

ROSE-MARIE HERVÉ

Un principe du maximum pour les sous-solutions locales d'une équation uniformément elliptique de la forme $Lu = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) = 0$

Annales de l'institut Fourier, tome 14, n° 2 (1964), p. 493-507

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_493_0

© Annales de l'institut Fourier, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**UN PRINCIPE DU MAXIMUM
POUR LES SOUS-SOLUTIONS LOCALES
D'UNE ÉQUATION UNIFORMÉMENT ELLIPTIQUE
DE LA FORME**

$$Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0.$$

par **Rose-Marie HERVÉ**

On sait que les fonctions φ , limites dans $L^2(\Omega)$ ainsi que leurs dérivées partielles premières, de fonctions $\in \mathcal{D}(\Omega)$, jouent le rôle de fonctions « nulles à la frontière ». Le principe du maximum démontré dans cet article est le suivant : une sous-solution locale de $Lu = 0$ dans l'ouvert Ω , majorée p.p. au voisinage de la frontière par une fonction φ , est ≤ 0 p.p. dans Ω (th. 1).

Puis, en utilisant des propriétés maintenant classiques des solutions locales de $Lu = 0$, on montre qu'elles constituent un système de fonctions harmoniques satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot, ce qui permet de parler de fonctions sous-harmoniques et de problème de Dirichlet au sens de Perron-Wiener-Brelot. La question se posait alors de comparer la solution du problème de Dirichlet à celle construite par Littman, Stampacchia et Weinberger dans un article récent [4].

Comme conséquences du th. 1, on démontre d'abord un principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques : une fonction sous-harmonique dans un ouvert Ω , majorée au voisinage de la frontière par une fonction φ s.c.i., est

≤ 0 dans Ω (th. 2); puis on montre que la solution du problème de Dirichlet, correspondant à une donnée sur $\partial\Omega$ prolongeable en une fonction f continue sur $\bar{\Omega}$ et dont les dérivées partielles premières $\in L^2(\Omega)$, n'est autre que la solution de $Lu = 0$ dans Ω , telle que $u-f$ soit une fonction φ (th. 3).

Notations.

Ω est un domaine borné de l'espace euclidien R^n .

L'opérateur $Lu = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$ satisfait aux hypothèses suivantes : $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ sont des fonctions mesurables dans Ω et, $\forall x \in \Omega$:

$$\frac{1}{\lambda} \sum_i \xi_i^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda \sum_i \xi_i^2,$$

où $\lambda \geq 1$; de là résulte que les a_{ij} sont bornés.

$W^{1,q}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in L^q(\Omega)$, $q \geq 1$, telles que $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^q(\Omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, muni de la norme

$$\|f\|_{W^{1,q}(\Omega)} = \|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\text{grad } f\|_{L^q(\Omega)}.$$

$W_{loc}^{1,q}(\Omega)$ est l'espace des $f \in W^{1,q}(\Omega')$ pour tout ouvert $\Omega' \subset \bar{\Omega} \subset \Omega$.

$W_0^{1,q}(\Omega)$ est l'adhérence, dans $W^{1,q}(\Omega)$, de $\mathcal{D}(\Omega)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω); c'est aussi l'adhérence, dans $W^{1,q}(\Omega)$, des fonctions $\in W^{1,q}(\Omega)$ à support compact dans Ω . Pour les fonctions $f \in W_0^{1,q}(\Omega)$, la norme de $W^{1,q}(\Omega)$ est équivalente à $\|\text{grad } f\|_{L^q(\Omega)}$, notée $\|f\|_{W_0^{1,q}(\Omega)}$.

$C^0(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$ et $C^1(\bar{\Omega})$ l'espace des fonctions $\in C^0(\bar{\Omega})$, dont les dérivées partielles premières dans Ω sont prolongeables continûment dans $\bar{\Omega}$.

Une solution (resp. une solution locale) de $Lu = 0$ dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W_{loc}^{1,2}(\Omega)$) telle que

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou encore $\forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (resp. $\forall \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ à support compact

dans Ω); une sous-solution (resp. une sous-solution locale) dans Ω est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ (resp. $W^{1,2}_{loc}(\Omega)$) telle que

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \leq 0, \forall \varphi \geq 0 \text{ et } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou encore $\forall \varphi \geq 0$ et $\varphi \in W^{1,2}_0(\Omega)$ (resp. $\forall \varphi \geq 0, \varphi \in W^{1,2}(\Omega)$ et à support compact dans Ω).

Plus généralement, une solution de l'équation

$$Lu = - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

dans Ω , où $f_1, f_2 \dots f_n \in L^2(\Omega)$, est une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega)$ telle que $\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \sum_i f_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

1. Un principe du maximum pour les sous-solutions.

LEMME 1. — L'application $f \rightarrow |f|$ de $W^{1,q}(\Omega)$ dans lui-même est continue.

$f \in W^{1,q}(\Omega)$ entraîne $|f| \in W^{1,q}(\Omega)$, car $\frac{\partial |f|}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} (\chi_{A^+} - \chi_{A^-})$, où $A^+ = \{x \in \Omega | f(x) > 0\}$, $A^- = \{x \in \Omega | f(x) < 0\}$ et χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A.

Soit f_n tendant vers f dans $W^{1,q}(\Omega)$. On a :

$$\| |f_n| - |f| \|_{L^q(\Omega)} \leq \| f_n - f \|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |f_n|}{\partial x_i} - \frac{\partial |f|}{\partial x_i} &= \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\chi_{A_n^+} - \chi_{A_n^-}) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial x_i} (\chi_{A_n^+} - \chi_{A^+} - \chi_{A_n^-} + \chi_{A^-}); \end{aligned}$$

pour le premier terme de la somme :

$$\left\| \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\chi_{A_n^+} - \chi_{A_n^-}) \right\|_{L^q(\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^q(\Omega)} \rightarrow 0;$$

comme le second terme est majoré en valeur absolue par $2 \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \in L^q(\Omega)$, il suffit d'extraire de la suite n une suite partielle

n' pour laquelle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\chi_{A_n^+} - \chi_{A^+} - \chi_{A_n^-} + \chi_{A^-}) \rightarrow 0$ p.p. dans Ω : on choisit une suite partielle telle que $f_{n'} \rightarrow f$ p.p. dans Ω , et on remarque que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ p.p. sur $\Omega - (A^+ \cup A^-)$.

Conséquence : si $f_n \rightarrow f$ et $g_n \rightarrow g$ dans $W^{1,q}(\Omega)$, alors $\inf(f_n, g_n) \rightarrow \inf(f, g)$ et $\sup(f_n, g_n) \rightarrow \sup(f, g)$ dans $W^{1,q}(\Omega)$.

LEMME 2. — Soit $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$, et $f \in W^{1,q}(\Omega)$, ≥ 0 p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ (c'est-à-dire sur $\Omega - \text{un compact } \subset \Omega$). Alors $\inf(\varphi, f) \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

φ est limite dans $W^{1,q}(\Omega)$ d'une suite de fonctions $\varphi_n \in W^{1,q}(\Omega)$, nulles au voisinage de $\partial\Omega$; donc $\inf(\varphi, f)$ est limite, dans $W^{1,q}(\Omega)$, des fonctions $\inf(\varphi_n, f)$, qui sont nulles p.p. au voisinage de $\partial\Omega$; par suite $\inf(\varphi, f) \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Conséquence : si $\varphi \in W_0^{1,q}(\Omega)$, φ^+ et φ^- aussi.

LEMME 3. — Soit $f \in W^{1,q}(\Omega)$. S'il existe une fonction $\varphi \in W_0^{1,q}$ telle que $0 \leq f \leq \varphi$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$, alors $f \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

D'après le lemme 2, $\inf(\varphi, f) \in W_0^{1,q}(\Omega)$, donc aussi f qui lui est égal p.p. au voisinage de $\partial\Omega$.

Une application du lemme 3 est la suivante : une fonction $\in W^{1,q}(\Omega)$, $\geq m > 0$ au voisinage de $\partial\Omega$, n'appartient pas à $W_0^{1,q}(\Omega)$.

En effet, une constante non nulle $\notin W_0^{1,q}(\Omega)$.

LEMME 4. ⁽¹⁾ — Soit u une sous-solution dans Ω , majorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Alors $u \leq 0$ p.p. dans Ω .

$\varphi^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, et $u \leq \varphi$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ entraîne $u^+ \leq \varphi^+$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$; donc $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$ (lemme 3). On peut le porter dans la définition des sous-solutions dans Ω :

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \frac{\partial u^+}{\partial x_j} dx \leq 0,$$

⁽¹⁾ Ce principe du maximum sera étendu aux sous-solutions locales; c'est pourquoi, malgré ses conséquences, on ne l'énonce qu'en lemme.

donc aussi $\sum_i \left\| \frac{\partial u^+}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0$ en utilisant l'hypothèse d'uniforme ellipticité.

On en déduit : $u^+ =$ une constante p.p. dans Ω , et cette constante est 0 car $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Remarque. — Plus généralement, si u est une sous-solution dans Ω , telle que $u \leq M +$ une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ p.p. au voisinage de $\partial\Omega$, alors $u \leq M$ p.p. dans Ω .

Conséquences du lemme 4.

1) On retrouve (corollaire ci-dessous) le principe du maximum démontré par Littman, Stampacchia et Weinberger [4], et utilisant la notion de « fonction ≥ 0 sur $\partial\Omega$ au sens de $H^{1,q}(\Omega)$ » : $H^{1,q}(\Omega)$ étant l'adhérence de $C^1(\bar{\Omega})$ dans $W^{1,q}(\Omega)$, une fonction $u \in H^{1,q}(\Omega)$ est ≥ 0 sur $\partial\Omega$ au sens de $H^{1,q}(\Omega)$, si elle est limite, dans $W^{1,q}(\Omega)$, d'une suite de fonctions $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$, ≥ 0 sur $\partial\Omega$.

COROLLAIRE. — Une sous-solution dans Ω , $\in H^{1,2}(\Omega)$ et ≤ 0 sur $\partial\Omega$ au sens de $H^{1,2}(\Omega)$, est ≤ 0 p.p. dans Ω .

Soit u une telle fonction; elle est limite dans $W^{1,2}(\Omega)$ d'une suite de fonctions $u_n \in C^1(\bar{\Omega})$, qu'on peut rendre < 0 sur $\partial\Omega$, donc ≤ 0 au voisinage de $\partial\Omega$. Alors $u_n^+ \rightarrow u^+$ dans $W^{1,2}(\Omega)$ et chaque u_n^+ est une fonction $\in W^{1,2}(\Omega)$, à support compact dans Ω . Par suite, $u^+ \in W_0^{1,2}(\Omega)$, et $u, \leq u^+$ dans Ω , satisfait aux hypothèses du lemme 4.

2) On peut aussi déduire du lemme 4 un autre principe du maximum, valable pour les sous-solutions locales :

PROPOSITION 1. — Si une sous-solution locale u dans Ω est telle que, pour chaque $y \in \partial\Omega$, $\limsup_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow y}} \text{ess}^{(2)} u(x) \leq 0$, alors $u \leq 0$ p.p. dans Ω .

L'hypothèse entraîne, pour chaque $\varepsilon > 0$, l'existence d'un voisinage V de $\partial\Omega$ tel que $u \leq \varepsilon$ p.p. dans $V \cap \Omega$. Si Ω' est un ouvert de Ω , tel que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ et V voisinage de $\partial\Omega'$, le lemme 4, appliqué à $u - \varepsilon$ dans Ω' , donne $u - \varepsilon \leq 0$ p.p. dans Ω' , donc aussi p.p. dans Ω , et ceci quel que soit $\varepsilon > 0$.

(2) C'est-à-dire la borne inférieure, quand V décrit le filtre des voisinages de y , du sup. ess. de u sur $V \cap \Omega$.

2. Énoncés de théorèmes connus ⁽³⁾.

1) Propriétés des solutions locales de $Lu = 0$.

Une propriété bien connue des solutions locales est la suivante (cf. par exemple [7]) :

LEMME. — Soit u une solution locale de $Lu = 0$ dans Ω . Pour toute boule $B(y, R)$, de centre y et de rayon R , contenue dans Ω :

$$\sum_i \int_{B(y, R-\sigma)} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \frac{4\lambda^4}{\sigma^2} \int_{B(y, R)} u^2 dx, \quad \forall \sigma > 0 \text{ et } < R.$$

Plus généralement, pour tout compact $K \subset \Omega$, si σ est un nombre > 0 , et $<$ la distance de K à $\partial\Omega$, et K' l'ensemble des points dont la distance à K est $\leq \sigma$:

$$\sum_i \int_K \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx \leq \frac{4\lambda^4}{\sigma^2} \int_{K'} u^2 dx.$$

Les deux propriétés essentielles des solutions locales sont, d'une part leur continuité, d'autre part une propriété de Harnack pour les solutions ≥ 0 :

THÉORÈME A [2, 9, 7]. — Une solution locale de $Lu = 0$ dans Ω est localement lipschitzienne dans Ω . Plus précisément, si $\int_{\Omega} u^2 dx \leq 1$, pour chaque compact $K \subset \Omega$, il existe deux constantes α et $\beta > 0$, dépendant seulement de n, λ, K et Ω , telles que

$$|u(x) - u(x')| \leq \beta |x - x'|^\alpha \quad \forall x \text{ et } x' \in K.$$

THÉORÈME B [8]. — Si u est une solution locale ≥ 0 de $Lu = 0$ dans Ω , pour tout compact $K \subset \Omega$:

$$\sup_K u \leq c \inf_K u,$$

où c est une constante > 0 dépendant seulement de n, λ, K et Ω .

2) Existence et unicité de la solution d'un problème aux limites du type de Dirichlet.

⁽³⁾ Ce rappel est directement inspiré de celui donné dans [4].

Pour un domaine borné Ω quelconque, on a le théorème suivant :

THÉORÈME C [5]. — Soit $f_i, i = 1, 2, \dots, n$, n fonctions $\in L^2(\Omega)$. Étant donné $f \in W^{1,2}(\Omega)$, il existe une fonction u unique, solution de $Lu = - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ dans Ω , et telle que

$$u - f \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

En outre :

$$\|u - f\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \leq \lambda \sum_i \left\| f_i - \sum_j a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

où λ est la constante d'uniforme ellipticité de l'opérateur L .

En particulier, en prenant $f_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$, le théorème C associe à chaque $f \in W^{1,2}(\Omega)$, une solution unique de $Lu = 0$ dans Ω , notée $L^\Omega f$ dans la suite.

Si la frontière de Ω est assez régulière, par exemple pour des boules β , on peut préciser l'allure à la frontière de la solution donnée par le théorème C :

THÉORÈME D [11, 6]. — Soit β une boule de R^n et $f_i, i = 1, 2 \dots n$, n fonctions $\in L^p(\beta)$, où $p > n$. Alors, la solution dans β de $Lu = - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, associée par le théorème C à chaque $f \in W^{1,p}(\beta)$, est lipschitzienne dans β .

En particulier, si $f \in W^{1,p}(\beta)$ avec $p > n$, $L^\beta f$ est lipschitzienne dans β , donc peut être prolongée continûment à $\bar{\beta}$; comme une fonction $\in W_0^{1,2}(\beta)$, continue sur $\bar{\beta}$, est nulle sur $\partial\beta$, si $f \in C^0(\bar{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta)$, le prolongement de $L^\beta f$ est f sur $\partial\beta$ et $L^\beta f$ est la solution du problème classique de Dirichlet dans la boule β , pour la donnée f .

3. Propriétés de l'application $f \rightarrow L^\Omega f$.

Où $L^\Omega f$ est la solution de $Lu = 0$ dans Ω , associée à chaque $f \in W^{1,2}(\Omega)$, telle que $f - L^\Omega f \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

PROPOSITION 2. — L'application $f \rightarrow L^\Omega f$ de $W^{1,2}(\Omega)$ dans lui-même est linéaire et croissante.

La linéarité résulte de l'unicité de la solution donnée par le théorème C.

Soit f et $f' \in W^{1,2}(\Omega)$, $f \leq f'$ p.p. dans Ω .
 $L_f^\Omega - L_{f'}^\Omega = f - f' + [\text{une fonction } \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)] \leq \varphi$ p.p. dans Ω ; donc (lemme 4) $L_f^\Omega - L_{f'}^\Omega \leq 0$ dans Ω .

PROPOSITION 3. — L'application $f \rightarrow L_f^\Omega$ vérifie, pour $f \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$:

1) $\sup_{\Omega} L_f^\Omega \leq \sup_{\partial\Omega} f$;

2) $\delta \|\text{grad } L_f^\Omega\|_{L^2(\Omega')} \leq d \sup_{\partial\Omega} |f|$, \forall ouvert $\Omega' \subset \bar{\Omega}' \subset \Omega$, où δ est la distance de $\bar{\Omega}'$ à $\partial\Omega$ et d est une constante ne dépendant que de n, λ et Ω ⁽⁴⁾.

Si Ω est une boule β , on a, pour $f \in C^0(\bar{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta)$ avec $p > n$:

(1') $\sup_{\beta} L_f^\beta = \sup_{\partial\beta} f$.

f continue sur Ω entraîne $f \leq \sup_{\partial\Omega} f + \varepsilon$ au voisinage de $\partial\Omega$; d'où $L_f^\Omega \leq \sup_{\partial\Omega} f + \varepsilon + [\text{une fonction } \in W_0^{1,2}(\Omega)]$ au voisinage de $\partial\Omega$, et, d'après le lemme 4 : $L_f^\Omega \leq \sup_{\partial\Omega} f + \varepsilon$ dans Ω .

On en déduit (1), et (1') en tenant compte du théorème D.

L'inégalité (2) résulte alors du lemme rappelé au n° 2.

PROPOSITION 4. — L'application $f \rightarrow L_f^\Omega$, de $W^{1,2}(\Omega)$ dans lui-même, est continue. On a même, pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$:

$$\|L_f^\omega\|_{W^{1,2}(\omega)} \leq k \|f\|_{W^{1,2}(\omega)},$$

où k ne dépend que de n, λ et Ω .

L'inégalité du théorème C s'écrit :

$$\|\text{grad } (L_f^\omega - f)\|_{L^2(\omega)} \leq \lambda \sum_i \left\| \sum_j a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\omega)}.$$

Les a_{ij} sont majorés par un nombre A ne dépendant que de λ ; d'où

$$\|\text{grad } (L_f^\omega - f)\|_{L^2(\omega)} \leq \lambda A n^2 \|\text{grad } f\|_{L^2(\omega)},$$

⁽⁴⁾ Ces inégalités sont démontrées dans [4] pour les $f \in C^1(\bar{\Omega})$.

et

$$\|\text{grad } L_f^\omega\|_{L^1(\omega)} \leq (1 + \lambda An^2) \|\text{grad } f\|_{L^1(\omega)}.$$

D'autre part, pour toute $\varphi \in W_0^{1,2}(\omega)$:

$$\|\varphi\|_{L^1(\omega)} \leq \|\text{grad } \varphi\|_{L^1(\omega)} \times \text{le diamètre de } \omega.$$

Donc, si d est le diamètre de Ω :

$$\|L_f^\omega - f\|_{L^1(\omega)} \leq d \|\text{grad } (L_f^\omega - f)\|_{L^1(\omega)},$$

et

$$\|L_f^\omega\|_{L^1(\omega)} \leq \|f\|_{L^1(\omega)} + d\lambda An^2 \|\text{grad } f\|_{L^1(\omega)}.$$

PROPOSITION 5. — Soit $f \in W^{1,2}(\Omega)$; pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$, la fonction $f_\omega = \begin{cases} L_f^\omega & \text{dans } \omega \\ f & \text{dans } \Omega - \omega \end{cases} \in W^{1,2}(\Omega)$ et

$$(1) \quad \|f_\omega\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq k' \|f\|_{W^{1,2}(\Omega)},$$

où k' ne dépend que de n, λ et Ω .

Par suite, L_f^ω est limite faible, dans $W^{1,2}(\Omega)$, de f_{ω_n} , pour toute suite d'ouverts $\omega_n \subset \Omega$ telle que tout compact $c \subset \Omega$ soit contenu dans ω_n dès que n est assez grand.

Par hypothèse, $\varphi = L_f^\omega - f \in W_0^{1,2}(\omega)$, donc

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \varphi & \text{dans } \omega \\ 0 & \text{dans } \Omega - \omega \end{cases}$$

a pour dérivées partielles premières celles de φ prolongées par 0 dans $\Omega - \omega$ [10]. On en déduit : $\tilde{\varphi} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, d'où $f_\omega \in W^{1,2}(\Omega)$, puis l'inégalité (1), avec $k' = k + 1$, en utilisant celle de la proposition 4.

ω_n étant une suite d'ouverts satisfaisant aux hypothèses de l'énoncé, il existe, grâce à l'inégalité (1), une suite partielle notée, n' , telle que $f_{\omega_{n'}}$ converge faiblement vers u , dans l'espace de Hilbert $W^{1,2}(\Omega)$. Il suffit de montrer que $u = L_f^\omega$, c'est-à-dire que u est solution de $Lu = 0$ dans Ω et $u - f \in W_0^{1,2}(\Omega)$. La première assertion est immédiate et la seconde résulte de ce que $W_0^{1,2}(\Omega)$ est fortement, donc aussi faiblement, fermé dans $W^{1,2}(\Omega)$.

**4. Les solutions locales de $Lu = 0$ forment un système
de fonctions harmoniques dans Ω ,
satisfaisant à l'axiomatique de M. Brelot.**

Dans chaque ouvert $\omega \subset \Omega$, les solutions locales de $Lu = 0$, appelées dans la suite fonctions harmoniques, sont finies continues et forment un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Vérifions les axiomes 1, 2 et 3'.

Axiome 1. — u harmonique dans ω entraîne u harmonique dans tout ouvert partiel; u défini dans ω et harmonique dans un voisinage ouvert V_x de chaque point $x \in \omega$ entraîne u harmonique dans ω .

Il suffit de faire le recouvrement de ω à l'aide des voisinages V_x et une partition de l'unité en fonctions indéfiniment différentiables, subordonnée à ce recouvrement.

Axiome 2. — Il existe une base des ouverts de Ω formée de domaines réguliers.

Montrons que toute boule $\beta \subset \bar{\beta} \subset \Omega$ est un domaine régulier, c'est-à-dire que toute fonction f , finie continue sur $\partial\beta$, admet un prolongement unique, noté H_f^β , harmonique dans β , continu dans $\bar{\beta}$, et ≥ 0 si $f \geq 0$.

L'unicité du prolongement résulte de la proposition 1. Pour en démontrer l'existence ⁽⁵⁾, on remarque que L_F^β répond à la question si f est la trace sur $\partial\beta$ d'une fonction

$$F \in C^0(\bar{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta),$$

où $p > n$ (théorème D et proposition 2). Le cas général s'en déduit en utilisant la proposition 3 et le fait que toute fonction $\in C^0(\partial\beta)$ peut être approchée, uniformément sur $\partial\beta$, par les restrictions à $\partial\beta$ de fonctions $F \in C^0(\bar{\beta}) \cap W^{1,p}(\beta)$ (par exemple, des polynômes sur l'espace entier); enfin si $f \geq 0$, on peut choisir $F \geq 0$.

Axiome 3'. — Une fonction harmonique ≥ 0 dans un domaine δ est soit > 0 , soit $\equiv 0$ dans δ ; et les fonctions harmoniques > 0 dans δ , s'il en existe, égales à 1 en un point $x_0 \in \delta$, sont également continues en x_0 .

⁽⁵⁾ Cette construction est très voisine de celle indiquée dans [4] pour un ouvert quelconque.

La première partie est une conséquence immédiate du théorème B. Pour vérifier la seconde, on considère un ouvert $\delta' \ni x_0$, $\bar{\delta}' \subset \delta$; pour chacune des fonctions u en question :

$$\sup_{\bar{\delta}'} u \leq c \inf_{\bar{\delta}'} u \leq c;$$

donc $\int_{\delta'} u^2 dx \leq c_1$, et (théorème A), si K est un voisinage compact de x_0 , $\subset \delta'$: $|u(x) - 1| \leq \beta c_2 |x - x_0|^\alpha \quad \forall x \in K$.

Les axiomes 1, 2, 3' étant satisfaits, on peut définir les fonctions sous-harmoniques et surharmoniques dans un ouvert $\omega \subset \Omega$, ainsi que les potentiels dans ω (ce sont les fonctions surharmoniques dans ω , admettant 0, comme plus grande minorante harmonique dans ω).

Les solutions dans Ω d'une équation de la forme

$$(1) \quad Lu = - \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i},$$

où $f_i \in L^p(\Omega)$ avec $p > n$, et $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ est une mesure ≥ 0 dans Ω ,

fournissent un exemple de fonctions sous-harmoniques continues dans Ω : la continuité résulte du théorème D, car une solution u de (1) dans Ω et une solution de (1) dans une boule $\beta \subset \Omega$ diffèrent d'une fonction harmonique dans β , et, dans toute boule $\beta \subset \bar{\beta} \subset \Omega$, on a $u \leq H_n^\beta$ (proposition 1).

Si en outre la mesure $\sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ a pour support $\bar{\Omega}$, u n'est harmonique dans aucun ouvert partiel.

D'autre part, le théorème C permet d'avoir $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, donc $u \leq 0$ (lemme 4) : par suite, il existe dans Ω des potentiels continus > 0 .

5. Un principe du maximum pour les sous-solutions locales.

Le problème de Dirichlet dans Ω .

THÉORÈME 1. — Une sous-solution locale dans Ω , majorée p.p. au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est ≤ 0 p.p. dans Ω .

Soit u une sous-solution locale dans Ω et φ la fonction $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ majorant u p.p. au voisinage de $\partial\Omega$. On considère

une suite croissante d'ouverts $\omega_n \subset \bar{\omega}_n \subset \Omega$, dont la réunion est Ω ; la suite $\varphi_{\omega_n} = \begin{cases} L_{\varphi^n}^{\omega_n} & \text{dans } \omega_n \\ \varphi & \text{dans } \Omega - \omega_n \end{cases}$ a pour limite faible 0 dans $W^{1,2}(\Omega)$ (proposition 5). D'autre part, pour n assez grand :

$u \leq \varphi$ p.p. dans $\Omega - \omega_n$, et p.p. au voisinage de $\partial\omega_n$, donc aussi $u - L_{\varphi^n}^{\omega_n} \leq \varphi - L_{\varphi^n}^{\omega_n}$ p.p. au voisinage de $\partial\omega_n$; par suite (lemme 4) :

$u - L_{\varphi^n}^{\omega_n} \leq 0$ p.p. dans ω_n , ou encore $u - \varphi_{\omega_n} \leq 0$ p.p. dans Ω . Alors, pour tout ensemble mesurable

$$E \subset \bar{E} \subset \Omega : \int_E (u - \varphi_{\omega_n}) dx \leq 0;$$

comme $\int_E \varphi_{\omega_n} dx \rightarrow 0$, on a $\int_E u dx \leq 0 \forall E$, d'où $u \leq 0$ p.p. dans Ω .

COROLLAIRE. — Une fonction surharmonique ≥ 0 dans Ω , $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est un potentiel dans Ω .

Car toutes ses minorantes harmoniques dans Ω sont ≤ 0 .

THÉORÈME 2. — Une fonction sous-harmonique dans Ω , majorée au voisinage de $\partial\Omega$ par une fonction s.c.i. $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est ≤ 0 dans Ω ⁽⁶⁾.

Soit u sous-harmonique dans Ω , et φ une fonction s.c.i. $\in W_0^{1,2}(\Omega)$ majorant u au voisinage de $\partial\Omega$. Si $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$ est un ouvert régulier, assez grand pour que $u \leq \varphi$ sur $\Omega - \omega$, en chaque point $y \in \partial\omega$:

$$\limsup_{\substack{x \in \omega \\ x \rightarrow y}} H_u^\omega(x) \leq u(y) \leq \varphi(y);$$

on en déduit, grâce à la s.c.i. de φ :

$$H_u^\omega \leq \varphi + \varepsilon \text{ au voisinage de } \partial\omega, \text{ ou encore}$$

$$H_u^\omega - \varepsilon - L_\varphi^\omega \leq \varphi - L_\varphi^\omega \text{ au voisinage de } \partial\omega.$$

Donc (théorème 1) :

$$H_u^\omega - \varepsilon - L_\varphi^\omega \leq 0 \text{ dans } \omega, \forall \varepsilon > 0, \text{ soit } H_u^\omega \leq L_\varphi^\omega \text{ dans } \omega.$$

⁽⁶⁾ Note ajoutée sur les épreuves : un article, à paraître prochainement, améliore ce résultat en supprimant l'hypothèse de s. c. i.

On considère une suite croissante d'ouverts réguliers ω_n , dont la réunion est Ω [3; proposition 7.1]; $H_u^{\omega_n}$ est une suite croissante de fonctions harmoniques, donc sa limite h est harmonique dans Ω ou $+\infty$. Or $H_u^{\omega_n}$ est majoré par $L_{\varphi}^{\omega_n}$ dans ω_n ; donc (proposition 5), pour tout ensemble mesurable $E \subset \bar{E} \subset \Omega$: $\int_E h \, dx \leq 0$. Par suite, h est harmonique et ≤ 0 dans Ω , et $u \leq h \leq 0$ dans Ω .

Remarque. — Comme cas particulier du théorème 2, on voit qu'une fonction sous-harmonique continue dans Ω , $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, est ≤ 0 dans Ω .

Le problème de Dirichlet dans Ω , pour une donnée continue sur $\partial\Omega$.

Soit f une fonction continue sur $\partial\Omega$; la solution du problème de Dirichlet correspondante, H_f^Ω , est l'enveloppe supérieure des « sous-fonctions » (fonctions sous-harmoniques dans Ω dont la $\lim \sup$ en chaque point frontière est $\leq f$) ou encore l'enveloppe inférieure des « surfonctions ».

$f \rightarrow H_f^\Omega$ est une application linéaire croissante de $C^0(\partial\Omega)$ dans l'espace des fonctions harmoniques dans Ω ; elle vérifie

$$(1) \quad \sup_{\Omega} H_f^\Omega \leq \sup_{\partial\Omega} f;$$

on le voit, par exemple, en remarquant que $H_1^\Omega = 1$ et en utilisant la croissance de l'application.

Dans [4], Littman, Stampacchia et Weinberger définissent aussi une application $f \rightarrow H'_f$ de $C^0(\partial\Omega)$ dans l'espace des fonctions harmoniques dans Ω , linéaire, croissante et vérifiant (1): si f est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction

$$F \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega),$$

H'_f est la solution L_F^Ω donnée par le théorème C; on passe au cas général en approchant f , uniformément sur $\partial\Omega$, par les traces sur $\partial\Omega$ de polynômes sur tout l'espace et en utilisant la proposition 3.

Grâce à l'inégalité (1), pour comparer H_f^Ω et H'_f , il suffit de supposer que f est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction $\in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$; l'identité de ces deux fonctions résulte alors du théorème suivant:

THÉORÈME 3. — Si f est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction $F \in C^0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,2}(\Omega)$, la solution du problème de Dirichlet, au sens de Perron-Wiener-Brelot, est la solution $L_{\mathbb{F}}^{\Omega}$ de $Lu = 0$ dans Ω , telle que $F - L_{\mathbb{F}}^{\Omega} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Soit u une « sous-fonction »; pour tout $y \in \partial\Omega$,

$$\limsup_{\substack{x \in \Omega \\ x \rightarrow y}} u(x) \leq f(y),$$

donc

$$u \leq F + \varepsilon \quad \text{au voisinage de } \partial\Omega,$$

ou encore $u - L_{\mathbb{F}}^{\Omega} \leq \varepsilon +$ une fonction continue $\in W_0^{1,2}(\Omega)$, au voisinage de $\partial\Omega$. On en déduit (théorème 2) :

$$u - L_{\mathbb{F}}^{\Omega} \leq \varepsilon \text{ dans } \Omega, \forall \varepsilon > 0, \text{ soit } u \leq L_{\mathbb{F}}^{\Omega} \text{ dans } \Omega.$$

On a de même, pour toute « surfonction » $v : v \geq L_{\mathbb{F}}^{\Omega}$ dans Ω ; d'où $L_{\mathbb{F}}^{\Omega} = H_{\mathbb{F}}^{\Omega}$.

Remarque. — Une conséquence de l'identité de $H_{\mathbb{F}}^{\Omega}$ et $H'_{\mathbb{F}}^{\Omega}$ est que les points réguliers définis dans [4] sont les points réguliers pour le problème de Dirichlet au sens de Perron-Wiener-Brelot; ceux-ci ne dépendent donc pas de l'opérateur L et coïncident avec les points Δ -réguliers [4]. Notons que la méthode exposée dans [3] (pour des opérateurs à coefficients localement lipschitziens) et utilisant l'effilement, conduirait au même résultat.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BRELOT, Lectures on potential theory, *Tata Institute of fundamental research*, 1960.
- [2] E. DE GIORGI, Sulla differentiability e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino*, 1957.
- [3] R. M. HERVÉ, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1962.
- [4] W. LITTMAN, G. STAMPACCHIA et H. F. WEINBERGER, Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1963.
- [5] E. MAGENES et G. STAMPACCHIA, I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 1958.
- [6] C. B. MORREY, Second order elliptic equations in several variables and Holder continuity, *Math. Zeit.*, 1959.

- [7] J. MOSER, A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1960.
- [8] J. MOSER, On Harnack's theorem for elliptic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961.
- [9] J. NASH, Continuity of the solutions of parabolic and elliptic equations, *Amer. J. Math.*, 1958.
- [10] L. SCHWARTZ, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, 1954-55, *Secrétariat math.*, 11, rue P. Curie, Paris.
- [11] G. STAMPACCHIA, Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni holderiane, *Ann. di Matem.*, 1960.

Manuscrit reçu en septembre 1964

Mme R.-M. HERVÉ,
Faculté des Sciences de Nancy,
Nancy (M.-et-M.).
