ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean-Paul BÉZIVIN

Sur les ensembles de Julia et Fatou des fonctions entières ultramétriques

Tome 51, n^{o} 6 (2001), p. 1635-1661.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_6_1635_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
51, 6 (2001), 1635–1661

SUR LES ENSEMBLES DE JULIA ET FATOU DES FONCTIONS ENTIÈRES ULTRAMÉTRIQUES

par Jean-Paul BÉZIVIN

Il y a eu récemment des travaux originaux et intéressants sur les problèmes de dynamique des fractions rationnelles en une variable en analyse ultramétrique, c'est-à-dire quand le corps de base est un corps ultramétrique K. On définit, et on s'intéresse dans ce cadre aux propriétés des ensembles de Fatou et de Julia associés à une fraction rationnelle à coefficients dans K. Parmi les articles de base sur le sujet, on renvoie les lecteurs aux articles de la bibliographie, en particulier aux articles de L. Hsia et R. Benedetto, ([HS1], [HS2], [BE1], [BE2], [BE3], [BE4]).

Pour des exposés sur la théorie complexe de l'itération, le lecteur pourra consulter les livres de A.F. Beardon et de J. Milnor, [BEA] et [MI].

Dans cet article, nous allons étudier des problèmes liés à l'itération d'une fonction entière ultramétrique. On sait que dans le cas complexe, un certain nombre de problèmes sur ce thème sont encore ouverts (par exemple, si f et g sont deux fonctions entières transcendantes qui permutent, leurs ensembles de Julia (de Fatou) sont-ils les mêmes ?), et nous donnerons pour les problèmes analogues en analyse ultramétrique des réponses partielles sur ce type de sujets.

Le plan de l'article est le suivant.

La partie 1 est consacrée au rappel des définitions et des propriétés de base des ensembles de Fatou et de Julia.

Mots-clés : Fonctions entières p-adiques – Ensemble de Julia – Ensemble de Fatou – Dynamique p-adique.
Classification math. : 37F99 – 11S99.

Dans la partie 2, nous généralisons un résultat obtenu dans le cadre des fractions rationnelles au cas des fonctions entières transcendantes, à savoir que si la fonction entière transcendante f admet un point périodique répulsif, alors l'ensemble des points périodiques répulsifs est dense dans l'ensemble de Julia de f.

Dans la partie 3, nous abordons le problème de l'égalité des ensembles de Julia de deux fonctions entières transcendantes qui permutent, avec des résultats partiels sur le sujet.

Dans la partie 4, nous examinerons la dynamique sur l'ensemble de Fatou de deux fonctions entières qui permutent.

L'auteur remercie le Referee pour sa lecture attentive du texte original et ses remarques qui ont permis d'améliorer la rédaction.

1. Définitions et propriétés de base.

Nous allons commencer par donner quelques définitions. Soit p un nombre premier rationnel fixé, et $\mathbb{C}_p$ le complété d'une clôture algébrique du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adique.

Pour $\omega \in \mathbb{C}_p$ et $R > 0$, nous noterons $B^+(\omega, R)$ le disque circonférencié $B^+(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}_p; |z - \omega| \leqslant R\}$, et $B^-(\omega, R)$ le disque non circonférencié $B^-(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C}_p; |z - \omega| < R\}$. Remarquer que si R n'appartient pas au groupe de valeurs $|\mathbb{C}_p^*|$ de $\mathbb{C}_p$, le disque circonférencié et le disque non circonférencié sont le même ensemble. On peut donc considérer un tel disque comme circonférencié ou non.

Dans le cas où le rayon R est dans le groupe des valeurs, on dira que le disque est rationnel, et irrationnel dans le cas contraire. Dans le cas d'un disque rationnel la distinction entre disque circonférencié et non circonférencié a du sens.

Nous noterons aussi $B(\omega, R)$ un disque qui pourra être circonférencié ou non.

On peut définir une distance sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, la *distance sphérique*, de la façon suivante : pour deux points $A = (x, y)$ et $B = (u, v)$, on pose

$$\Delta(A, B) = \frac{|vx - uy|}{\max\{|x|, |y|\}\max\{|u|, |v|\}}.$$

Dans le cas où les deux points A et B sont dans $\mathbb{C}_p$, on peut prendre $y = v = 1$, identifier A et x, ainsi que B et u, et la distance entre A et B devient

$$\Delta(A, B) = \Delta(x, u) = \frac{|x - u|}{\max\{|x|, 1\}\max\{|u|, 1\}}.$$

Soit f une fonction entière transcendante sur $\mathbb{C}_p$. On définit par récurrence ses itérées par $f^{[0]}(x) = x$, $f^{[1]}(x) = f(x)$, et pour $n \geqslant 2$, $f^{[n]}(x) = f(f^{[n-1]}(x))$.

On définit, de manière analogue au cas où le corps de base est le corps des nombres complexes, l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(f)$ de la fonction f comme étant l'ensemble des points de $\mathbb{C}_p$ où la famille $f^{[n]}$ des itérées de f est équicontinue, c'est-à-dire des points $x \in \mathbb{C}_p$ tels qu'il existe un voisinage V de x pour la distance Δ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que pour tout couple (a, b) d'éléments de V vérifiant $\Delta(a, b) < \delta$, on ait $\Delta(f^{[n]}(a), f^{[n]}(b)) < \varepsilon$.

Il est clair, d'après la définition, que l'ensemble de Fatou de f est un ouvert. Le complémentaire de l'ensemble de Fatou est donc une partie fermée de $\mathbb{C}_p$ que l'on appelle l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ de f.

Nous utiliserons très souvent les résultats suivants sur les série entières à coefficients dans $\mathbb{C}_p$:

PROPOSITION 1. — *Soit $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n(x - a)^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, convergente dans le disque circonférencié $B^+(a, r)$, où $r \in |\mathbb{C}_p^*|$.*

Alors les maxima $r' = \mathrm{Max}\{|a_k|r^k, k \geqslant 1\}$, et $d = \mathrm{Max}\{k, |a_k|r^k = r', k \geqslant 1\}$ sont finis et atteints, et f est surjective de $B^+(a, r)$ dans $B^+(f(a), r')$, et chaque valeur dans $B^+(f(a), r')$ est atteinte d fois.

Preuve. — Voir [BE4]. □

PROPOSITION 2. — *Soit f une fonction entière non constante sur $\mathbb{C}_p$. Alors f est surjective sur $\mathbb{C}_p$.*

Preuve. — Posons $f(x) = \sum a_n x^k$. Soit $b \in \mathbb{C}_p$. Comme f est non constante, il existe un indice h tel que $a_h \neq 0$, $f(x) - b = g(x)$ n'est pas constante non plus. Soit $r > 0$; l'image du disque circonférencié $B^+(0, r)$ par $g(x) = f(x) - b$ est le disque de centre $c = f(0) - b$ et de rayon $r' = \mathrm{Max}\{|a_k|r^k, k \geqslant 1\}$. On a $r' \geqslant |a_h|r^h$, de sorte que l'on peut choisir h

assez grand de façon que $r' > |c|$, ce qui implique que $0 \in g(B^+(0,r))$, ce qui montre que g a un zéro dans ce disque, et que par suite f prend la valeur b. □

On a tout d'abord des résultats élémentaires sur les ensembles de Julia et de Fatou :

PROPOSITION 3. — *Soit f une fonction entière transcendante, alors les ensembles de Julia et de Fatou sont complètement invariants par f, c'est-à-dire que les images directe et réciproque d'un élément de ces ensembles sont encore dans l'ensemble en question.*

Démonstration. — Cela vient simplement du fait que les ensembles de Julia et Fatou sont stables sous l'action de f, et ils sont complémentaires.

Un outil très utile est le critère de Hsia, analogue d'un résultat de Montel ([HS2]) :

CRITÈRE DE HSIA. — *Soit F une famille de séries entières convergentes sur un disque D de $\mathbb{C}_p$. On suppose que l'image de D par les éléments $f \in F$ est incluse dans un ensemble Y indépendant de f dont le complémentaire dans $\mathbb{C}_p$ est non vide. Alors la famille F est équicontinue sur D.*

Démonstration. — Voir [HS2] ou [B].

Une conséquence immédiate, et que nous utiliserons très souvent, du critère de Hsia est le fait que si x est dans l'ensemble de Julia de f, et D est un disque contenant x, alors on a : $\cup_{n\geqslant 0} f^{[n]}(D) = \mathbb{C}_p$.

PROPOSITION 4. — *Soit f une fonction entière transcendante, $m \geqslant 1$ un entier et $g(x) = f^{[m]}(x)$ l'itérée d'ordre m de f. Alors les ensembles de Julia et de Fatou de g sont les mêmes que ceux de f.*

Démonstration. — Soit tout d'abord $x \in \mathcal{F}(f)$. Alors il existe un disque $B^+(x,r)$, tel que la famille $f^{[n]}$ soit équicontinue sur $B^+(x,r)$; alors la sous-famille $f^{[km]}, k \geqslant 0$ l'est également, ce qui montre que $x \in \mathcal{F}(f^{[m]})$. On a donc que l'ensemble de Fatou de f est inclus dans l'ensemble de Fatou de $f^{[m]}$.

On va montrer maintenant que l'ensemble de Fatou de $f^{[m]}$ est stable par f : $f(\mathcal{F}(f^{[m]})) \subset \mathcal{F}(f^{[m]})$.

Pour cela on raisonne par l'absurde.

Soit $x \in \mathcal{F}(f^{[m]})$, et supposons que $f(x) \notin \mathcal{F}(f^{[m]})$. Soit $r > 0$ tel que $B^+(x,r) \subset \mathcal{F}(f^{[m]})$, et posons $f(B^+(x,r)) = B^+(f(x),\rho)$. Par le critère de Hsia on a

$$\mathbb{C}_p = \cup_{k\in\mathbb{N}} f^{[km]}(B^+(f(x),\rho)) = \cup_{k\in\mathbb{N}} f^{[km+1]}(B^+(x,r)) = f(B)$$

où on a noté $B = \cup_{k\in\mathbb{N}} f^{[km]}(B^+(x,r))$, qui est inclus dans l'ensemble de Fatou de $f^{[m]}$. Soit $v \in \mathbb{C}_p$ tel que $f^{[m-1]}(v) = f(x)$, qui existe puisqu'une fonction entière non constante est surjective. Il existe $u \in B$ tels que $f(u) = v$. On a donc $f^{[m]}(u) = f^{[m-1]}(f(u)) = f^{[m-1]}(v) = f(x)$. Mais comme B est inclus dans l'ensemble de Fatou de $f^{[m]}$ et que celui-ci est stable par $f^{[m]}$, cela implique $f(x) \in \mathcal{F}(f^{[m]})$ ce qui est contraire à l'hypothèse faite; donc l'ensemble de Fatou de $f^{[m]}$ est bien stable par f.

Soit maintenant $x \in \mathcal{F}(f^{[m]})$, alors $f^{[j]}(x) \in \mathcal{F}(f^{[m]})$ pour $j = 0,..,m-1$. Il existe alors un disque $B^+(x,r)$ inclus dans $\mathcal{F}(f^{[m]})$ tel que sur les images de ce disque par les applications $f^{[j]}$, $j = 0,...,m-1$, la famille $f^{[km]}, k \in \mathbb{N}$ soit équicontinue. Alors la famille des $f^{[km+j]}, k \in \mathbb{N}, j = 0,...,m-1$, est équicontinue sur $B^+(x,r)$, c'est-à-dire que la famille des $f^{[n]}$ est équicontinue sur le disque $B^+(x,r)$, et donc $x \in \mathcal{F}(f)$, ce qui termine la démonstration.

Soit $x \in \mathbb{C}_p$. On appelle *orbite* de x sous l'action de R l'ensemble $\{f^{[n]}(x), n \in \mathbb{N}\}$.

L'ensemble de toutes les pré-images des éléments de l'orbite de x est appelé la *grande orbite* de x. Il s'agit donc de l'ensemble des $z \in \mathbb{C}_p$ tels qu'il existe $k, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $f^{[k]}(z) = f^{[n]}(x)$.

La propriété suivante, qui nous servira, est l'analogue d'un résultat en analyse complexe :

PROPOSITION 5. — *Soit f une fonction entière non constante, et $\omega \in \mathcal{J}(f)$. Alors l'adhérence de la grande orbite de ω est égale à $\mathcal{J}(f)$.*

Démonstration. — Soit A la grande orbite de ω. Comme $\omega \in \mathcal{J}(f)$, et que l'ensemble de Julia est complètement stable par f, A est une partie de $\mathcal{J}(f)$, donc aussi son adhérence B. Soit maintenant $z \in B^c$, et $B^+(z,r)$ un disque de centre z contenu dans B^c. Alors les images de ce disque par les itérées de f ne contiennent aucun point de A. Par le critère de Hsia, le disque est inclus dans l'ensemble de Fatou de f, ce qui montre que $B^c \subset \mathcal{F}(f)$, donc $\mathcal{J}(f) \subset B$, et ceci termine la démonstration.

Des points intéressants pour l'étude des ensembles de Fatou et de Julia sont les points fixes et périodiques, et pré-périodiques de f.

Un point fixe de f est un point $x \in \mathbb{C}_p$ vérifiant $f(x) = x$, un point périodique un point x tel qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $f^{[n]}(x) = x$; dans ce cas, le plus petit de ces entiers n est la *période* de x.

Un point pré-périodique est une pré-image d'un point périodique de R.

Si x est un point périodique de R, on définit son multiplicateur comme étant $\lambda = (f^{[n]})'(x)$.

On dira que le point périodique x de f est

a) Un point *attractif* si son multiplicateur λ est de module < 1.

b) Un point *neutre* si son multiplicateur λ est de module 1.

c) Un point *répulsif* si son multiplicateur λ est de module > 1.

2. Les ensembles de Julia et Fatou d'une fonction entière.

Dans cette partie, nous allons donner quelques propriétés des ensembles de Julia et Fatou d'une fonction entière.

Proposition 6. — *Soit f une fonction entière non constante, et x un point périodique de f. Alors*

a) *Si x est attractif ou neutre, alors x est dans l'ensemble de Fatou.*

b) *Si x est répulsif, alors x est dans l'ensemble de Julia.*

La démonstration de ce résultat est élémentaire : pour l'affirmation a), soit s l'ordre de x et $g = f^{[s]}$. On a $|g'(x)| \leqslant 1$ par hypothèse ; on trouve un petit disque de centre x, stable par g, et on peut appliquer le critère de Hsia, qui montre que x est dans l'ensemble de Fatou de g, qui est égal à l'ensemble de Fatou de f.

Pour le b) on remarque que l'on peut supposer, quitte à remplacer f par $f^{[s]}$, que x est un point fixe, la dérivée de l'itérée $f^{[n]}(x)$ au point x est alors égale à $(f'(x))^n$, et si $x \in \mathcal{F}(f)$, il existe un disque de centre x sur lequel la famille $f^{[n]}$ est équicontinue. Prenons $\varepsilon < \frac{1}{\max\{1,|x|\}}$ dans la définition, et soit $r > 0$ tel que pour tout $y \in B^+(x,r)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\Delta(f^{[n]}(y), f^{[n]}(x)) < \varepsilon$.

Si l'on écrit $f^{[n]}(y) = f^{[n]}(x) + \sum b_{k,n}(y-x)^k$, on a alors $\max\{|b_{k,n}|r^k, k \geqslant 1\} = \max\{|f^{[n]}(y) - f^{[n]}(x)|, y \in B^+(x,r)\}$.

En particulier, il existe $y_n \in B^+(x,r)$ tel que $|f^{[n]}(y_n)| \geqslant |b_{1,n}|r = |(f^{[n]})'(x)|r = |f'(x)|^n r$ pour tout n, et cette dernière quantité est de module strictement supérieur à $|x| = |f^{[n]}(x)|$, et à 1, dès que n est assez grand. Mais alors on a $\varepsilon > \Delta(f^{[n]}(y_n), f^{[n]}(x)) = \frac{1}{\max\{1,|x|\}} = \varepsilon$ pour un tel y_n, et cette contradiction démontre l'assertion.

Remarque. — Ce résultat est déjà connu pour les polynômes (ou plus généralement pour les fractions rationnelles) ; voir par exemple [BE2].

PROPOSITION 7. — *Soit f une fonction entière dans $\mathbb{C}_p$ qui n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égal à* 1. *Alors si son ensemble de Julia n'est pas vide, aucun point de $\mathcal{J}(f)$ n'est isolé.*

Démonstration. — On raisonne par l'absurde, on suppose que pour $z = \omega \in \mathcal{J}(f)$ c'est le cas. Il existe donc un disque pointé $D'(\omega, r)$ qui est inclus dans l'ensemble de Fatou.

Comme $\omega \in \mathcal{J}(f)$, on a $\cup_{n\in N} f^{[n]}(D(\omega, r)) = \mathbb{C}_p$. Mais l'image du disque pointé est dans $\mathcal{F}(f)$. Il en résulte que l'ensemble de Julia est exactement $\{f^{[n]}(\omega), n \in \mathbb{N}\}$. Maintenant, $f(\omega)$ est aussi isolé dans l'ensemble de Julia. Donc l'ensemble de Julia est aussi $\{f^{[n]}(\omega), n \in \mathbb{N}^*\}$. Par suite, ω appartient à ce dernier ensemble, et il existe $m \geqslant 1$ tel que $f^{[m]}(\omega) = \omega$. Par suite ω est un point périodique dans l'ensemble de Julia, donc un point périodique répulsif. Il en résulte aussi que l'ensemble de Julia est fini ; or tout z tel que $f(z) = \omega$ est dans l'ensemble de Julia. Par suite, il n'y en a qu'un nombre fini, ce qui implique que f est un polynôme. Soit ω l'un des éléments. On regarde les racines de $f(z) = \omega$, qui sont dans l'ensemble de Julia. S'il y en a au moins deux, z_1 et z_2, on regarde les racines de $f(z) = z_1$ et de $f(z) = z_2$, etc. On arrive forcément après un certain nombre d'opérations à un θ tel que l'équation $f(z) = \theta$ n'a qu'une seule racine η. Cela implique que $f'(\eta) = 0$, puisque f n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. Mais alors on a $f^{[n]}(\eta) = \eta$ et $(f^{[n]})'(\eta) = 0$, par suite η est dans l'ensemble de Fatou, contradiction.

Nous ne savons pas s'il existe des fonctions entières transcendantes dont l'ensemble de Julia est vide ; par contre, il existe des polynômes dont l'ensemble de Julia est vide (voir les articles cités de R. Benedetto, en particulier [BE1]).

Dans le cas d'une fonction entière d'une variable complexe, un théorème dû à I.N. Baker ([BA2]) montre que l'ensemble des points périodiques répulsifs d'une fonction entière transcendante est toujours non vide, et donc aussi son ensemble de Julia.

Dans le cas de $\mathbb{C}_p$, si la fonction entière f a un ensemble de Julia non vide, il se pose la question de savoir le lien entre les points périodiques répulsifs et l'ensemble de Julia; un problème est de savoir si quand l'ensemble de Julia est non vide, il existe toujours des points périodiques répulsifs.

Nous posons ces deux questions sous forme de problèmes :

PROBLÈME 1.— *Existe-t-il des fonctions entières transcendantes sur $\mathbb{C}_p$ dont l'ensemble de Julia est vide ?*

PROBLÈME 2.— *Existe-t-il des fonctions entières transcendantes sur $\mathbb{C}_p$, qui n'ont aucun point périodique répulsif ?*

Dans le cas où il existe au moins un point périodique répulsif, alors l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs est égal à l'ensemble de Julia de f, par les résultats de [B] que nous allons rappeler maintenant.

En fait, dans cet article, on considère des fractions rationnelles à la place de fonctions entières transcendantes; mais les preuves des résultats s'étendent sans problème au cas des fonctions entières transcendantes sur $\mathbb{C}_p$, et nous allons simplement donner un schéma de démonstration.

Dans le cas d'une fonction entière dans $\mathbb{C}$, qui possède un point périodique répulsif, G. Julia étudie les ensembles de Fatou et de Julia de f en introduisant une fonction entière liée à f, et vérifiant une équation fonctionnelle simple. Ces fonctions ont été à l'origine considérées par Poincaré. On consultera par exemple G. Julia, Oeuvres, Volume II, pages 64-100 pour l'étude du cas de f fonction entière d'une variable complexe.

Soit f une fonction entière sur $\mathbb{C}_p$, que l'on suppose non polynomiale. On montre alors les résultats suivants exactement de la même manière (en fait plus simplement, puisque toutes les fonctions considérées sont entières) que dans l'article [B] :

PROPOSITION 8.— *Soit f une fonction entière transcendante, possédant un point fixe répulsif en $x = 0$, de multiplicateur q de module $|q| > 1$. Il existe une unique fonction entière Φ, telle que $\Phi(0) = 0$, $\Phi(z) = z + \ldots$, telle que $\Phi(qz) = f(\Phi(z))$.*

Le schéma de démonstration est de montrer qu'il existe une unique série entière, de rayon de convergence non nul, qui vérifie $\Phi(z) = z + \ldots$, et aussi l'équation fonctionnelle $\Phi(qz) = f \circ \Phi(z)$.

Pour cela, on utilise la méthode des coefficients indéterminés : si l'on pose $f(z) = \sum_{k\geqslant 1} a_k z^k$, avec donc $a_1 = q$, et $\Phi(z) = \sum b_k z^k$, avec $b_1 = 1$, la relation $\Phi(qz) = f(\Phi(z))$ donne des relations de récurrence de la forme $(q^n - q)b_n = S_n(b_j, a_l)$, pour $n \geqslant 2$, où S_n est un polynôme en les variables b_j, $j < n$, et $a_l, l < n$. Ceci montre déjà l'unicité d'une série formelle Φ vérifiant les conditions imposées. De plus, ces relations permettent de montrer que Φ a un rayon de convergence non nul. De la relation $\Phi(qz) = f(\Phi(z))$ il résulte alors que le rayon de convergence de Φ est infini.

THÉORÈME 1.— *Soit f une fonction entière transcendante, et ω un point périodique répulsif de f. Alors il existe une suite ω_n de points périodiques répulsifs de f, différents de ω, dont la limite est ω.*

La démonstration suit aussi le schéma introduit dans [B] dans le cas des fractions rationnelles.

THÉORÈME 2.— *Soit f une fonction entière transcendante sur $\mathbb{C}_p$. Si l'ensemble $\mathcal{P}^+(f)$ des points périodiques répulsifs de f est non vide, alors son adhérence est égale à l'ensemble de Julia de f.*

De même que pour les deux résultats au-dessus, on suit le schéma de démonstration du résultat analogue prouvé dans [B].

3. Ensembles de Julia et Fatou de deux fonctions entières qui permutent.

Un problème toujours ouvert dans le cadre complexe est de savoir si, pour deux fonctions entières d'une variable complexe f et g qui vérifient $f \circ g = g \circ f$, les ensembles de Julia et de Fatou sont les mêmes.

C'est le cas si f, g sont des polynômes de degrés au moins deux (et plus généralement des fractions rationnelles), mais le cas général demeure ouvert. On pourra consulter les articles [NG], [PY], pour de plus amples renseignements sur le sujet.

Nous allons examiner les propriétés de deux fonctions entières sur $\mathbb{C}_p$ qui permutent. Nous supposerons toujours que ni f, ni g n'est un polynôme de degré au plus 1.

A) Nous allons tout d'abord nous ramener au cas où les deux fonctions f et g sont des fonctions entières transcendantes.

1) Si l'une des deux fonctions est transcendante, alors l'autre ne peut être un polynôme que dans le cas trivial d'un polynôme de degré 1, par un raisonnement dû à G. Iyer ([IY]) et I.N. Baker ([BA1]) dans le cas complexe, qui s'adapte sans difficultés au cas p-adique. En effet, en notant pour $R > 0$ $|f|(R) = \max\{|f(z)|; |z| \leqslant R\}$, et si f est transcendante, et P un polynôme, on voit que si R est assez grand, on a $|f \circ P|(R) = |f| \circ |P|(R) = |P \circ f|(R) = |P| \circ |f|(R)$, et il est facile de montrer que si P est de degré au moins deux, il en résulte que f est un polynôme, en estimant la fonction $|f|(\rho)$.

On peut donc supposer que soit les deux fonctions f et g sont transcendantes, soit elles sont toutes les deux des polynômes de degré au moins 2.

2) Supposons que les deux fonctions f et g soient des polynômes. Il existe un sous-corps K de $\mathbb{C}_p$, de type fini sur $\mathbb{Q}$, contenant tous les coefficients de f et de g. Ce sous-corps est isomorphe à un sous-corps L de $\mathbb{C}$, et les polynômes f^* et g^* dont les coefficients sont les images des coefficients de f et de g par cet isomorphisme vérifient aussi $f^* \circ g^* = g^* \circ f^*$.

Par les résultats d'un article de J.F. Ritt ([RI], voir Theorem, page 400), on sait qu'alors il y a deux cas :

a) Soit f^* et g^* ont une itérée commune, et alors ce sera le cas aussi de f et de g.

b) Soit il existe une fonction entière d'une variable complexe de la forme $\phi(z) = \lambda \exp(z) + \mu$ ou $\phi(z) = \lambda \cos(z) + \mu$, avec $\lambda \neq 0$, et des constantes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ telles que $ac \neq 0$, et $\phi(az + b) = f^*(\phi(z))$, $\phi(cz + d) = g^*(\phi(z))$.

Dans le premier cas a), f et g ont aussi une itérée commune. Par le fait que l'ensemble de Fatou d'une itérée de f est le même que celui de f, on en conclut que les ensembles de Fatou de f et g sont les mêmes.

Dans le second cas b), on voit que si ϕ est de la forme $\lambda \exp(z) + \mu$, on peut, en composant par des applications affines, se ramener au cas où f^*, g^* sont de la forme x^s et x^t. On peut donc également ramener f et g à cette forme en composant par des applications affines. Mais alors il en résulte que les ensembles de Julia de f et de g sont vides, donc égaux.

Dans le cas où ϕ est de la forme $\lambda \cos(z) + \mu$, on peut toujours en composant par des applications affines, se ramener au cas où les applications f^*

et g^* sont de la forme $\pm P_s(x)$ et $\pm P_t(x)$, où le polynôme P_n est défini par $2\cos(nx) = P_n(2\cos(x))$. C'est donc également vrai de f et de g, et comme des tels polynômes ont leur coefficient dominant qui est une unité p-adique, et sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$, donc de module $\leqslant 1$ dans $\mathbb{C}_p$, leurs ensembles de Julia sont vides tous les deux, donc égaux.

3) Finalement, on peut supposer que les deux fonctions f et g sont entières transcendantes, nous nous plaçons dans ce cadre dans la suite de cette partie.

B) Le cas où f et g sont entières transcendantes dans $\mathbb{C}_p$: propriétés élémentaires.

On a un premier résultat, qui concerne les points périodiques des applications f et g; la méthode de preuve suit d'assez près celle du cas complexe, voir [JU] ou [FA].

On note $\mathcal{P}^+(f)$ l'ensemble des points périodiques répulsifs de f, et $\mathcal{P}^-(f)$ l'ensemble des points périodiques attractifs; $\mathcal{P}^0(f)$ l'ensemble des points périodiques neutres; enfin, $\mathcal{P}(f)$ l'ensemble des points fixes de f.

PROPOSITION 9. — *Soient deux fonctions entières transcendantes f, g, telle que $f \circ g = g \circ f$. Alors*

a) *Si $\omega \in \mathcal{P}^+(f)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{[k]}(\omega) \in \mathcal{P}^+(f)$.*

b) *Si $\omega \in \mathcal{P}^-(f)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{[k]}(\omega) \in \mathcal{P}^-(f)$.*

c) *Si $\omega \in \mathcal{P}^0(f)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{[k]}(\omega) \in \mathcal{P}^0(f)$.*

Démonstration. — On suit la démonstration de Fatou ou Julia.

Il est clair qu'il suffit de montrer le résultat pour $k = 1$, et que $g(\omega) \in \mathcal{P}(f)$. On montre d'abord que c'est le cas si ω est un point fixe de f. On écrit le développement en série entière autour de ω de $g'(z)$ sous la forme $g'(z) = a_h(z-\omega)^h + \ldots$, de sorte que l'égalité $g'(z)f'(g(z)) = f'(z)g'(f(z))$ et le fait que $f(\omega) = \omega + q_\omega(z-\omega) + \ldots (q_\omega = f'(\omega))$ implique

$$f'(z)g'(f(z)) = a_h f'(\omega) q_\omega^h (z-\omega)^h + \ldots$$

et

$$g'(z)f'(g(z)) = a_h f'(g(\omega))(z-\omega)^h + \ldots$$

on a donc puisque $a_h \neq 0$ $f'(g(\omega)) = f'(\omega)^{h+1}$, ce qui démontre immédiatement a, b et c.

Il reste maintenant à passer au cas général; si ω est un point périodique de f, c'est un point fixe de $f^{[n]}$ pour un $n \in \mathbb{N}$; comme $f^{[n]}$ et g commutent comme f et g, il vient que $g(\omega)$ est un point fixe de $f^{[n]}$ de même nature que ω d'après le résultat précédent, d'où l'assertion.

C) Étude de l'ensemble des fonctions entières transcendantes qui permutent à une fonction transcendante f donnée.

Nous allons maintenant démontrer un résultat sur le cardinal de l'ensemble des fonctions entières g qui permutent à une fonction entière donnée f, quand cette dernière possède au moins un point périodique répulsif. Nous allons montrer, comme en analyse complexe, où ce résultat est dû à I.N. Baker (voir [BA1], [BA2]), que cet ensemble est dénombrable.

Soit f une fonction entière transcendante dans $\mathbb{C}_p$. On suppose que f possède au moins un point fixe répulsif.

Dans ce cas, la fonction f possède une infinité de points périodiques répulsifs, d'après les résultats de la partie 2. On note $\mathcal{P}^+$ cet ensemble de points périodiques répulsifs.

Lemme 1. — *Soit ω un point périodique répulsif de f, dont on note $s = s_\omega$ l'ordre. Soit $q = q_\omega$ son multiplicateur.*

Alors il existe une unique fonction entière sur $\mathbb{C}_p$ Φ_ω telle que

a) $\Phi_\omega(z) = \omega + z + \dots;$

b) $\Phi_\omega(q_\omega z) = f^{[s]} \circ \Phi_\omega(z)$.

Démonstration. — Soit $f^*(z) = f^{[s]}(z+\omega) - \omega$. Alors 0 est un point fixe répulsif de f^*, dont le multiplicateur est $q = q_\omega$. D'après les résultats de la partie 2, il existe donc une unique fonction entière Φ telle que $\Phi(z) = z + \dots$, et $\Phi(qz) = f^* \circ \Phi(z)$. Alors la fonction $\Phi_\omega(z) = \omega + \Phi(z)$ convient.

Réciproquement, si Φ_ω est une solution, il en résulte que $\Phi(z) = \Phi_\omega(z) - \omega$ est telle que $\Phi(z) = z + \dots$, et $\Phi(qz) = f^* \circ \Phi(z)$; comme il n'y a qu'une seule telle fonction, ceci démontre l'assertion. □

LEMME 2.— *Soient f, g deux fonctions entières qui permutent, on suppose que ω est un point périodique répulsif de f, dont on note $s_\omega = s$ l'ordre, et $q = q_\omega$ le multiplicateur. Alors*

a) *Le point $g(\omega) = \theta$ est un point périodique répulsif de f, d'ordre s ; si $h \geqslant 1$ est l'ordre de ω comme zéro de $g(z) - g(\omega)$, son multiplicateur est q_ω^h.*

b) *Si $g'(\omega) = m_\omega$ est non nul, on a*

$$\Phi_\theta(m_\omega z) = g \circ \Phi_\omega(z)$$

où Φ_ω et Φ_θ sont les fonctions entières associées à f et ω et f et θ respectivement.

Démonstration.— a) Comme f et g permutent, il en est de même de $f^{[s]}$ et g. En remplaçant x par ω dans l'égalité $f^{[s]} \circ g(x) = g \circ f^{[s]}(x)$, il vient $f^{[s]}(\theta) = \theta$, ce qui montre que θ est un point périodique de f, d'ordre s.

On a la relation $g'(x)(f^{[s]}('(g(x)) = (f^{[s]})'g'(f^{[s]}(x))$. D'autre part, on a : $g(x) = g(\omega)+a_h(x-\omega)^h+...$, avec $a_h \neq 0$, au voisinage de ω, et $f^{[s]}(x) = \omega + q_\omega(x - \omega) + ...$ au voisinage de ω, et $f^{[s]}(x) = \theta + (f^{[s]})'(\theta)(x - \theta) + ...$ au voisinage de θ. On calcule les coefficients de $(x - \omega)^{h-1}$ des deux côtés, d'où

$$ha_h(f^{[s]})'(\theta) = ha_n q_\omega (q_\omega)^{h-1} = ha_h q_\omega^h$$

ce qui fournit $(f^{[s]})'(\theta) = q_\omega^h$. Comme $h \geqslant 1$, ceci donne le fait que le point θ est répulsif.

b) Soit $\phi(z) = g \circ \Phi_\omega(\frac{z}{m_\omega})$. On a

$$\phi(z) = g(\omega) + m_\omega\Big(\Phi_\omega\Big(\frac{z}{m_\omega}\Big) - \omega\Big) + ... = \theta + z + ...$$

D'autre part,

$$f^{[s]}\circ\phi(z) = f^{[s]}\circ g\circ\Phi_\omega\Big(\frac{z}{m_\omega}\Big) = g\circ f^{[s]}\circ\Phi_\omega\Big(\frac{z}{m_\omega}\Big) = g\circ\Phi_\omega\Big(q_\omega\frac{z}{m_\omega}\Big) = \phi(q_\omega z).$$

Si on remplace z par 0, on trouve que $f^{[s]}(\theta) = \theta$, et aussi, en dérivant, que

$$q_\omega\phi'(q_\omega z) = (\phi(z))'(f^{[s]})' \circ \phi(z)$$

d'où en remplaçant z par 0, l'égalité $\phi'(0)q_\omega = \phi'(0)(f^{[s]})'(\phi(0))$. Comme $\phi(0) = g(\omega) = \theta$, et $\phi'(0) = \frac{\Phi'_\omega(0)}{m_\omega}g'(\omega) = 1$, il vient que $(f^{[s]})'(\phi(0)) =$

$(f^{[s]})'(\theta) = q_\omega = q_\theta$. On retrouve le fait que θ est un point périodique répulsif d'ordre s et de multiplicateur q. Comme la fonction ϕ vérifie les conditions imposées à la fonction Φ_θ, et que celle-ci est unique, on a la propriété annoncée. $\square$

Nous allons maintenant démontrer le résultat annoncé sur le cardinal de l'ensemble des fonctions entières qui permutent à une fonction entière transcendante donnée.

La démonstration s'inspire de celle faite dans [BA1], mais utilise de manière privilégiée la fonction Φ introduite dans la partie 2.

THÉORÈME 3. — *Soit f une fonction entière transcendante, ayant au moins un point périodique répulsif. Alors l'ensemble des fonctions g entières qui permutent avec f est dénombrable.*

Démonstration. — Nous allons commencer par nous donner un point périodique répulsif de f, soit ω, de multiplicateur q. On note E l'ensemble des fonctions entières g qui permutent à f, et telles que $g'(\omega) \neq 0$. Nous allons d'abord démontrer que E est dénombrable.

On ne restreint pas la généralité en supposant que $\omega = 0$, et que c'est un point fixe de f, en remplaçant f par $f^{[s]}$. On note q son multiplicateur. Soit Φ la fonction entière telle que $\Phi(z) = z + \ldots$, vérifiant $\Phi(qz) = f \circ \Phi(z)$. Par les résultats de la partie 2, il existe une suite de points périodiques répulsifs de f, tous non nuls et qui converge vers 0.

On en choisit un, que l'on appelle ω^*. On sait que $g(0) = \theta$, et $g(\omega^*) = \theta^*$ sont des points fixes et périodiques respectivement de f. Soit enfin $\eta \in \mathbb{C}_p$, fixé, tel que $\Phi(\eta) = \omega^*$; il est clair que η est non nul.

On considère maintenant l'ensemble $E(\theta, \omega^*, \theta^*)$ des fonctions $g \in E$ telles que $g(0) = \theta$, $g(\omega^*) = \theta^*$.

Puisque $m_0 = g'(0)$ est non nul, on a par le lemme qui précède $\Phi_\theta(g'(0)z)) = g \circ \Phi(z)$.

Replaçons z par η, il vient $\Phi_\theta(g'(0)\eta) = g(\omega^*) = \theta^*$.

Il en résulte que si $g \in E(\theta, \omega^*, \theta^*)$, alors $g'(0)\eta$ est une racine dans $\mathbb{C}_p$ de l'équation $\Phi_\theta(x) = \theta^*$. Comme il n'y a qu'un nombre dénombrable de telles racines, il en résulte que pour les éléments g de $E(\theta, \omega^*, \theta^*)$, il y a un nombre dénombrable de possibilités pour les valeurs $g'(0)$. Mais alors la formule $\Phi_\theta(g'(0)z) = g \circ \Phi(z)$ donne que l'ensemble $E(\theta, \omega^*, \theta^*)$ est aussi dénombrable.

L'ensemble des points périodiques de la fonction f est dénombrable, donc l'ensemble de couples $(\theta, \omega^*, \theta^*)$ aussi, et par suite E, qui est la réunion des $E(\theta, \omega^*, \theta^*)$ est aussi dénombrable.

Il reste à s'affranchir de l'hypothèse que $g'(\omega) \neq 0$.

Pour cela, on se donne une suite ω_k de points périodiques répulsifs, de limite ω. Les ensembles E_k des fonctions entières g, qui permutent à f et vérifient $g'(\omega_k) \neq 0$ sont tous dénombrables, donc aussi la réunion des E_k. Mais comme les zéros de la fonction transcendante $g'(z)$ sont isolés, si g permute à f alors g est dans l'un des E_k, et ceci termine la démonstration.

D) Étude des ensembles de Julia et de Fatou de deux fonctions entières transcendantes qui permutent.

Nous allons introduire, pour une fonction entière transcendante f, une partie de $\mathbb{C}_p$, liée à f, sur laquelle nous ne savons que peu de choses.

DEFINITION 1. — *On note $I(f)$ l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}_p$, tels que $|f^{[n]}(z)| \to \infty$ si $n \to \infty$.*

Dans le cas complexe, un théorème dû à Eremenko (voit [ER]) montre que l'ensemble I est toujours non vide.

Dans le cas p-adique, à notre connaissance, le problème est ouvert :

PROBLÈME 3. — *Soit f une fonction entière transcendante sur $\mathbb{C}_p$. L'ensemble $I(f)$ est-il non vide ?*

On a le résultat suivant, qui est l'analogue d'un résultat d'analyse complexe, et se démontre à peu près de la même manière (voir [ER]) :

PROPOSITION 10. — *Soit f une fonction entière transcendante. Alors*

a) *L'intersection de l'ensemble $I(f)$ et de l'ensemble de Fatou de f est l'intérieur de $I(f)$.*

b) *Si $I(f)$ est non vide, alors l'ensemble de Julia $\mathcal{J}(f)$ est la frontière $\partial I(f)$ de $I(f)$.*

Démonstration. — a) Soit ω un point intérieur à $I(f)$. Soit $r > 0$ tel que le disque de centre ω, rayon r soit inclus dans $I(f)$. Soit θ un point fixe de f. Soit n fixé; si l'équation $f^{[n]}(z) - \theta$ a une racine dans $B^+(\omega, r)$, alors un tel point z n'est pas dans $I(f)$, ce qui constitue une contradiction avec l'hypothèse faite. Donc $f^{[n]}(z) - \theta$ ne s'annule pas sur le disque $B^+(\omega, r)$, de sorte que la famille $f^{[n]}$ ne prend pas la valeur θ sur le disque $B^+(\omega, r)$; par le critère de Hsia, le point ω est dans l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(f)$ de f.

Soit ω un point de l'intersection de $I(f)$ et de l'ensemble de Fatou de f. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $r > 0$ tel que sur le disque $B^+(\omega, r)$, on ait $\Delta(f^{[n]}(z), f^{[n]}(\omega)) < 1$ pour tout n. Soit N tel que si $n \geqslant N$, on ait $|f^{[n]}(\omega)| > 1$. Si $f^{[n]}(z)$ a un zéro dans le disque $B^+(\omega, r)$, alors l'inégalité sur la distance sphérique donne une contradiction. Par suite, $f^{[n]}$ a une valeur absolue constante sur ce disque, qui est donc inclus dans $I(f)$.

b) Soit $\omega \in \mathcal{J}(f)$, et $r > 0$. On a alors $\cup f^{[n]}(B^+(\omega, r)) = \mathbb{C}_p$. En particulier, si $u \in I(f)$, il existe n et $v \in B^+(\omega, r)$ tel que $f^{[n]}(v) = u$. Mais alors il est clair que $v \in I(f)$, ce qui montre que ω est adhérent à $I(f)$. Par la partie a), il vient alors que $\mathcal{J}(f) \subset \partial I(f)$.

Soit maintenant $\omega \in \partial I(f)$. Si $\omega \in I(f)$, alors par le a), ω n'appartient pas à $\mathcal{F}(f)$, donc est dans $\mathcal{J}(f)$.

Supposons maintenant que $\omega \notin I(f)$. Il existe donc une suite n_k strictement croissante d'entiers, telle que la suite $f^{[n_k]}(\omega)$ soit bornée en module, disons par $M > 1$.

Si $\omega \in \mathcal{F}(f)$, on peut trouver $r > 0$, tel que sur le disque $B^+(\omega, r)$, on ait pour tout n et tout z $\Delta(f^{[n]}(z), f^{[n]}(\omega)) < \frac{1}{2M}$.

Puisque ω est dans l'adhérence de $I(f)$, le disque $B^+(\omega, r)$ contient un point ω^* de $I(f)$; comme $f^{[n]}(\omega^*)$ tend vers l'infini en module, on obtient pour k assez grand :

$$\Delta(f^{[n_k]}(\omega), f^{[n_k]}(\omega^*)) = \frac{1}{\max\{1, |f^{[n_k]}(\omega)|\}} < \frac{1}{2M}$$

ou encore $2M < \max\{1, |f^{[n_k]}(\omega)|\} \leqslant M$, ce qui est une contradiction, et montre encore que $\omega \in \mathcal{J}(f)$, et termine la démonstration.

Le but principal de cette partie est le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Soient f, g deux fonctions entières transcendantes telles que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que $\mathcal{P}^+(f) \not\subset I(g)$ ou $\mathcal{P}^+(g) \not\subset I(f)$. Alors f et g ont même ensemble de Julia.*

On notera en particulier le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2. — *Soient f une fonction entière sur $\mathbb{C}_p$. On suppose que f possède un point périodique répulsif ω, d'ordre s, de multiplicateur q, tel que l'ensemble $\Omega = \{z \in \mathbb{C}_p; f^{[s]}(z) - z = 0; (f^{[s]})'(z) - q = 0\}$ est* *un ensemble fini (non vide car contenant ω). Alors toute fonction entière g, qui permute avec f, et qui vérifie $g'(\omega) \neq 0$ a mêmes ensembles de Julia et de Fatou que f.*

Démonstration. — Les hypothèses faites impliquent que les $g^{[n]}(\omega)$ sont dans la partie finie Ω. Par suite ω n'appartient pas à $I(g)$, et on a $\mathcal{P}^+(f) \not\subset I(g)$. Le théorème s'applique donc.

Exemple. — Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, de degré $m \geqslant 1$, n'ayant que des racines simples, et $q \in \mathbb{C}_p$, $|q| > 1$. Pour ω racine de P, soit u_ω une racine carrée de $\frac{q-1}{P'(\omega)}$, et Q un polynôme de degré $\leqslant m-1$, tel que $Q(\omega) = u_\omega$ pour toute racine ω de P. Soit enfin v_k une suite quelconque d'éléments non nuls de $\mathbb{C}_p$, dont le module tend vers l'infini si k tend vers l'infini.

On pose :

$$f(z) = z + P(z)(Q(z))^2 \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{P(z)}{v_k}\right)^2.$$

On vérifie immédiatement que f est une fonction entière transcendante.

Les points fixes de f sont les solutions de $f(z) - z = 0$; ce sont les racines de P, et du produit $(Q(z))^2 \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - \frac{P(z)}{v_k})^2$. Ces dernières sont toutes multiples, donc ces points fixes sont de multiplicateur 1.

Une racine ω de $P(z)$ donne comme multiplicateur $1 + P'(\omega)Q(\omega)^2 = 1 + q - 1 = q$.

Par suite, l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}_p; f(z) - z = 0, f'(z) - q = 0\}$ est un ensemble fini non vide. Soit g une fonction entière qui permute à f, et ω une racine de P. Si $g'(\omega) = 0$, alors $g(\omega)$ est un point fixe de f, qui a un multiplicateur $f'(\omega)^{1+h} = q^{1+h}$, où h est l'ordre de multiplicité de ω comme zéro de $g'(z)$, qui est au moins 1. Ceci est absurde, puisque les points fixes de f n'ont que deux multiplicateurs possibles, à savoir q et 1. Donc $g'(\omega) \neq 0$, le corollaire s'applique, et les deux fonctions f et g ont mêmes ensembles de Julia et de Fatou.

Nous allons démontrer le théorème ci-dessus par un ensemble de propositions intermédiaires.

Tout d'abord :

LEMME 3. — *Soient f, g deux fonctions entières transcendantes qui permutent. On suppose que $\mathcal{P}^+(f) \not\subset I(g)$. Alors il existe un point périodique répulsif pour f qui est périodique pour g.*

Démonstration. — Soit ω un point périodique répulsif pour f qui n'appartient pas à $I(g)$. Il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $f^{[n]}(\omega) = \omega$, et $(f^{[n]})'(\omega)$ est de module strictement plus grand que 1. On sait qu'alors tous les $g^{[k]}(\omega)$ sont des points fixes de $f^{[n]}$, qui sont également répulsifs pour $f^{[n]}$. Comme $\omega \notin I(g)$, la suite $|g^{[k]}(\omega)|$ ne tend pas vers l'infini, il en existe donc une sous-suite bornée, disons $g^{[n_k]}(\omega)$, avec donc la propriété qu'il existe $R > 0$ tel que $|g^{[n_k]}(\omega)| \leqslant R$ pour tout k. Comme la fonction entière $f^{[n]}(z) - z$ n'a qu'un nombre fini de zéros dans le disque $\{z; |z| \leqslant R\}$, les éléments de la suite $g^{[n_k]}(\omega)$ ne peuvent être tous distincts. On a donc montré l'existence de deux entiers m et $h > 0$ tels que $g^{[m+h]}(\omega) = g^{[m]}(\omega)$. Soit $\omega^* = g^{[m]}(\omega)$. Alors ω^* est un point fixe de $g^{[h]}$, donc un point périodique de g. C'est aussi un point fixe de $f^{[n]}$, que l'on sait être répulsif. Le point ω^* est donc un point périodique commun à f et g, qui est répulsif pour f, ce qui termine la démonstration.

LEMME 4. — *Soient f, g entières transcendantes qui permutent. On suppose que f a un point périodique répulsif ω, qui est un point périodique pour g. Alors ω est répulsif pour g, de sorte que f et g ont un point périodique répulsif commun.*

Démonstration. — On va suivre les schémas des démonstrations dans le cas complexe dues à Fatou (voir [FA], page 366).

On peut supposer que ω est un point fixe de f et g, quitte à considérer des itérées de f et de g. On peut aussi, par une transformation affine, supposer que $\omega = 0$. Soit alors $q_1 = f'(0)$, et Φ la fonction entière vérifiant $\Phi(q_1 z) = f(\Phi(z))$, $\Phi(z) = z + ...$

Supposons que $q_2 = g'(0) \neq 0$. La fonction $\phi(z) = g \circ \Phi(\frac{z}{q_2})$ est entière, telle que $\phi(z) = z + ...$, et vérifie aussi $\phi(q_1 z) = f \circ \phi(z)$. Par suite $\phi(z) = \Phi(z)$, ce qui montre que $\Phi(q_2 z) = g \circ \Phi(z)$. Si $|q_2| \leqslant 1$, on a pour R assez grand $|g|(|\Phi|(R)) = |\Phi|(|q_2|R) \leqslant |\Phi|(R)$, donc $|g|(\rho) \leqslant \rho$ pour ρ assez grand, ce qui est absurde car g est transcendante ; par suite $|q_2| > 1$, donc ω est répulsif pour g.

Supposons maintenant que $g'(0) = 0$. On peut écrire : $f(z) = q_1 z + a_2 z^2 + ...$, et $g(z) = b_h z^h + ...$, avec $h \geqslant 2$ et $b_h \neq 0$; donc on a

$$f \circ g(z) = q_1(b_h z^h + ...) + ... = g \circ f(z) = b_h(q_1 z + ...)^h + ...$$

d'où on déduit que $b_h q_1 = b_h q_1^h$. Comme a_h est non nul, on a $q_1 = q_1^h$, ce qui est en contradiction avec le fait que $|q_1| > 1$, et termine la démonstration.

Nous passons maintenant à la dernière proposition nécessaire pour établir le résultat envisagé :

PROPOSITION 11. — *Soient f, g deux fonctions entières transcendantes qui permutent. On suppose que f et g ont un point périodique répulsif commun, que l'on note ω. Alors les ensembles de Julia de f et de g sont les mêmes.*

Démonstration. — Par hypothèse, il existe ω, n, m, tels que $f^{[n]}(\omega) = \omega$, $g^{[m]}(\omega) = \omega$, et ω est répulsif pour f et g.

Comme $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^{[n]})$ et $\mathcal{J}(g) = \mathcal{J}(g^{[m]})$, on peut supposer que ω est un point fixe de f et g, en remplaçant f par $f^{[n]}$ et g par $g^{[m]}$. Par une translation, on peut supposer que $\omega = 0$.

On sait alors, en notant q_1 la dérivée en $z = 0$ de f (on a donc $|q_1| > 1$), qu'il existe une fonction entière Φ telle que $\Phi(z) = z + \ldots$, vérifiant $\Phi(q_1 z) = f(\Phi(z))$, et que Φ est déterminée de manière unique par ces conditions. Il en résulte également que $\Phi(q_2 z) = g(\Phi(z))$, où q_2 est la dérivée de g en $z = 0$. En effet, posons $\phi(z) = g \circ \Phi(\frac{z}{q_2})$; on a $\phi(z) = z + \ldots$, et

$$f \circ \phi(z) = f \circ g \circ \Phi\left(\frac{z}{q_2}\right) = g \circ f \circ \Phi\left(\frac{z}{q_2}\right) = g \circ \Phi\left(\frac{q_1 z}{q_2}\right) = \phi(q_1 z).$$

D'après l'unicité, il vient $\phi(z) = \Phi(z)$, et donc on a l'égalité demandée.

Notons que $|q_1|$ et $|q_2|$ sont des puissances rationnelles de l'entier premier p, donc multiplicativement dépendants. Il existe donc n_1 et n_2 entiers $\geqslant 1$, tels que $q_1^{n_1}$ et $q_2^{n_2}$ soient de même module ; quitte à remplacer encore f et g par des itérées, on peut supposer que q_1 et q_2 sont de même module.

On note maintenant $Z_\infty(f) = \{x \in \mathbb{C}_p ; \exists n \in \mathbb{N}, f^{[n]}(x) = 0\}$, et de même pour g. Il s'agit dans les deux cas de la grande orbite de 0 pour f et pour g, donc $Z_\infty(f)$ est complètement stable par f, et de même $Z_\infty(g)$ est complètement stable par g.

On a déjà vu qu'alors on a $\overline{Z_\infty(f)} = \mathcal{J}(f)$ et $\overline{Z_\infty(g)} = \mathcal{J}(g)$.

Nous allons montrer que $Z_\infty(f) \subset \mathcal{J}(g)$.

Soit pour cela $\omega \in Z_\infty(f)$; il existe donc n tel que $f^{[n]}(\omega) = 0$. On a donc pour tout $h \geqslant 0$, $f^{[n+h]}(\omega) = 0$. Il existe aussi $\alpha \in \mathbb{C}_p$ tel que $\Phi(\alpha) = \omega$. On a donc $f^{[n+h]}(\omega) = \Phi(q_1^{n+h}\alpha) = 0$ pour tout $h \geqslant 0$. Comme

q_1 et q_2 sont dans $\mathbb{C}_p$ de même module, il existe une suite h_k d'entiers, de limite $+\infty$, tels que $(\frac{q_1}{q_2})^{n+h_k}$ ait pour limite 1 si $k \to \infty$.

On définit la suite $\beta_k \in \mathbb{C}_p$ par $q_2^{h_k+n}\beta_k = q_1^{h_k+n}\alpha$. On a donc $\Phi(q_2^{h_k+n}\beta_k) = \Phi(q_1^{n+h_k}\alpha) = 0$, c'est-à-dire que $g^{[n+h_k]}(\Phi(\beta_k)) = 0$. Par suite $\Phi(\beta_k) \in Z_\infty(g)$. On regarde maintenant la différence $|\beta_k - \alpha|$. On a $q_2^{n+h_k}\beta_k = q_1^{n+h_k}\alpha$, d'où

$$|\beta_k - \alpha| = \left|\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n+h_k}\alpha - \alpha\right| = |\alpha|\left|\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^{n+h_k} - 1\right|$$

de sorte que $\beta_k \to \alpha$ si $k \to \infty$. Il en résulte que $\Phi(\beta_k) \in Z_\infty(g)$ converge vers $\Phi(\alpha)$, ce qui montre bien que $\omega = \Phi(\alpha) \in \overline{Z_\infty(g)} = \mathcal{J}(g)$. On a donc montré que $Z_\infty(f) \subset \mathcal{J}(g)$, et par suite en prenant les adhérences, que $\mathcal{J}(f) \subset \mathcal{J}(g)$. L'inclusion réciproque est aussi vraie, on a donc l'égalité annoncée.

Remarque. — On peut aussi raisonner de la manière suivante pour la fin de la démonstration.

Soit θ dans l'ensemble de Julia de f. Soit $r > 0$. On se donne $\omega \in \mathbb{C}_p$, tel que $\Phi(\omega) = \theta$, et $\rho > 0$ tel que $\Phi(B^+(\omega, \rho)) = B^+(\theta, r)$ (ou contienne $B^+(\theta, r)$). Il existe un entier $m \geqslant 1$ tel que $q_1^m B^+(\omega, \rho) = q_2^m B^+(\omega, \rho)$, comme on l'a vu ci-dessus, car il suffit que $|q_1^m - q_2^m||\omega| \leqslant |q_1|^m \rho = |q_2|^m \rho$ pour avoir cette égalité. Si $k \geqslant 1$, on a alors

$$\begin{aligned}|q_1^{km} - q_2^{km}||\omega| &= |q_1^m - q_2^m||q_1^{(k-1)m} + q_1^{(k-2)m}q_2^m + \dots + q_2^{(k-1)m}||\omega| \\ &\leqslant |q_1^m - q_2^m||\omega||q_1|^{(k-1)m} \leqslant |q_1|^{km}\rho,\end{aligned}$$

de sorte que $q_1^{km}B^+(\omega, \rho) = q_2^{km}B^+(\omega, \rho)$ pour tout $k \geqslant 1$.

On a alors, pour tout $k \geqslant 1$,

$$f^{[km]}(B^+(\theta, r)) = \Phi(q_1^{km}B^+(\omega, \rho)) = \Phi(q_2^{km}B^+(\omega, \rho)) = g^{[km]}(B^+(\theta, r)).$$

Maintenant, θ est dans l'ensemble de Julia de $f^{[m]}$, qui est égal à celui de f. Il en résulte que

$$\cup_{k\geqslant 1} f^{[km]}(B^+(\theta, r)) = \mathbb{C}_p = \cup_{k\geqslant 1} g^{[km]}(B^+(\theta, r))$$

et ceci implique que θ est dans l'ensemble de Julia de la fonction $g^{[m]}$, donc dans l'ensemble de Julia de la fonction g. On a donc montré que l'ensemble de Julia de la fonction f est inclus dans l'ensemble de Julia de la fonction g, et comme la réciproque est vraie, ceci termine la démonstration.

4. Dynamique de deux fonctions entières transcendantes qui permutent.

Dans cette partie, nous commençons par rappeler la notion de D-composantes de l'ensemble de Fatou d'une fonction entière, en suivant la présentation de R. Benedetto (voir [BE4]).

Soit donc f une fonction entière transcendante, et $U = \mathcal{F}(f)$ son ensemble de Fatou. Nous supposerons toujours dans cette partie que l'ensemble de Julia de f est non vide. Il en résulte immédiatement que cet ensemble est non borné ; en effet, si $R > 0$, l'image de $C_R = \{z \in \mathbb{C}_p; |z| \geqslant R\}$ par une fonction entière transcendante est toujours $\mathbb{C}_p$; donc si l'ensemble de Julia est borné, il existe R tel que C_R soit inclus dans l'ensemble de Fatou, donc $f(C_R) = \mathbb{C}_p$ est l'ensemble de Fatou, et l'ensemble de Julia est vide.

Pour $x \in U$, nous appellerons D-composante de x la réunion des disques de centre x inclus dans U. Il est clair que c'est un disque, (circonférencié ou non), c'est le disque de rayon maximal inclus dans U et de centre x.

Cette définition, différente de celle du cas complexe, vient du fait que $\mathbb{C}_p$ est totalement discontinu, ce qui empêche d'utiliser les composantes connexes usuelles.

Il existe une autre définition de composante, qui utilise des affinoïdes, voir [BE4] ; nous ne l'utiliserons pas ici.

Si $D = B(a, r)$ est une D-composante de l'ensemble de Fatou d'une fonction entière transcendante f, l'image de D par f est un disque D^* inclus dans l'ensemble de Fatou de f. Il est donc contenu dans la D-composante T de $f(a)$. Nous allons montrer que $T = D^*$.

Si D^* et T ont des rayons distincts, alors on peut trouver $r' > r$, assez proche de r, tel que l'image du disque de centre a, rayon r' soit incluse dans T. Mais alors, puisque l'ensemble de Fatou de f est complètement stable par f, le disque de centre a, rayon r' est inclus dans l'ensemble de Fatou de f, contrairement au fait que D est une D-composante. Donc T et D^* ont même rayon. Si ces disques sont distincts, c'est que D^* est non circonférencié, de rayon ρ appartenant au groupe des valeurs de $\mathbb{C}_p$, et T est le disque circonférencié de centre $f(a)$, rayon ρ. En considérant le développement en série entière $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n$, on voit que $\rho = \max_{n \geqslant 1}\{|c_n| r^n\}$, quantité atteinte, de sorte que r est aussi dans le groupe des valeurs. Mais alors D est égale au disque non circonférencié de centre a et rayon r, l'image du disque circonférencié de centre a rayon r qui est égale à T est incluse dans l'ensemble de Fatou, et donc aussi le disque circonférencié de centre a, rayon r, on a encore une contradiction.

Par suite, l'image d'une D-composante de l'ensemble de Fatou par f est encore une D-composante.

Noter que ceci ne se produit pas dans le cadre des fractions rationnelles en prenant comme espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, voir [BE2] pour un exemple.

On peut donc considérer l'action de f sur l'ensemble des D-composantes de l'ensemble de Fatou de f. Nous dirons que la D-composante D est périodique, s'il existe $m \geqslant 1$, tel que $f^{[m]}(D) = D$, prépériodique s'il existe $m > h$ tels que $f^{[m]}(D) = f^{[h]}(D)$, ou errante si on a $f^{[m]}(D) \neq f^{[n]}(D)$ si $m \neq n$.

Nous allons étudier la dynamique de deux fonctions entières transcendantes qui permutent : se comportent-elles de la même manière sur les D-composantes de l'ensemble de Fatou ?

On sait qu'en analyse complexe, ce n'est pas le cas, cf [PY].

On a tout d'abord le résultat suivant, qui se déduit immédiatement des résultats de R. Benedetto, voir [BE4] ; les démonstrations ne sont données que pour la commodité du lecteur.

Proposition 12. — *Soit f une fonction entière transcendante. On suppose que son ensemble de Julia n'est pas vide. Alors*

a) *Une D-composante périodique D de $\mathcal{F}(f)$ est un disque circonférencié rationnel, et son image par l'itérée de f correspondante est D.*

b) *Dans toute D-composante périodique, f a un point périodique.*

Démonstration. — On montre d'abord que la D-composante D est un disque circonférencié rationnel (noter que disque circonférencié irrationnel et disque non circonférencié irrationnel de même rayon sont le même ensemble).

Supposons tout d'abord que $D = B^-(\theta, r)$ est un disque non circonférencié, donc forcément de rayon rationnel. Notons $h = f^{[s]}$. Soit $h(z) = a_0 + a_1(z-\theta) + \ldots + a_k(z-\theta)^k + \ldots$ le développement en série de h au voisinage de θ. Comme $h(D) \subset D$, il vient que $|a_0 - \theta| < r$, et aussi que pour tout $\rho < r$, on a $|a_k|\rho^k < r$. Il en résulte que $|a_0 - \theta| \leqslant r$, et $|a_k|r^k \leqslant r$ pour tout k, ce qui montre que l'image du disque circonférencié $B^+(\theta, r)$

par h est incluse dans lui-même. Mais alors ce disque circonférencié, qui est strictement plus grand que la D-composante D, est inclus dans l'ensemble de Fatou de h par le critère de Hsia, qui est le même que l'ensemble de Fatou de f ; il y a contradiction.

Supposons maintenant que le disque soit irrationnel. Alors le rayon de l'image de D par h est égale à la quantité $|h-a_0|(r) = \mathrm{Max}\{|a_k|r^k; k \geqslant 1\}$, qui vaut donc r. Mais cette quantité est atteinte, il existe donc $N \geqslant 1$ telle que $|a_N|r^N = r$. Si $N \neq 1$, il vient $r \in |\mathbb{C}_p^*|$, contradiction avec l'hypothèse que le disque est irrationnel. Donc $N = 1$; alors il existe $\rho > r$, assez proche de r tel que l'on ait encore $|h - a_0|(\rho) = \rho$. Ceci montre que le disque de centre θ, rayon ρ, est stable par h, donc dans l'ensemble de Fatou de f, contrairement au fait que le disque de centre θ, rayon r est une D-composante.

Finalement, on a bien montré qu'une D-composante périodique est un disque circonférencié rationnel.

Il reste à montrer que b) est vrai.

Notons $D = B^+(\omega, r)$. Soit $h = f^{[s]}$, et $h(z) = a_0 + a_1(z-\omega) + \ldots + a_k(z-\omega)^k + \ldots$. On a par hypothèse que $a_0 = h(\omega)$ vérifie $|a_0 - \omega| \leqslant r$, et $|a_j|r^j \leqslant r$, avec le fait que soit $|a_0 - \omega| = r$ et $|a_j|r^j < r$ pour tout $j \geqslant 1$, ou il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que $|a_t|r^t = r$ et $|a_j|r^j < r$ si $j \geqslant t+1$.

Le premier cas implique que pour tout $z \in D$ on a $|h(z) - \omega| = r$, contrairement au fait que $h(D) = D$. On a donc $t \geqslant 1$. Si $t = 1$, on a tout d'abord $|a_1|r = r$, de sorte que $|a_1| = 1$. On choisit ensuite $\rho > r$, on trouve N tel que si $j \geqslant N$ on a $|a_j|\rho^j < r$, et on trouve ensuite $\rho_* \in]r, \rho[$ tel que pour tout $j, 2 \leqslant j \leqslant N$, on ait $|a_j|\rho_*^j < \rho_*$. On aura alors $|a_0 - \omega| \leqslant r \leqslant \rho_*$, $|a_1|\rho_* = \rho_*$, et $|a_j|\rho_*^j < \rho_*$ si $j \geqslant 2$, ce qui montre que le disque de centre ω, rayon ρ_* est stable par h, donc dans l'ensemble de Fatou de f, et strictement plus grand que la D-composante D, ce qui est absurde. Donc $t \geqslant 2$, et il vient que $h(z)-z = h(z)-\omega-(z-\omega) = b_0+b_1(z-\omega)+\ldots+b_t(z-\omega)^t+\ldots$ est tel que $|h(z) - z|(r) = |b_t|r^t = |a_t|r^t = r$, avec $|b_j|r^j = |a_j|r^j < r$ si $j > t$; par suite $h(z) - z$ a au moins $t \geqslant 2$ zéros compte tenu des multiplicités dans D, donc au moins 1, qui sera un point périodique de f.

Problème 4. — *On suppose que f et g entières permutent et qu'elles ont le même ensemble de Fatou.*

Les fonctions f et g ont-elles la même dynamique sur les D-composantes de $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$?

Autrement dit, si D est une D-composante de $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$, l'action de f et de g sur D est-elle la même : si D est périodique pour f, a-t-on que D est périodique pour g, etc.

Nous allons donner une réponse partielle à cette question :

PROPOSITION 13. — *Soient f, g deux fonctions entières transcendantes qui permutent, on suppose que f et g ont un point périodique répulsif commun.*

On sait qu'alors les ensembles de Julia et de Fatou des deux fonctions sont égaux. On a alors de plus que la dynamique sur chaque D-composante de $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$ est de même nature, c'est-à-dire que si une D-composante D est périodique pour une des fonctions, elle l'est aussi pour l'autre.

Démonstration. — On fait les réductions habituelles pour se ramener au cas où 0 est un point fixe répulsif commun, avec comme multiplicateurs q_1 et q_2 pour f et g respectivement, on peut supposer que q_1 et q_2 sont de même module, et on introduit une fonction entière Φ telle que $\Phi(q_1 z) = f(\Phi(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}_p$, et aussi $\Phi(q_2 z) = g(\Phi(z))$ pour tout $z \in \mathbb{C}_p$.

On se donne une D-composante de $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(g)$, périodique pour f, et on va montrer qu'il en est de même pour g.

Soit donc s un entier tel que $f^{[s]}(D) = D$.

Soit maintenant $\eta \neq 0$ et ρ tels que $\Phi(B^+(\eta, \rho)) = D$. On a alors que pour tout n et m, $f^{[n]}(D) = \Phi(q_1^n B^+(\eta, \rho)) = \Phi(B^+(q_1^n \eta, |q_1|^n \rho))$, et de même $g^{[m]}(D) = \Phi(q_2^m B^+(\eta, \rho)) = \Phi(B^+(q_2^m \eta, |q_2|^m \rho))$.

Par hypothèse, $f^{[s]}(D) = D$, donc $f^{[ks]}(D) = D$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $\Phi(B^+(q_1^{ks}\eta, |q_1|^{ks}\rho)) = D$ pour tout k.

On choisit une suite k_n d'entiers de limite $+\infty$, telle que $(\frac{q_2}{q_1})^{k_n s} \to 1$ si $n \to \infty$. Montrons que pour n assez grand, les deux disques $B^+(q_1^{k_n s}\eta, |q_1|^{k_n s}\rho)$ et $B^+(q_2^{k_n s}\eta, |q_2|^{k_n s}\rho)$ coïncident. Puisque q_1 et q_2 sont de même module, ces deux disques sont de même rayon, il suffit de montrer que la différence de leurs centres est en module inférieure à leur rayon qui est $\rho|q_1|^{k_n s}$. Or cette différence en module est $|\eta||q_1|^{k_n s}||(\frac{q_2}{q_1})^{k_n s} - 1|$, et $|(\frac{q_2}{q_1})^{k_n s} - 1|$ tend vers 0 si $n \to \infty$. Les deux disques coïncident donc pour tout n assez grand, donc aussi leur image par Φ, et par suite $g^{[k_n s]}(D) = D$ pour tout n assez grand, ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 14. — *Soient f, g entières qui permutent ayant un point périodique répulsif commun. Soit D une D-composante périodique pour f et g. Alors f et g ont dans D un point périodique commun.*

Démonstration. — On suppose que $f^{[t]}(D) = D$ et $g^{[s]}(D) = D$. Soit ω un point de D tel que $f^{[t]}(\omega) = \omega$, on a vu qu'il en existait un. La suite $g^{[ns]}(\omega) = v_n$ est à valeurs dans D, et comme $f^{[t]}(\omega) = \omega$, on a $f^{[t]}(v_n) = v_n$ pour tout n. Par suite, la suite v_n ne peut être injective, puisque $f^{[t]}$ a un nombre fini de zéros dans D. La suite v_n est donc prépériodique, et il existe un entier m et un entier $h \geqslant 1$, tels que $\eta = g^{[sm]}(\omega)$ vérifie $g^{[hs]}(\eta) = \eta$. On a aussi que $f^{[t]}(\eta) = \eta$, de sorte que $\eta \in D$ est le point périodique commun cherché.

En fait, on a un résultat plus général :

PROPOSITION 15. — *Sous les conditions précédentes, les fonctions f et g ont exactement les mêmes points périodiques non répulsifs.*

Démonstration. — On peut supposer que 0 est un point fixe répulsif commun aux deux fonctions f et g. Soit Φ la fonction entière telle que l'on ait $\Phi(x) = x + ...$, $\Phi(q_1 x) = f(\Phi(x))$, et $\Phi(q_2 x) = g(\Phi(x))$ pour tout x. Comme on peut remplacer f et g par une de leur itérées, on peut supposer que q_1 et q_2 sont de même module.

Soit θ un point périodique non répulsif de f. Il existe un entier non nul s tel que l'on ait $f^{[s]}(\theta) = \theta$.

Soit $r > 0$ un réel tel que, dans le disque $B^+(\theta, r)$, l'équation $f^{[s]}(x) - x = 0$ n'ait comme racine que θ. Si on prend r suffisamment petit, l'image par $f^{[s]}$ de ce disque sera inclus dans lui-même.

Soit ω tel que $\Phi(\omega) = \theta$, et $\rho > 0$ tel que l'image par Φ du disque de centre ω, rayon ρ soit le disque de centre θ, rayon r. Soit m un entier tel que $|q_1|^{ms}|(\frac{q_1}{q_2})^m - 1||\omega| \leqslant |q_1|^{ms}\rho$.

Alors pour tout $l \geqslant 1$, l'image par $f^{[lms]}$ du disque de centre θ, rayon r est égale à l'image par Φ du disque de centre $q_1^{lms}\omega$, rayon $|q_1|^{lms}r$, et ce disque est égal au disque de centre $q_2^{lms}\omega$, rayon $|q_2|^{lms}r$, dont l'image par Φ est égale à l'image par $g^{[lms]}$ du disque de centre θ, rayon r. Comme $f^{[lms]}(B^+(\theta, r)) \subset B^+(\theta, r)$, on a aussi $g^{[lms]}(B^+(\theta, r)) \subset B^+(\theta, r))$. Il en résulte que $g^{[ms]}(\theta)$ est une racine de l'équation $f^{[s]}(x) - x$ dans $B^+(\theta, r)$. Comme l'unique racine de cette équation dans ce disque est θ, on a $g^{[ms]}(\theta) = \theta$, ce qui démontre que tout point périodique non répulsif de f

est également un point périodique de g, non répulsif car appartenant à l'ensemble de Fatou de g. Comme l'inverse est vrai également, ceci termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[AV] D.K. Arrowsmith, F. Vivaldi, Geometry of p-adic Siegel discs, Physica, D 71, n° 1-2 (1994), 222-236.

[BA1] I.N. Baker, Permutable entire functions, Math. Zeitschrift, 79 (1962), 243-249.

[BA2] I.N. Baker, Repulsive fixpoints of entire functions, Math. Zeitschrift, 104 (1968), 252-256.

[B] J.-P. Bézivin, Sur les points périodiques des applications rationnelles en dynamique ultramétrique, à paraître, Acta Arithmetica.

[BEA] A.F. Beardon, Iteration of rational functions, New-York, Springer-Verlag, 1991.

[BE1] R. Benedetto, Reduction, dynamics and Julia sets and reduction of rational functions, to appear, Journal of Number theory.

[BE2] R. Benedetto, Hyperbolic maps and p-adic dynamics, to appear, Ergodic theory and Dynamical systems.

[BE3] R. Benedetto, p-adic dynamics and Sullivan's No Wandering Domains Theorem, Compositio Mathematica, 122 (2000), 281-298.

[BE4] R. Benedetto, Components and periodic points in non archimedean dynamics, preprint, July 1999.

[FA] P. Fatou, Sur l'itération analytique et les substitutions permutables, Journal de Mathématique, 2, 4 (1923), 343-384.

[FVDP] J. Fresnel, M. van der put, Géométrie rigide et applications, Progress in Math., Birkhaüser, 1981.

[ER] A.E. Eremenko, On the iteration of entire functions, Dynamical system and ergodic theory, Banach center publication, vol. 23, (1989), 339-345.

[IY] G. Iyer, On permutable integral functions, J. London Math. Soc., 34 (1959), 1451-144.

[HS1] L. Hsia, A weak Néron model with application to p-adic dynamical systems, Compositio Math., 100 (1996), 277-304.

[HS2] L. Hsia, Closure of periodic points over a non archimedean field, J. London Math. Soc., 62 (2000), 685-700.

[JU] G. Julia, Œuvres, Volume II, 64-100.

[LI1] H.C. Li, p-adic periodic points and sen's theorem, J. of Number Th., 56 (1996), 309-318.

[LI2] H.C. Li, Counting periodic points of p-adic power series, Compositio Math., 100 (1996), 351-364.

[LI3] H.C. Li, p-adic dynamical systems and formal groups, Compos. Math., 104, n° 1 (1996), 41-54.

[LI4] H.C. Li, When is a p-adic power series an endomorphism of a formal group? Proc. Am. Math. Soc., 124, n° 8 (1996), 2325-2329.

[LU] J. Lubin, Nonarchimedean dynamical systems, Compositio Math., 94 (1994), 321-346.

[MI] J. Milnor, Dynamics in one complex variable, Introductory lectures, Wiesbaden : Vieweg, 1999.

[MS1] P. MORTON, J. SILVERMAN, Rational periodic points of rational functions, Inter. Math. Res. Notices, 2 (1994), 97-110.

[MS2] P. MORTON, J. SILVERMAN, Periodic points, multiplicities and dynamical units, J. reine & ang. Math., 461 (1995), 81-122.

[NG] T.W. NG, Permutable entire functions and their Julia sets, to appear, Math Proc Cambr Phil Soc.

[PY] K.K. POON, C.C. YANG, Dynamical behaviour of two permutable functions, Ann. Polon. Math., 68 (1998), 159-163.

[RI] J.-F. RITT, Permutable rational functions, Trans. Amer. Math. Soc., 25 (1923), 399-448.

[SW] N. SMART, C. WOODCOCK, p-adic Chaos and ramdom number generation, Experiment. Math., 7, n° 3 (1998), 765-788.

[TVW] E. THIRAN, D. VERSTEGEN, J. WEYERS, p-adic dynamics, J. Stat. Phys., 54, n° 3/4 (1989), 893-913.

[VE] D. VERSTEGEN, p-adic dynamical systems, Number theory and physics, Proc. Winter Sch, Les Houches, 1989, Springer Proc. Phys., 47 (1990), 235-242.

Manuscrit reçu le 2 février 2001,
accepté le 23 avril 2001.

Jean-Paul BÉZIVIN,
Université de Caen
Département de Mathématiques et Mécanique
Campus II, Boulevard du Maréchal Juin
BP 5186
14032 Caen Cedex (France).
bezivin@math.unicaen.fr