ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Pascal AUTISSIER

Points entiers et théorèmes de Bertini arithmétiques

Tome 51, nº 6 (2001), p. 1507-1523.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_6_1507_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
51, 6 (2001), 1507–1523

POINTS ENTIERS ET THÉORÈMES DE BERTINI ARITHMÉTIQUES

par Pascal AUTISSIER

Introduction.

On s'intéresse ici aux solutions, dans l'anneau $\overline{\mathbb{Z}}$ des entiers algébriques, de systèmes d'équations diophantiennes. Cela se traduit, dans le langage des schémas, de la manière suivante :

Soit K un corps de nombres, $O_K = K \cap \overline{\mathbb{Z}}$ son anneau des entiers, et $B = \operatorname{Spec}(O_K)$. Soit Y un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_{O_K}$, défini par des polynômes homogènes $G_1; \ldots; G_r$ (à $n+1$ variables $X_0; \ldots; X_n$ et à coefficients dans O_K), et U le complémentaire du fermé de Y défini par $X_0 = 0$.

On s'intéresse alors à l'ensemble $U(\overline{\mathbb{Z}})$ des O_K-points de U à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}$. En effet, cet ensemble est en bijection naturelle avec l'ensemble des $(x_1; \ldots; x_n)$ solutions dans $\overline{\mathbb{Z}}^n$ du système

$$\forall i \in \{1; \ldots; r\} \quad G_i(1; x_1; \ldots; x_n) = 0.$$

On est en fait amené à poser la définition suivante :

Soit Y un schéma intègre, projectif et plat sur O_K, et U un ouvert de Y. On appelle **point entier** sur U tout fermé (de Y) intègre, horizontal, de dimension 1 et contenu dans U. L'ensemble des points entiers sur U est

Mots-clés : Point entier – Hauteur – Variété arithmétique – Théorème de Bertini – Variété abélienne.
Classification math. : 14G40 – 11G50 – 11G10.

en bijection naturelle avec le quotient de $U(\overline{\mathbb{Z}})$ par l'action du groupe de Galois de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur K.

Un théorème de Rumely [15] (*cf.* [12] et [13] pour la formulation suivante) donne alors des conditions géométriques d'existence de tels points entiers :

THÉORÈME 0. — *On suppose que la fibre générique Y_K est géométriquement irréductible sur K. Alors :*

U admet un point entier si et seulement si le morphisme $U \to B$ est surjectif.

On donne dans ce papier une version effective de ce théorème. Pour cela, on utilise le formalisme des hauteurs à la Arakelov, généralisé par Bost, Gillet et Soulé (*cf.* [7], [3]). On peut alors démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME (2.1.3). — *Soit X une variété arithmétique, et $h_{\widehat{\mathcal{L}}}$ une bonne hauteur sur X. Soit Y un fermé intègre horizontal de dimension $p \geqslant 2$, U un ouvert de Y, et $\epsilon > 0$. On suppose que chaque fermé (de Y) irréductible vertical de dimension $p-1$ rencontre U.*

Il existe alors une infinité de points entiers E sur U vérifiant $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leqslant S+\epsilon$, où S est une constante effective ne dépendant que de X, $\widehat{\mathcal{L}}$ et Y (mais pas de U).

Plus précisément, l'ensemble des points fermés x de $Y_{\mathbb{Q}}$ tels que l'adhérence $E = \overline{\{x\}}$ est un point entier sur U vérifiant $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leqslant S+\epsilon$, est Zariski-dense dans $Y_{\mathbb{Q}}$.

Notons que l'hypothèse sur U est ici plus forte que celle du théorème 0 : "$U \to B$ surjectif". Il est possible que la conclusion du théorème 2.1.3 reste vraie avec cette hypothèse faible (*i.e.* en permettant à U d'être disjoint de certains fermés verticaux de dimension $p-1$), éventuellement avec une borne S plus grande. C'est le cas lorsque Y est régulier de dimension 2 (*cf.* [2]).

On applique alors ce théorème aux modèles de variétés abéliennes :

THÉORÈME (2.2.2). — *Soit A une variété abélienne sur K de dimension $g \geqslant 1$, X un modèle de A sur O_K, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur X tel que $L = \mathcal{L}_K$ est symétrique sur A.*

Soit U un ouvert de X tel que chaque fermé (de X) irréductible vertical de dimension g rencontre U, et $\epsilon > 0$.

On note $\tilde{h}_L$ la hauteur de Néron-Tate relativement à L, et $\mathcal{A}_\epsilon$ l'ensemble des points fermés x de A vérifiant : $\tilde{h}_L(x) \leqslant \epsilon$ et l'adhérence $\overline{\{x\}}$ dans X est un point entier sur U.

Alors $\mathcal{A}_\epsilon$ est Zariski-dense dans A.

On décrit ensuite un analogue arithmétique des théorèmes de Bertini :

On peut, moyennant une extension de la base, couper une variété arithmétique X par un hyperplan de telle manière que l'intersection X' conserve certaines propriétés géométriques de X, et cela avec un contrôle de la hauteur de X'. Plus précisément :

THÉORÈME (3.2.3). — *Soit $\widehat{M}$ un O_K-module localement libre hermitien. On pose $\mathbb{P}^\vee = \mathbf{P}(M^\vee)$ et $\widehat{\mathcal{L}} = \widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^\vee}(1)}$. Soit $X \subset \mathbb{P}^\vee$ une variété arithmétique sur O_K de dimension $d \geqslant 3$, et $\epsilon > 0$.*

Il existe alors une extension finie L de K et un fermé X' de X_{O_L} tels que, en posant $B' = \mathrm{Spec}(O_L)$ et $g : B' \to B$ le morphisme induit par $O_K \hookrightarrow O_L$, on a :

– Le fermé X' est une variété arithmétique sur O_L de dimension $d-1$.

– Pour tout $b \in B'$ tel que la fibre $X_{g(b)}$ de X au-dessus de $g(b)$ est lisse, la fibre X'_b de X' au-dessus de b est lisse.

– Pour tout $b \in B'$, le $k(b)$-schéma X'_b et le $k(g(b))$-schéma $X_{g(b)}$ ont le même nombre géométrique de composantes irréductibles.

– $h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X') \leqslant \frac{d}{d-1} h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X) + S + \epsilon$, où S est une constante effective ne dépendant que de $\widehat{M}$ et d.

On remarque que l'on permet ici une extension de la base O_K, ce qui n'est pas nécessaire dans les théorèmes de Bertini classiques (*i.e.* sur les corps).

Précisons maintenant les stratégies des preuves des deux théorèmes précédents :

On démontre le théorème 2.1.3 par récurrence sur la dimension de Y. L'ingrédient clef est alors le théorème d'amplitude arithmétique de Zhang (*cf.* [18] p. 207); on obtient un diviseur vérifiant de bonnes propriétés d'horizontalité, et de hauteur majorée (*cf.* proposition 2.1.2). Cette preuve s'inspire des travaux de Moret-Bailly [13] et d'Ullmo [17].

On en déduit ensuite le théorème 2.2.2 en approchant uniformément la hauteur de Néron-Tate par des hauteurs à la Arakelov.

En ce qui concerne le théorème 3.2.3, l'idée est d'utiliser la dualité entre points entiers et hyperplans dans l'espace projectif. Par les théorèmes de Bertini classiques (*cf.* [9] p. 89), on voit que les propriétés que l'on veut conserver sont "génériquement vraies" et constructibles, donc vraies sur un ouvert adéquat de l'espace projectif dual (*cf.* proposition 3.1.1). Il suffit alors de prendre un point entier (donné par le théorème 2.1.3) sur cet ouvert et d'utiliser la dualité.

Je remercie Emmanuel Ullmo de m'avoir guidé dans l'élaboration de ce papier.

1. Les préliminaires.

1.1. Un peu de théorie des hauteurs.

DÉFINITIONS. — *Une* **variété arithmétique** *est un schéma X intègre, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, tel que la fibre générique $X_{\mathbb{Q}}$ est régulière. Un* **faisceau inversible hermitien** *est un couple $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \|\ \|)$, formé d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X, et d'une famille $\|\ \|$ de normes hermitiennes sur $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ variant de manière C^∞ sur $X(\mathbb{C})$ et invariante par conjugaison complexe.*

On note $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ la (1;1)-forme de courbure de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}$ sur $X(\mathbb{C})$.

Soit K un corps de nombres, et O_K son anneau des entiers. Une variété arithmétique **sur** O_K est un O_K-schéma X tel que X est une variété arithmétique et la fibre générique X_K est géométriquement irréductible sur K.

Soit X une variété arithmétique de dimension $d \geqslant 1$. On désigne par $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ le groupe des classes d'isométrie de faisceaux inversibles hermitiens sur X. Pour $0 \leqslant p \leqslant d$, on note $Z_p(X)$ le groupe des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de fermés intègres de dimension p. On définit aussi (*cf.* [7] p. 485, [3] p. 933) le groupe de Chow arithmétique de dimension p, noté $\widehat{CH}_p(X)$. Le degré arithmétique définit un morphisme de groupes $\widehat{\deg} : \widehat{CH}_0(X) \to \mathbb{R}$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, on se donne une variété arithmétique X de dimension $d \geqslant 1$ et $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant d$, on définit la première classe de Chern arithmétique $\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}}) : \widehat{CH}_p(X) \to \widehat{CH}_{p-1}(X)$, qui est un morphisme de groupes.

Soit $p \in \{0; \dots; d\}$, et $D \in Z_p(X)$. Soit g un courant de Green pour D. Le réel

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(D) = \widehat{\deg}\Big[\widehat{c}_1(\widehat{\mathcal{L}})^p(D; g) - (0; \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{\wedge p} \wedge g)\Big]$$

ne dépend pas du choix de g. On l'appelle la **hauteur** de D relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$.

Soit Y un fermé intègre horizontal de dimension p. La **hauteur normalisé** de Y relativement à $\widehat{\mathcal{L}}$ est le réel

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \frac{h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)}{\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}})p}.$$

PROPOSITION 1.1.1. — *Soit Y un fermé intègre de dimension p, n un entier $\geqslant 1$, et s une section rationnelle non nulle de $\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}$ sur Y. Alors on a*

$$h_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n = h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\mathrm{div}(s)) - \int_{Y(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{p-1}$$

(l'intégrale est nulle si Y est vertical).

Démonstration. — C'est la proposition 3.2.1 (iv) de [3] p. 949. □

Dans la suite de ce paragraphe, on se donne un fermé intègre horizontal Y de dimension p.

Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})_{\mathbb{R}}$ s'identifie à l'espace des sections holomorphes de $\mathcal{L}_{\mathbb{C}|Y_{\mathbb{C}}}$ sur $Y(\mathbb{C})$ invariantes par conjugaison complexe. Il est naturellement muni de la norme $\| \ \|_{\infty}$ définie par $\|s\|_{\infty} = \max_{P \in Y(\mathbb{C})} \|s(P)\|$.

LEMME 1.1.2. — *On suppose $\mathcal{L}$ ample et $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ semipositive. Soit $n \geqslant 1$, et $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}) - \{0\}$. On écrit $\mathrm{div}(s) = \sum_i m_i F_i + \sum_j l_j V_j$, avec les F_i intègres horizontaux et les V_j intègres verticaux.*

Alors il existe i_0 tel que $(p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \leqslant h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)p + \frac{1}{n} \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_{\infty}$.

Démonstration. — Soit i_0 tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) = \min_i h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_i)$. On a alors :

$$\begin{aligned}h_{\widehat{\mathcal{L}}}(\operatorname{div}(s)) &= \sum_i m_i h_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_i) + \sum_j l_j h_{\widehat{\mathcal{L}}}(V_j)\\ &\geqslant (p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0})\sum_i m_i \deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(F_i) = (p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0})\deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}})n.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\int_{Y(\mathbb{C})} \ln \|s_{\mathbb{C}}\| \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{p-1} \leqslant \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_{\infty} \int_{Y(\mathbb{C})} \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}^{p-1} = \ln \|s_{\mathbb{C}}\|_{\infty} \deg_{\mathcal{L}_{\mathbb{Q}}}(Y_{\mathbb{Q}}).$$

On utilise alors la proposition 1.1.1 pour conclure. □

Définition. — Soit U un ouvert de Y. Un **point entier** sur U est un fermé (de Y) intègre horizontal de dimension 1 contenu dans U.

On dit que $h_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est une **bonne hauteur** lorsque $\mathcal{L}$ est ample et $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ semipositive. On pose alors $A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) = \inf_E h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E)$, où E parcourt l'ensemble des points entiers sur Y. C'est un réel (*cf.* [3] p. 954).

1.2. Quelques résultats.

Voici quelques résultats dont on aura besoin dans la suite. On note $B_0 = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$. Par ailleurs, on convient que le mot "composante" sous-entend "composante irréductible".

PROPOSITION 1.2.1. — *Soit Y un schéma projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, purement de dimension $p \geqslant 1$. Alors il existe un fermé F horizontal purement de dimension 1 tel que*

– *tout fermé irréductible vertical de dimension $p-1$ (i.e. toute composante de chaque fibre spéciale du morphisme $Y \to B_0$) rencontre F;*

– *chaque composante de Y contient une composante de F.*

Démonstration. — Il existe un corps de nombres K tel que les composantes $Z_1; \ldots; Z_r$ de Y_K sont géométriquement irréductibles sur K. On pose $B = \operatorname{Spec}(O_K)$. Le changement de base $p : B \to B_0$ induit un morphisme $p_1 : Y_{O_K} \to Y$. Soit Y'_i l'adhérence de Z_i dans Y_{O_K}. Alors $Y'_1; \ldots; Y'_r$ sont les composantes de Y_{O_K}. La propriété d'irréductibilité géométrique étant constructible (*cf.* [9] p. 36), il existe un ensemble fini A

de B tel que, pour tout $i \in \{1; \dots ; r\}$ et tout $b \in B - A$, la fibre Y'_{ib} de Y'_i au-dessus de b est géométriquement irréductible sur $k(b)$. Soit x_i un point fermé de Z_i.

Soit F_1 l'adhérence de $\{p_1(x_1); \dots ; p_1(x_r)\}$ dans Y. Chaque composante de Y contient alors une composante de F_1. De plus, pour tout $b \in B_0 - p(A)$, chaque composante de la fibre Y_b rencontre F_1.

Il reste à traiter le cas de l'ensemble fini J des composantes des fibres de Y au-dessus des points de $p(A)$. Pour $V \in J$, soit x_V un point fermé de V, et E_V un fermé irréductible horizontal de dimension 1 passant par x_V.

Le fermé $F = F_1 \cup \bigcup_{V \in J} E_V$ convient alors pour la proposition. □

Proposition 1.2.2. — *Soit F un schéma réduit, projectif et plat sur $\mathbb{Z}$, purement de dimension 1. Il existe alors c et $n_0 \geqslant 1$ vérifiant :*

Pour tout $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(F)$ et tout $n \geqslant 1$, il existe $u \in \Gamma(F; \mathcal{L}^{\otimes n_0 n})$ ne s'annulant pas sur F, tel que $\|u_{\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant e^{c - a n_0 n}$, où $a = \min_C h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(C)$, C parcourant les composantes intègres de F.

Démonstration. — Comme $\mathrm{Pic}(F)$ est fini (*cf.* [13] p. 165), il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(F)$, on a $\mathcal{L}^{\otimes n_0} \simeq \mathcal{O}_F$. On applique alors la proposition 1.3.3 de [2] p. 206. □

Proposition 1.2.3 (Zhang). — *Soit X une variété complexe projective lisse, purement de dimension $d \geqslant 1$, et $\widehat{\mathcal{L}}$ un faisceau inversible hermitien sur X tel que $\mathcal{L}$ est ample et la courbure de $\widehat{\mathcal{L}}$ est semipositive. Soient Y et Z deux fermés de Zariski de X, avec $Z \subset Y$. Soit enfin $t \in \Gamma(Z; \mathcal{L}_{|Z})$, et $\epsilon > 0$.*

Alors, pour tout n assez grand, il existe $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})$ tel que $s_{|Z} = t^{\otimes n}$ et $\|s\|_\infty \leqslant e^{\epsilon n} \|t\|_\infty^n$.

S'il existe une variété algébrique réelle X' projective lisse telle que $X = X'_{\mathbb{C}}$, et si $\widehat{\mathcal{L}}$, Y, Z, t sont invariants par conjugaison complexe, alors on peut imposer à s de l'être aussi.

Démonstration. — D'après le théorème 3.5 (1) de [18] p. 200, $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}|Y_{\mathbb{C}}}$ est "semi-ample" (au sens de Zhang) sur $Y_{\mathbb{C}}$. On applique alors le théorème 3.3 de [18] p. 198. □

2. Le théorème de Rumely effectif.

2.1. Le théorème.

Dans tout ce qui suit, X est une variété arithmétique de dimension $d \geqslant 2$. C'est l'espace ambiant dans lequel on travaille par la suite. On se donne aussi $\widehat{\mathcal{L}} \in \widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ tel que $\mathcal{L}$ est ample et la courbure $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ de $\widehat{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}$ est semipositive.

Soit enfin Y un fermé intègre horizontal de dimension p. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\Gamma(Y;\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})_{\mathbb{R}}$ est muni de la norme $\| \; \|_\infty$ (*cf.* paragraphe 1.1).

Rappelons le résultat suivant, dû à Zhang :

THÉORÈME 2.1.1. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\mathcal{O}_Y$, et $\epsilon > 0$. Posons $\Gamma_n = \Gamma(Y;\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I})$. L'injection $\Gamma_n \hookrightarrow \Gamma(Y;\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})$ munit naturellement l'espace $\Gamma_{n\mathbb{R}}$ de la norme $\| \; \|_\infty$.*

Alors, pour tout n assez grand, il existe une base $(s_1;\ldots;s_N)$ du $\mathbb{Z}$-module libre Γ_n telle que

$$\forall i \in \{1;\ldots;N\} \qquad \|s_{i\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant \exp\Big(-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n + \epsilon n\Big).$$

Démonstration. — C'est une variante du corollaire 4.8 de [18] p. 207. □

PROPOSITION 2.1.2. — *Soit Y un fermé intègre horizontal de dimension $p \geqslant 2$, et Z un fermé horizontal de Y purement de dimension $p-1$. Soit $\epsilon > 0$.*

Il existe $n \geqslant 1$ et $s \in \Gamma(Y;\mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})$ tels que

– *le schéma des zéros de $s_{|Z}$ est horizontal purement de dimension $p-2$;*

– *on a $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant \exp\Big(-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n + \epsilon n\Big)$.*

Démonstration. — D'après la proposition 1.2.1, il existe un fermé F de Z horizontal purement de dimension 1 tel que

– tout fermé irréductible vertical de Z de dimension $p-2$ rencontre F ;

– chaque composante de Z contient une composante de F.

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal définissant F dans Y. Posons $\Gamma_n = \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n} \otimes \mathcal{I})$. Par amplitude de $\mathcal{L}_{|Y}$, on a, pour tout n assez grand, la suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules libres suivante :

$$(*) \qquad 0 \to \Gamma_n \to \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}) \to \Gamma(F; \mathcal{L}_{|F}^{\otimes n}) \to 0.$$

D'après la proposition 1.2.2, il existe $n_1 \geqslant 1$ et $u \in \Gamma(F; \mathcal{L}_{|F}^{\otimes n_1})$ ne s'annulant pas sur F, et tel que $\|u_{\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant e^{-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n_1 + \epsilon n_1}$.

D'aprs la proposition 1.2.3, il existe $v \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n_1 n})_{\mathbb{R}}$ tel que $v_{|F_{\mathbb{C}}} = u_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ et $\|v\|_\infty \leqslant e^{\epsilon n} \|u_{\mathbb{C}}\|_\infty^n$.

Par ailleurs, d'après la suite exacte $(*)$, il existe $t \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n_1 n})$ tel que $t_{|F} = u^{\otimes n}$. Alors $(v - t_{\mathbb{C}})_{|F_{\mathbb{C}}} = 0$ donc $v - t_{\mathbb{C}} \in \Gamma_{n\mathbb{R}}$.

D'après le théorème 2.1.1, il existe $s' \in \Gamma_n$ tel que l'on a la majoration : $\|v - t_{\mathbb{C}} - s'_{\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant e^{-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n_1 n + \epsilon n_1 n}$.

On pose $s = s' + t$. On a alors $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant e^{-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n_1 n + 3\epsilon n_1 n}$. Et par construction de F, le schéma des zéros de $s_{|Z}$ ne contient pas de composante de Z et n'a pas de composante verticale. □

THÉORÈME 2.1.3. — *Soit Y un fermé intègre horizontal de dimension $p \geqslant 2$, et Z un fermé de Y ne contenant aucun fermé irréductible vertical de dimension $p-1$. Soit $\epsilon > 0$, et $\mathcal{Y}_\epsilon$ l'ensemble des points fermés x de $Y_{\mathbb{Q}}$ tels que l'adhérence $E = \overline{\{x\}}$ est un point entier sur $Y - Z$ vérifiant $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leqslant h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)p - (p-1)A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon$.*

Alors $\mathcal{Y}_\epsilon$ est Zariski-dense dans $Y_{\mathbb{Q}}$ (donc infini).

Démonstration. — Montrons d'abord qu'il existe un point entier E sur $Y - Z$ tel que

$$(1) \qquad h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leqslant h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)p - (p-1)A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon.$$

Quitte à l'agrandir, on peut supposer Z horizontal purement de dimension $p-1$. On procède alors par récurrence sur p :

Supposons $p = 2$. La proposition 2.1.2 fournit une section $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n}) - \{0\}$ telle que $\mathrm{div}(s)$ et Z sont disjoints et $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant e^{-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n + \epsilon n}$. On écrit $\mathrm{div}(s) = \sum_i m_i F_i + \sum_j l_j V_j$, avec les F_i intègres horizontaux et les V_i intègres verticaux. D'après le lemme 1.1.2, il existe i_0 tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \leqslant 2h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) - A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon$. Donc $E = F_{i_0}$ convient.

Supposons maintenant $p \geqslant 3$. D'après la proposition 2.1.2, il existe $s \in \Gamma(Y; \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes n})$ tel que

– le schéma des zéros de $s_{|Z}$ est horizontal purement de dimension $p-2$;

– on a $\|s_{\mathbb{C}}\|_\infty \leqslant e^{-A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)n+\epsilon n/2}$.

On écrit $\operatorname{div}(s) = \sum_i m_i F_i + \sum_j l_j V_j$. D'après le lemme 1.1.2, il existe i_0 tel que $(p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(F_{i_0}) \leqslant h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)p - A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) + \frac{\epsilon}{2}$.

On pose $Y' = F_{i_0}$ et $Z' = Z \cap F_{i_0}$. Alors, par hypothèse de récurrence, il existe un point entier E sur $Y' - Z'$ tel que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leqslant (p-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y') - (p-2)A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y') + \frac{\epsilon}{2}$. Alors E est un point entier sur $Y - Z$, et sachant que $A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y') \geqslant A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)$, on obtient $h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(E) \leqslant h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y)p - (p-1)A_{\widehat{\mathcal{L}}}(Y) + \epsilon$.

D'où le résultat.

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $\mathcal{Y}_\epsilon$ n'est pas Zariski-dense dans $Y_{\mathbb{Q}}$. En appliquant ce qui précède à $Z' = Z \cup \overline{\mathcal{Y}_\epsilon}$, on voit que $Y - Z$ admet un point entier E vérifiant l'inégalité (1) et de point générique non contenu dans $\mathcal{Y}_\epsilon$. D'où une contradiction. □

2.2. Une application aux modèles de variétés abéliennes.

Soit A une variété abélienne sur K de dimension $g \geqslant 1$. Pour tout entier non nul m, on note $[m] : A \to A$ le morphisme de multiplication par m.

DÉFINITION. — *On appelle* **modèle** *de A sur O_K toute variété arithmétique X sur O_K ,telle que $X_K \simeq A$.*

Dans tout ce paragraphe, X désigne un modèle de A sur O_K, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur X tel que $L = \mathcal{L}_K$ est symétrique (*i.e.* $[-1]^*L \simeq L$ sur A). Pour tout $m \neq 0$, on a alors $[m]^*L \simeq L^{\otimes m^2}$.

Rappelons la construction exposée dans [16] p. 345 (*cf.* aussi [1] p. 151–152) :

Il existe, d'après [11] p. 50–52, une famille C^∞ de normes hermitiennes sur $L_{\mathbb{C}}$ courbure invariante par translations; une telle famille est appelée **métrique du cube** pour L. De plus, un entier $s \geqslant 2$ étant fixé, il existe une unique métrique du cube pour L telle que l'isomorphisme $[s]^*L \simeq L^{\otimes s^2}$ devient une isométrie. On pose $\widehat{L} = (L; \| \, \|)$ et $\widehat{\mathcal{L}} = (\mathcal{L}; \| \, \|)$.

On construit alors, par récurrence, une suite de couples $(X_n; \widehat{\mathcal{L}}_n)$ de la manière suivante :

On pose $X_0 = X$ et $\widehat{\mathcal{L}}_0 = \widehat{\mathcal{L}}$. Et pour $n \geqslant 1$, on pose $\alpha_n : X_n \to X_{n-1}$ la normalisation de X_{n-1} par le morphisme $[s] : A \to A$, de sorte que l'on a $\alpha_{nK} = [s]$ sur $X_{nK} \simeq A$. On pose alors $\widehat{\mathcal{L}}_n = \alpha_n^* \widehat{\mathcal{L}}_{n-1}$.

On a, pour tout $n \geqslant 0$, les propriétés suivantes : X_n est un modèle de A sur O_K, α_{n+1} est fini et surjectif, $\mathcal{L}_n$ est un faisceau inversible ample sur X_n, et on a une isométrie $\widehat{\mathcal{L}}_{nK} \simeq \widehat{L}^{\otimes s^{2n}}$.

Pour Y fermé intègre de A, on note $\overline{Y}_n$ l'adhérence de Y dans X_n. On a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.2.1. — *La suite $\frac{1}{s^{2n}} h'_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(\overline{Y}_n)$ converge uniformément en Y vers un réel $\tilde{h}_L(Y)$. Si x est un point fermé de A, $\tilde{h}_L(x)$ coïncide avec la hauteur de Néron-Tate de x relativement à L; en particulier, on a $\tilde{h}_L(x) \geqslant 0$.*

Par ailleurs, on a $\tilde{h}_L(A) = 0$.

Démonstration. — C'est la proposition-définition 3.2 de [1] p. 151. L'assertion $\tilde{h}_L(A) = 0$ est dans [16] p. 345, ainsi que dans [1] p. 157. □

THÉORÈME 2.2.2. — *Soit Z un fermé de X ne contenant aucun fermé irréductible vertical de dimension g. Soit $\epsilon > 0$, et $\mathcal{A}_\epsilon$ l'ensemble des points fermés x de A vérifiant : $\tilde{h}_L(x) \leqslant \epsilon$ et l'adhérence $\overline{\{x\}}$ dans X est un point entier sur $X - Z$.*

Alors $\mathcal{A}_\epsilon$ est Zariski-dense dans A.

Démonstration. — Montrons d'abord que $\mathcal{A}_\epsilon$ est non vide.

On pose, pour $n \geqslant 1$, $\beta_n = \alpha_n \circ \cdots \circ \alpha_1$, et $Z_n = \beta_n^{-1}(Z)$. Le morphisme $\beta_n : X_n \to X$ est fini et surjectif.

Et Z_n est un fermé de X_n ne contenant aucun fermé irréductible vertical de dimension g : en effet, supposons que Z_n contient un tel fermé V. Alors, le morphisme β_n étant fini, $\beta_n(V)$ est aussi un fermé irréductible vertical de dimension g, et il est inclus dans Z; d'où une contradiction.

Maintenant, d'après la proposition 2.2.1, il existe $n \geqslant 1$ tel que pour tout fermé intègre Y de A, on a $\left| \frac{1}{s^{2n}} h'_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(\overline{Y}_n) - \tilde{h}_L(Y) \right| \leqslant \frac{\epsilon}{5g}$. En particulier, on a alors

$$\frac{1}{s^{2n}} A_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(X_n) \geqslant -\frac{\epsilon}{5g} \quad \text{et} \quad \frac{1}{s^{2n}} h'_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(X_n) \leqslant \frac{\epsilon}{5g}.$$

D'après le théorème 2.1.3, il existe un point fermé x de A tel que l'adhérence $E' = \overline{\{x\}}$ dans X_n est un point entier sur $X_n - Z_n$ vérifiant

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(E') \leqslant (g+1) h'_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(X_n) - A_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(X_n) g + \frac{\epsilon}{5g}.$$

Alors l'adhérence $E = \overline{\{x\}}$ dans X est un point entier sur $X - Z$ (car $E = \beta_n(E')$ et $E' \subset X_n - \beta_n^{-1}(Z)$), et on a l'inégalité

$$\tilde{h}_L(x) \leqslant \frac{1}{s^{2n}} h'_{\widehat{\mathcal{L}}_n}(E') + \frac{\epsilon}{5g} \leqslant \frac{\epsilon}{5g}\Big(2g + 2 + \frac{1}{s^{2n}}\Big) \leqslant \epsilon.$$

D'où le résultat : $x \in \mathcal{A}_\epsilon$.

Supposons maintenant que $\mathcal{A}_\epsilon$ n'est pas Zariski-dense dans A. En appliquant ce qui précède à $Z' = Z \cup \overline{\mathcal{A}_\epsilon}$, on voit qu'il existe un point fermé x de A tel que : $\tilde{h}_L(x) \leqslant \epsilon$, l'adhérence $E = \overline{\{x\}}$ dans X est un point entier sur $X - Z$, et $x \notin \mathcal{A}_\epsilon$. D'où une contradiction. □

3. Une application : Bertini arithmétique.

3.1. La partie algébrique.

Lorsque A est un anneau noethérien et M un A-module de type fini, on notera $\mathbf{P}(M)$ le A-schéma $\mathrm{Proj}[\mathrm{Sym}(M)]$.

Pour des précisions sur les propriétés de l'hyperplan universel, on pourra consulter [5] p. 122–124, ainsi que [6].

Soit K un corps de nombres, et M un O_K-module localement libre de rang $r+1$. On pose $B = \mathrm{Spec}(O_K)$, $\mathbb{P} = \mathbf{P}(M)$, $\mathbb{P}^\vee = \mathbf{P}(M^\vee)$, et β la projection $\mathbb{P} \to B$. Soit $\mathbb{H} \subset \mathbb{P} \times_B \mathbb{P}^\vee$ l'hyperplan universel. On a la propriété universelle suivante :

Pour tout O_K-schéma noethérien T, l'ensemble $\mathbb{P}(T)$ des O_K-points de $\mathbb{P}$ à valeurs dans T est en bijection avec l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{P}^\vee_T$, par l'application qui à $\phi : T \to \mathbb{P}$ associe $\mathbb{H}_\phi = \mathbb{H} \times_{\mathbb{P}} T$.

Soit maintenant $X \subset \mathbb{P}^\vee$ une variété arithmétique sur O_K de dimension $d \geqslant 3$, et $f : X \to B$ le morphisme structural.

On pose $\mathbb{H}' = \mathbb{H} \times_{\mathbb{P}^\vee} X = \mathbb{H} \cap (\mathbb{P} \times_B X)$ (intersection dans $\mathbb{P} \times_B \mathbb{P}^\vee$), et $\pi : \mathbb{H}' \to \mathbb{P}$ le morphisme induit par la première projection. Pour $\phi \in \mathbb{P}(T)$, on a $\mathbb{H}'_\phi = \mathbb{H}' \times_{\mathbb{P}} T = \mathbb{H}_\phi \cap X_T$ (intersection dans $\mathbb{P}^\vee_T$).

L'objectif des théorèmes de Bertini est de relier les propriétés du morphisme π (en particulier celles de ses fibres) à celles de f.

Soit U_0 l'ensemble des $y \in \mathbb{P}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{H}'_y = \pi^{-1}(y)$, π est plat en x. U_0 est un ouvert non vide de $\mathbb{P}$, au-dessus duquel les fibres de π sont purement de dimension $d-2$ (et non vides).

Soit J l'ensemble fini des $b \in B$ tels que $X_b = f^{-1}(b)$ n'est pas lisse sur $k(b)$. On désigne par W l'ensemble des $y \in U_0$ vérifiant : $\beta(y) \in B - J$, et $\mathbb{H}'_y$ est lisse et géométriquement irréductible sur $k(y)$.

Pour un schéma T de type fini sur un corps, notons $n(T)$ le nombre géométrique de composantes irréductibles de T sur ce corps. On pose alors, pour $b \in J$, W_b égal à l'ensemble des $y \in U_0$ tels que : $\beta(y) = b$ et $n(\mathbb{H}'_y) = n(X_b)$.

La proposition suivante, qui s'intéresse à $W' = W \cup \bigcup_{b \in J} W_b$, est la partie algébrique du théorème de Bertini arithmétique que l'on veut démontrer :

PROPOSITION 3.1.1. — *L'ensemble $\mathbb{P} - W'$ est contenu dans un fermé horizontal purement de codimension 1 dans $\mathbb{P}$.*

Démonstration. — On remarque d'abord que W et les W_b sont constructibles, donc W' l'est aussi (Pour des rappels sur la constructibilité, on pourra consulter [9] p. 2–4 et 36).

Pour $b \in B$, notons η_b le point générique de $\mathbb{P}_b = \beta^{-1}(b)$. Alors $\mathbb{H}'$ est plat sur B, et $\pi_b : \mathbb{H}'_b \to \mathbb{P}_b$ est plat en tout x tel que $\pi_b(x) = \eta_b$ (car $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_b;\eta_b}$ est un corps). Donc par le critère de platitude par fibres (*cf.* [8] p. 138), on a $\eta_b \in U_0$, et ce pour tout $b \in B$.

Soit maintenant $b \in B - J$. X_b est géométriquement connexe (théorème de Zariski) et lisse, donc géométriquement irréductible. D'après les théorèmes de Bertini classiques (*i.e.* sur les corps) (*cf.* [9] p. 89), $\mathbb{H}'_{\eta_b}$ est donc lisse et géométriquement irréductible sur $k(\eta_b)$; d'où $\eta_b \in W$.

De même, en prenant cette fois $b \in J$, on a, par une variante des théorèmes de Bertini classiques (*cf.* [9]), la relation $n(\mathbb{H}'_{\eta_b}) = n(X_b)$, *i.e.* $\eta_b \in W_b$.

Finalement, on a montré que $\eta_b \in W'$ pour tout $b \in B$. Sachant que W' est constructible, on en déduit le résultat. $\square$

3.2. La version effective.

On conserve les notations du paragraphe 3.1, en supposant de plus que $\widehat{M}$ est hermitien. Le faisceau inversible $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^\vee}(1)$ est alors naturellement muni d'une structure hermitienne.

De même, en munissant $M^\vee$ de la structure hermitienne duale, on a une structure hermitienne sur $\mathcal{M} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$.

Remarquons par ailleurs que si L est une extension finie de K, X_{O_L} est une variété arithmétique sur O_L.

On pose, pour $n \geqslant 1$, $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$. Par ailleurs, on définit $\widehat{\deg}(\widehat{M}) = \widehat{\deg}(\Lambda^{r+1}\widehat{M}) = h_{\Lambda^{r+1}\widehat{M}}(B)$.

Le lemme qui suit relie les hauteurs dans $\mathbb{P}$ et dans $\mathbb{P}^\vee$:

Proposition 3.2.1. — *Soit L une extension finie de K, et $\phi \in \mathbb{P}(O_L)$. On note E l'image de ϕ dans $\mathbb{P}$; c'est un point entier sur $\mathbb{P}$. On a alors*

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(\mathbb{H}_\phi) = \frac{1}{r} h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) - \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{r[K:\mathbb{Q}]} + \frac{a_r - 1}{2}.$$

Démonstration. — On pose ici, pour Y fermé intègre horizontal de $\mathbb{P}^\vee_{O_L}$ de dimension p :

$$h'(Y) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(Y) + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{p[K:\mathbb{Q}]} - \frac{a_p - 1}{2}\ ;$$

h' est la "hauteur projective" de Bost, Gillet et Soulé (*cf.* [3] p. 964), normalisée comme dans le paragraphe 1.1.

Le morphisme ϕ définit un O_L-module inversible F et un morphisme surjectif de O_L-modules $M_{O_L} \to F$. Soit N le noyau de ce morphisme, de sorte que l'on a une suite exacte de O_L-modules localement libres :

$$0 \to N \to M_{O_L} \to F \to 0.$$

On a alors $\mathbb{H}_\phi = \mathbf{P}(N^\vee)$, et l'immersion $\mathbb{H}_\phi \hookrightarrow \mathbb{P}^\vee_{O_L}$ est induite par le morphisme surjectif de O_L-modules $M^\vee_{O_L} \to N^\vee$.

On munit N et F des normes induites par $\widehat{M}_{O_L}$. D'un côté, on a $h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) = \frac{\widehat{\deg}(\widehat{F})}{[L:\mathbb{Q}]}$. Et de l'autre, on a, d'après la proposition 4.1.2 (ii) de [3] p. 965,

$$r[L:\mathbb{Q}]h'(\mathbb{H}_\phi) = \widehat{\deg}(\widehat{M}_{O_L}) - \widehat{\deg}(\widehat{N}).$$

Or, par additivité du degré arithmétique (*cf.* [10] p. 106), on a la relation $\widehat{\deg}(\widehat{M}_{O_L}) = \widehat{\deg}(\widehat{F}) + \widehat{\deg}(\widehat{N})$. On en déduit $h'(\mathbb{H}_\phi)r = h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E)$. D'où le résultat. □

Le lemme suivant est une forme faible du théorème de Bézout arithmétique :

PROPOSITION 3.2.2. — *Soit H un hyperplan de $\mathbb{P}^\vee_{O_L}$ ne contenant pas X_{O_L}. On a alors*

$$(d-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(H \cap X_{O_L}) \leqslant h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(H)r + h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)d + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{[K:\mathbb{Q}]} - \frac{r}{2}(a_r - 1) - \frac{a_{d-1}}{2}.$$

Démonstration. — D'après le théorème 5.4.4 (i) de [3] p. 1007, on a

$$(d-1)h'(H \cap X_{O_L}) \leqslant h'(X_{O_L})d + h'(H)r,$$

où h' désigne, comme dans la démonstration de la proposition précédente, la hauteur projective normalisée. On en déduit le résultat en remarquant que $h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X_{O_L}) = h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)$. □

THÉORÈME 3.2.3. — *Soit $\epsilon > 0$. Il existe une extension finie L de K et un fermé X' de X_{O_L} tels que, en posant $B' = \mathrm{Spec}(O_L)$ et $g : B' \to B$ le morphisme induit par $O_K \hookrightarrow O_L$:*

– Le fermé X' est une variété arithmétique sur O_L de dimension $d-1$.

– Pour tout $b \in B'$ tel que $g(b) \in B - J$, X'_b est lisse et géométriquement irréductible sur $k(b)$.

– Pour tout $b \in B'$ tel que $g(b) \in J$, on a $n(X'_b) = n(X_{g(b)})$.

– On a l'inégalité

$$(d-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X') \leqslant h'_{\widehat{\mathcal{L}}}(X)d + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{[K:\mathbb{Q}]} - A_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P})r + \frac{r+1}{2}a_r - \frac{r}{2} - \frac{a_{d-1}}{2} + \epsilon.$$

Démonstration. — D'après la proposition 3.1.1, il existe un fermé horizontal Z purement de codimension 1 dans $\mathbb{P}$ tel que $\mathbb{P} - Z \subset W'$.

D'après le théorème 2.1.3, il existe alors un point entier E sur $\mathbb{P} - Z$ tel que

$$h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(E) \leqslant (r+1)h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P}) - A_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P})r + \epsilon. \tag{1}$$

Il existe une extension finie L de K et $\phi \in \mathbb{P}(O_L)$ tel que E est l'image de ϕ dans $\mathbb{P}$.

On pose $H = \mathbb{H}_\phi$, $X' = \mathbb{H}'_\phi = H \cap X_{O_L}$, $B' = \operatorname{Spec}(O_L)$ et $g : B' \to B$ le morphisme induit par l'injection $O_K \hookrightarrow O_L$.

On a $E \subset U_0$, donc X' est plat sur O_L. De plus, pour $b \in B'$, on a $X'_b = \mathbb{H}'_{\phi(b)}$. On en déduit que X'_b est purement de dimension $d-2$ (et non vide). En outre, si $g(b) \in B - J$, X'_b est lisse et géométriquement irréductible sur $k(b)$; et si $g(b) \in J$, on a $n(X'_b) = n(X_{g(b)})$.

Cela implique que X' est une variété arithmétique sur O_L de dimension $d-1$.

Pour finir, on sait que $(r+1)h'_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P}) = \frac{r+1}{2}a_r - \frac{r}{2} + \frac{\widehat{\deg}(\widehat{M})}{[K:\mathbb{Q}]}$ (*cf.* [3] p. 965). Ceci, associé à la proposition 3.2.1 et à l'inégalité (1), nous donne

$$h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(H)r \leqslant (2r+1)\frac{a_r}{2} - r - A_{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbb{P})r + \epsilon.$$

La majoration de $(d-1)h'_{\widehat{\mathcal{L}}_{O_L}}(X')$ s'en déduit à l'aide de la proposition 3.2.2. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Abbes, Hauteurs et discrétude, Astérisque, 245 (1997), 141–166.

[2] P. Autissier, Points entiers sur les surfaces arithmétiques, Journal für die reine und angew. Math., 531 (2001), 201–235.

[3] J.B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, Heights of projective varieties and positive Green forms, Journal of the AMS, 7 (1994), 903–1027.

[4] T. Chinburg, R. Rumely, Well-adjusted models for curves over Dedekind rings, Progress in Math., 89 (1991), 3–24.

[5] D. Eisenbud, J. Harris, The geometry of schemes, Graduate Texts in Math., 197 (2000).

[6] R. Erné, Reducibility mod p of hypersurfaces in projective spaces - an application of arithmetic Bézout, Journal of Number Theory, 84 (2000), 305–316.

[7] H. Gillet, C. Soulé, An arithmetic Riemann-Roch theorem. Inventiones Math., 110 (1992), 473–543.

[8] A. GROTHENDIECK, J. DIEUDONNÉ, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III. Publications Math. de l'IHES, 28 (1966).

[9] J.P. JOUANOLOU, Théorèmes de Bertini et applications, Progress in Math., 42 (1983).

[10] S. LANG, Introduction to Arakelov theory, Springer-Verlag 1988.

[11] L. MORET-BAILLY, Métriques permises, Astérisque, 127 (1985), 29–87.

[12] L. MORET-BAILLY, Points entiers des variétés arithmétiques, Progress in Math., 71 (1987), 147–154.

[13] L. MORET-BAILLY, Groupes de Picard et problèmes de Skolem I, Annales Scientifiques de l'ENS, 22 (1989), 161–179.

[14] A. MORIWAKI, Arithmetic Bogomolov-Gieseker's inequality, American Journal of Math., 117 (1995), 1325–1347.

[15] R. RUMELY, Arithmetic over the ring of all algebraic integers, Journal für die reine und angew Math., 368 (1986), 127–133.

[16] L. SZPIRO, E. ULLMO, S. ZHANG, Équirépartition des petits points, Inventiones Math., 127 (1997), 337–347.

[17] E. ULLMO, Points entiers, points de torsion et amplitude arithmétique, American Journal of Math., 117 (1995), 1039–1055.

[18] S. ZHANG, Positive line bundles on arithmetic varieties, Journal of the AMS, 8 (1995), 187–221.

Manuscrit reçu le 20 novembre 2000,
révisé le 9 avril 2001,
accepté le 11 mai 2001.

Pascal AUTISSIER,
Université Paris XI
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).
autissie@clipper.ens.fr