



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Franck HAROU

Description chirurgicale des revêtements triples simples de S^3 ramifiés le long d'un entrelacs

Tome 51, n° 5 (2001), p. 1229-1242.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_5_1229_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

DESCRIPTION CHIRURGICALE DES REVÊTEMENTS TRIPLES SIMPLES DE S^3 RAMIFIÉS LE LONG D'UN ENTRELACS

par Franck HAROU

1. Introduction.

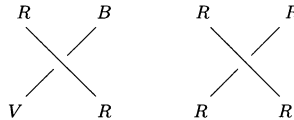
En 1974, Montesinos et Hilden ont montré indépendamment que toutes les 3-variétés fermées peuvent être réalisées comme des revêtements triples simples de S^3 ramifiés le long d'entrelacs. En 1960, Lickorish et Wallace avaient prouvé que toutes les 3-variétés fermées pouvaient être obtenues par chirurgie de S^3 .

Dans la mesure où chacune de ces descriptions offre un point de vue spécifique, comprendre comment passer de l'une à l'autre constitue un problème intéressant. Montesinos [6], [8] nous indique comment trouver, à partir d'une description chirurgicale, une description en terme de revêtement ramifié. Une méthode inverse n'est connue jusqu'alors que pour des revêtements ramifiés sur des entrelacs possédant certaines symétries [7]. Dans [1], [3], une équivalence théorique entre les deux descriptions est établie par l'intermédiaire de scindements de Heegaard mais reste très difficile à appliquer en général. Notre objectif est d'établir un algorithme effectif convertissant une présentation de 3-variété en terme de revêtement ramifié triple simple de la sphère en une présentation de chirurgie et de répondre ainsi à une question posée par Prasolov et Sossinsky dans [9].

2. Rappels.

Au paragraphe 2.1, nous verrons que la donnée d'un revêtement triple simple de la sphère est équivalente à celle d'un diagramme du lieu de ramification colorié en trois couleurs. En 2.2, nous aborderons un exemple simple puis, en 2.3, nous présenterons deux transformations de revêtements ramifiés triples issues des travaux de Montesinos. Enfin, nous verrons en 2.4 et 2.5 comment appliquer les travaux de Montesinos décrits dans [6], [8], [9], [10] pour convertir des descriptions en termes de revêtements triples ramifiés en des descriptions chirurgicales.

2.1. — Soit $p : M^3 \rightarrow S^3$ un revêtement à 3 feuillets de la 3-sphère ramifié le long d'un entrelacs L . Nous supposons de plus que p est simple *i.e.* la fibre au-dessus de chaque point de S^3 est constituée de deux ou trois points. p est entièrement déterminé par sa monodromie à savoir un morphisme de $\pi_1(S^3 \setminus L)$ dans le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 . En choisissant une présentation de Wirtinger pour $\pi_1(S^3 \setminus L)$, comme p est simple, les images par la monodromie des générateurs de Wirtinger sont des transpositions. L'information contenue dans p est alors équivalente à celle d'une coloration à trois couleurs d'une projection régulière de L où chaque couleur correspond à une transposition de \mathfrak{S}_3 . Les relations de Wirtinger mettent en évidence l'unique règle de coloration suivante : un croisement met en présence soit trois arcs de même couleur soit trois arcs de trois couleurs distinctes.



Règle de coloration

2.2. — Un exemple central est celui de l'entrelacs trivial à deux composantes L coloriées par deux couleurs différentes. Notons $p : M^3 \rightarrow S^3$ le revêtement ramifié lui correspondant. Pour identifier M , considérons S^3 comme la réunion de deux boules B_1^3, B_2^3 où B_1 est le produit d'un disque D^2 par l'intervalle fermé $[0, 1]$ et $L \cap B_1 = \{x, y\} \times [0, 1]$ où x, y sont deux points distincts de D^2 qui n'appartiennent pas à la même composante de L . Par la formule de Riemann-Hurwitz, le revêtement induit par p sur chaque $D^2 \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$, est le revêtement d'un disque par un disque. Il suit donc que p induit sur B_1 le revêtement d'une boule par une boule. Par symétrie, il en va de même pour B_2 et donc M , comme union de deux boules, est homéomorphe à une sphère.

2.3. — Nous présentons maintenant des transformations d’entrelacs coloriés utilisées par Montesinos.

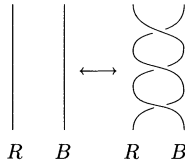


Figure 1. Transformation de Montesinos

La première transformation, appelée *mouvement de Montesinos* et illustrée par la figure 1, consiste à remplacer deux arcs parallèles de l’entrelacs, coloriés en deux couleurs distinctes, par deux arcs entrelacés par trois demi-tours.

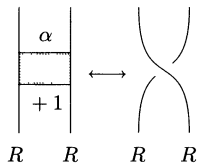


Figure 2. Transformation de croisements monochromes

La seconde transformation, décrite par la figure 2, consiste à remplacer un croisement monochrome (qui ne fait intervenir qu’une couleur) par une bande $A = \alpha \times [0, 1]$ pondérée par ± 1 ($+1$ pour le croisement de la figure 2 et -1 pour un croisement opposé). Notons que nous pouvons faire subir à A des isotopies qui préservent $A \cap L$.

Une *transformation admissible* d’un entrelacs colorié est soit l’une de des deux transformations précédemment décrites soit une isotopie.

Soit $p : M^3 \rightarrow S^3$ un revêtement triple simple de la sphère ramifié le long d’un entrelacs L . La première transformation consiste à retirer d’une part, à S^3 , un cylindre $B = D^2 \times [0, 1]$ tel que $L \cap B = \{x, y\} \times [0, 1]$ où x, y sont deux points distincts de D^2 correspondant à des arcs de L de couleurs différentes et d’autre part, à M , la boule $B' = p^{-1}(B)$. Nous recollons B de façon à faire apparaître les croisements représentés par la figure 1 (ou les croisements opposés) et B' de manière équivariante. En vertu du lemme d’Alexander, les homéomorphismes de recollement se prolongent à l’intérieur de B et B' respectivement. De plus, la restriction de p à $M \setminus B'$ est entièrement déterminée par la portion de l’entrelacs L colorié située dans $S^3 \setminus B$. Il suit que la première transformation définit deux revêtements équivalents ce qui se traduit par une équivalence d’entrelacs coloriés.

La seconde transformation consiste, de manière analogue, à retirer d'une part, à S^3 , un voisinage régulier B de la bande $\alpha \times [0, 1]$ et d'autre part, à M , $p^{-1}(B)$. Comme p est simple, B se relève en l'union disjointe d'une boule B' et d'un tore solide V . Nous recollons ensuite B de façon à faire apparaître le croisement représenté par la figure 2 si la pondération de la bande est $+1$ (le croisement opposé sinon) et $p^{-1}(B)$ de manière équivariante. Par le lemme d'Alexander et comme la restriction de p à $M \setminus (B' \cup V)$ est entièrement déterminée par la portion de l'entrelacs L colorié située dans $S^3 \setminus B$, il suffit de déterminer la nature du recollement de V pour mesurer l'effet de cette transformation sur le revêtement.

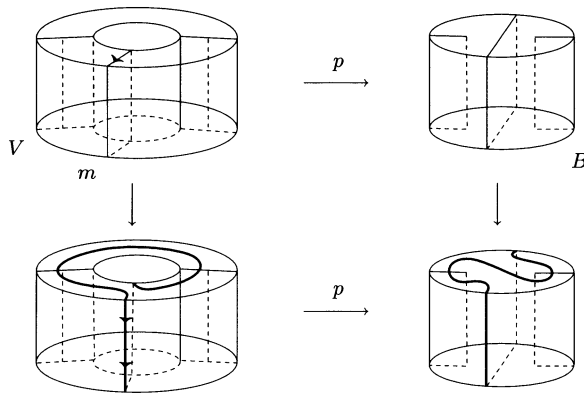


Figure 3

Pour cela, examinons l'image d'un méridien m de V où m est une composante de l'image réciproque par p du bord d'un disque proprement plongé dans B séparant les deux arcs $L \cap B$. Dans le cas où la pondération de la bande est $+1$, l'image de m s'obtient à partir de m par un twist de Dehn gauche (voir fig. 3). Si nous orientons $p^{-1}(\alpha)$ et l'âme de V de manière cohérente et m par la règle de la main droite (voir fig. 3) alors le nouveau méridien s'écrit homologiquement $(m + p^{-1}(\alpha))$. La seconde transformation correspond donc, dans ce cas, à une chirurgie de coefficient le nombre d'entrelacement de $p^{-1}(\alpha)$ et l'âme de V augmenté de 1.

Dans le cas où la pondération de la bande est -1 , l'image de m s'obtient à partir de m par l'inverse du twist précédent. Le nouveau méridien s'écrit homologiquement $(m - p^{-1}(\alpha))$. La seconde transformation correspond donc, dans ce cas, à une chirurgie de coefficient le nombre d'entrelacement de $p^{-1}(\alpha)$ et l'âme de V diminué de 1.

2.4. — Notre méthode pour convertir une présentation de variété de dimension trois comme revêtement simple à trois feuillet de la sphère en une présentation de chirurgie réside dans la possibilité de trouver une suite finie de transformations admissibles permettant de transformer un entrelacs quelconque colorié en l'entrelacs trivial à deux composantes colorié en deux couleurs distinctes.

Par exemple, l'entrelacs trivial à trois composantes coloriées en trois couleurs différentes peut être transformé par isotopie en l'entrelacs trivial à trois composantes coloriées en deux couleurs simplement en faisant passer une composante à travers une seconde (voir fig. 4). Une isotopie permet alors de faire se chevaucher les deux composantes de même couleur faisant apparaître deux croisements monochromes. Par la seconde transformation, il est possible d'éliminer un croisement monochrome et une isotopie permet d'obtenir l'entrelacs trivial à deux composantes colorié en deux couleurs distinctes.

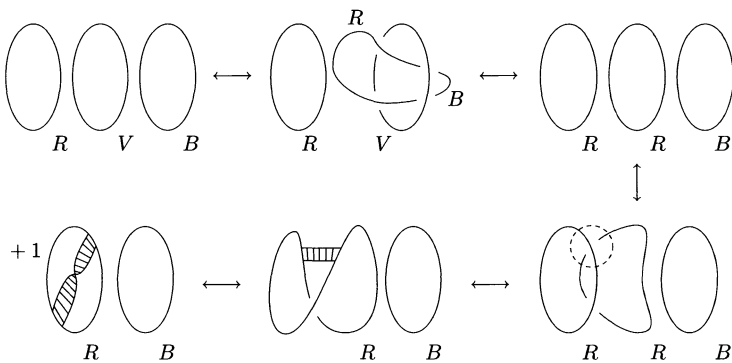


Figure 4

2.5. — Plus généralement, cette suite de transformations admissibles utilisée dans les conversions de présentations est décrite par Montesinos lorsque la donnée initiale est une présentation par chirurgie mais sa méthode nécessite une modification importante dans le cas où la donnée initiale est cette fois un entrelacs colorié L et la clé de la modification réside dans le résultat suivant dont la démonstration fait l'objet du prochain paragraphe.

THÉORÈME 1. — Soit β une tresse fermée à n brins coloriée en trois couleurs. Il est possible de trouver effectivement une suite finie de transformations admissibles transformant β en une tresse triviale à n brins coloriée.

La méthode modifiée est alors constituée de trois étapes :

1) Par l'algorithme de Vogel [11], L est mis sous la forme d'une clôture d'une tresse coloriée β à l'aide d'isotopies.

2) Par le théorème 1, nous trouvons une suite finie de transformations admissibles transformant β en une tresse triviale de même nombre de brins.

3) L'exemple précédent nous permet alors de voir quelle stratégie appliquer pour transformer la clôture d'une tresse triviale en l'entrelacs trivial à deux composantes colorié en deux couleurs distinctes.

3. Algorithme de trivialisat on des tresses colori es.

Nous allons prouver le théorème 1 par récurrence sur le nombre de brins. Dans la mesure où nous désirons avoir une démarche effective, il est essentiel de distinguer un mot représentant une tresse de la tresse elle-même. En cons equance, considérons \mathcal{F}_n le groupe libre de rang $n - 1$ et \mathcal{B}_n le groupe des tresses à n brins. Par abus, nous noterons $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ à la fois les générateurs de \mathcal{B}_n et de \mathcal{F}_n .

Soit X l'ensemble des trois couleurs. La règle de coloration donne une action naturelle de \mathcal{F}_n sur X^n induite par l'action de \mathcal{F}_2 sur X^2 :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad X = \{x, y, z\}.$$

Les notions clés qui nous permettent d'établir une méthode itérative sont :

- la hauteur (resp. largeur) d'un mot réduit $w \in \mathcal{F}_n$, notée $h(w)$ (resp. $L(w)$), qui est le plus petit (resp. grand) des indices des générateurs intervenant dans l'écriture de w et 0 si w est trivial ;
- l'occurrence d'une lettre dans un mot à savoir, pour

$$w = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell} \in \mathcal{F}_n,$$

un mot réduit

$$o_k(w) = \text{card}\{r, i_r = k\}.$$

DÉFINITION. — Rappelons qu'un mot $w \in \mathcal{F}_n$, $w = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \cdots \sigma_{i_\ell}^{\varepsilon_\ell}$ avec $\varepsilon_k \in \{-1, +1\}$ et $1 \leq k \leq \ell$, est dit *réduit* si, pour tout $1 \leq k < \ell$ tel que $i_k = i_{k+1}$, nous avons $\varepsilon_k = \varepsilon_{k+1}$.

Pour $v \in X^n$, un mot réduit w de \mathcal{F}_n ne contenant pas de carré ou de cube de générateurs ou de leur inverse ni de lettre monochrome (correspondant à un croisement monochrome) pour v est appelé *mot de transition* de v .

DÉFINITION. — Un élément (v_1, \dots, v_n) de X^n est *exceptionnel* s'il existe deux éléments distincts x, y de X tels que, pour tout $1 \leq k < n$, nous avons $v_k = x$ et $v_n = y$.

Les transformations admissibles décrites en 2.3 se traduisent au niveau des tresses par

- des isotopies de tresses ;
- l'élimination de lettres monochromes : pour $w, w' \in \mathcal{F}_n, v \in X^n$, si $v \cdot w\sigma_k = v \cdot w$, alors $(v, w\sigma_k^{\pm 1} w')$ peut être transformé par la transformation de croisements monochromes en (v, ww') ;
- la transformation de Montesinos : pour $w, w' \in \mathcal{F}_n, v \in X^n$, si $v \cdot w\sigma_k \neq v \cdot w$, alors $(v, w\sigma_k^{\pm 3} w')$ (resp. (v, ww')) peut être transformé par la transformation de Montesinos en (v, ww') (resp. $(v, w\sigma_k^{\pm 3} w')$).

PROPOSITION 2. — Soit $n \geq 2$. Nous avons un algorithme qui fait subir à un couple $(v, w) \in X^n \times \mathcal{F}_n$ une suite finie de transformations admissibles, pour le transformer en

$$(v, w') = A_n(v, w)$$

qui vérifie $h(w') > 1$ ou

- 1) $o_{n-1}(w') \in \{0, 1, 2\}$, et,
- 2) si $o_{n-1}(w') = 2$, alors $n > 2$, les deux exposants des σ_{n-1} de w' sont de même signe, et l'un au moins de v ou $v \cdot w$ est exceptionnel (i.e. de la forme (x, \dots, x, y) pour $x, y \in X^n$ distincts).
- 3) De plus, si la dernière coordonnée de v est la même que celle de $v \cdot w$, alors $o_{n-1}(w') \neq 1$.

Cette proposition nous permet de montrer le théorème 1. En effet, à une tresse fermée coloriée donnée, nous pouvons associer un couple (v, w) où $v \in X^m, w \in \mathcal{F}_m$ et $v \cdot w = v$. Nous allons alors effectuer une récurrence sur la *largeur non triviale* de w qui vaut 0 si w est trivial et $L(w) - h(w) + 2$ sinon. Nous montrons par récurrence sur cette largeur non triviale qu'il

est possible de trivialisier, par une suite de transformations admissibles, la tresse, appelée *partie centrale*, β obtenue en éliminant les $h(w) - 1$ premiers brins et les $n - L(w) - 1$ derniers brins de la tresse associée à w . Nous noterons encore $(v, w) \in X^n \times \mathcal{F}_n$ le couple associé à β .

Une première étape consiste à mettre w sous forme de mot de transition pour v . Pour cela, nous pouvons tout d'abord supposer que w est réduit. Après élimination des lettres monochromes, par le mouvement de Montesinos, nous pouvons éliminer les cubes des générateurs qui interviennent dans l'écriture de w et remplacer les $\sigma_i^{\pm 2}$ par $\sigma_i^{\mp 1}$ pour ainsi obtenir un mot de transition (encore noté w).

Si v est exceptionnel et si $n > 2$ alors, d'une part, w commence par σ_{n-1}^ε , $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, et, d'autre part, $v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon$ n'est pas exceptionnel. Alors, dans la mesure où β est aussi représentée par $(v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon, \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} w \sigma_{n-1}^\varepsilon)$, nous sommes ramenés au cas v non exceptionnel ou au cas $n = 2$.

Dans ces cas, (v, w) est transformé en $A_n(v, w) = (v, w')$ qui, d'après la proposition 2, admet une largeur non triviale strictement inférieure car $h(w) > 1$ ou $o_{n-1}(w) = 0$. Le résultat est alors acquis par récurrence. \square

Preuve de la proposition 2. — Pour $n = 2$, la suite de transformations, issue de la première étape de la preuve précédente, qui permet de mettre w sous forme de mot de transition nous mène au mot trivial ou à $\sigma_1^{\pm 1}$. La proposition 2 est ainsi démontrée. Par récurrence, supposons l'existence des A_i , pour tout $i < n$, qui vérifient les conditions de la proposition 2. Remarquons aussi que le troisième point de la proposition vient de l'impossibilité pour le dernier brin de ne changer qu'une fois de couleur.

LEMME 3. — Soit $n \geq 3$. En supposant l'existence des A_i , pour tout $i < n$, qui vérifient les conditions de la proposition 2, nous allons décrire une étape E_n de A_n qui transforme (v, w) où

$$w = \alpha \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \gamma \sigma_{n-1}^{\varepsilon_2} \delta$$

et où $\alpha, \gamma \in \mathcal{F}_{n-1}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$, $\delta \in \mathcal{F}_n$, w est un mot de transition et :

- soit v n'est pas exceptionnel et (v, w) ne satisfait pas les conclusions de la proposition 2,
- soit v est exceptionnel, $o_{n-1}(w) = 2$ et $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ en

$$(v, w') = E_n(v, w)$$

tel que le couple

$$(o_{n-1}(w'), n - h(\gamma'))$$

soit strictement inférieur au couple

$$(o_{n-1}(w), n - h(\gamma))$$

pour l'ordre lexicographique de \mathbb{N}^2 et où γ' est le mot trivial si $o_{n-1}(w') = 0$ et, sinon, le plus long mot de \mathcal{F}_{n-1} tel que w' s'écrive

$$\alpha' \sigma_{n-1}^\varepsilon \gamma' \delta'$$

avec $\alpha' \in \mathcal{F}_{n-1}$, $\delta' \in \mathcal{F}_n$ et $\varepsilon \in \{+1, -1\}$.

Ainsi, en supposant ce lemme démontré, si v n'est pas exceptionnel, A_n est obtenue en itérant l'étape E_n un nombre fini de fois jusqu'à ce que (v, w) satisfasse les conclusions de la proposition 2. Sinon, v est exceptionnel et deux cas se présentent.

Cas 1. — Si $v \cdot w$ n'est pas exceptionnel, alors w doit commencer par σ_{n-1}^ε et nous appliquons les transformations du cas v non exceptionnel au couple $(v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon, \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} w)$ transformant ainsi (v, w) en (v, w') tel que $o_{n-1}(w') \leq 2$. Nous concluons en itérant E_n tant que $o_{n-1}(w') = 2$ et les exposants en σ_{n-1} de w' sont opposés.

Cas 2. — Si $v \cdot w$ est exceptionnel alors il est aisé de trouver ε et η deux éléments de $\{-1, +1\}$ tels que les dernières coordonnées de $v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon$ et $v \cdot w \sigma_{n-1}^{-\eta}$ coïncident. Remarquons qu'alors $v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon$ et $v \cdot w \sigma_{n-1}^{-\eta}$ ne sont pas exceptionnels. Nous appliquons une itération de transformations E_n à $(v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon, \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} w \sigma_{n-1}^{-\eta})$ et obtenons un couple $(v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon, w')$ avec $o_{n-1}(w') \leq 1$. Comme les dernières coordonnées de $v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon$ et $v \cdot w \sigma_{n-1}^{-\eta}$ coïncident, il suit que $o_{n-1}(w') = 0$. Nous concluons en itérant E_n en partant de $\sigma_{n-1}^\varepsilon w' \sigma_{n-1}^\eta$ qui est tel que $o_{n-1}(\sigma_{n-1}^\varepsilon w' \sigma_{n-1}^\eta) = 2$ tant que la conclusion de la proposition 2 n'est pas satisfaite. \square

La preuve du lemme 3 nécessite deux nouveaux résultats. Notons, pour $p < q$ et $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ (voir fig. 5),

$$\Pi_{p,q,\varepsilon} = \sigma_p^\varepsilon \sigma_{p+1}^\varepsilon \cdots \sigma_q^\varepsilon.$$

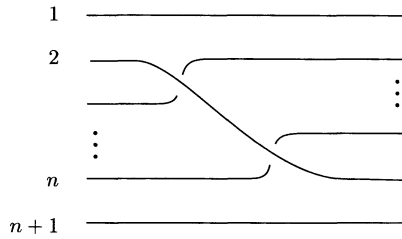


Figure 5. $\Pi_{2,n-1,1}$

LEMME 4. — Soit $n \geq 3$. Si v et $v \cdot \sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon$ ne sont pas exceptionnels et si $\sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon$ n'admet pas de lettre monochrome alors nous pouvons transformer $(v, \sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon)$ en

$$(v, m) = B(v, \sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon)$$

où $m \in \mathcal{F}_{n-1}$ par une suite finie de transformations admissibles.

Preuve. — Posons $v = (v_1, \dots, v_n)$. Remarquons que l'hypothèse faite sur l'absence de lettre monochrome pour $\sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon$ a la conséquence suivante sur les composantes de v :

$$\exists x, y \in X, x \neq y, \begin{cases} v_n = x, \\ v_{n-1} = y, \\ v_{n-2} = y; \end{cases}$$

donc, puisque v n'est pas exceptionnel, $n > 3$.

Nous noterons \sim_v l'application d'une transformation admissible et une étoile au-dessous d'une lettre signifie que la lettre est monochrome. Nous pouvons supposer $\varepsilon = +1$. En effet,

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon &\sim_v \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon \\ &\sim_v \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} \sigma_{n-2}^\varepsilon \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^{-\varepsilon} \cdot \end{aligned}$$

L'élimination de la dernière lettre (monochrome) nous ramène au cas $-\varepsilon$.

Cas 1. — Si $v_{n-3} = x$ alors, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $n = 4$. Montrons donc que $\sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_3$ peut être transformé en $\sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1}$ par des transformations admissibles soit encore que $w =$

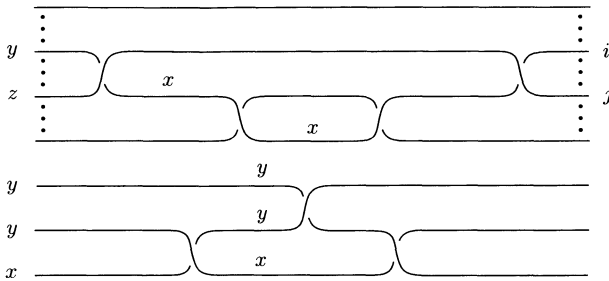


Figure 6

$\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1$ peut être trivialisé. Nous avons $\sigma_2^{-1}\sigma_1 \sim_v \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$ d'où

$$w \sim_v \sigma_3 \underline{\sigma_2^{-1}\sigma_1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sim_v \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sim_v \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1$$

d'où

$$\begin{aligned} w &\sim_v \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sim_v \sigma_3 \sigma_1 \underline{\sigma_2 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1^{-1}} \sigma_2^{-1} \sigma_1 \\ &\sim_v \sigma_3 \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_1^{-1} \sim_v \sigma_3^3 \sim_v 1. \end{aligned}$$

Cas 2. — Si $n > 4$ et s'il existe $1 \leq k < n - 3$ tel que $v_k = x$, comme $\Pi_{k,n-4,1}$ et $\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}$ commutent, la conjugaison par $\Pi_{k,n-4,1}$ ne change pas la tresse et fait apparaître la configuration de couleurs qui nous ramène au cas 1 (voir la partie basse de la figure 6) :

$$\begin{aligned} \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1} &\sim_v \Pi_{k,n-4,1} \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1} \Pi_{k,n-4,1}^{-1} \\ &\sim_v \Pi_{k,n-4,1} \sigma_{n-3}^{-1}\sigma_{n-2}\sigma_{n-3}^{-1} \Pi_{k,n-4,1}^{-1}. \end{aligned}$$

Cas 3. — Nous pouvons supposer que, pour tout $1 \leq k < n - 3$, $v_k \neq x$. Comme ni v ni $v \cdot \sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}$ ne sont exceptionnels, $n > 4$ et il existe $i < n - 4$ (que l'on choisira maximal) tel que $v_i \neq v_{i+1}$. Alors la conjugaison par $\sigma_i^{-1}\Pi_{i+1,n-4,1}$ ne change pas la tresse et fait apparaître la configuration de couleurs qui nous ramène au cas 1 (voir fig. 6). Dans tous les cas, nous pouvons transformer $(v, \sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon)$ en

$$(v, m) = B(v, \sigma_{n-1}^\varepsilon \sigma_{n-2}^{-\varepsilon} \sigma_{n-1}^\varepsilon)$$

où $m \in \mathcal{F}_{n-1}$ par une suite finie de transformations admissibles. □

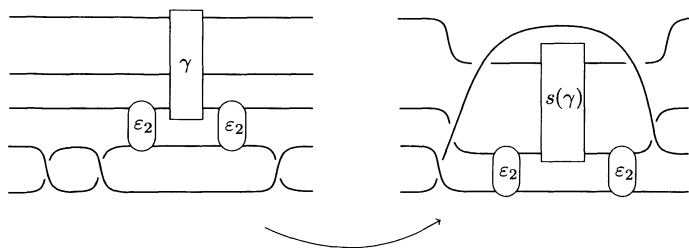


Figure 7. Transformation de poignée

Notons s le morphisme de groupe de \mathcal{F}_∞ tel que $s(\sigma_i) = \sigma_{i+1}$.

LEMME 5. — Soit $n \geq 4$. Nous pouvons transformer le mot de transition

$$(v, \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \gamma \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1})$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$, $\gamma \in \mathcal{F}_{n-3}$ et la restriction aux $(n - 1)$ premières composantes de $v \cdot \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$ ou de $v \cdot \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \gamma \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2}$ est exceptionnelle et tel que v et $v \cdot \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \gamma \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$ sont non-exceptionnels en

$$(v, m) = C(v, \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \gamma \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1})$$

où $o_{n-1}(m) \leq 2$ et si $o_{n-1}(m) = 2$ alors $m = \sigma_{n-1}^{-\varepsilon_2} s(\gamma) \sigma_{n-1}^{\varepsilon_2} \delta$ avec $\delta \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Preuve. — Posons $w = \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \gamma \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$. Supposons que la restriction aux $(n - 1)$ premières composantes de $v \cdot \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$ est exceptionnelle. Alors nous transformons le premier $\sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$ en $\sigma_{n-1}^{-\varepsilon_1} \sigma_{n-1}^{-\varepsilon_1}$ de façon à pouvoir appliquer une transformation de poignée illustrée figure 7 :

$$\begin{aligned} w &\sim_v \sigma_{n-1}^{-\varepsilon_1} \sigma_{n-1}^{-\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \gamma \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \\ &\sim_v \sigma_{n-1}^{-\varepsilon_1} \underbrace{\Pi_{1,n-2,-\varepsilon_1}^{-1}}_* \sigma_{n-1}^{\varepsilon_2} s(\gamma) \sigma_{n-1}^{\varepsilon_2} \Pi_{1,n-2,-\varepsilon_1}. \end{aligned}$$

$\Pi_{1,n-2,-\varepsilon_1}^{-1}$ n'est formé que de lettres monochromes dont l'élimination conduit à $w \sim_v \sigma_{n-1}^{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} s(\gamma) \sigma_{n-1}^{\varepsilon_2} \Pi_{1,n-2,-\varepsilon_1} = m$. Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, alors $o_{n-1}(m) < 2$ et nous avons alors le résultat. Dans le cas contraire, nous avons $o_{n-1}(m) = 2$ et m a bien la forme escomptée.

Le cas où la restriction aux $n - 1$ premières composantes de $v \cdot \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2} \gamma \sigma_{n-2}^{\varepsilon_2}$ est exceptionnelle se traite de manière identique par symétrie. □

Preuve du lemme 3. — Nous allons décrire la transformation E_n qui permet de faire décroître le couple $(o_{n-1}(w), n - h(\gamma))$. Nous appliquons tout d'abord les transformations A_i , $i < n$, à la partie centrale de γ jusqu'à ce qu'on ne puisse plus réduire sa largeur. Ainsi sans augmenter $(o_{n-1}(w), n - h(\gamma))$, nous obtenons $o_{n-2}(\gamma) \leq 2$, et, si $o_{n-2}(\gamma) = 2$, alors $n > 3$, les deux exposants des σ_{n-2} sont de même signe et la restriction aux $n - 1$ premières coordonnées de l'un au moins de $v \cdot \alpha \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$ ou $v \cdot \alpha \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \gamma$ est exceptionnelle.

Cas 1. — Si $o_{n-2}(\gamma) = 0$, γ commute avec σ_{n-1} ce qui nous permet clairement de réduire $o_{n-1}(w)$.

Cas 2. — Si $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ alors la transformation de poignée suivie des transformations nécessaires à la mise sous forme de mot de transition abaissent le couple $(o_{n-1}(w), n - h(\gamma))$.

Cas 3. — Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et $o_{n-2}(\gamma) = 1$ alors w peut s'écrire $\alpha' \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^\eta \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \delta'$ où $\alpha' \in \mathcal{F}_{n-1}$, $\delta' \in \mathcal{F}_n$ et $\eta \in \{+1, -1\}$. Si $\eta = \varepsilon_1$ alors une relation de tresse nous permet de réduire $o_{n-1}(w)$. Si $\eta = -\varepsilon_1$ alors $v \cdot \alpha'$ et $v \cdot \alpha' \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^\eta \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$ ne sont pas exceptionnels par hypothèse car w est un mot de transition. Nous pouvons alors appliquer la transformation B du lemme 4 et ainsi abaisser $o_{n-1}(w)$.

Cas 4. — Si $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et $o_{n-2}(\gamma) = 2$ alors peut s'écrire $\alpha' \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \sigma_{n-2}^\eta \gamma' \sigma_{n-2}^\eta \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \delta'$ où $\alpha' \in \mathcal{F}_{n-1}$, $\gamma' \in \mathcal{F}_{n-2}$, $\delta' \in \mathcal{F}_n$ et $\eta \in \{+1, -1\}$. Comme la restriction aux $(n - 1)$ premières coordonnées de l'un au moins de $v \cdot \alpha \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1}$ ou $v \cdot \alpha \sigma_{n-1}^{\varepsilon_1} \gamma$ est exceptionnelle, nous pouvons appliquer la transformation C du lemme 5 et ainsi abaisser le couple $(o_{n-1}(w), n - h(\gamma))$. □

Le théorème 1 met clairement en évidence un algorithme polynomial pour trivialisier les tresses fermées coloriées. De part la σ_{n-1} -positivité (ou l'opposé) des tresses résultantes (voir [4]), nous évitons toute comparaison avec la tresse triviale. Enfin, dans [5], nous montrons qu'il est possible de nous restreindre à un certain type d'isotopies de façon à ne plus utiliser des bandes mais des arcs plongés dont un codage simple fait de la méthode de Montesinos modifiée un algorithme efficace de conversion de descriptions de 3-variétés.

Remerciements. — Je désire remercier particulièrement la *referee*, dont le rapport a permis d'améliorer remarquablement l'algorithme

présenté, ainsi que mon directeur de thèse, le Professeur Mark Baker, et les Professeurs Boileau et Dehornoy pour leur intérêt et leurs discussions enrichissantes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. BIRMAN, Braids, links and mapping class groups, *Annals of Math. Studies*, vol. 84, Princeton Univ. Press, 1975.
- [2] J. BIRMAN, B. WAJNRYB, 3-fold branched coverings and the mapping class group of a surface, *Lecture Note 1167*, Springer-Verlag, 1985.
- [3] G. BURDE, H. ZIESCHANG, *Knots*, De Gruyter Studies in Math., vol. 5, 1985.
- [4] P. DEHORNOY, A fast method for comparing braids, *Adv. Math.*, 125-2 (1997), 200–235.
- [5] F. HAROU, Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, 2000.
- [6] J. MONTESINOS,, A representation of closed orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3 , *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974), 845–846.
- [7] J. MONTESINOS, Surgery on links and double branched covers of S^3 , in *Knots, Groups and 3-Manifolds*, *Ann. Math. Stud.*, vol. 84, Princeton Univ. Press, 1975, 227–259.
- [8] J. MONTESINOS, Three-manifolds as 3-fold branched covers of S^3 , *Quart. J. Math. Oxford*, 27-2 (1976), 85–90.
- [9] V.V. PRASOLOV, A.B. SOSSINSKY, *Knots, Links, Braids and 3-manifolds*, *AMS Trans. Math. Monograph*, vol. 154, Springer-Verlag, 1997.
- [10] D. ROLFSEN, *Knots and links*, Publish or Perish, 1977.
- [11] P. VOGEL, Representation of links by braids : a new algorithm, *Comment. Math. Helv.*, 65-1 (1990), 104–113.

Manuscrit reçu le 22 septembre 2000,
révisé le 20 décembre 2000,
accepté le 27 février 2001.

Franck HAROU,
Université de Rennes 1
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex (France).
fharou@maths.univ-rennes1.fr