ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-PIERRE KAHANE

Sur les mauvaises répartitions modulo 1

Annales de l'institut Fourier, tome 14, nº 2 (1964), p. 519-526
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1964__14_2_519_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
14, 2 (1964), 519-526.

SUR LES MAUVAISES RÉPARTITIONS MODULO 1

par Jean-Pierre KAHANE

---

1. Introduction.

On désigne par $\lambda = \{\lambda_j\}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Nous nous proposons en particulier d'établir les résultats suivants.

THÉORÈME 1. — *Si $\lambda_j = 0(j)$ $(j \to \infty)$, l'ensemble des nombres anormaux par rapport à λ est au plus dénombrable.*

THÉORÈME 2. — *Si λ a une densité uniforme extérieure non nulle, et si Δ est un intervalle (non vide), l'ensemble H_Δ^λ des u tels que $\lambda_j u \notin \Delta$ modulo 1 $(j = 1, 2, \ldots)$ est fini.*

Les nombres « anormaux » sont les u tels que la suite $\{\lambda_j u\}$ est « mal distribuée ». La densité uniforme extérieure de λ est la borne inférieure des densités des suites λ^* uniformément réparties contenant λ. Ces notions seront précisées dans la suite.

Les théorèmes 1 et 2 sont des corollaires d'une même proposition que l'on obtient en adaptant convenablement la méthode de [4]. Le théorème 2 a été obtenu indépendamment par M[me] Y. Amice, par une tout autre méthode [1].

Dans les premiers paragraphes, nous introduisons les notions de suites mal réparties et de nombres anormaux, et nous donnons une série de propositions qui les relient, de façon naturelle, aux notions plus familières de suites uniformément réparties et de nombres normaux. Le lecteur impatient, s'il s'en trouve, de connaître la démonstration des théorèmes 1 et 2 peut aller directement au paragraphe 5.

Signalons que le résultat de [4] se généralise à simple lecture de la façon suivante.

Théorème 3. — *Quelles que soient la suite* λ *et la matrice de sommation* M, *l'ensemble des nombres* M-*anormaux par rapport à* λ *est de mesure nulle par rapport à toute mesure positive à support compact dont la transformée de Fourier tend zers zéro à l'infini.*

Il est demandé en [4] si ce résultat est encore valable lorsqu'on remplace « M-anormaux » par « non-normaux ». La réponse est encore inconnue. Mais on sait, par un résultat de Erdös et Taylor [2], qu'il existe une suite λ telle que $\lambda_j = O(j)$ et pour laquelle l'ensemble des nombres non normaux n'est pas dénombrable; on ne peut donc pas remplacer « anormaux » par « non-normaux » dans l'énoncé du théorème 1.

2. Sommation des suites de vecteurs.

Le présent paragraphe est essentiellement emprunté à [3].

On appelle matrice de sommation toute matrice $M = (a_i^j)(i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots)$ telle que

$$a_i^j \geqslant 0 (i = 1, 2, \ldots; j = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_i^j = 1 (i = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

$$\lim_{i \to \infty} a_i^j = 0 (j = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

En particulier, on désignera par N la matrice telle que $a_i^j = \frac{1}{i}$ pour $j \leqslant i$ et $a_i^j = 0$ pour $j > i$. Le produit de deux matrices de sommation, défini de manière naturelle, est encore une matrice de sommation. Étant donné deux matrices de sommation M_1 et M_2, on note $M_2 < M_1$ s'il existe une matrice de sommation Q telle que $M_2 = QM_1$.

Dans un espace vectoriel topologique E qui pour simplifier, sera supposé isomorphe à l'espace réel R^∞ ou à l'espace complexe C^∞ à base dénombrable (muni de la topologie d'espace produit), on considère une suite bornée de vecteurs $u_1, u_2, \ldots,$

suite que nous désignons par u. La matrice de sommation M lui fait correspondre une suite bornée $v_1, v_2, \ldots$, définie par

$$v_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_i^j u_j; \tag{4}$$

nous désignons cette suite par Mu.

On peut appeler « limite convexe » de u l'ensemble

$$\mathcal{C}u = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k u, \tag{5}$$

où $\mathcal{C}_k u$ est le plus petit convexe fermé contenant $u_k, u_{k+1}, \ldots$. La suite u est convergente si et seulement si $\mathcal{C}u$ est réduite à un point. Quelles que soient la matrice de sommation M et la suite u, on vérifie facilement que

$$\mathcal{C}\mathrm{M}u \subset \mathcal{C}u. \tag{6}$$

Donc, si $\mathrm{M}_2 < \mathrm{M}_1$, on a

$$\mathcal{C}\mathrm{M}_2 u \subset \mathcal{C}\mathrm{M}_1 u. \tag{7}$$

Nous aurons à nous servir du lemme suivant.

LEMME. — *Si* $a \in \mathcal{C}u$, *il existe une matrice de sommation* Q *telle que la suite* Qu *converge vers* a *(c'est-à-dire* $\mathcal{C}\mathrm{Q}u = a$).

Preuve. — Soit $\mathrm{V}_i (i = 1, 2, \ldots)$ une suite de voisinages de a dont la partie commune se réduit à a. Pour chaque i, V_i coupe le convexe engendré par $u_i, u_{i+1}, \ldots$; il existe donc des a_i^j satisfaisant (1) et (2), avec de plus $a_i^1 = a_i^2 = \cdots = a_i^i = 0$, tels que

$$\sum_{j=i+1}^{\infty} a_i^j u_j \in \mathrm{V}_i \tag{8}$$

La matrice Q définie par les a_i^j est bien une matrice de sommation, et la suite Qu converge vers a.

3. Suites uniformément réparties et suites mal réparties modulo 1.

Dans ce paragraphe, on suppose données une suite réelle $\mu = \{\mu_j\}$ $(j = 1,2, \ldots)$ et une matrice de sommation M; le cas le plus important sera M = N.

A toute fonction φ définie sur la droite réelle associons la suite $\varphi_\mu = \{\varphi(\mu_j)\}(j = 1, 2, \ldots)$. Désignons par $\mathcal{L}_0$ resp. $\mathcal{L}_1$ l'ensemble des fonctions périodiques et de période 1 qui sont fonctions caractéristiques d'ouverts resp. combinaisons linéaires d'exponentielles $\varphi_m(t) = e^{2\pi imt}$.

Si $\varphi \in \mathcal{L}_0$ ou $\mathcal{L}_1$, on note $\mathfrak{M}(\varphi)$ sa valeur moyenne.

On dit que μ est M-uniformément répartie modulo 1 si, pour toute $\varphi \in \mathcal{L}_i$ $(i = 0$ ou $1)$, on a

$$\mathcal{C}\mathrm{M}\varphi_\mu = \mathfrak{M}(\varphi). \tag{9}$$

L'équivalence des définitions obtenues pour $i = 0$ et $i = 1$ constitue le célèbre critère de H. Weyl. Si M = N, on dit simplement que μ est uniformément répartie modulo 1.

On dira que μ est M-mal répartie modulo 1 s'il existe une $\varphi \in \mathcal{L}_1$ (resp. une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}_0$) telle que

$$\mathfrak{M}(\varphi) \notin \mathcal{C}\mathrm{M}\varphi_\mu. \tag{10}$$

Si M = N, on dira simplement que μ est mal répartie modulo 1. Cette définition est un peu plus large que celle de [3], où l'on utilise $\mathcal{L}_0$ à la place de $\mathcal{L}_1$. Elle admet l'interprétation suivante (qui montre que l'on peut indifféremment dans la définition prendre $\varphi \in \mathcal{L}_1$, ou φ combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{L}_0$).

Proposition 1. — *Dire que a) : la suite μ est* M-*mal répartie modulo* 1, *c'est dire que b) pour aucune* $\mathrm{M}' < \mathrm{M}$, *elle n'est* M'-*uniformément répartie modulo* 1.

Preuve. — *a*) entraîne *b*) à cause de (7). Supposons maintenant *b*). Soit u la suite d'éléments de C^∞ dont les suites coordonnées sont les $\mathrm{M}\varphi_{m,\mu} (m = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$; rappelons que $\varphi_m(t) = e^{2\pi imt}$ et $\varphi_{m,\mu}$ est la suite $\{e^{2\pi im\mu_j}\}(j = 1, 2, \ldots)$. Soit a l'élément de C^∞ de composantes $\mathfrak{M}\varphi_m (m = \cdots -1, 0, 1, \ldots)$. Alors *b*) signifie que, pour aucune matrice de sommation Q, Qu ne converge vers a dans C^∞. D'après le lemme, $a \notin \mathcal{C}u$. D'après le critère dit de Hahn-Banach, il existe une forme linéaire sur C^∞, soit l, telle que $l(a) \notin \mathcal{C}l(u)$. Une telle forme linéaire s'exprime comme combinaison linéaire des coordonnées; en l'appliquant à $\{\varphi_m(t)\}$, on trouve un polynôme trigonométrique $\varphi(t)$, et l'on a $l(a) = \mathfrak{M}(\varphi)$ et $\mathcal{C}l(u) = \mathcal{C}\mathrm{M}\varphi_\mu$. Donc *a*) n'a pas lieu, lorsqu'on définit la mauvaise répartition par l'existence d'une $\varphi \in \mathfrak{L}_1$ telle que (10) ait lieu. Quitte à remplacer les φ_m par les fonctions de $\mathfrak{L}_0$ dont les discontinuités appartiennent à un ensemble dénombrable dense sur la droite et disjoint de $\{\mu_j\}$, la même démonstration vaut mutatis mutandis et montre qu'on peut remplacer ci-dessus $\varphi \in \mathfrak{L}_1$ par φ combinaison linéaire desdites fonctions de $\mathfrak{L}_0$.

Pour la symétrie, indiquons la proposition suivante.

PROPOSITION 2. — *Dire que a) la suite μ est* M-*uniformément répartie modulo* 1, *c'est dire que b) pour aucune* $M' < M$, *elle n'est* M'-*mal répartie modulo* 1.

Preuve. — *a*) entraîne encore *b*) à cause de (7). Supposons maintenant que *a*) n'a pas lieu, c'est-à-dire, avec les notations ci-dessus, qu'il existe un $c \in \mathcal{C}u$, $c \neq a$. Soit Q une matrice de sommation telle que $c = \mathcal{C}Qu$. Alors $a \notin \mathcal{C}M'u$ pour $M' = QM$, donc *b*) n'a pas lieu.

Nous avons dit que le cas le plus important est le cas $M = N$. Un autre cas important est le cas $M = I$, matrice identité. Il est clair qu'aucune μ n'est I-uniformément répartie. Pour les suites I-mal réparties, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *La suite μ est* I-*mal répartie si et seulement s'il existe un intervalle réel Δ ne contenant aucun μ_j.*

Preuve. — Dire que μ est I-mal répartie, c'est dire qu'existe une combinaison linéaire réelle φ d'éléments de $\mathfrak{L}_0$ telle que $\mathfrak{M}(\varphi) \notin \mathcal{C}\varphi_\mu$, autrement dit telle que $\overline{\lim_{j\to\infty}}\, \varphi(\mu_j) < \mathfrak{M}(\varphi)$ ou $\underline{\lim_{j\to\infty}}\, \varphi(\mu_j) > \mathfrak{M}(\varphi)$. S'il en est ainsi, tous les μ_j à l'exception d'un nombre fini se trouvent dans l'ensemble des u tels que $\varphi(u) < \mathfrak{M}(\varphi)$ resp. $\varphi(u) > \mathfrak{M}(\varphi)$, et il existe donc un intervalle Δ ne contenant aucun μ_j. La réciproque est évidente.

4. Nombres normaux et nombres anormaux.

Dans ce paragraphe, on donne la suite $\lambda = \{\lambda_j\}$ d'entiers positifs ($\lambda_{j+1} > \lambda_j$, $j = 1, 2, \ldots$) et une matrice de sommation M.

On dira qu'un nombre $x > 0$ est M-*normal par rapport* à λ si la suite réelle $\lambda x = \{\lambda_j x\}$ est M-uniformément répartie modulo 1. On dira que x est M-*anormal par rapport à* λ si la suite λx est M-mal répartie modulo 1. Pour alléger, nous dirons seulement que x est M-normal, sans expliciter « par rapport à λ ». Si $M = N$, on dira simplement que x est normal ou anormal; le concept de nombre normal est dû à E. Borel.

Comme corollaire des propositions 1 et 2, on a :

Proposition 4. — *Pour que x soit M-anormal, il faut et suffit que pour aucune $M' < M$ il ne soit M-normal. Pour qu'il soit M-normal, il faut et suffit que pour aucune $M' < M$ il ne soit M-anormal.*

Comme corollaire de la proposition 3 :

Proposition 5. — *Pour que x soit I-anormal, il faut et suffit que, pour un intervalle Δ convenable, $x \in H_\Delta^\lambda$, ensemble des y tels que, pour tout j, $\lambda_j y \notin \Delta$ modulo 1.*

Les ensembles H_Δ^λ ont été introduits par Rajchman.

Enfin, simple reformulation de la définition :

Proposition 6. — *Pour que x soit M-anormal, avec $M = (a_i^j)$, il faut et suffit qu'existe un polynôme trigonométrique $\varphi \in \mathcal{L}_1$, de valeur moyenne nulle, tel que*

$$\varlimsup_{i \to \infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_i^j \varphi(\lambda_j x) \right| > 0. \tag{11}$$

5. Cas d'une suite λ assez dense.

Nous dirons que la suite λ *satisfait la condition* (D) s'il existe une suite croissante j_k, telle que $j_{k+1} - j_k \to \infty$, et

$$\varlimsup_{k \to \infty} \frac{\lambda_{j_{k+1}} - \lambda_{j_k+1}}{j_{k+1} - j_k} < \infty. \quad (^1) \tag{12}$$

Autrement dit, λ est une réunion de blocs, portés par des segments dont la longueur augmente indéfiniment, sur lesquels la densité λ est bornée inférieurement par un nombre positif. On vérifie très facilement que, si $\lambda_j = 0(j)$ $(j \to \infty)$, λ satisfait à la condition (D).

On dit que la suite λ a pour densité uniforme D si, $n(r)$ désignant le nombre de points de λ entre 0 et r, on a $n(r) - Dr = 0(1)$ $(r \to \infty)$. Dans le cas général, la *densité uniforme extérieure*

(1) Les différences $\lambda_{j_k+1} - \lambda_{j_k}$ peuvent être arbitrairement grandes.

de λ est définie comme la borne inférieure des densités uniformes des suites λ' contenant λ et possédant une densité uniforme; elle s'exprime par

$$\Delta(\lambda) = \lim_{h\to\infty} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r+h) - n(r)}{h}. \tag{13}$$

On vérifie très facilement que $\Delta(\lambda) > 0$ si et seulement si λ contient une suite qui satisfasse à la condition (D).

Les deux résultats indiqués dans l'introduction apparaîtront donc comme corollaires de la proposition suivante.

Proposition 7. — *Soit λ une suite d'entiers satisfaisant à la condition* (D), $\mathrm{M} = (a_i^j)$ *une matrice de sommation telle que* $\mathrm{M} < \mathrm{N}$, $\varphi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{2\pi int}$ *une fonction réelle telle que* $\gamma_0 = 0$ *et* $\sum_{-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty$, *et enfin* ε *un nombre* > 0. *Alors l'ensemble* X *des* $x \in [0, 1[$ *pour lesquels*

$$\underline{\lim_{l\to\infty}} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \varphi(\lambda_j x) > \varepsilon \tag{14}$$

est fini.

Preuve. — Supposons X infini. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ des points distincts de X, et $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ des coefficients positifs que l'on déterminera ultérieurement, tels que $\sum_{m=1}^{\infty} c_m = 1$. Comme (14) vaut pour chaque $x = x_m$, on a

$$\underline{\lim_{l\to\infty}} \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi(\lambda_j x_m) > \varepsilon. \tag{15}$$

On peut d'ailleurs, quitte à modifier ε, supposer que φ est un polynôme trigonométrique $\sum_{-\nu}^{\nu} \gamma_n e^{2\pi int}$, et $\sum_{-\nu}^{\nu} |\gamma_n| = 1$. Nous allons montrer que, si l'on choisit convenablement les c_m, on a

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{j_k} \sum_{j=1}^{j_k} \left| \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{2\pi in\lambda_j x_m} \right| < \frac{\varepsilon}{|\gamma_n|} \tag{16}$$

pour $-\nu \leqslant n \leqslant \nu$. Comme (15) et (16) sont incompatibles, la contradiction établira que X est fini.

Posons

$$\Psi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{2\pi i x_m t}. \tag{17}$$

On a, uniformément par rapport à s,

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{j=s+1}^{s+l}|\Psi(j)|^2=\sum_{m=1}^{\infty}c_m^2, \tag{18}$$

donc on a, pour tout entier $n\neq 0$,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n(\lambda_{j_{k+1}}-\lambda_{j_k+1})}\sum_{n\lambda_{j_{k}+1}<j\leqslant n\lambda_{j_{k+1}}}|\Psi(j)|^2=\sum_{m=1}^{\infty}c_m^2. \tag{19}$$

Il en résulte, d'après la condition (D), que

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{1}{j_{k+1}-j_k}\sum_{j=j_k+1}^{j_{k+1}}|\Psi(n\lambda_j)|^2\leqslant A\nu\sum_{m=1}^{\infty}c_m^2, \tag{20}$$

A désignant le premier membre de (12). On a donc

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left(\frac{1}{j_k}\sum_{j=1}^{j_k}|\Psi(n\lambda_j)|^2\right)^{\frac12}\leqslant\left(A\nu\sum_{m=1}^{\infty}c_m^2\right)^{\frac12}. \tag{21}$$

Or le premier membre de (16) est majoré par celui de (21). Donc (16) a lieu pour $-\nu\leqslant n\leqslant\nu$ dès que, pour ces valeurs de n, on a

$$\left(A\nu\sum_{m=1}^{\infty}c_m^2\right)^{\frac12}<\frac{\varepsilon}{|\gamma_n|}. \tag{22}$$

Comme on peut choisir les c_m de façon à satisfaire à ces conditions, la preuve est achevée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice, Un théorème de finitude, *Ann. Inst. Fourier* (ce volume).

[2] P. Erdös et S. Taylor, On the set of points of convergence..., *Proc. London Math. Soc.*, 7 (1957) 598-615.

[3] H. Helson et J. P. Kahane, A Fourier method in diophantine problems, à paraître au *Journal d'Analyse Mathématique*.

[4] J. P. Kahane et R. Salem, Distribution modulo 1 and sets of uniqueness, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964), 259-261.

Manuscrit reçu en juillet 1964.

Jean-Pierre Kahane,
Faculté des Sciences d'Orsay,
Orsay (S.-et-O.).