_0, J(\frac{x}{t})](z-L_0)^{-1} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Comme le prĕmier terme est clairement d'ordre $O(t^{-\epsilon})$, il suffit alors de démontrer

(C.3) $$(z-(a^w)^{\frac{1}{2}})^{-1}\Big[(a^w)^{\frac{1}{2}}, J\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big] \in O(t^{-\frac{1}{2}}|\mathrm{Im}z|^{-1}).$$

On a

$$\begin{aligned}(a^w)^{\frac{1}{2}} &= (a^w+t^{-2\delta})^{\frac{1}{2}} + O(t^{-\delta}),\\ (a^w+t^{-2\delta})^{\frac{1}{2}} &= (a^w+t^{-2\delta})\pi^{-1}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}(a^w+t^{-2\delta}+s)^{-1}ds,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}&(z-(a^w)^{\frac{1}{2}})^{-1}\Big[(a^w+t^{-2\delta})^{\frac{1}{2}}, J\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big]\\ &= (z-(a^w)^{\frac{1}{2}})^{-1}\Big[a^w, J\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big]\pi^{-1}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}(a^w+t^{-2\delta}+s)^{-1}ds\\ &+ (a^w+t^{-2\delta})\pi^{-1}\int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}}(a^w+t^{-2\delta}+s)^{-1}(z-(a^w)^{\frac{1}{2}})^{-1}\\ &\times \Big[a^w, J\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big](a^w+t^{-2\delta}+s)^{-1}ds.\end{aligned}$$

En utilisant

$$(z-(a^w)^{\frac{1}{2}})^{-1}\Big[a^w, J\Big(\frac{x}{t}\Big)\Big] \in O(t^{-1}|\mathrm{Im}z|^{-1})$$

on obtient $O(|\mathrm{Im}z|^{-1}t^{\min\{-1+\delta,-\delta\}})$. L'affirmation suit alors en choisissant $\delta=\frac{1}{2}$. La démonstration de $(i)(b)$ est analogue.

(ii) Soit

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned}\Big[\chi(L), J\Big(\frac{x}{t}\Big)E\Big] &= \int \bar\partial\tilde\chi(z)(z-L)^{-1}[L, J(\frac{x}{t})E](z-L)^{-1}dz\wedge d\bar z,\\ \Big[L, J\Big(\frac{x}{t}\Big)E\Big] &= \begin{pmatrix} [(a^w)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}b^w, J(\frac{x}{t})] & -\frac{1}{2}J(\frac{x}{t})b^w\\ \frac{1}{2}b^wJ(\frac{x}{t}) & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

L'affirmation suit de (C.3).

(iii)(a) On a

$$\begin{aligned}&\chi(L)-\chi(L_0)\\ &= \frac{i}{4\pi}\int \frac{\partial}{\partial\bar z}\tilde\chi(z)(z-L)^{-1} < D >< D >^{-1}\begin{pmatrix} b^w & -b^w\\ -b^w & b^w\end{pmatrix}\\ &\times < D >^{-1}< D > (z-L_0)^{-1}dz\wedge d\bar z.\end{aligned}$$

On termine en remarquant que $< D >^{-1} b^w < D >^{-1}$ compact. La démonstration de (iii)(b) est analogue. □

*Remerciements.* — Je remercie vivement mon directeur de thèse C. Gérard de m'avoir suggéré le sujet et de m'avoir guidé dans mes recherches. Je remercie également J.-P. Nicolas et Z. Ammari pour des discussions fructueuses.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] W. Amrein, A. Boutet de monvel, V. Georgescu, $C_0$-groups, commutator methods and spectral theory of N-body hamiltonians, Birkhäuser Verlag, 1996

[2] N. Aronszajn, A unique continuation theorem for solutions of elliptic partial differential equations or inequalities of second order, J. Math. Pur. Appl., (9) 36 (1957), 235-249

[3] A. Bachelot, Asymptotic completeness for the Klein-Gordon equation on the Schwarzschild metric, Ann. I.H.P., Phys. Théorique, 61 (1994), 411-441

[4] S. Debièvre, P. Hislop, I.M. Sigal, Scattering theory for the wave equation on non-compact manifolds, Rev. Math. Phys., 4 (1992), 575-618

[5] J. Dereziński, C. Gérard, Scattering theory of classical and quantum N-particle systems, Springer, 1997

[6] J. Dimock, Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric, Gen. Rel. Grav., 17 (1985), 353-369

[7] R. Froese, P. Hislop, Spectral analysis of second-order elliptic operators on noncompact manifolds, Duke Math. J., 58 (1989), 103-129

[8] V. Georgescu, C. Gérard, On the virial theorem in quantum mechanics, Comm. Math. Phys., 208 (1999), 275-281

[9] C. Gérard, F. Nier, Scattering theory for the perturbations of periodic Schrödinger operators, J. Math. Kyoto Univ., 38 (1998), 595-634

[10] R.P. Geroch, The domain of dependence, J. Math. Phys., 11 (1970), 437-449

[11] A. Hassell, A. Vasy, Symbolic functional calculus of N body resolvent estimates, J. Funct. Anal., 173 (2000), 257-283

[12] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators 3, Springer, 1985

[13] T. Ikebe, J. Uchiyama, On the asymptotic behavior of eigenfunctions of second-order elliptic operators, J. Math. Kyoto Univ., 11 (1971), 425-448

[14] B. S. Kay, Linear spin-zero quantum fields in external gravitational and scalar fields, Comm. Math. Phys., 62 (1978), 55-70

[15] E. MOURRE, Absence of singular continous spectrum for certain self-adjoint operators, Comm. Math. Phys., 78 (1981), 391-408

[16] S. REED, B. SIMON, Methods of modern mathematical physics 2 : Fourier Analysis, self adjointness, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975

Manuscrit reçu le 10 novembre 2000,
accepté le 20 décembre 2000.

Dietrich HÄFNER,
École Polytechnique
Centre de Mathématiques
F-91128 Palaiseau Cedex (France).
dhaefner@math.polytechnique.fr
et
Université de Tours
Laboratoire de Mathématiques
et Physique Théorique
Parc de Grandmont
F-37200 Tours (France).
dietrich@gargan.math.univ-tours.fr