



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Sorin DUMITRESCU

Métriques riemanniennes holomorphes en petite dimension

Tome 51, n° 6 (2001), p. 1663-1690.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2001__51_6_1663_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

MÉTRIQUES RIEMANNIENNES HOLOMORPHES EN PETITE DIMENSION

par Sorin DUMITRESCU

1. Introduction.

Une *métrique riemannienne holomorphe* sur une variété complexe est un champ holomorphe de formes quadratiques (complexes) non dégénérées sur le fibré holomorphe tangent à la variété.

Il convient d'envisager une telle métrique comme l'analogue complexe d'une métrique pseudo-riemannienne. En effet, de manière analogue à la géométrie pseudo-riemannienne, à une métrique riemannienne holomorphe il est associé une unique connexion (holomorphe) de Levi-Civita, des courbes géodésiques (les géodésiques sont des courbes holomorphes dont le vecteur tangent est parallèle) et un tenseur de courbure.

L'exemple canonique est la métrique (plate) $q = dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_n^2$ sur l'espace \mathbb{C}^n . La métrique q est invariante par les translations et passe au quotient définissant une métrique holomorphe sur tout tore complexe de dimension n .

Contrairement à la géométrie riemannienne réelle l'existence d'une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe compacte n'est nullement assurée. Elle impose même des conditions très restrictives à la variété.

Mots-clés : Variétés complexes – Métriques riemanniennes holomorphes – Théorie algébrique des invariants – Pseudo-groupe d'isométries locales.
Classification math. : 53B21 – 53C56 – 53A55.

Nous nous proposons de caractériser les variétés complexes compactes qui possèdent des métriques riemanniennes holomorphes.

Dans le cadre *kählérien* la réponse est donnée dans [15] : les auteurs prouvent que parmi les variétés kählériennes compactes, seuls les tores complexes et leurs quotients finis admettent des connexions affines holomorphes (et donc des métriques riemanniennes holomorphes). Dans ce cas, les métriques riemanniennes holomorphes sont nécessairement plates. Il est intéressant de mentionner ici la généralisation suivante obtenue dans [8], [9] : une variété kählérienne compacte de première classe de Chern nulle possède une structure géométrique holomorphe rigide si et seulement si elle a un revêtement fini qui est un tore.

Pour les cas des surfaces complexes compactes nous montrons que *seuls les tores complexes et leurs quotients finis admettent des métriques riemanniennes holomorphes*. Ces métriques sont nécessairement plates.

Les deux résultats principaux de cet article sont les suivants :

THÉOREME 1. — *Il n'existe pas de métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe compacte simplement connexe de dimension 3.*

Ce résultat est à rapprocher d'un théorème de S. Kobayashi qui montre dans [16] qu'une variété kählérienne compacte simplement connexe dont la première classe de Chern est positive ou nulle n'admet pas de sections holomorphes d'une puissance symétrique du fibré cotangent.

Nos méthodes présentent l'avantage de fonctionner aussi dans un cadre non kählérien.

Rappelons que, d'après un résultat de M. Gromov [7], [11], les orbites du pseudo-groupe des isométries locales d'une métrique riemannienne analytique *réelle* sur une variété compacte ont la description suivante : il existe un ouvert dense invariant de la variété sur lequel les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont les fibres d'une submersion analytique à valeurs dans une autre variété analytique. Dans le cas d'une métrique riemannienne réelle générique les fibres de la fibration précédente sont simplement des points (il n'y a aucune isométrie locale).

Contrairement au cas réel, les métriques riemanniennes holomorphes sur les variétés complexes compactes semblent avoir "beaucoup" d'isométries locales. En effet, nous venons de voir que dans le cadre kählérien le pseudo-groupe des isométries locales agit transitivement sur la variété (la métrique est localement homogène car elle est plate).

Nous démontrons ici le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit M une variété complexe compacte de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe q . Alors, en dehors d'un sous-ensemble analytique compact propre de M , les orbites du pseudo-groupe des isométries locales de q sont des sous-variétés complexes de dimension au moins 2.*

Ce théorème précise et améliore, dans le cas des variétés de dimension complexe 3 et de dimension algébrique supérieure à 1, le résultat général suivant (qui s'applique bien aux métriques riemanniennes holomorphes) [8], [9] :

THÉORÈME 1.1. — *Soit ϕ une structure géométrique holomorphe rigide sur une variété complexe compacte M de dimension n . Si p est la dimension des orbites du pseudo-groupe des isométries locales de ϕ sur un ouvert dense invariant U de M et d est la dimension algébrique de M , alors $p + d \geq n$.*

Le plan du papier est le suivant. La deuxième section introduit les exemples connus de métriques riemanniennes holomorphes. Dans la troisième section nous classifions les métriques sur les espaces homogènes compacts. La quatrième section étudie le cas des surfaces complexes, tandis que la cinquième section est technique et consacrée à des rappels sur la théorie des invariants des groupes algébriques. La sixième section aborde la dimension 3 et présente plusieurs lemmes essentiels. La dernière section contient les preuves des théorèmes principaux.

Ce travail a été réalisé dans le laboratoire C.N.R.S. de l'École Normale Supérieure de Lyon. Je remercie vivement Étienne Ghys de m'avoir soumis le sujet et de m'avoir constamment guidé et encouragé. Je remercie également B. Sévenec et A. Zeghib pour des nombreuses discussions.

2. Exemples.

Rappelons d'abord qu'une *isométrie* d'une variété complexe munie d'une métrique riemannienne holomorphe est un biholomorphisme qui préserve la métrique. Si un biholomorphisme est défini seulement localement (entre deux ouverts de la variété) et préserve la métrique (là où il

est défini) nous avons une *isométrie locale*. L'ensemble des isométries locales forme un pseudo-groupe pour la composition. *Un champ de Killing* est un champ de vecteurs holomorphe sur la variété dont le flot agit par isométries.

Les exemples les plus simples de variétés complexes compactes qui admettent des métriques riemanniennes holomorphes sont les variétés dites parallélisables qui s'obtiennent comme quotient d'un groupe de Lie complexe par un réseau co-compact.

Un procédé simple pour construire de telles métriques est le suivant : considérons un groupe de Lie complexe G qui admet un réseau co-compact Γ (exemple : un groupe de Lie complexe semi-simple comme $SL(2, \mathbb{C})$).

Nous identifions son algèbre de Lie \mathcal{G} à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G invariants par les translations à droite. Le quotient à droite par l'action de Γ fournit une variété complexe compacte parallélisable $M = G/\Gamma$, dont le fibré tangent est holomorphiquement isomorphe à $M \times \mathcal{G}$. L'ensemble des métriques holomorphes q sur M s'identifie aux formes quadratiques non dégénérées sur \mathcal{G} .

Au cas où cette forme quadratique est invariante par la représentation adjointe de G dans son algèbre de Lie (ce qui arrive, par exemple, pour la forme de Killing d'un groupe de Lie semi-simple complexe : la forme de Killing, qui est toujours invariante par la représentation adjointe, est non dégénérée si G est semi-simple) les translations à gauche sont des *isométries globales* pour la métrique sur M .

Dans le cas d'une forme quadratique non dégénérée générique il n'existe pas "autant" d'isométries globales. En revanche, dans une carte locale de M , donnée par une section locale de la projection $G \rightarrow G/\Gamma$, les translations à droite définissent des transformations locales qui agissent par isométrie. Les métriques holomorphes ainsi construites sont donc *localement homogènes* (pour tous les couples de points (m, m') dans M , il existe une isométrie locale d'un voisinage ouvert de m dans M sur un voisinage ouvert de m' qui envoie m sur m').

Remarquons aussi que si la métrique riemannienne holomorphe qui correspond à la forme de Killing est de courbure sectionnelle constante, pour les autres exemples la courbure sectionnelle est, en général, non constante.

En dimension 3, des exemples de métriques riemanniennes holomorphes sur des variétés complexes dont le fibré tangent n'est pas holomor-

phiquement trivial ont été construits dans [12]. Ces exemples s'obtiennent à partir des espaces homogènes du groupe $SL(2, \mathbb{C})$, par déformation de la structure complexe.

L'idée est de considérer un réseau co-compact Γ de $SL(2, \mathbb{C})$ et de perturber l'action par translations à droite de Γ sur $SL(2, \mathbb{C})$ de manière que le quotient soit toujours une variété. L'auteur prouve qu'il existe des morphismes de groupes $u : \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ tels que l'action à droite de Γ sur $SL(2, \mathbb{C})$ donnée par

$$(m, \gamma) \in SL(2, \mathbb{C}) \times \Gamma \rightarrow u(\gamma^{-1})m\gamma \in SL(2, \mathbb{C})$$

est libre et totalement discontinue. Le quotient est une variété complexe compacte $M(u, \Gamma)$ sur laquelle la métrique de Killing de $SL(2, \mathbb{C})$ induit une métrique holomorphe. Il existe des morphismes u pour lesquels les variétés $M(u, \Gamma)$ ne possèdent aucun champ de vecteurs holomorphe non nul. Il est prouvé dans [12] que tout tenseur holomorphe sur une variété de type $M(u, \Gamma)$ se relève en un tenseur holomorphe sur $SL(2, \mathbb{C})$ invariant par l'action à droite de $SL(2, \mathbb{C})$ et par l'action à gauche de $u(\Gamma)$. En particulier, tout tenseur holomorphe (et donc toute métrique) sur $M(u, \Gamma)$ est localement homogène.

3. Métriques holomorphes sur les espaces homogènes compacts.

Le but de cette section est de classifier les métriques riemanniennes holomorphes sur les variétés *homogènes* compactes.

Nous rappelons qu'une variété complexe compacte M est dite homogène si son groupe des biholomorphismes (qui d'après le théorème de Bochner est un groupe de Lie complexe dont l'algèbre de Lie est l'algèbre des champs de vecteurs holomorphes sur M) agit transitivement sur M .

Rappelons également le théorème de Wang qui sera utile pour la suite :

THÉORÈME 3.1 (Wang). — *Soit M une variété complexe compacte de dimension n dont le fibré tangent est holomorphiquement trivial (i.e. il existe n sections holomorphes du fibré tangent, en chaque point linéairement indépendantes). Alors M est nécessairement un quotient d'un groupe de Lie complexe G par un réseau co-compact Γ .*

Démonstration. — Considérons X_1, \dots, X_n , des champs de vecteurs holomorphes sur M qui forment en chaque point une base de l'espace

tangent. Les crochets de Lie de ces champs, pris deux à deux, sont

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k X_k.$$

Les fonctions c_{ij}^k ainsi définies sont holomorphes et, par conséquent, constantes. Ceci montre que les champs X_i forment une algèbre de Lie de dimension finie. D'après un résultat classique, dû à S. Lie, il s'agit de l'algèbre de Lie \mathcal{G} des champs de vecteurs invariants à droite d'un groupe de Lie complexe connexe et simplement connexe G agissant à gauche sur M . Cette action est nécessairement transitive et M s'identifie au quotient de G par un réseau co-compact Γ . \square

La proposition suivante est très simple (et analogue à l'énoncé riemannien réel), mais nous l'utiliserons plusieurs fois dans la suite :

PROPOSITION 3.2. — *Si la variété complexe M possède une métrique riemannienne holomorphe, alors M admet un revêtement double dont le fibré canonique est trivial (ou, de manière équivalente, M admet un revêtement double qui possède une forme volume holomorphe non singulière).*

Démonstration. — L'existence d'une métrique holomorphe sur M entraîne une réduction du groupe structural du fibré des repères $R(M)$ de M (qui est un $GL(n, \mathbb{C})$ -fibré principal) au groupe orthogonal $O(n, \mathbb{C})$. Sur un revêtement double de M il existe alors une réduction du groupe structural du fibré des repères au groupe spécial orthogonal $SO(n, \mathbb{C})$ et, en particulier, au groupe $SL(n, \mathbb{C})$. Il est équivalent de dire que ce revêtement double admet une forme volume holomorphe partout non nulle. \square

Remarque. — q induit un isomorphisme entre TM et son dual, donc aussi entre le fibré canonique K et K^{-1} .

PROPOSITION 3.3. — *Soit M une variété complexe compacte homogène munie d'une métrique holomorphe q . Alors M est une variété parallélisable $M = G/\Gamma$ et la métrique q provient d'une forme quadratique sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} (elle est donc localement homogène).*

Par conséquent, il n'existe pas de métrique holomorphe sur les variétés complexes compactes homogènes simplement connexes.

Démonstration. — Par la proposition précédente, il existe une forme volume holomorphe Ω sur un revêtement double de M .

Comme M est une variété homogène, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes sur M est transitive. Nous fixons donc un point $m \in M$ et choisissons n champs de vecteurs X_1, \dots, X_n tels que $X_1(m), \dots, X_n(m)$ forment une base de $T_m M$. Les champs de vecteurs X_i se relèvent sur le revêtement double de M qui porte la forme Ω en les champs \tilde{X}_i . Si \tilde{m} est un relevé du point m , les champs $\tilde{X}_1(\tilde{m}), \dots, \tilde{X}_n(\tilde{m})$ sont linéairement indépendants et donc $\Omega_{\tilde{m}}(\tilde{X}_1(\tilde{m}), \dots, \tilde{X}_n(\tilde{m})) \neq 0$. Or, la fonction holomorphe $\Omega(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$ est constante sur le revêtement double ce qui montre que les champs $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ sont en chaque point linéairement indépendants. De même les champs de vecteurs X_1, \dots, X_n sont en chaque point linéairement indépendants et fournissent une trivialisatation holomorphe du fibré tangent à M . D'après le théorème de Wang notre variété est nécessairement de la forme G/Γ . De plus les fonctions $q(X_i, X_j)$ sont constantes en tant que fonctions holomorphes sur une variété compacte (la métrique provient donc d'une forme quadratique sur l'algèbre de Lie).

La deuxième assertion de la proposition résulte du fait qu'il n'existe pas de groupe de Lie complexe compact simplement connexe. \square

4. Métriques holomorphes sur les surfaces complexes compactes.

Commençons par remarquer que l'existence d'une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe de dimension n munit la variété réelle sous-jacente d'une métrique pseudo-riemannienne de signature (n, n) (qui n'est rien d'autre que la partie réelle de la métrique holomorphe). Cette observation simple permet de trouver toutes les surfaces de Riemann (courbes) qui possèdent des métriques riemanniennes holomorphes. En effet, les seules surfaces réelles qui possèdent une métrique lorentzienne sont les tores (car le cône isotrope de la métrique induit un champ de vecteurs non singulier sur un revêtement fini de la surface). En conclusion, parmi les surfaces de Riemann, seuls les tores possèdent des métriques riemanniennes holomorphes.

Passons à présent au cas des surfaces complexes compactes. Nous allons classifier les surfaces complexes compactes qui admettent des métriques riemanniennes holomorphes.

Le résultat suivant est une conséquence d'un théorème de [15]. Par souci de complétude, nous donnons ici une preuve simple :

PROPOSITION 4.1. — *Soit S une surface complexe compacte qui possède une métrique riemannienne holomorphe. Alors les deux premières classes de Chern de S sont nulles.*

Démonstration. — Sur un revêtement double de S le fibré canonique est trivial. Ceci assure que la première classe de Chern de S est nulle.

D'après la théorie de Chern-Weil nous pouvons calculer les classes de Chern d'un fibré vectoriel à partir de la courbure d'une connexion sur ce fibré.

Nous appliquons ceci au fibré tangent à S muni de la connexion (holomorphe) de Levi-Civita de la métrique riemannienne holomorphe. La deuxième classe de Chern est représentée alors par une 4-forme différentielle *holomorphe*. Par un argument dimensionnel évident cette 4-forme différentielle est nécessairement nulle. \square

PROPOSITION 4.2. — *Une métrique riemannienne holomorphe sur une surface complexe compacte est nécessairement localement homogène.*

Démonstration. — L'idée de la preuve est d'utiliser la courbure sectionnelle (qui, dans le cas des surfaces compactes, est une fonction holomorphe – constante par le principe du maximum).

En effet, la donnée d'une métrique holomorphe implique, en particulier, l'existence d'une forme volume non singulière sur un revêtement double ou encore une section holomorphe qui ne s'annule pas du fibré K^2 , où K est le fibré canonique de M . Le fibré K^2 est, par conséquent, trivial.

Par ailleurs, nous fabriquons, à partir du tenseur de courbure R de la métrique, le tenseur $(x, y) \rightarrow R(x, y, x, y)$. Les symétries de R font que le dernier tenseur est une section du fibré (trivialisé) K^2 . Cette section fournit donc une fonction qui est la courbure sectionnelle. Comme il s'agit d'une fonction holomorphe sur une variété compacte, elle est constante. Ceci implique, par un théorème local classique dû à Riemann ([23], théorème 2.4.11), l'homogénéité locale de la métrique. \square

Il est intéressant de signaler que, contrairement à la géométrie riemannienne réelle, il n'existe ici que deux modèles (X, g) , avec X variété complexe connexe et simplement connexe et g une métrique riemannienne holomorphe *complète* de courbure sectionnelle constante sur X (rappelez qu'une métrique riemannienne holomorphe est dite complète si ses

géodésiques locales se prolongent en des géodésiques globales définies sur \mathbb{C} tout entier). Il s'agit du modèle plat $(\mathbb{C}^2, dz_1^2 + dz_2^2)$ et du modèle de courbure constante non nulle $(P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}) \setminus \text{Diag}, \frac{dz_1 \cdot dz_2}{(z_1 - z_2)^2})$. Pour le second modèle la métrique est exprimée en coordonnées affines.

Le théorème suivant affirme, en particulier, que les métriques riemanniennes holomorphes supportées par des surfaces complexes compactes sont nécessairement plates (elles sont modélées localement sur des ouverts de $(\mathbb{C}^2, dz_1^2 + dz_2^2)$).

THÉORÈME 4.3. — *Soit S une surface complexe compacte munie d'une métrique riemannienne holomorphe q . Alors S admet un revêtement fini (non ramifié) qui est un tore complexe et la métrique q est plate.*

Démonstration. — La preuve s'appuie sur la classification des surfaces complexes compactes établie par Kodaira. Ainsi, les seules surfaces complexes compactes dont le fibré canonique est trivial et dont la deuxième classe de Chern est nulle sont les tores et les surfaces de Kodaira primaires (voir [2], section 6). Remarquons que le cas des surfaces $K3$ (dont le fibré canonique est trivial) est exclu car leur deuxième classe de Chern est non nulle.

Il reste à éliminer le cas des surfaces de Kodaira primaires. Une telle surface admet une fibration holomorphe localement triviale sur une courbe elliptique \mathbb{C}/Λ avec pour fibre type une courbe elliptique \mathbb{C}/Λ' (en particulier, toutes les fibres sont lisses).

Il existe alors un revêtement fini \tilde{S} de la surface qui est un fibré principal holomorphe de fibre \mathbb{C}/Λ' . Considérons sur \tilde{S} le champ de vecteurs holomorphe (vertical) Y , associé à l'action infinitésimale de la courbe elliptique \mathbb{C}/Λ' .

Si Y est non isotrope pour la métrique q , son orthogonal (par rapport à la métrique) Y^\perp est un champ de droites non isotropes sur \tilde{S} . Sur une droite non isotrope de q , il existe deux vecteurs de norme 1. Ceci implique l'existence d'un deuxième champ de vecteurs sur un revêtement double de \tilde{S} . Ce revêtement double sera une surface complexe compacte parallélisable. Le théorème de Wang implique que \tilde{S} est un tore complexe.

Considérons le cas où le champ Y est isotrope. La deuxième direction isotrope de q définit un champ de droites sur S . Sur \tilde{S} il existe alors un deuxième champ de vecteurs holomorphe Y' déterminé par les relations $q(Y') = 0$ et $q(Y, Y') = 1$. Ceci implique que \tilde{S} est un tore complexe. \square

5. Théorie des invariants.

Abordons dans cette section quelques résultats de la théorie des invariants des groupes algébriques (en particulier, la théorie des modèles due à F. Bogomolov) qui nous seront utiles pour l'étude des métriques en dimension 3. Dans cette section, comme dans tout ce travail, les groupes algébriques sont linéaires et définis sur le corps de base \mathbb{C} .

Pour les résultats (classiques) admis sans preuve nous référons à [14].

Nous rappelons que dans ce cadre le fait fondamental suivant est vrai : pour un groupe algébrique qui agit algébriquement et linéairement sur un espace vectoriel (complexe) de dimension finie, les orbites sont ouvertes dans leurs adhérences. Autrement dit, si O est une orbite et si \overline{O} est son adhérence, alors $\overline{O} \setminus O$ est une union d'orbites de dimension strictement inférieure à la dimension de O . Mentionnons encore que l'adhérence d'une orbite pour la topologie de Zariski coïncide avec l'adhérence pour la topologie usuelle (voir [18], ch. 10).

5.1. Groupes algébriques unipotents.

Nous rappelons qu'un groupe algébrique est dit *unipotent* s'il est isomorphe (en tant que groupe algébrique) à un sous-groupe fermé d'un groupe algébrique U_n , où U_n désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.

Alors nous avons le résultat classique suivant :

PROPOSITION 5.1. — *Soit Z une variété affine munie d'une action algébrique du groupe unipotent H et telle que les seules fonctions régulières (polynomiales) invariantes soient les constantes. Alors Z est une orbite de H .*

Démonstration. — Supposons par l'absurde que Z contienne au moins deux orbites. Alors il existe dans Z un fermé propre invariant (par exemple une orbite de dimension minimale). Notons-le O et rappelons qu'il existe dans l'idéal des fonctions régulières s'annulant sur O un sous-espace vectoriel de dimension finie, stable par H (voir, par exemple, [14]).

Comme H est unipotent, il admet un vecteur propre dans cet espace vectoriel. Ce vecteur propre est une fonction régulière invariante qui est non constante (elle s'annule sur O). Ceci est absurde. \square

5.2. Modèles de Bogomolov.

Dans le riche travail [4], F. Bogomolov associe à chaque groupe algébrique réductif G une collection de variétés affines Z_x , chacune étant munie d'une action algébrique de G . Par la suite nous allons appeler ces variétés, *les modèles du groupe G* (car il s'agit de modèles pour des G -variétés affines). Ces modèles ont exactement deux orbites dont un point fixe et une orbite ouverte qui s'accumule sur le point fixe.

La construction des modèles associés à un groupe algébrique réductif est intimement liée à la théorie des ses représentations linéaires. Nous aurons besoin ici seulement des modèles du groupe $PSL(2, \mathbb{C})$. Les $PSL(2, \mathbb{C})$ -modèles sont indexés par les entiers naturels pairs et Z_{2n} est l'adhérence de l'orbite du polynôme X^{2n} , pour l'action linéaire du groupe $PSL(2, \mathbb{C})$ sur l'espace des polynômes homogènes de degré $2n$ en deux variables. Une variété modèle Z_{2n} est, par construction, une $PSL(2, \mathbb{C})$ -variété affine qui comporte deux orbites sous l'action de $PSL(2, \mathbb{C})$: l'orbite dense formée par les polynômes qui sont des puissances d'ordre $2n$ d'une forme linéaire et le point fixe 0.

L'auteur démontre que la collection des modèles a la propriété suivante.

THÉORÈME 5.2. — *Soit G un groupe algébrique réductif qui agit algébriquement sur la variété affine Z , avec un point fixe. Nous supposons que toute fonction régulière sur Z , invariante par G , est constante (i.e. tous les points de Z sont instables). Alors il existe un morphisme algébrique, surjectif, G -équivariant, de Z sur un modèle du groupe G .*

Pour une preuve de ce théorème nous renvoyons le lecteur aux références [4], [5].

6. Sections de $S^n(T^*M)$ et homogénéité locale.

Soit M une variété complexe compacte de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe g . Nous considérons ici le s -jet de la

métrique q et, dans le cas où la métrique q n'est pas localement homogène, nous construisons certaines sections holomorphes du fibré $S^n(T^*M)$. Cette construction sera fondamentale pour la suite.

Remarquons d'abord que si l'argument de la courbure sectionnelle permet de conclure à l'homogénéité locale de la métrique q dans le cas des surfaces, il est en revanche impuissant en dimension supérieure. En effet, de manière similaire à la géométrie pseudo-riemannienne, la courbure sectionnelle n'est pas définie sur les plans isotropes. Elle est une fonction méromorphe, en général non constante, sur la 2-grassmannienne de la variété.

Nous ne savons pas encore si, en dimension 3, toutes les métriques riemanniennes holomorphes sont localement homogènes. Pour analyser ce problème, nous allons appliquer un critère infinitésimal dû à I. Singer. Introduisons d'abord la définition suivante :

DÉFINITION 6.1. — *Une métrique riemannienne holomorphe q sur une variété complexe M est dite infinitésimalement localement homogène à l'ordre N si pour tout couple de points (m, m') de M il existe un biholomorphisme local f d'un voisinage ouvert de m sur un voisinage ouvert de m' qui envoie m sur m' et qui préserve le jet d'ordre N de la métrique au point m (i.e. $J^N(f^*q)(m) = J^Nq(m)$).*

Dans ce cas, le $(N+1)$ -jet de f en m est appelé $(N+1)$ -jet isométrique.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le critère de I. Singer [20] (voir aussi la jolie preuve de [7] dans le cadre analytique) :

THÉORÈME 6.2. — *Soit M une variété complexe compacte munie d'une métrique riemannienne holomorphe q . Alors il existe un entier s (qui ne dépend que de la variété et de la métrique) tel que tout $(s+1)$ -jet isométrique de q se prolonge en une isométrie locale.*

En particulier, q est infinitésimalement localement homogène à l'ordre s si et seulement si q est localement homogène.

Utilisons le critère que nous venons d'énoncer et considérons l'entier s qui correspond au couple (M, q) . Il s'agit à présent de considérer le s -jet de la métrique q .

Construction du s -jet de la métrique. — En la présence d'une métrique riemannienne holomorphe il convient de privilégier les systèmes

des coordonnées exponentielles (dans lesquels le 1-jet de la métrique est le 1-jet de la métrique plate). Désignons par $R^1(M)$ le fibré des repères de la variété M et rappelons que $R^1(M)$ est un $GL(3, \mathbb{C})$ -fibré principal, le fibré des 1-jets de cartes de la variété M . Rappelons aussi que tout élément de $R^1(M)$ est réalisé en tant que 1-jet de carte par une unique carte exponentielle. Le fibré $R^1(M)$ est donc également le fibré des cartes exponentielles.

Considérons maintenant le sous-fibré $R(M)$ des repères orthonormés directs (la proposition 3.2 montre que ceci est possible, quitte à prendre éventuellement un revêtement double de M). Le fibré $R(M)$ est un fibré principal de groupe structural $SO(3, \mathbb{C})$.

Associons à chaque élément de $R(M)$ le s -jet de la métrique q dans l'unique carte exponentielle qui le représente (le point base de l'élément de $R(M)$ fournit le point de M où le s -jet de q est considéré). Nous construisons ainsi une application holomorphe $SO(3, \mathbb{C})$ -équivariante du fibré $R(M)$ dans l'espace vectoriel J^s constitué par les s -jets en 0 de métriques riemanniennes holomorphes sur \mathbb{C}^3 dont le 1-jet est $dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2$. L'espace vectoriel J^s est muni de l'action algébrique linéaire de $SO(3, \mathbb{C})$ obtenue par changement de carte exponentielle. Notons cette application $q^{(s)}$:

$$q^{(s)} : R(M) \rightarrow J^s.$$

Le théorème 6.2 affirme que q est localement homogène si et seulement si l'image de l'application $q^{(s)}$ est une $SO(3, \mathbb{C})$ -orbite de J^s .

6.1. Étude de l'application $q^{(s)}$.

LEMME 6.3. — i) *Tout polynôme $SO(3, \mathbb{C})$ -invariant sur l'espace vectoriel J^s est constant sur l'image de l'application $q^{(s)}$.*

ii) *Si le groupe structural du fibré $R(M)$ se réduit à un groupe unipotent, alors q est localement homogène.*

iii) *Si M possède un champ de vecteurs holomorphe q -isotrope et non singulier, alors la métrique q est localement homogène.*

Démonstration. — i) Si P un polynôme $SO(3, \mathbb{C})$ -invariant sur J^s , alors $P \circ q^{(s)}$ est une fonction holomorphe sur $R(M)$, constante sur les fibres de $R(M)$, et qui descend donc sur M . Comme M est compacte, la fonction

holomorphe $P \circ q^{(s)}$ est constante. Ceci implique que P est constante sur l'image de $q^{(s)}$.

ii) Il existe un sous-fibré principal \mathcal{R} de $R(M)$ de groupe structural H , où H est un groupe unipotent. Considérons $\overline{q^{(s)}}$, la restriction de $q^{(s)}$ à \mathcal{R} (il s'agit d'une application H -équivariante) et Z l'adhérence de l'image de \mathcal{R} dans J^s . La variété Z est, par construction, une sous-variété affine de J^s invariante sous l'action de H .

Si P est une fonction régulière (polynomiale) H -invariante sur Z , alors $P \circ \overline{q^{(s)}}$ est une fonction holomorphe sur \mathcal{R} , constantes sur les fibres de \mathcal{R} , et qui descend donc sur M . Cette fonction est donc constante et, par conséquent, le polynôme P est constant sur l'image de $\overline{q^{(s)}}$ et donc sur Z . Comme ceci est vrai pour toutes les fonctions régulières P , la proposition 5.1 implique que Z est exactement une orbite de H et donc l'image de $\overline{q^{(s)}}$ est une orbite de H .

Le critère 6.2 s'applique et q est localement homogène.

iii) Un champ de vecteurs isotrope holomorphe sur M est une section holomorphe du fibré vectoriel associé au fibré principal $R(M)$ via l'action canonique de $SO(3, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^3 . Le groupe $SO(3, \mathbb{C})$ est isomorphe à $PSL(2, \mathbb{C})$ et l'action canonique de $SO(3, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^3 est conjuguée à l'action de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur l'espace vectoriel des polynômes homogènes en deux variables de degré 2. Dans la dernière représentation la forme quadratique non dégénérée préservée est le discriminant et tout vecteur isotrope non nul est dans l'orbite du polynôme X^2 . Le stabilisateur de cette orbite est le sous-groupe unipotent H des matrices de taille 2×2 triangulaires supérieures et avec les coefficients diagonaux égaux à 1. Notre champ de vecteurs isotrope et non singulier s'interprète donc également comme une section holomorphe du fibré de fibre $PSL(2, \mathbb{C})/H$ associé à $R(M)$ via l'action de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur $PSL(2, \mathbb{C})/H$.

L'existence d'un champ de vecteurs holomorphe non singulier et isotrope sur M implique donc une réduction du groupe structural du fibré $R(M)$ au groupe unipotent H . Le point ii) du lemme termine la preuve. \square

LEMME 6.4. — i) Si la métrique riemannienne holomorphe q n'est pas localement homogène, alors il existe un entier positif n et une section holomorphe non triviale du fibré vectoriel $S^n(T^*M)$ qui s'annule en au moins un point et qui prend ses valeurs dans le cône des puissances n -ièmes.

ii) Supposons, de plus, que la métrique riemannienne holomorphe q n'est pas localement homogène sur aucun ouvert dense de M . Il existe alors un entier positif n et deux sections holomorphes linéairement indépendantes du fibré $S^n(T^*M)$ qui s'annulent en au moins un point et qui prennent leurs valeurs dans le cône des puissances n -ièmes. Ces sections sont en tout point colinéaires.

Démonstration. — i) La métrique étant supposée non localement homogène, l'image de $R(M)$ par $q^{(s)}$ est constituée d'au moins deux $SO(3, \mathbb{C})$ -orbites dans J^s .

Considérons $\overline{\text{Im } q^{(s)}}$ l'adhérence de l'image de $q^{(s)}$ dans J^s et rappelons que toute fonction régulière sur $\overline{\text{Im } q^{(s)}}$ invariante par l'action de $SO(3, \mathbb{C})$ est constante. Pour appliquer le théorème 5.2 nous allons construire un point fixe par le procédé suivant.

Choisissons une orbite O , de dimension minimale parmi les orbites de $\text{Im } q^{(s)}$.

Désignons par \overline{O} l'adhérence de O dans J^s . Alors \overline{O} est un fermé $SO(3, \mathbb{C})$ -invariant de $\overline{\text{Im } q^{(s)}}$ tel que

$$\overline{O} \cap \text{Im } q^{(s)} \neq \emptyset,$$

et $\text{Im } q^{(s)}$ n'est pas inclus dans \overline{O} . La seule affirmation non triviale est la dernière. Elle est assurée par le choix de O (puisque $\overline{O} \setminus O$ est une union d'orbites de dimension strictement inférieure à la dimension de O).

Soit I l'idéal des fonctions régulières sur la variété affine $\overline{\text{Im } q^{(s)}}$ qui s'annulent sur le fermé \overline{O} . Il existe dans I un sous-espace vectoriel non trivial, de dimension finie, $SO(3, \mathbb{C})$ -invariant [14]. Considérons (F_1, \dots, F_l) , une base de cet espace vectoriel et construisons le morphisme régulier $SO(3, \mathbb{C})$ -invariant T , donné par

$$T : v \in \overline{\text{Im } q^{(s)}} \rightarrow (F_1(v), \dots, F_l(v)) \in \mathbb{C}^l.$$

L'application T s'annule sur \overline{O} . La composée $T \circ q^{(s)}$ fournit une application holomorphe, non triviale, $SO(3, \mathbb{C})$ -équivariante, du fibré $R(M)$ dans \mathbb{C}^l avec la propriété que $0 \in \text{Im}(T \circ q^{(s)})$.

Toutes les fonctions régulières $SO(3, \mathbb{C})$ sur la variété affine $\overline{\text{Im}(T \circ q^{(s)})}$ sont constantes et 0 est un point fixe. Par le théorème 5.2 appliqué à la $SO(3, \mathbb{C})$ -variété affine $\overline{\text{Im}(T \circ q^{(s)})}$, il existe un morphisme surjectif $SO(3, \mathbb{C})$ -équivariant p de $\overline{\text{Im}(T \circ q^{(s)})}$ dans un modèle Z_{2n} du groupe $SO(3, \mathbb{C}) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$.

L'application holomorphe équivariante $p \circ T \circ q^{(s)}$ de $R(M)$ dans Z_{2n} s'interprète comme une section holomorphe d'un certain fibré vectoriel au-dessus de M . Il s'agit du fibré vectoriel associé au fibré $R(M)$ via l'action du groupe structural $SO(3, \mathbb{C}) \simeq PSL(2, \mathbb{C})$ sur l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré $2n$ en deux variables. La section associée est à valeurs dans la variété affine $PSL(2, \mathbb{C})$ -invariante Z_{2n} .

Pour $n = 1$, l'interprétation géométrique de l'application $p \circ T \circ q^{(s)}$ est l'existence sur M d'un champ de vecteurs holomorphe non nul isotrope pour la métrique, et qui s'annule en au moins un point (rappelons que l'action canonique de $SO(3, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^3 est conjuguée à l'action de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur l'espace des polynômes en deux variables homogènes de degré 2. Dans cette identification, l'orbite des vecteurs isotropes non nuls correspond à l'orbite du polynôme X^2). La métrique holomorphe fournit sur M une 1-forme différentielle holomorphe, non nulle, duale au champ en question.

Pour un n supérieur à 1, l'application équivariante dans Z_{2n} est une section holomorphe non nulle, qui s'annule en au moins un point, du fibré vectoriel $S^n(TM)$, des puissances symétriques d'ordre n du fibré tangent. De plus l'image de cette section est incluse dans le cône formé par les puissances n -ièmes d'un vecteur. La dualité avec les formes différentielles, donnée par la métrique holomorphe, fournit une section α du fibré $S^n(T^*M)$ qui est en chaque point de M une puissance n -ième d'une forme linéaire sur $T_m M$.

ii) L'hypothèse faite sur q implique que pour un s suffisamment grand, aucune orbite contenue dans l'image de $q^{(s)}$ n'est dense dans l'image de $q^{(s)}$. Choisissons une orbite O contenue dans l'image de $q^{(s)}$ et construisons comme avant une section holomorphe non nulle X_1 du fibré vectoriel $S^n(TM)$ qui s'annule au moins en les points de M où le s -jet de la métrique q appartient à l'adhérence de O dans J^s . La section X_1 est en tout point une puissance n -ième d'un vecteur tangent.

Choisissons maintenant un point m de la variété où la section X_1 est non nulle et considérons l'orbite de J^s qui correspond au s -jet de la métrique q en m . Cette deuxième orbite nous fournit par le même procédé une section holomorphe X_2 d'un fibré $S^{n'}(TM)$ qui est différente de X_1 car nulle en m . Quitte à prendre des produits tensoriels de ces sections nous pouvons supposer que n' est égal à n .

Il reste à prouver que les sections X_1 et X_2 sont en tout point colinéaires. Pour cela, considérons la section holomorphe $q^{\otimes n}$ du fibré $(S^2(T^*M))^{\otimes n}$ obtenue à partir de la section q du fibré $S^2(T^*M)$. Alors

$q^{\otimes n}(X_1)$ et $q^{\otimes n}(X_2)$ sont deux fonctions holomorphes sur M qui s'annulent en au moins un point. Les deux fonctions sont alors nulles.

Considérons aussi la forme bilinéaire symétrique Q qui est la forme polaire de q . Alors $Q^{\otimes n}(X_1, X_2)$ est également une fonction holomorphe sur M qui s'annule en au moins un point. Elle est par conséquent nulle.

Fixons un point m de M où les sections X_1 et X_2 sont non nulles et considérons les vecteurs v_1 et v_2 de $T_m M$ tels que $X_1(m)$ est une puissance n -ième de v_1 et $X_2(m)$ est une puissance n -ième de v_2 . Nous avons alors les relations

$$q(v_1) = q(v_2) = Q(v_1, v_2) = 0.$$

L'espace vectoriel engendré par les vecteurs v_1 et v_2 est alors formé par des vecteurs isotropes pour q et, par conséquent, sa dimension est nécessairement égale à 1. Les sections X_1 et X_2 sont alors en tout point colinéaires : leur "quotient" est une fonction méromorphe non constante définie sur M .

Remarquons également que la dualité entre TM et T^*M donnée par la métrique q permet de construire des sections holomorphes non nulles α_1 et α_2 du fibré $S^n(T^*M)$, duales aux sections X_1 et respectivement X_2 . \square

6.2. Géométrie des sections de $S^n(T^*M)$ prenant valeurs dans le cône des puissances n -ièmes.

Rappelons qu'une variété complexe compacte de dimension n est dite *de Moishezon* si elle possède n fonctions méromorphes algébriquement indépendantes.

LEMME 6.5. — i) *Soit M une variété de Moishezon et α une section holomorphe de $S^n(T^*M)$ prenant valeurs dans le cône des puissances n -ièmes. Alors α est fermée.*

ii) *Si, de plus, M est supposée simplement connexe, alors la section α est nulle.*

Démonstration. — i) Nous appliquons le théorème de Moishezon [17] et éclatons successivement la variété M pour obtenir une variété projective $\pi_1 : \bar{M} \rightarrow M$.

La section α du fibré $S^n(T^*M)$ est en chaque point de M une puissance n -ième d'une forme linéaire sur $T_m M$. Nous disons que sur M il existe une 1-forme holomorphe définie à une racine de l'unité près. Sur \widetilde{M} il existe aussi une 1-forme différentielle holomorphe non nulle définie à une racine de l'unité près qui est simplement $\pi_1^* \alpha = \widetilde{\alpha}$. Notons $\widetilde{N} \subset \widetilde{M}$ le lieu d'annulation de $\widetilde{\alpha}$.

Il existe un recouvrement de $\widetilde{M} \setminus \widetilde{N}$ par des ouverts U_i tels que sur chaque U_i il existe une 1-forme différentielle holomorphe l_i avec la propriété $l_i^n = \widetilde{\alpha}$. Sur les intersections $U_{ij} = U_i \cap U_j$ nous avons les égalités $l_i = \epsilon_{ij} l_j$, où ϵ_{ij} est une racine n -ième de l'unité. Les fonctions constantes ϵ_{ij} définissent un fibré en droites L sur $\widetilde{M} \setminus \widetilde{N}$. Notre section $\widetilde{\alpha}$ fournit une section holomorphe de $T^*M \otimes L$, au-dessus de $\widetilde{M} \setminus \widetilde{N}$, autrement dit une 1-forme différentielle à valeurs dans L . Cette section tend vers 0 au voisinage de \widetilde{N} . Par abus de notation nous la désignerons aussi par $\widetilde{\alpha}$.

Comme le fibré L est plat, il est légitime de considérer la différentielle extérieure d'une section de $T^*M \otimes L$, le résultat étant une 2-forme holomorphe à valeurs dans L . Nous montrons que $\widetilde{\alpha}$ est fermée en tant que section de $T^*M \otimes L$ (i.e. sa différentielle extérieure est nulle).

Remarquons qu'il existe un revêtement $\pi_2 : \overline{M} \rightarrow \widetilde{M}$ (éventuellement singulier), ramifié au-dessus de \widetilde{N} , sur lequel $\widetilde{\alpha}$ se relève en une 1-forme différentielle $\overline{\alpha}$, holomorphe en dehors de $\overline{N} = \pi_2^{-1}(\widetilde{N})$ et qui tend vers 0 aux points du sous-ensemble analytique \overline{N} . Il est équivalent de dire que $\widetilde{\alpha}$ est fermée en tant que section de $T^*M \otimes L$ ou de dire que $\overline{\alpha}$ est fermée sur $\overline{M} \setminus \overline{N}$.

Pour obtenir la fermeture de $\overline{\alpha}$ il suffit maintenant de passer à un modèle lisse projectif de \overline{M} et d'appliquer le fait bien connu que sur les variétés kählériennes compactes les formes différentielles holomorphes sont fermées. Par conséquent, $\overline{\alpha}$ est aussi fermée.

ii) À présent, nous démontrons que $\widetilde{\alpha}$ est même exacte. Dans le cas d'une "vraie" forme différentielle (n égal à 1), la façon classique de procéder est de considérer toutes les primitives de la forme différentielle, le long des chemins qui ont une origine fixée. Quand ces primitives définissent de manière univoque une fonction sur la variété, il s'agit d'une primitive globale de la forme différentielle. Cette primitive est une fonction holomorphe définie sur une variété compacte et elle est, par conséquent, constante. La forme α est alors nulle.

Nous allons adapter ce procédé à notre situation. Fixons $m \in \widetilde{M}$ et

une détermination de $\tilde{\alpha}$ sur un petit voisinage de m dans \tilde{M} . Choisissons maintenant un point $n \in \tilde{M}$ et un chemin γ qui joigne m et n dans \tilde{M} . La détermination de $\tilde{\alpha}$ considérée se prolonge de manière unique le long de γ , en une 1-forme différentielle, que nous pouvons intégrer sur le chemin γ . Par abus de notation, nous allons désigner cette opération par $\int_\gamma \alpha$.

Montrons que le résultat ne dépend pas du chemin choisi. Si deux chemins γ et γ' , joignant les points m et n bordent un disque topologique dans $\tilde{M} \setminus \tilde{N}$, le théorème de monodromie affirme que le résultat du prolongement analytique au voisinage de n ne dépend pas du chemin choisi. Comme on dispose maintenant, sur ce disque topologique, d'une "vraie" forme différentielle fermée, d'après le théorème de Stokes, les résultats de l'intégration le long de γ et γ' sont les mêmes.

Le cas qui reste à régler est celui des deux chemins, γ et γ' , qui bordent un disque topologique qui intersecte \tilde{N} en un point. Mais dans ce cas, la quantité $\int_\gamma \tilde{\alpha} - \int_{\gamma'} \tilde{\alpha}$ s'exprime par une intégrale de $\tilde{\alpha}$ sur un lacet arbitrairement petit qui entoure le point singulier d'intersection avec \tilde{N} . Comme $\tilde{\alpha}$ s'annule sur \tilde{N} , nous avons nécessairement $\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma'} \alpha$.

Il est donc légitime de définir une fonction holomorphe sur \tilde{M} , par $f(n) = \int_\gamma \tilde{\alpha}$. Comme f est constante, $\tilde{\alpha}$ est nulle. □

LEMME 6.6. — *Soit M une variété complexe compacte de dimension 3, de dimension algébrique supérieure ou égale 2, et dont le fibré canonique est trivial. Considérons un entier positif n et deux sections holomorphes linéairement indépendantes α_1 et α_2 du fibré $S^n(T^*M)$ qui prennent leurs valeurs dans le cône des puissances n -ièmes et qui sont en tout point colinéaires.*

*Il existe alors une fibration holomorphe π de M sur une surface de Riemann C de genre $g \geq 2$ et deux sections holomorphes η_1 et η_2 de $(T^*C)^{\otimes n}$ telles que $\alpha_i = \pi^*(\eta_i)$.*

Il est probable que ce lemme reste vrai sans l'hypothèse sur la dimension algébrique de la variété. Nous n'aurons pas l'usage ici d'un énoncé plus général.

Démonstration. — Construisons la distribution singulière $\text{Ker } \alpha_1$ sur M en considérant en chaque point m de M l'ensemble des vecteurs sur lesquels la forme α_1 s'annule. Nous montrons d'abord que la distribution $\text{Ker } \alpha_1$ s'intègre en un feuilletage \mathcal{F} de codimension (complexe) 1.

Associons à la section α_1 , une section du fibré $K^{\otimes n}$ par le procédé suivant. La section α_1 admet une expression locale de la forme $f_1 \cdot \alpha^{\otimes n}$, où f_1 est une fonction définie sur un ouvert de M et α est une 1-forme holomorphe non singulière sur le même ouvert (cette décomposition n'est pas unique). Observons que l'expression $f_1 \cdot (\alpha \wedge d\alpha)^{\otimes n}$ ne dépend pas de la décomposition choisie. Ceci permet d'associer à α_1 une section du fibré (trivial) $K^{\otimes n}$. Cette section est nécessairement nulle car elle s'annule au moins aux points où α_1 s'annule et par conséquent $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Comme $\text{Ker } \alpha_1$ coïncide localement avec la distribution donnée par le noyau de la forme intégrable α , elle s'intègre en un feuilletage \mathcal{F} .

Remarquons que la forme α est même fermée. En effet, dans le cas où M est une variété de Moishezon ceci a été démontré dans la preuve du théorème précédent. Dans le cas où la dimension algébrique de M est 2, la preuve de [6] (proposition 1) s'applique.

Désignons par f la fonction méromorphe "quotient" entre les sections α_1 et α_2 , i.e. $\alpha_1 = f \cdot \alpha_2$. Remarquons que le feuilletage \mathcal{F} coïncide localement avec le noyau commun de deux 1-formes différentielles fermées dont le quotient est la fonction f . Ceci implique que la fonction f est constante sur les feuilles de \mathcal{F} .

Les arguments qui suivent sont une adaptation de la preuve du théorème principal de [6] à notre situation.

Notons $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ le corps des fonctions méromorphes sur M constantes sur les feuilles de \mathcal{F} . Il existe alors une modification $r : \tilde{M} \rightarrow M$ et une application holomorphe surjective avec fibres connexes $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow C$ sur une variété projective C avec la propriété que

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) \stackrel{r}{\simeq} \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{\pi}^* \mathcal{M}(C),$$

où $\tilde{\mathcal{F}}$ désigne l'image réciproque du feuilletage \mathcal{F} par l'application r et $\mathcal{M}(C)$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur C .

La fonction méromorphe (non constante) f étant constante sur les feuilles de \mathcal{F} , la variété projective C est de dimension 1 (courbe) et le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$ de \tilde{M} coïncide avec les fibres de la fibration $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow C$.

Le feuilletage \mathcal{F} est défini localement par une 1-forme holomorphe fermée et, par conséquent, par une application holomorphe à valeurs dans \mathbb{C} . L'application $\tilde{\pi}$ descend alors sur la variété M en une fibration π , dont les fibres coïncident avec le feuilletage \mathcal{F} .

Une application simple du théorème de Sard nous assure que la fibration holomorphe π n'a qu'un nombre fini de fibres singulières [21].

Comme les formes α_i s'annulent sur les fibres de π , elles sont projetables sur $C : \alpha_i = \pi^*(\eta_i)$, où les η_i sont deux sections holomorphes du fibré $(T^*C)^{\otimes n}$ (voir [10] pour s'assurer que ceci est vrai malgré la présence des fibres singulières). \square

6.3. Champs de Killing.

Nous rassemblons ici quelques propriétés des champs de Killing pour les métriques riemanniennes holomorphes.

Nous prouvons d'abord un résultat local sur les champs de Killing en dimension 3 :

LEMME 6.7. — *Soit U un ouvert connexe de \mathbb{C}^3 muni d'une métrique riemannienne holomorphe q . Alors tout champ de Killing q -isotrope non nul de la métrique riemannienne holomorphe est non singulier.*

COROLLAIRE 6.8. — *Soit M une variété complexe compacte de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe q . Alors tout champ de Killing global non nul de la métrique riemannienne holomorphe est non singulier.*

Démonstration. — Supposons que le champ de Killing X s'annule en $m \in U$ et désignons par f^t son flot local. Le flot f^t fixe le point m et sa différentielle df^t agit par isométrie sur $(T_m\mathbb{C}^3, q_m)$.

Choisissons des coordonnées exponentielles au point m et désignons par A la partie linéaire du champ dans ces coordonnées. L'action de la différentielle du flot sur l'espace tangent en m s'exprime alors par l'action isométrique de $\exp(tA)$ sur $(\mathbb{C}^3, dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2)$. La matrice A appartient donc à l'algèbre de Lie du groupe orthogonal, autrement dit A est une matrice anti-symétrique de taille 3×3 .

Le champ X est isotrope pour la métrique en tout point de U . En coordonnées exponentielles le 1-jet de la métrique q est simplement $dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2$. L'annulation du premier jet en m de la fonction $q(X)$ implique que le champ linéaire A est isotrope pour la métrique $dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2$, c'est-à-dire $A^t \cdot A = 0$.

En résumé A est une matrice de taille 3×3 , anti-symétrique et nilpotente d'ordre 2. Comme le rang d'une matrice anti-symétrique est

toujours pair, l'unique matrice qui vérifie ces propriétés est la matrice nulle. Comme toutes les isométries f^t ont un premier jet trivial en m , elles agissent sur U par l'identité. Le champ X est donc identiquement nul. \square

Pour obtenir la preuve du corollaire à partir du lemme, il suffit d'observer que tout champ de Killing global sur M qui s'annule en au moins un point est nécessairement q -isotrope. En effet, la fonction holomorphe $q_m(X(m))$ est constante par le principe du maximum et, par conséquent, nulle (car elle s'annule aux points où le champ X s'annule).

Remarque. — Le lemme précédent n'est pas vrai en dimension supérieure. Nous donnons ici un exemple de champ de Killing non trivial singulier et isotrope en dimension 4.

Considérons \mathbb{C}^4 muni de la métrique riemannienne holomorphe $dz_1 \cdot dz_4 + dz_2 \cdot dz_3$. Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ agit diagonalement sur $\mathbb{C}^4 = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$, l'action sur chaque facteur étant l'action canonique de $SL(2, \mathbb{C})$ sur \mathbb{C}^2 . Cette action préserve la métrique riemannienne holomorphe. Pour le voir, considérons la forme polaire ϕ de notre métrique et observons que pour tous les vecteurs $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ et $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ nous avons la relation :

$$2\phi(u, v) = \det_{\mathbb{C}^2}(u_1, v_2) - \det_{\mathbb{C}^2}(u_2, v_1),$$

où $\det_{\mathbb{C}^2}$ désigne la forme volume holomorphe canonique de \mathbb{C}^2 (i.e. le déterminant).

Le champ de Killing linéaire associé à l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de l'algèbre de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$ est en tout point isotrope et singulier en 0.

Par souci de complétude, nous finissons cette section avec la preuve d'un théorème classique de prolongement pour les champs de Killing qui nous sera utile par la suite. Ce type de résultat a été prouvé pour la première fois dans [19] pour des métriques riemanniennes analytiques réelles :

LEMME 6.9. — *Soit M une variété complexe compacte simplement connexe munie d'une métrique riemannienne holomorphe. Alors tout champ de Killing local se prolonge en un champ de Killing global.*

Démonstration. — Nous montrons que chaque point $m \in M$ admet un voisinage ouvert U_m avec la propriété que tout champ de Killing holomorphe, défini sur un ouvert $U \subset U_m$, se prolonge en un champ de Killing sur U_m .

Avec ceci, la propriété de prolongement sur toute la variété est une conséquence immédiate du principe de prolongement analytique le long d'un chemin et du théorème de monodromie.

Fixons un point $m \in M$ et construisons l'ouvert U_m . Nous commençons par considérer un voisinage ouvert U_1 , de m dans M , avec la propriété que l'application exponentielle au point m est un biholomorphisme d'un voisinage ouvert W_1 de 0 dans $T_m M$ sur le voisinage U_1 . En restreignant le voisinage U_1 à un voisinage U_2 nous pouvons supposer que quel que soit m' dans U_2 l'application exponentielle $\exp_{m'}$, au point m' , réalise un biholomorphisme entre un voisinage ouvert $W_{m'}$ de 0 dans $T_{m'} M$ et U_2 .

Un voisinage connexe ouvert U_m de m qui vérifie $\overline{U_m} \subset U_2$ satisfait la propriété requise. En effet, supposons qu'un champ de Killing X soit défini sur l'ouvert $U \subset U_m$. Le champ de Killing X est engendré par un flot local g^t , $|t| \leq \epsilon$, d'isométries locales de manière que $g^t(U_m) \subset U_2$. Bien sûr le champ se récupère à partir du flot par la formule $X(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} g^t(p)$, $\forall p \in U$. Pour des temps t assez petits, nous allons prolonger l'isométrie g^t à l'ouvert U_m . Nous utilisons encore une fois le fait qu'une isométrie est complètement déterminée par son 1-jet en un point. Choisissons donc $p \in U$, $p' \in U_m$ et t suffisamment petit pour que $dg^t(p)(W_p) \subset W_{g^t(p)}$. Il existe un unique vecteur $w \in W_p$ avec la propriété que $\exp_p(w) = p'$. Nous définissons le prolongement $\overline{g^t}$ de g^t en p' par

$$\overline{g^t}(p') = \exp_{g^t(p)}(dg^t(p) \cdot w).$$

L'application ainsi définie est un biholomorphisme local qui prolonge bien g^t , car g^t envoie les géodésiques sur les géodésiques.

Comme $(\overline{g^t})^* q = q$ sur l'ouvert U , ceci reste vrai par analyticité sur U_m . Donc les applications $\overline{g^t}$ sont des isométries.

Le même argument montre que $\overline{g^{t_1+t_2}} = \overline{g^{t_1} \circ g^{t_2}}$, là où cette expression à un sens.

Le champ de Killing \overline{X} qui prolonge X est $\overline{X}(p') = \frac{d}{dt}|_{t=0} \overline{g^t}(p')$. \square

7. Cas de la dimension 3.

Dans cette dernière section nous démontrons les deux principaux résultats de l'article.

Le théorème suivant règle le cas simplement connexe :

THÉORÈME 1. — *Il n'existe pas de métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe compacte simplement connexe de dimension 3.*

Démonstration. — Considérons par l'absurde une variété M complexe compacte simplement connexe de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe q . La contradiction s'obtient en plusieurs étapes :

Première étape : La métrique riemannienne holomorphe q n'est pas localement homogène.

Supposons donc dans un premier temps que la métrique q est localement homogène, autrement dit le pseudo-groupe des isométries locales agit transitivement sur M .

Si deux points de la même orbite du pseudo-groupe Is^{loc} sont suffisamment proches dans M , alors il existe une isométrie locale *proche de l'identité* qui les envoient l'un sur l'autre (voir [3]). De plus, une isométrie locale proche de l'identité se trouve nécessairement sur le flot d'un champ de vecteurs localement défini – champ de Killing local (voir, par exemple, [1], chap. 7, 7.5).

Le lemme de prolongement 6.9 termine la preuve de ce cas. En effet, le groupe des isométries globales agit alors transitivement sur M et, par conséquent, M est un espace homogène compact. Or, pour les espaces homogènes la proposition 3.3 règle la question : *il n'y a pas d'exemple simplement connexe.*

Deuxième étape : La métrique riemannienne holomorphe q n'est pas totalement hétérogène.

Supposons à présent le contraire, c'est-à-dire que le pseudo-groupe des isométries locales de q est discret. Dans ce cas la métrique riemannienne holomorphe est dite *totalement hétérogène*.

Un résultat que nous avons démontré dans [8], [9] affirme alors que la variété M qui porte cette métrique riemannienne holomorphe est nécessairement une variété de Moishezon.

Comme la métrique n'est pas localement homogène, le lemme 6.4 i) donne l'existence d'une section holomorphe non triviale d'un fibré $S^n(T^*M)$ (n entier positif) prenant valeurs dans le cône des puissances n -ièmes. Or,

la variété M est de Moishezon et simplement connexe : ceci contredit le lemme 6.5 ii).

Il reste à régler le cas où la métrique q n'est pas totalement hétérogène et admet donc un champ de Killing local. Le lemme 6.9 montre que ce champ de Killing se prolonge en un champ de Killing X globalement défini sur M .

Troisième étape : Étude du champ de Killing X .

Par le corollaire 6.8 nous avons que le champ de vecteurs X est non singulier. Si X est isotrope, d'après le lemme 6.3 iii), la métrique est localement homogène. Ce cas de figure a été déjà exclus.

Considérons à présent le cas où le champ de Killing X est non isotrope et désignons par \mathcal{F} le feuilletage dont les feuilles sont les orbites de X . Notons Q le champ de formes bilinéaires symétriques associé à la métrique q . Le champ de formes quadratiques \tilde{q} , défini par $\tilde{q} = q - \frac{Q(X, \cdot)^2}{Q(X, X)}$, est invariant par le flot de X et admet un noyau non trivial engendré par X (le rang de \tilde{q} est constant égal à 2).

Choisissons un point m dans M et un petit disque $\Sigma(m)$ transverse au feuilletage \mathcal{F} . Le champ \tilde{q} fournit en restriction à $\Sigma(m)$ la métrique holomorphe $\tilde{q}|_{\Sigma(m)}$. Si $\Sigma'(m)$ est une deuxième transversale au point m , il n'est pas difficile de s'assurer que l'holonomie de \mathcal{F} établit une isométrie entre $(\Sigma(m), \tilde{q}|_{\Sigma(m)})$ et $(\Sigma'(m), \tilde{q}|_{\Sigma'(m)})$. Ceci montre que la courbure sectionnelle de $\tilde{q}|_{\Sigma(m)}$ au point m ne dépend pas du choix de la transversale. Cette courbure sectionnelle (transverse) est une fonction holomorphe définie sur M , donc constante. L'unicité de la forme locale d'une métrique à courbure sectionnelle constante ([23], 2.4.11) confère au feuilletage \mathcal{F} une (G, X) -structure transverse, où l'espace modèle X est soit $(\mathbb{C}^2, dz_1 \cdot dz_2)$, soit $(P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}) \setminus \text{Diag}, \frac{dz_1 \cdot dz_2}{(z_1 - z_2)^2})$, selon que la courbure est nulle ou non nulle et $G = \text{Isom}(X)$.

Comme M est simplement connexe l'application développante de la (G, X) -structure transverse est définie directement sur M : c'est une submersion holomorphe de M à valeurs dans un ouvert non vide de \mathbb{C}^2 ou bien de $P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}) \setminus \text{Diag}$.

Dans le cas de \mathbb{C}^2 l'existence d'une telle application développante est interdite par le principe du maximum.

Dans le cas de $P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}) \setminus \text{Diag}$, observons que le modèle est biholomorphe au complémentaire de la conique non dégénérée dans

$P^2(\mathbb{C})$. L'image de l'application développante est alors une sous-variété de dimension 2 de $P^2(\mathbb{C})$ qui n'intersecte pas la conique : absurde. \square

Abordons à présent le deuxième résultat principal de cet article :

THÉOREME 2. — *Soit M une variété complexe compacte de dimension 3 munie d'une métrique riemannienne holomorphe q . Alors, en dehors d'un sous-ensemble analytique compact propre de M , les orbites du pseudo-groupe des isométries locales de q sont des sous-variétés complexes de dimension au moins 2.*

Démonstration. — Supposons qu'il n'existe pas d'ouvert dense dans M sur lequel q est localement homogène (sinon la conclusion du théorème est automatiquement vérifiée). Le lemme 6.4 ii) construit alors, pour un certain entier positif n , deux sections holomorphes linéairement indépendantes de $S^n(T^*M)$ prenant leurs valeurs dans le cône des puissances n -ièmes et étant en tout point colinéaires.

Nous pouvons supposer que la dimension algébrique de M est supérieure ou égale à deux (sinon le résultat est une conséquence du théorème 1.1). Appliquons le lemme 6.6 et construisons une fibration π de M sur une surface de Riemann C .

Nous prouvons alors qu'il existe un ouvert dense U' de M , invariant par la fibration $\pi : M \rightarrow C$, tel que le pseudo-groupe des isométries locales de la métrique riemannienne holomorphe agit transitivement sur chaque fibre non singulière de π contenue dans U' .

L'ouvert U' est l'intersection entre l'ouvert U de M où la section α_1 ne s'annule pas et l'ouvert dense formé par les fibres non singulières de la fibration π .

Il importe de remarquer que la forme α_1 étant projetable, l'ouvert U' est invariant par la fibration π .

Remarquons (comme dans le lemme 6.3 iii)) qu'au-dessus de l'ouvert U' le fibré des repères orthonormés $R(M)$ admet un sous-fibré principal \mathcal{R} de groupe structural H' , où H' est le groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} \epsilon_n & a \\ 0 & \epsilon_n^{-1} \end{pmatrix}$ et ϵ_n est une racine n -ième de l'unité. Le groupe H' est un sous-groupe de $SO(3, \mathbb{C})$ qui est une extension d'un groupe unipotent par un groupe fini.

Considérons une fibre non singulière S de π contenue dans U' et restreignons le fibré \mathcal{R} à S . Ceci donne un H' -fibré principal au-dessus de

S , noté $\mathcal{R}|_S$. L'application $q^{(s)} : R(M) \rightarrow J^s$ se restreint à $\mathcal{R}|_S$ et fournit une application holomorphe H' -équivariante :

$$q^{(s)}|_S : \mathcal{R}|_S \rightarrow J^s.$$

Si P est une application polynomiale H' -équivariante définie sur l'adhérence de l'image de $q^{(s)}|_S$ à valeurs dans \mathbb{C} , alors $P \circ q^{(s)}|_S$ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}|_S$ qui descend sur S . L'application $P \circ q^{(s)}|_S$ est donc constante (car S est compacte) et, comme la conclusion de la proposition 5.1 s'applique au groupe H' , l'image de $q^{(s)}|_S$ est une H' -orbite de J^s . Le critère 6.2 implique que le pseudo-groupe des isométries locales de q agit transitivement sur S .

Comme la métrique est supposée non localement homogène, il existe un ouvert dense ([7], [11]) de M sur lequel les orbites du pseudo-groupe des isométries locales sont de dimension 2 et coïncident avec les fibres de π . \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. ALEKSEEVSKIJ, A. VINOGRADOV, V. Lychagin, Basic ideas and concepts of differential geometry, Geometry I, E.M.S. 28, Springer-Verlag, (1991).
- [2] W. BARTH, C. PETERS, A. VAN de VEN, Compact complex surfaces, Springer-Verlag, 1984.
- [3] Y. BENOIST, Orbites des structures rigides (d'après M. Gromov), Feuilletages et systèmes intégrables (Montpellier, 1995), Birkhäuser, Boston, 1997, 1–17.
- [4] F. BOGOMOLOV, Holomorphic tensors and vector bundles on projective varieties, Math. USSR Izvestija, 13(3) (1979), 499–555.
- [5] M. BRION, Sur l'image de l'application moment, Séminaire d'algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin (Paris, 1986), (1987), 177–192.
- [6] M. BRUNELLA, On holomorphic forms on compact complex threefolds, Comment. Math. Helv., 74(4) (1999), 642–656.
- [7] G. D'AMBRA, M. GROMOV, Lectures on transformation groups: geometry and dynamics, Surveys in Differential Geometry (Cambridge), (1990), 19–111.
- [8] S. DUMITRESCU, Structures géométriques holomorphes, Thèse E.N.S.-Lyon, 1999.
- [9] S. DUMITRESCU, Structures géométriques holomorphes sur les variétés complexes compactes, à paraître aux Annales Scientifiques de l'E.N.S.
- [10] I. ENOKI, Generalizations of Albanese mappings for non-Kähler manifolds, Geometry and analysis on complex manifolds (eds. Mabuchi et al.), World Scientific, Singapore, (1994), 51–62.
- [11] M. GROMOV, Rigid transformation groups, Géométrie Différentielle, Travaux en cours, Hermann, Paris, 33 (1988), 65–141.

- [12] E. GHYS, Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de $SL(2, \mathbb{C})$, *J. reine angew. Math.*, 468 (1995), 113–138.
- [13] P. GRIFFITHS, J. HARRIS, Principles of algebraic geometry, Wiley-interscience publication, 1978.
- [14] J. HUMPHREYS, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Mathematics 21, Springer-Verlag, 1975.
- [15] M. INOUE, S. KOBAYASHI, T. OCHIAI, Holomorphic affine connections on compact complex surfaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.*, 27(2) (1980), 247–264.
- [16] S. KOBAYASHI, The first Chern class and holomorphic symmetric tensor fields, *J. Math. Soc. Japan*, 32(2) (1980), 325–329.
- [17] B. MOISHEZON, On n dimensional compact varieties with n independent meromorphic functions, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 63 (1967), 51–77.
- [18] D. MUMFORD, Introduction to algebraic geometry, Harvard University, 1966.
- [19] K. NOMIZU, On local and global existence of Killing vector fields, *Ann. of Math.* (2), 72 (1960), 105–120.
- [20] I. SINGER, Infinitesimally homogeneous spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 685–697.
- [21] K. UENO, Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Springer Lect. Notes, 439, 1975.
- [22] C. WALL, Geometric structures on compact complex analytic surfaces, *Topology*, 25(2) (1986), 119–153.
- [23] J. WOLF, Spaces of constant curvature, McGraw-Hill Series in Higher Math., 1967.

Manuscrit reçu le 9 octobre 2000,
révisé le 20 mars 2001,
accepté le 7 juin 2001.

Sorin DUMITRESCU,
Université Paris-Sud
Laboratoire de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex (France).
Sorin.Dumitrescu@math.u-psud.fr