ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Tristan TORRELLI

Polynômes de Bernstein associés à une fonction sur une intersection complète à singularité isolée

Tome 52, nº 1 (2002), p. 221-244.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_1_221_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 1 (2002), 221–244

POLYNÔMES DE BERNSTEIN ASSOCIÉS À UNE FONCTION SUR UNE INTERSECTION COMPLÈTE À SINGULARITÉ ISOLÉE

par Tristan TORRELLI

1. Introduction – Énoncés.

Étant donné un germe de fonction analytique $f \in \mathcal{O} = \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ et un élément $m \in \mathcal{M}$ d'un $\mathcal{D}$-module holonome ($\mathcal{D}$ désignant l'anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathcal{O}$), M. Kashiwara a établi l'existence d'équations fonctionnelles

$$b(s)mf^s = P \cdot mf^{s+1} \tag{1}$$

où $b(s) \in \mathbb{C}[s]$ est un polynôme non nul et $P \in \mathcal{D}[s] = \mathcal{D} \otimes \mathbb{C}[s]$ un opérateur différentiel dépendant polynomialement de s ([11]). On appelle *polynôme de Bernstein* de f associé à m le générateur unitaire de l'idéal des polynômes $b(s)$ qui satisfont à cette identité. On le note $b(mf^s, s)$. Précisons que l'identité (1) a lieu dans $\mathcal{M}[1/f, s]f^s = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}[1/f, s]f^s$, le $\mathcal{O}[1/f, s]$-module libre $\mathcal{O}[1/f, s]f^s$ étant muni de sa structure naturelle de $\mathcal{D}[s]$-module à gauche.

Lorsque $\mathcal{M}$ est holonome régulier, ces polynômes sont à la base de la construction algébrique des cycles évanescents par le biais de la V-filtration de Malgrange-Kashiwara ([12], [15]). En particulier, les racines des polynômes $b(mf^s, s)$, $m \in \mathcal{M}$, déterminent les valeurs propres de

---

Mots-clés : $\mathcal{D}$-modules – Polynômes de Bernstein – Singularités semi-quasi-homogènes – V-filtration.
Classification math. : 32C38 – 32S40 – 14B05.

la monodromie du faisceau pervers des cycles proches du complexe des solutions de $\mathcal{M}$. Toutefois, à l'exception du cas originel $\mathcal{M} = \mathcal{O}$ et $m = 1$, la question du calcul de ces polynômes a été peu étudiée - essentiellement par T. Oaku, en utilisant des techniques de bases de Gröbner dans des anneaux d'opérateurs différentiels ([21]). Dans cet article, nous généralisons pour des germes de modules holonomes réguliers l'approche suivie par B. Malgrange lors de son étude du polynôme de Bernstein d'un germe de fonction à singularité isolée ([14]). Notre objectif est le calcul de polynômes de Bernstein de sections de $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers naturellement associés à un morphisme analytique g définissant une intersection complète à singularité isolée.

Dans ce qui suit, $\mathcal{M}$ désigne un $\mathcal{D}$-module à gauche holonome régulier, sans f-torsion, et ne contenant aucun sous-module localisé par rapport aux puissances de f.

Donnons deux propriétés relatives aux éléments $mf^s \in \mathcal{M}[1/f, s]f^s$. Si $m \in \mathcal{M}$ est non nul, soit $r(m) \in \mathbb{N}$ le plus grand entier r tel que $m \in f^r\mathcal{M}$. Il est alors facile de vérifier que $b(mf^s, s)$ est divisible par $(s + r(m) + 1)$. Nous noterons $\tilde{b}(mf^s, s) \in \mathbb{C}[s]$, le quotient de la division euclidienne de $b(mf^s, s)$ par $(s + r(m) + 1)$. D'autre part, il existe de *"bons opérateurs en s"* annulant mf^s, c'est-à-dire de la forme $s^N + P_1 s^{N-1} + \cdots + P_N \in \mathcal{D}[s]$ avec $P_i \in \mathcal{D}$ de degré au plus i ; cela résulte de la régularité de $\mathcal{M}$ ([6], p. 351 ou [24], le cas $\mathcal{M} = \mathcal{O}$, $m = 1$, étant traité dans [10]).

L'étude du polynôme $b(mf^s, s)$ se ramène donc à celle de l'action de s sur le $\mathcal{D}$-module holonome

$$(s + r(m) + 1)\frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s]mf^{s+1}}.$$

Introduisons alors des conditions sur $m \in \mathcal{M} - f\mathcal{M}$:

(i) L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de m, noté $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} m$, admet un système de générateurs $(\diamondsuit_1, \ldots, \diamondsuit_\omega)$ constitué d'opérateurs de degré au plus un.

(ii) L'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ engendré par les éléments de $\mathcal{O}$-torsion de m et les $[\diamondsuit_i, f] = \diamondsuit_i f - f\diamondsuit_i \in \mathcal{O}$ est de colongueur finie (*i.e.* la dimension sur $\mathbb{C}$ de $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ est finie).

(iii) L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de mf^s est contenu dans $\mathcal{D}\mathcal{J}$.

Lorsque ces conditions sont vérifiées, en adaptant une construction de B. Malgrange ([14]), nous réalisons $\tilde{b}(mf^s, s)$ comme le polynôme minimal d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie. Plus précisément, il y a un isomorphisme de $\mathcal{D}[s]$-modules

$$\mathcal{N} = (s+1)\frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s]mf^{s+1}} \cong \frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s}. \tag{2}$$

En effet, les identités : $(s+1)[\diamondsuit_i, f]mf^s = \diamondsuit_i \cdot mf^{s+1}$ permettent de définir un morphisme $\mathcal{D}$-linéaire surjectif du module de droite dans $\mathcal{N}$, dont l'injectivité résulte de la condition (i). En particulier, $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}$-module de type fini supporté par l'origine. À partir de cette identification, nous décrivons explicitement son n-ème groupe de cohomologie de de Rham, $H^n_{DR}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}/\sum_i(\partial/\partial x_i)\mathcal{N}$, comme un espace vectoriel quotient $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ de dimension la colongueur de l'idéal $\mathcal{J}$. Il vient alors :

THÉORÈME 1.1. — *Le polynôme $\tilde{b}(mf^s, s)$ est le polynôme minimal de l'action induite par s sur $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$.*

La réalisation des objets précédents se fait à partir d'une décomposition de $\sum_{i\geqslant 0}\mathcal{D}s(s-1)\cdots(s-i+1)mf^{s-i} \subset \mathcal{M}[1/f,s]f^s$ basée sur la division par l'idéal $\mathcal{J}$. Elle généralise la partie A de [4] où est traité le cas $\mathcal{M} = \mathcal{O}$, $m = 1$ et f à singularité isolée (l'idéal $\mathcal{J}$ est alors l'idéal jacobien de f).

Considérons maintenant un germe de morphisme analytique complexe $g = (g_1, \ldots, g_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, tel que (f,g) définisse à l'origine un germe d'intersection complète de codimension $p+1$ (en particulier $p < n$). Attachons à g le groupe de cohomologie locale algébrique de $\mathcal{O}$ à support dans $X = g^{-1}(0)$:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{O}[1/g_1\cdots g_p]}{\sum_{i=1}^p \mathcal{O}[1/g_1\cdots \check{g}_i \cdots g_p]}.$$

On notera $\delta \in \mathcal{R}$, la classe de $1/g_1\cdots g_p$. Lorsque $p = 1$, pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}^*$, δ_ℓ désignera la classe de $1/g^\ell$ dans $\mathcal{R} = \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$.

Rappelons que $\mathcal{R}$ est un $\mathcal{D}$-module holonome régulier dont le complexe des solutions holomorphes est le faisceau pervers $\mathbb{C}_X$ ([9], [11], [18]). Aussi les racines des polynômes de Bernstein de f associée aux éléments de $\mathcal{R}$ sont reliées aux valeurs propres de la monodromie associée à $f|_X : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ (pour des exemples, voir [25], [26]).

Dans le cas particulier où $p = 1$, nous nous intéresserons aussi aux $\mathcal{D}$-modules holonomes réguliers $\mathcal{O}[1/g]g^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Lorsque λ est un entier relatif, $\mathcal{O}[1/g]g^\lambda$ s'identifie bien sûr à $\mathcal{O}[1/g]$.

Dorénavant, nous supposerons que les morphismes g et (f, g) définissent des germes d'intersections complètes à singularité isolée (ICSI) à l'origine.

Rappelons qu'un polynôme non nul $h \in \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ est *quasi-homogène* de poids $d \in \mathbb{Q}^+$ pour un système de poids $\alpha \in (\mathbb{Q}^{*+})^n$ si c'est une combinaison $\mathbb{C}$-linéaire finie de monômes $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i \gamma_i = d$ (un germe $h \in \mathcal{O}$ est dit quasi-homogène s'il existe un système de coordonnées dans lequel c'est un polynôme quasi-homogène). Lorsque $p = 1$, l'étude de la condition (i) pour δ_ℓ, $\ell \in \mathbb{N}^*$, (ou pour $g^\lambda \in \mathcal{O}[1/g]g^\lambda$) nous a mené à une nouvelle caractérisation de la quasi-homogénéité d'un germe de fonction à singularité isolée.

THÉORÈME 1.2. — *Soit $g \in \mathcal{O}$, un germe de fonction holomorphe définissant une singularité isolée à l'origine. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, un entier naturel non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *L'idéal* $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} \delta_\ell$ *est engendré par des opérateurs de degré au plus un.*

2. *Le germe g est quasi-homogène, et la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de g est supérieure ou égale à $-\ell$.*

3. *Le germe g est quasi-homogène, et l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de δ_ℓ est*
$$\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} \delta_\ell = \mathcal{D}g^\ell + \mathcal{D}\Theta(-\ell) + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathcal{D}\Big(g'_{x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} - g'_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big)$$
où $\Theta(s) \in \mathcal{D}[s]$ est un bon opérateur en s de degré un qui annule g^s.

En particulier, le germe à singularité isolée g est quasi-homogène si et seulement si il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ pour lequel l'idéal $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} \delta_\ell$ *est engendré par des opérateurs de degré au plus un.*

Ce résultat nous oblige donc à supposer que le morphisme g est quasi-homogène, c'est-à-dire dont les composantes g_i sont des polynômes quasi-homogènes pour un même système de poids; ce qui est contraignant. Donnons maintenant des exemples de situations dans lesquelles les conditions (i)–(iii) sont vérifiées :

PROPOSITION 1.3. — *Les conditions* (i)–(iii) *sont satisfaites pour $m \in \mathcal{M}$ et $f \in \mathcal{O}$ dans les cas suivants :*

(a) *$f, g \in \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$ définissent des courbes réduites sans composante commune, g est quasi-homogène, et $m = g^\lambda \in \mathcal{O}[1/g]g^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$ étant tel que pour toute racine $q \in \mathbb{Q}$ du polynôme de Bernstein de g, la différence $\lambda - q$ n'est pas un entier strictement positif.*

(b) *f est lisse, $g \in \mathcal{O}$ est un germe quasi-homogène à singularité isolée dont la restriction à $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ est aussi à singularité isolée, et $m = \delta_\ell \in \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$ (resp. $m = g^\lambda \in \mathcal{O}[1/g]g^\lambda$) pour un entier $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de g soit supérieure ou égale à $-\ell$ (resp. pour un complexe λ vérifiant la condition donnée au cas* (a)*).*

(c) *$g = (g_1, \ldots, g_p) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ est quasi-homogène, les applications (f, g) et $(g_1, \ldots, g_i)$, $1 \leqslant i \leqslant p$, définissent des germes d'intersections complètes à singularité isolée; l'entier -1 est la plus petite racine entière du polynôme de Bernstein de g_1^s, et si $p \geqslant 2$, de celui de $(\dot{1}/g_1 \cdots g_i) g_{i+1}^s$ pour tout $i = 1, \ldots, p-1$, où $\dot{1}/g_1 \cdots g_i \in \mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_i] / \sum_{j=1}^{i} \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \check{g}_j \cdots g_i]$, et $m = \delta \in \mathcal{R}$.*

Dans chaque cas, le résultat repose sur la détermination des annulateurs dans $\mathcal{D}$ de m et de mf^s. Précisons que les conditions portant sur les racines entières de polynôme(s) de Bernstein – dans un cadre quasi-homogène à singularité isolée – se vérifient à partir de formules explicites ([20], [25]).

Dans une dernière partie, nous nous intéressons au calcul effectif de $b(\delta f^s, s)$ dans la situation (c) – les autres cas lui sont analogues. Soit alors $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Q}^{*+})^n$ un système de poids de quasi-homogénéité du morphisme g. Associons à α la fonction de poids $\rho : \mathcal{O} \to \mathbb{Q}^+ \cup \{+\infty\}$ définie par $\rho(0) = +\infty$ et pour $u = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} u_\gamma x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} \in \mathcal{O}$ non nul, $\rho(u) = \min\{\alpha \cdot \gamma = \alpha_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_n\gamma_n \mid u_\gamma \neq 0\}$; dans ce dernier cas, le polynôme $\sum_{\alpha \cdot \gamma = \rho(u)} u_\gamma x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$ quasi-homogène de poids $\rho(u)$ est la *partie initiale* de u pour le système α, noté $\mathrm{in}(u)$. Rappelons enfin que *l'idéal initial* d'un idéal $I \subset \mathcal{O}$ non nul est l'idéal $\mathrm{in}(I) \subset \mathbb{C}[x]$ engendré par les parties initiales de ses éléments.

Lorsque en plus des conditions (c), l'application quasi-homogène $(\mathrm{in}(f), g)$ définit un germe d'ICSI, nous généralisons au cas de la section δf^s l'algorithme de calcul du polynôme de Bernstein d'un germe semi-quasi-homogène développé par J. Briançon, M. Granger, Ph. Maisonobe et M. Miniconi ([4]). Le point de départ est que la filtration par le poids ρ induite sur $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ est compatible avec l'action de s; le polynôme de Bernstein s'exprime alors à partir des sauts de la filtration induite sur $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$:

$$b(\delta f^s, s) = (s+1) \prod_{\mathcal{Z}_q \subsetneq \mathcal{Z}'_q} (s - \varrho + |\alpha| + q) \tag{3}$$

où $|\alpha| \in \mathbb{Q}^{*+}$ désigne la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\varrho \in \mathbb{Q}^{*+}$ est le poids de $g_1 \cdots g_p$ lorsque α est choisi tel que f soit de poids un. Précisons que ces sauts sont des décalés par des entiers d'éléments de $\Pi \subset \mathbb{Q}^{+}$, l'ensemble des poids des vecteurs d'une base quasi-homogène de $\mathbb{C}[x]/\operatorname{in}(\mathcal{J})$. Nous utilisons notamment une généralisation au cas semi-quasi-homogène de la formule de M. Greuel du nombre de Milnor pour un morphisme quasi-homogène (Théorème 4.1). Signalons enfin que dans le cas particulier où f est quasi-homogène, l'identité (3) redonne une formule obtenue dans [25].

En application, nous interprétons cette identité en termes de monodromie et de V-filtration de Malgrange - Kashiwara :

PROPOSITION 1.4. — *Soient g et (f,g) deux morphismes analytiques vérifiant les hypothèses et les conditions* (c) *de la proposition 1.3. Soit $\alpha \in (\mathbb{Q}^{*+})^n$ le système de poids de quasi-homogénéité de g pour lequel f est de poids un. Supposons que $(\operatorname{in}(f), g)$ définisse une intersection complète à singularité isolée à l'origine. Soit $i : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ l'immersion par le graphe de f.*

Avec les notations précédentes, pour tout $\beta \in \mathbb{C}$ non entier, $\operatorname{gr}_\beta^V i_+\mathcal{R}$ est non nul si et seulement si $\varrho - |\alpha| - \beta$ appartient à l'ensemble $\Pi + \mathbb{Z}$. En particulier, l'ensemble des valeurs propres de la monodromie associée à $f|_X : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ est $\{\exp(-2i\pi(q + |\alpha| - \varrho)) \mid q \in \Pi\} \cup \{1\}$.

La détermination effective des espaces $\mathcal{Z}_q$ se fait exactement comme dans [4]. Comme application, nous avons obtenu dans [24] des formules explicites de polynômes de Bernstein génériques de déformations semi-quasi-homogènes en dimension deux, généralisant ainsi des calculs de [4].

Les résultats de cet article sont extraits de ma thèse de doctorat ([24]). Je remercie vivement J. Briançon et Ph. Maisonobe pour leurs conseils et remarques constructives.

2. Une construction de B. Malgrange.

Dans cette partie, $f \in \mathcal{O}$ désignera un germe de fonction analytique non nulle, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module holonome régulier sans f-torsion et $m \in \mathcal{M} - f\mathcal{M}$ un élément vérifiant les conditions (i)–(iii).

L'objectif est de démontrer le théorème 1.1.

2.1. Préliminaires.

Notons E un sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}$ isomorphe à $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ par projection, D le sous-anneau de $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels à coefficients constants, DE le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par les $\partial^\beta e$, $e \in E$, et $\mathcal{D}\mathcal{J}$ l'idéal à gauche de $\mathcal{D}$ engendré par $\mathcal{J}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, posons enfin $m\xi_i = s(s-1)\cdots(s-i+1)mf^{s-i} \in \mathcal{M}[1/f,s]f^s$.

Donnons maintenant la décomposition de $\sum_{i\geqslant 0}\mathcal{D}m\xi_i$ par l'idéal $\mathcal{J}$, première pierre de la construction.

PROPOSITION 2.1. — *Il y a une décomposition*

$$\sum_{i\geqslant 0}\mathcal{D}m\xi_i = \mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus \Big(\bigoplus_{i\geqslant 0} DEm\xi_i\Big).$$

Preuve. — Elle suit fidèlement celle de la proposition A.1.4 de [4]. Pour tout $u \in \mathcal{O}$, il existe un unique $v \in E$ et $h \in \operatorname{ann}_{\mathcal{O}} m$, $\lambda_k \in \mathcal{O}$, $1 \leqslant k \leqslant \omega$, tels que $u = v + h + \sum_{k=1}^{\omega}\lambda_k[\diamondsuit_k, f]$. Aussi, quand $i > 0$, il vient

$$um\xi_i = vm\xi_i + \sum_{k=1}^{\omega}\Big(\diamondsuit_k\lambda_k - [\diamondsuit_k,\lambda_k]\Big)m\xi_{i-1}. \tag{4}$$

En faisant une récurrence sur i, tout élément de $\sum_{i\geqslant 0}\mathcal{D}m\xi_i$ se décompose ainsi dans $\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus \big(\bigoplus_{i\geqslant 0} DEm\xi_i\big)$. L'unicité de la décomposition donnée et des coefficients dans chaque $DEm\xi_i$ repose sur la condition (iii) (voir [4]). □

Remarque 2.2. — Posons $\mathcal{O}_{x,t} = \mathbb{C}\{x_1,\dots,x_n,t\}$ pour une indéterminée t. Suivant B. Malgrange ([14]), on peut munir $\mathcal{M}[1/f,s]f^s$ d'une structure de module sur $\mathcal{D}_{x,t} = \mathcal{O}_{x,t}\langle\partial/\partial x_1,\dots,\partial/\partial x_n, d/dt\rangle$ en posant

$$ta(s)\tilde{m}f^s = a(s+1)\tilde{m}f^{s+1}$$
$$\frac{d}{dt}a(s)\tilde{m}f^s = -sa(s-1)\tilde{m}f^{s-1}$$

avec $a(s) \in \mathcal{O}[1/f,s]$, $\tilde{m} \in \mathcal{M}$, l'action de t s'étendant aux séries. Rappelons que la multiplication par s coïncide avec l'action de $(-d/dt)t$. Comme $m\xi_i = (-1)^i(d/dt)^i mf^s$, la proposition précédente offre donc une décomposition de $\mathcal{D}_{x,t}mf^s = \sum_{i\geqslant 0}\mathcal{D}m\xi_i$.

Le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ étant sans f-torsion, cette structure permet d'identifier $\mathcal{D}_{x,t}mf^s$ au $\mathcal{D}_{x,t}$-module holonome $i_+(\mathcal{D}m) = \mathcal{D}m\otimes(\mathcal{O}_{x,t}[1/t-f]/\mathcal{O}_{x,t})$

engendré par $m\otimes\delta(t-f)$, où $i:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C},0)$ est l'inclusion par le graphe de f et $\delta(t-f)$ désigne la classe de $1/t-f$ dans $\mathcal{O}_{x,t}[1/t-f]/\mathcal{O}_{x,t}$; cela se voit en constatant que les annulateurs dans $\mathcal{D}_{x,t}$ de mf^s et $m\otimes\delta(t-f)$ coïncident.

2.2. Les espaces $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$.

Notons D' l'idéal de D des opérateurs dont le terme constant est nul. On considère l'application linéaire surjective :

$$c:\sum_{i\geqslant 0}\mathcal{D}m\xi_i=\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s\oplus\Big(\bigoplus_{i\geqslant 0}DEm\xi_i\Big)\longrightarrow\bigoplus_{i\geqslant 0}Em\xi_i$$

définie par $c(\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s)=0$ et si $Q=Q'+e$ avec $Q'\in D'E$, $e\in E$, alors $c(Qm\xi_i)=em\xi_i$ pour tout $i\in\mathbb{N}$. C'est une application dite de *prise de terme constant à droite*. Son noyau est $\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s\oplus(\bigoplus_{i\geqslant 0}D'Em\xi_i)$; nous avons donc l'inclusion $\bigoplus_{i\geqslant 0}D'\mathcal{O}m\xi_i\subset\ker c$.

Posons $\mathcal{Z}'=c(\mathcal{D}[s]mf^s)$ et $\mathcal{Z}=c(\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s)\subset\mathcal{Z}'$.

LEMME 2.3. — *Soit $\eta:\bigoplus_{i\geqslant 0}DEm\xi_i\to\bigoplus_{i\geqslant 1}DEm\xi_i$ la bijection $\mathbb{C}$-linéaire obtenue par décalage des coefficients. Il y a une décomposition*

$$\mathcal{Z}'=Em\xi_0\oplus\eta(\mathcal{Z})\;\subset\;\bigoplus_{i\geqslant 0}Em\xi_i.$$

Elle s'obtient à partir de l'identité $\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s=(d/dt)^{-1}\mathcal{D}[s]mf^s$ (qui résulte de (2)).

PROPOSITION 2.4. — *Les $\mathbb{C}$-espaces vectoriels $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ sont de dimension finie, et $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ a pour dimension la colongueur de l'idéal $\mathcal{J}$.*

Preuve. — Si N est le degré d'un bon opérateur en s annulant mf^s alors

$$\mathcal{D}[s]mf^s=\sum_{i=0}^{N-1}s^i\mathcal{D}mf^s=\sum_{i=0}^{N-1}\mathcal{D}f^im\xi_i\subset\sum_{i=0}^{N-1}\mathcal{D}m\xi_i.$$

En particulier, $\mathcal{Z}'$ est de dimension finie. L'assertion sur la dimension de $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ résulte alors du lemme précédent. □

Remarque 2.5. —Il est facile d'établir que l'existence dans $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}[s]}mf^s$ d'un bon opérateur en s de degré un équivaut à l'appartenance de f à l'idéal

$\mathcal{J}$. On déduit alors de la preuve précédente et du lemme 2.3 que cela implique la nullité de $\mathcal{Z}$. Constatons que la réciproque est vraie (puisque $c(fmf^s) \in \mathcal{Z}$).

On définit l'action de s sur $\bigoplus_{i\geqslant 0} Em\xi_i$ en posant $s \cdot U = c(sU)$. Constatons que si $U \in \ker c$, alors $c(sU) \in \mathcal{Z}$; cela vient du fait que $s\bigoplus_{i\geqslant 0} D'Em\xi_i$ est dans le noyau de c. Par suite, l'action de s sur $\bigoplus_{i\geqslant 0} Em\xi_i$ laisse stable $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$, et induit donc une action sur $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$.

2.3. Le polynôme de Bernstein de mf^s.

Rappelons que si $\mathcal{P}$ est un $\mathcal{D}$-module à gauche, on appelle *complexe de De Rham* de $\mathcal{P}$, et on note $\mathrm{DR}(\mathcal{P})$, le complexe de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels :

$$0 \to \mathcal{P} \xrightarrow{d} \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \Omega^n \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{P} \to 0$$

où Ω^i est l'espace des i-formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{O}$, la différentielle étant définie de façon usuelle. On note $H^{\bullet}_{DR}(\mathcal{P})$ la cohomologie de $\mathrm{DR}(\mathcal{P})$.

La preuve du théorème 1.1 reprend les idées de celle du théorème 5.4 de [14], suivant [4]. Soit $\mathcal{N}$ le $\mathcal{D}[s]$-module introduit dans (2) :

$$\mathcal{N} = (s+1)\frac{\mathcal{D}[s]mf^s}{\mathcal{D}[s]mf^{s+1}}.$$

D'après le théorème de structure des $\mathcal{D}$-modules supportés par l'origine ([14], p. 100–104), $\tilde{b}(mf^s, s)$ est le polynôme minimal de l'action induite par s sur $H^n_{DR}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}/\sum(\partial/\partial x_i)\mathcal{N}$. Il reste à identifier $H^n_{DR}(\mathcal{N})$ à $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$.

Posons $\mathcal{E} = \bigoplus_{i\geqslant 0} DEm\xi_i$. Munissons-le d'une structure de $\mathcal{D}$-module en l'identifiant avec le quotient de $\sum_{i\geqslant 0} \mathcal{D}m\xi_i = \mathcal{D}\mathcal{J}mf^s \oplus (\bigoplus_{i\geqslant 0} DEm\xi_i)$ par $\mathcal{D}\mathcal{J}mf^s$. Soit $\pi : \sum_{i\geqslant 0} \mathcal{D}m\xi_i \to \mathcal{E}$, la projection canonique. On note alors $\mathcal{L}' = \pi(\mathcal{D}[s]mf^s)$, $\mathcal{L} = \pi(\mathcal{D}[s](f,\mathcal{J})mf^s) \subset \mathcal{L}'$ et $\bar{c} : \mathcal{E} \to \bigoplus_{i\geqslant 0} Em\xi_\imath$, l'application obtenue par passage au quotient de c; en particulier, nous avons $\bar{c}(\mathcal{L}) = \mathcal{Z}$ et $\bar{c}(\mathcal{L}') = \mathcal{Z}'$.

D'après l'identité (2), les $\mathcal{D}[s]$-modules $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}'/\mathcal{L}$ sont isomorphes. En considérant les suites exactes longues de cohomologie associées aux suites exactes courtes de complexes $0 \to \mathrm{DR}(\mathcal{L}) \hookrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{L}') \twoheadrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{L}'/\mathcal{L}) \to 0$ et $0 \to \mathrm{DR}(\mathcal{L}') \hookrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{E}) \twoheadrightarrow \mathrm{DR}(\mathcal{E}/\mathcal{L}') \to 0$ dont les $\mathcal{D}$-modules intervenant à droite sont supportés par l'origine, on établit alors un isomorphisme entre $H^n_{DR}(\mathcal{N})$ et $H^n_{DR}(\mathcal{L}')/H^n_{DR}(\mathcal{L})$, et les injections $H^n_{DR}(\mathcal{L}) \hookrightarrow H^n_{DR}(\mathcal{L}') \hookrightarrow$

$H^n_{DR}(\mathcal{E})$. D'autre part, l'application $\bar{c}$ induit un isomorphisme de $H^n_{DR}(\mathcal{E})$ dans $\bigoplus_{i\geqslant 0} Em\xi_i$ *via* lequel $H^n_{DR}(\mathcal{L})$ et $H^n_{DR}(\mathcal{L}')$ s'identifient à $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}'$ respectivement. Ainsi $H^n_{DR}(\mathcal{N})$ est bien isomorphe à $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$, par un isomorphisme compatible avec l'action de s. D'où l'assertion.

Remarque 2.6. — Il résulte du théorème précédent et de la proposition 2.4 que l'idéal $\mathcal{J}$ est indépendant du choix du système $(\diamondsuit_1, \ldots, \diamondsuit_\omega)$.

3. Des exemples associés à un morphisme analytique.

Le but de cette partie est d'explorer les limites imposées par les conditions (i)–(iii) essentiellement lorsque $\mathcal{M}$ est le module de cohomologie locale algébrique à support une ICSI. Une fois donnée la preuve technique du théorème 1.2, nous contrôlons dans le détail que les exemples annoncés (Proposition 1.3) vérifient les trois conditions.

3.1. La condition (i) explicitée pour les hypersurfaces.

Donnons d'abord un résultat préliminaire, essentiellement dû à E. J. Björk et M. Kashiwara.

PROPOSITION 3.1. — *Soient $h \in \mathcal{O}$ un germe de fonction holomorphe non nul et non inversible, $\tilde{m}$ un élément d'un $\mathcal{D}$-module holonome qui ne soit pas de h-torsion, et $\ell \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Notons $b(s)$ le polynôme de Bernstein de $\tilde{m}h^s$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la plus petite racine entière de $b(s)$ est supérieure ou égale à $-\ell$;*
2. *le morphisme $\mathcal{D}$-linéaire suivant est un isomorphisme*
$$ev_\ell : \frac{\mathcal{D}[s]\tilde{m}h^s}{(s+\ell)\mathcal{D}[s]\tilde{m}h^s} \longrightarrow \mathcal{D}\tilde{m}[1/h]$$
$$P(s)\dot{\tilde{m}}h^s \longmapsto P(-\ell)\tilde{m}h^{-\ell} \ ;$$
3. *le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}\tilde{m}[1/h]$ est engendré par $\tilde{m}h^{-\ell}$;*
4. *le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{D}\tilde{m}[1/h]/\mathcal{D}\tilde{m}$ est engendré $\dot{\tilde{m}h^{-\ell}}$.*

Supposons de plus qu'il existe un bon opérateur en s de degré un, $\Theta(s) \in \mathcal{D}[s]$, qui annule $\tilde{m}h^s$. Alors les conditions 1 *à* 4 *sont équivalentes à*

5. *l'annulateur dans* $\mathcal{D}$ *de* $\tilde{m}h^{-\ell}$ *est engendré par* $\Theta(-\ell)$ *et les éléments de* $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\ \tilde{m}h^s$ *;*

et impliquent

6. *l'annulateur dans* $\mathcal{D}$ *de* $\tilde{m}\dot{h}^{-\ell} \in \mathcal{D}\tilde{m}[1/h]/\mathcal{D}\tilde{m}$ *est engendré par* h^ℓ, $\Theta(-\ell)$ *et les éléments de* $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\ \tilde{m}h^s$.

Preuve. — L'équivalence des trois premières conditions résulte de [10], Proposition 6.2 et [1], Proposition 6.1.18, 6.3.15 & 6.3.16; quant à l'équivalence $3 \Leftrightarrow 4$, elle se vérifie sans peine. L'implication $2 \Rightarrow 5$ vient du fait que l'injectivité de ev_ℓ est équivalente à l'égalité entre $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\ \tilde{m}f^{-\ell}$ et l'image de $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}[s]}\ \tilde{m}f^s$ par le morphisme $\mathcal{D}$-linéaire de substitution de $-\ell$ à s. L'implication $5 \Rightarrow 6$ étant claire, il reste à montrer que 5 implique 1.

Supposons donc que $b(s)$ ait au moins une racine entière strictement inférieure à $-\ell$. Notons $k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$, la plus grande telle racine entière. Soit $R \in \mathcal{D}[s]$, un opérateur réalisant le polynôme de Bernstein de $\tilde{m}h^s$, que l'on peut supposer indépendant de s - quitte à le diviser par $\Theta(s+1)$. En itérant l'identité de Bernstein $b(s)\tilde{m}h^s = R \cdot \tilde{m}h^{s+1}$, il vient : $b(s) \cdots b(s-\ell-k-1)\tilde{m}h^s = R^{-\ell-k}\tilde{m}h^{s-\ell-k}$. Ainsi l'opérateur $R^{-\ell-k}$ annule $\tilde{m}h^{-\ell}$. Il s'écrit donc $R^{-\ell-k} = P\Theta(-\ell) + Q$ avec $P, Q \in \mathcal{D}$ et $Q \in \mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\ \tilde{m}h^s$. L'identité précédente devient alors

$$\underbrace{b(s) \cdots b(s-\ell-k-1)}_{c(s)}\tilde{m}h^s = -(s-k)Ph^{-\ell-k-1} \cdot \tilde{m}h^{s+1}$$

où la multiplicité de la racine $-k$ du polynôme $c(s)$ est celle de $b(s)$. En divisant par $(s-k)$ cette identité, on obtient donc une équation fonctionnelle dont le polynôme apparaissant dans le premier membre n'est pas divisible par $b(s)$; ce qui contredit que $b(s)$ soit le polynôme de Bernstein de $\tilde{m}h^s$. D'où l'assertion. □

Remarque 3.2. — *Mutatis mutandis*, cette proposition est vraie pour $\ell \in \mathbb{C}$.

Le résultat suivant est la clef de la caractérisation annoncée.

LEMME 3.3. — *Soit* $h \in \mathcal{O}$, *un germe de fonction holomorphe non nul et non inversible. Supposons qu'il existe un entier* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *tel que l'idéal* $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\ h^{-\ell}$ *soit engendré par des opérateurs de degré un. Supposons de plus que le terme constant dans l'écriture des opérateurs avec les coefficients à droite de tout élément de l'idéal* $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\ h^s$ *soit non inversible. Alors* h *appartient à l'idéal de ses dérivées. De plus, si* $\Theta(s) \in \mathcal{D}[s]$ *est un bon* *opérateur en s de degré un qui annule h^s, alors* $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} h^{-\ell}$ *est l'idéal* $\mathcal{D}\Theta(-\ell) + \operatorname{ann}_{\mathcal{D}} h^s$.

Preuve. — Soient $\diamondsuit_1, \dots, \diamondsuit_\omega \in \mathcal{D}$, des opérateurs de degré un qui engendrent l'idéal $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} h^{-\ell}$. Posons $\diamondsuit_k = \diamondsuit'_k + \diamond_k$, avec $\diamondsuit'_k \in \mathcal{D}(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ de degré un et $\diamond_k = \diamondsuit_k \cdot 1 \in \mathcal{O}$; en particulier, nous avons la relation

$$-\ell \diamondsuit'_k(h) + \diamond_k h = 0 \tag{5}$$

pour $k = 1, \dots, \omega$. Soit $P_0(s) \in \mathcal{D}[s]$, un bon opérateur en s, de degré $N \in \mathbb{N}^*$, qui annule h^s. En faisant une division euclidienne par $(s+\ell)$, il s'écrit : $P_0(s) = (s+\ell)Q_0(s) + P_0(-\ell)$, où $Q_0(s)$ est un opérateur unitaire en s de degré $N-1$, et $P_0(-\ell) \in \operatorname{ann}_{\mathcal{D}} h^{-\ell}$. Il existe donc $A_1, \dots, A_\omega \in \mathcal{D}$ tels que $P_0(-\ell) = \sum_{k=1}^{\omega} A_k \diamondsuit_k$. Les identités précédentes entraînent alors

$$(s+\ell)Q_0(s)h^s + \frac{(s+\ell)}{\ell} \sum_{k=1}^{\omega} A_k \diamond_k h^s = 0.$$

Ainsi l'opérateur $P_1(s) = Q_0(s) + (1/\ell)\sum_{k=1}^{\omega} A_k \diamond_k$ annule h^s. Quitte à itérer le procédé, nous pouvons donc supposer que $Q_0(s) = 1$. En particulier, il existe dans $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} h^s$ un opérateur de la forme $1 + \sum_{k=1}^{\omega} U_k \diamond_k$. Son terme constant dans l'écriture avec coefficients à droite étant non inversible, il existe donc un indice k tel que $\diamond_k$ est inversible. D'après (5), h appartient bien à l'idéal de ses dérivées. En d'autres termes, il existe un bon opérateur en s, $\Theta(s) \in \mathcal{D}[s]$, de degré un, qui annule h^s. Remarquons alors que les opérateurs $\diamondsuit_k + (1/\ell) \diamond_k \Theta(-\ell)$ annulent h^s ; le second point en résulte. □

Preuve du théorème 1.2. — Constatons que le résultat est clair lorsque g est lisse, chaque condition étant alors vérifiée. Nous supposerons donc que l'origine est un point critique de la fonction g. En particulier, le terme constant dans l'écriture avec coefficients à droite de tout élément de l'idéal $\operatorname{ann}_{\mathcal{D}} g^s$ est non inversible (puisque cet idéal est engendré par les opérateurs $g'_{x_i}(\partial/\partial x_j) - g'_{x_j}(\partial/\partial x_i) = (\partial/\partial x_j)g'_{x_i} - (\partial/\partial x_i)g'_{x_j}$ ([27], Théorème 2.19, [14], p. 117)).

Par ailleurs, on peut vérifier que la condition 1 équivaut à ce que l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $1/g^\ell \in \mathcal{O}[1/g]$ soit engendré par des opérateurs de degré un. L'implication 1 $\Rightarrow$ 2 résulte alors du lemme précédent, de la proposition 3.1 appliquée à $h = g$, $\tilde{m} = 1 \in \mathcal{O}$, et d'un théorème de K. Saito ([23]). Quant à l'implication 2 $\Rightarrow$ 3, elle a été obtenue à la proposition 3.1.

3.2. Validation des exemples (a), (b) et (c).

Dans ce paragraphe, $g = (g_1, \ldots, g_p)$ et (f, g) désignent deux morphismes analytiques définis sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, nuls à l'origine et définissant des germes d'ICSI, notés $(X, 0)$ et $(Z, 0)$. En particulier, l'idéal engendré par $g_1, \ldots, g_p$, et les mineurs maximaux de la jacobienne de (f, g), est de colongueur finie - égale à la somme des nombres de Milnor à l'origine de X et Z d'après la formule de Greuel-Lê ([7], [13]). De plus, le morphisme g est quasi-homogène pour un système de poids $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Q}^{*+})^n$. Posons $\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (\partial/\partial x_i)$ et notons $\varrho \in \mathbb{Q}^{*+}$ le poids de $g_1 \cdots g_p \in \mathbb{C}[x]$.

Nous prouvons ci-dessous que les trois cadres décrits dans l'introduction satisfont bien aux conditions (i)–(iii).

— Dans la situation (a), la condition portant sur λ est exactement la condition 1 de la variante de la proposition 3.1 pour $h = g$, $\tilde{m} = 1 \in \mathcal{O}$ et $\ell = -\lambda$ (Remarque 3.2). La condition (i) en résulte, l'opérateur $\Theta(s)$ étant par exemple $s - (1/\varrho)\chi$. L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de g^λ est alors engendré par $\Theta(\lambda)$ et $g'_{x_2}\partial/\partial x_1 - g'_{x_1}\partial/\partial x_2$; l'idéal $\mathcal{J}$ associé est donc $(\chi(f), g'_{x_2} f'_{x_1} - g'_{x_1} f'_{x_2})\mathcal{O}$. Du fait de l'identité : $\varrho f'_{x_i} g = g'_{x_i}\chi(f) + \alpha_j x_j (g'_{x_j} f'_{x_i} - g'_{x_i} f'_{x_j})$ pour $\{i, j\} = \{1, 2\}$, il contient l'idéal $(f'_{x_1} g, f'_{x_2} g, g'_{x_2} f'_{x_1} - g'_{x_1} f'_{x_2})\mathcal{O}$ et définit donc l'origine sous nos hypothèses. Par ailleurs, $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\, g^\lambda f^s$ est engendré par l'opérateur $(\partial/\partial x_1 f'_{x_2} - \partial/\partial x_2 f'_{x_1})g - (\lambda+1)(g'_{x_1} f'_{x_2} - g'_{x_2} f'_{x_1})$ d'après [17], Proposition 3.2.2, et satisfait bien à (iii).

— Afin de traiter le cas (c), rappelons un résultat obtenu dans [25].

NOTATION 3.4. — *Soit $h = (h_1, \ldots, h_r) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r$, $1 \leqslant r < n$, un morphisme analytique. Pour tout multi-indice $K = (k_1, \ldots, k_{r+1}) \in \mathbb{N}^{r+1}$ avec $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_{r+1} \leqslant n$, notons $\Delta_K^h \in \mathcal{D}$, l'opérateur $\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i m_{K,i}(h)\partial/\partial x_{k_i} = \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^i \partial/\partial x_{k_i} m_{K,i}(h)$ où $m_{K,i}(h)$ désigne le $r \times r$- mineur de la matrice jacobienne de h construit sur les colonnes $k_1, \ldots, \check{k}_i, \ldots, k_{r+1}$.*

PROPOSITION 3.5. — *Soient $\tilde{h} = (\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_r)$ et $(\tilde{h}, h)$ deux morphismes analytiques définis sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$ et définissant des germes d'intersections complètes à singularité isolée à l'origine.*

Notons $\tilde{m} \in \mathcal{O}[1/\tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_r] / \sum_i \mathcal{O}[1/\tilde{h}_1 \cdots \check{\tilde{h}}_i \cdots \tilde{h}_r]$ la classe de $1/\tilde{h}_1 \cdots \tilde{h}_r$. L'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\tilde{m} h^s$ est engendré par $\tilde{h}_1, \ldots, \tilde{h}_r$, et les opérateurs $\Delta_K^{\tilde{h}, h}$ (si $r < n - 1$).

Montrons alors que $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\, \delta$ est l'idéal engendré par $g_1, \ldots, g_p$, $\chi + \varrho$ et les opérateurs Δ^g_K. Le cas $p = 1$ résultant du théorème 1.2, nous supposerons $p \geqslant 2$. D'après l'implication $1 \Rightarrow 4$ de la proposition 3.1 appliquée successivement à $\ell = 1$, $\tilde{m} = 1 \in \mathcal{O}$, $h = g_1$, puis si $p > 2$, à $\ell = 1$, $\tilde{m} = \dot{1}/g_1 \cdots g_{i-1}$, $h = g_i$ pour $i = 2, \ldots, p-1$, la section $\dot{1}/g_1 \cdots g_{p-1}$ engendre $\mathcal{O}[1/g_1 \cdots g_{p-1}] / \sum_{i=1}^{p-1} \mathcal{O}[1/g_1 \cdots \check{g}_i \cdots g_{p-1}]$. Le résultat est alors une conséquence de l'implication $1 \Rightarrow 6$ de la proposition 3.1 et de la proposition 3.5.

La condition (i) est donc satisfaite, et l'idéal $\mathcal{J}$ associé au système de générateurs donné contient l'idéal $J \subset \mathcal{O}$ engendré par $g_1, \ldots, g_p$, et les mineurs maximaux de la jacobienne de (f, g) ; en particulier, $\mathcal{J}$ est de colongueur finie. Enfin, (iii) est vérifiée, puisque $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\, \delta f^s \subset \mathcal{D}J$ d'après la proposition précédente.

— Traitons la situation (b) pour $\delta_\ell \in \mathcal{O}[1/g]/\mathcal{O}$, le cas $m = g^\lambda \in \mathcal{O}[1/g]g^\lambda$ lui étant analogue. La condition (i) résulte du théorème 1.2 ; en prenant $\Theta(s) = s - (1/\varrho)\chi$, l'idéal $\mathcal{J}$ est engendré par g^ℓ, $\chi(f)$ et les mineurs maximaux de la jacobienne de (f, g). Il contient donc g (puisque f est lisse et : $\varrho f'_{x_\kappa} g = g'_{x_\kappa}\chi(f) + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i (g'_{x_\imath} f'_{x_\kappa} - g'_{x_\kappa} f'_{x_\imath})$, $1 \leqslant \kappa \leqslant n$). En particulier, l'idéal $\mathcal{J}$ vérifie (ii). Enfin, la condition (iii) résulte de la proposition 3.5 lorsque $\ell = 1$ et du fait suivant sinon.

Proposition 3.6. — *Soit $f \in \mathcal{O}$, un germe de fonction analytique lisse, nulle en 0. Soit $g \in \mathcal{O}$, un germe de fonction à singularité isolée à l'origine dont la restriction à $(f^{-1}(0), 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ est aussi à singularité isolée.*

Alors, pour tout entier $\ell \geqslant 2$, l'annulateur dans $\mathcal{D}$ de $\delta_\ell f^s$ est l'idéal

$$\mathcal{D}g^\ell + \sum_{i \neq \kappa} \mathcal{D}\Big[g\Big(f'_{x_\kappa}\frac{\partial}{\partial x_i} - f'_{x_\imath}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\Big) + \ell(f'_{x_\kappa} g'_{x_\imath} - f'_{x_\imath} g'_{x_\kappa})\Big]$$

où κ est un indice tel que f'_{x_κ} est inversible.

Preuve. — Notons $I \subset \mathcal{D}$ l'idéal proposé. L'inclusion $I \subset \mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell f^s$ étant manifeste, montrons sa réciproque. Sans perte de généralité, nous supposerons que $f = x_1$. Remarquons que, du fait des relations dans $\mathcal{D}$ suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[g\frac{\partial}{\partial x_j} + \ell g'_{x_\jmath}\Big] - \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[g\frac{\partial}{\partial x_i} + \ell g'_{x_\imath}\Big] = (\ell - 1)\Big(\frac{\partial}{\partial x_i} g'_{x_\jmath} - \frac{\partial}{\partial x_j} g'_{x_\imath}\Big)$$

l'idéal I contient les opérateurs $(\partial/\partial x_i) g'_{x_\jmath} - (\partial/\partial x_j) g'_{x_\imath}$, $2 \leqslant i < j \leqslant n$. Soit alors $P \in \mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_\ell x_1^s$ non nul. Il s'écrit $P = \Big(\partial/\partial x_1\Big)^r Q + R =$

$Q'\Big(\partial/\partial x_1\Big)^r + R'$ où $r \in \mathbb{N}$, $R, R' \in \mathcal{D}$ ont leur degré en $\partial/\partial x_1$ strictement inférieur à r, et $Q, Q' \in \mathcal{D}$ sont non nuls, indépendants de $\partial/\partial x_1$, et ont même symbole principal $\sigma(Q)$. Par un calcul élémentaire, on constate que Q' annule δ_ℓ.

Montrons que Q appartient à l'idéal I, en raisonnant par récurrence sur son degré $d \in \mathbb{N}$. Si $d = 0$, $Q' = Q$ est un multiple de $g^\ell \in I$; supposons donc $d \geqslant 1$. Comme Q' annule δ_ℓ et $\sigma(Q) = \sigma(Q')$, le germe $\sigma(Q)(g'_{x_2}, \dots, g'_{x_n})$ est nécessairement un multiple de g. D'autre part, il résulte des hypothèses que la suite $(g, g'_{x_2}, \dots, g'_{x_n})$ est régulière. La suite $\mathcal{O}/g\mathcal{O}$-régulière $(\dot{g}'_{x_2}, \dots, \dot{g}'_{x_n})$ annulant le polynôme $\dot{\sigma}(Q) \in (\mathcal{O}/g\mathcal{O})[\xi_2, \dots, \xi_n]$ homogène de degré $d \geqslant 1$, $\sigma(Q)$ appartient donc à l'idéal homogène (en ξ) de $\mathcal{O}[\xi_2, \dots, \xi_n]$ engendré par $\xi_2 g, \dots, \xi_n g$, et les polynômes $\xi_i g'_{x_j} - \xi_j g'_{x_i}$, $2 \leqslant i < j \leqslant n$. Ainsi il existe un opérateur $\widetilde{Q} \in I$ indépendant de $\partial/\partial x_1$ tel que $\sigma(\widetilde{Q}) = \sigma(Q)$. Par hypothèse de récurrence, Q appartient bien à I.

Une récurrence sur le degré en $\partial/\partial x_1$ de P établit alors l'appartenance à l'idéal I de l'opérateur P, comme souhaité. $\square$

Remarque 3.7.

i) Dans chaque cas, l'élément m engendre le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$.

ii) Lorsque f n'est pas lisse, les conditions (i)–(iii) ne sont en général pas satisfaites pour $m = \delta_\ell$, $\ell \geqslant 2$, même si $n = 2$, comme le montre l'exemple suivant : $f = x_1^2 + x_2^2$, $g = x_1$, $\ell = 3$; alors $\mathrm{ann}_{\mathcal{D}}\, \delta_3 = \mathcal{D}(x_1(\partial/\partial x_1)+3, \partial/\partial x_2, x_1^3)$, $\mathcal{J} = (x_1^2, x_2)\mathcal{O}$, et l'opérateur $x_1^2(\partial/\partial x_1)+3x_1$ annule $\delta_3 f^s$ mais n'appartient pas à l'idéal $\mathcal{D}\mathcal{J}$.

4. L'algorithme de calcul.

Nous conservons les notations introduites dans l'introduction. Dans cette partie, g et (f, g) sont des morphismes vérifiant les hypothèses et les conditions (c) de la proposition 1.3, et tels que l'application $(\mathrm{in}(f), g)$ définit une ICSI.

Nous étendons au cas de la section δf^s l'algorithme décrit dans la partie C de [4]. Dans les deux premiers paragraphes, nous mettons en place la version filtrée de la partie 2, avant d'en venir au calcul effectif.

Nota Bene. — Dans tout ce qui suit, nous supposerons que f est de poids un; cela afin d'avoir des expressions simplifiées – notamment pour $b(\delta f^s, s)$ – dans lesquelles $\rho(f)$ n'apparaît plus.

4.1. Préliminaires.

Rappelons que l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ est engendré par $g_1, \ldots, g_p, \chi(f)$ et les $\Delta_K^g(f)$, où $\chi \in \mathcal{D}$ désigne le champ d'Euler $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(\partial/\partial x_i)$ associé à α. Sa colongueur intervient dans le résultat suivant, qui s'obtient en adaptant légèrement la démonstration donnée dans [16] de la formule de Greuel ([8]).

THÉORÈME 4.1 ([5]). — *Soit $(h_1, \ldots, h_r)$ une application analytique définie sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, telle qu'il existe un système de poids $\alpha \in (\mathbb{Q}^{*+})^n$ pour lequel la famille $(\mathrm{in}(h_1), \ldots, \mathrm{in}(h_r))$ définisse une intersection complète à singularité isolée. Alors le nombre de Milnor à l'origine du germe d'intersection complète à singularité isolée défini par $(h_1, \ldots, h_r)$ coïncide avec celui de l'intersection complète définie par $(\mathrm{in}(h_1), \ldots, \mathrm{in}(h_r))$ et est égal à la colongueur de l'idéal $(\chi(h_1), \ldots, \chi(h_r))\mathcal{O} + J(h_1, \ldots, h_r)$, où $\chi \in \mathcal{D}$ est l'opérateur d'Euler associé au système α, et $J(h_1, \ldots, h_r) \subset \mathcal{O}$ l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la jacobienne de $(h_1, \ldots, h_r)$.*

Nous déduisons de ce résultat et de la formule de Greuel que l'idéal engendré par $g_1, \ldots, g_p, \mathrm{in}(f)$ et les $\Delta_K^g(\mathrm{in}(f))$, mineurs maximaux de la jacobienne de $(g_1, \ldots, g_p, \mathrm{in}(f))$, a même colongueur que l'idéal $\mathcal{J}$; c'est donc l'idéal initial de $\mathcal{J}$. En conséquence, $\mathcal{J}$ coïncide avec l'idéal $(g_1, \ldots, g_p, \chi(f), \{\Delta_K^g(f)\}_{K \in \mathcal{K}})\mathcal{O}$ où $\mathcal{K}$ désigne l'ensemble des multi-indices $\kappa = (k_1, \ldots, k_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1}$ pour lesquels $\Delta_K^g(\mathrm{in}(f)) \neq 0$, c'est-à-dire tels que $\Delta_K^g(f)$ est de poids $\varrho + 1 - \sum_{i=1}^{p+1} \alpha_{k_i}$.

Énonçons la version du théorème de division qui sera utilisée dans la suite pour l'idéal $\mathcal{J}$ avec le système de générateurs précédent.

THÉORÈME 4.2 ([2], [16]). — *Soit $I \subset \mathcal{O}$, un idéal de colongueur finie. Soient $h_1, \ldots, h_r$, des éléments de l'idéal I dont les parties initiales engendrent $\mathrm{in}(I)$. Soient $e_1, \ldots, e_m$, des polynômes quasi-homogènes qui déterminent une base de $\mathbb{C}[x]/\mathrm{in}(I)$.*

Alors, pour tout $u \in \mathcal{O}$, il existe $v_1, \ldots, v_r \in \mathcal{O}$ et des nombres *complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ uniques tels que*

$$u = \sum_{i=1}^{r} v_i h_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j$$

avec $\rho(v_i h_i) \geqslant \rho(u)$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et $\lambda_j = 0$ ou $\rho(e_j) \geqslant \rho(u)$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$.

Nous donnons maintenant les notations qui étendent celles de la partie 2.

Pour tout rationnel $q \in \mathbb{Q}$, notons $\mathcal{O}_q \subset \mathbb{C}[x]$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes quasi-homogènes de poids q, et $\mathcal{O}_{\geqslant q}$ (resp. $\mathcal{O}_{>q}$) l'idéal de $\mathcal{O}$ des fonctions de poids supérieur (resp. strictement supérieur) à q. Ces idéaux forment une filtration décroissante de $\mathcal{O}$, dont le gradué associé s'identifie à l'anneau $\mathbb{C}[x] = \oplus\, \mathcal{O}_q$.

Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, soit $E_q \subset \mathcal{O}_q$, un supplémentaire de $\mathrm{in}(\mathcal{J}) \cap \mathcal{O}_q$; notons $d(q) \in \mathbb{N}$ sa dimension. Posons $E = \bigoplus_{q \in \mathbb{Q}} E_q \subset \mathbb{C}[x]$. C'est un supplémentaire de $\mathrm{in}(\mathcal{J})$ dans $\mathbb{C}[x]$, donc de $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{O}$. Pour tout $q \in \mathbb{Q}$, notons $E_{\geqslant q}$, le sous-espace vectoriel $\bigoplus_{q' \geqslant q} E_{q'}$ de E, et DE_q (resp. $DE_{\geqslant q}$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par les $\partial^\beta e$, $e \in E_q$ (resp. $E_{\geqslant q}$). Notons aussi $\Pi = \{q \in \mathbb{Q} \,|\, d(q) \neq 0\} \subset \mathbb{Q}^+$, $\sigma = \max\{q \in \mathbb{Q}^+ \,|\, q \in \Pi\}$, et $\aleph \in \mathbb{N}$, le plus petit majorant entier de σ.

Posons enfin $h = f - \chi(f)$ (en particulier $\rho(h) > 1$).

Nous terminons ce paragraphe avec les lemmes techniques à la base de l'algorithme.

LEMME 4.3. — *Pour tout $u \in \mathcal{O}$ non nul et $i \in \mathbb{N}$:*

$$(s - \varrho + |\alpha| + \rho(u) - i) u \delta\xi_i \in \mathcal{D}\mathcal{O}_{>\rho(u)} \delta\xi_i + \mathcal{D}\mathcal{O}_{\geqslant \rho(u) + \rho(h)} \delta\xi_{i+1}.$$

Cela résulte de l'identité

$$(s - \varrho + |\alpha| + w) u \delta\xi_i = [\overline{\chi} u + [(w + i) u - \chi(u)]] \delta\xi_i + u h \delta\xi_{i+1}$$

où $\overline{\chi} \in \mathcal{D}$ est l'opérateur $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\partial/\partial x_j) x_j = \chi + |\alpha|$ et $w \in \mathbb{C}$.

LEMME 4.4. — *Soit $q \in \mathbb{Q}$. Il y a les inclusions dans $\sum_{i \geqslant 0} \mathcal{D}\delta\xi_i$ suivantes :*

$$\mathcal{D}\mathcal{O}_{\geqslant q} \delta\xi_i \subset \mathcal{D}\mathcal{O}_{\geqslant q-1} \delta\xi_{i-1} \oplus DE_{\geqslant q} \delta\xi_i \quad \text{pour} \quad i \geqslant 1$$
$$\mathcal{D}\mathcal{O}_{\geqslant q} \delta\xi_0 \subset \mathcal{D}\mathcal{J}_{\geqslant q} \delta f^s \oplus DE_{\geqslant q} \delta\xi_0$$

où $\mathcal{J}_{\geqslant q} = \mathcal{J} \cap \mathcal{O}_{\geqslant q}$. En particulier, pour tout entier $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{i=0}^{N} \mathcal{D}\mathcal{O}_{\geqslant q+i}\delta\xi_i = \mathcal{D}\mathcal{J}_{\geqslant q}\delta f^s \oplus \bigoplus_{i=0}^{N} DE_{\geqslant q+i}\delta\xi_i.$$

C'est la version filtrée de la proposition 2.1 adaptée à notre situation.

4.2. Filtrations et racines de $b(\delta f^s, s)$.

Étendons à $\bigoplus_{i\geqslant 0} E\delta\xi_i$ la fonction ρ en posant

$$\rho\Big(\sum u_i\delta\xi_i\Big) = \min\{\rho(u_i) - i\}.$$

Elle induit la filtration $(\bigoplus_{i\geqslant 0} E\delta\xi_i)_{\geqslant q} = \bigoplus_{i\geqslant 0} E_{\geqslant q+i}\delta\xi_i$, $q \in \mathbb{Q}$. Les espaces $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z}'$ et $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ sont alors munis des filtrations induites. En prenant les gradués associés, nous avons les injections

$$\operatorname{gr}\mathcal{Z} \hookrightarrow \operatorname{gr}\mathcal{Z}' \hookrightarrow \operatorname{gr}\Big(\bigoplus_{i\geqslant 0} E\delta\xi_i\Big) \approx \bigoplus_{q}\Big(\bigoplus_{i\geqslant 0} E_{q+i}\delta\xi_i\Big).$$

Si $U = \sum u_i\delta\xi_i \in \bigoplus_{i\geqslant 0} E\delta\xi_i$ est non nul, nous appellerons *partie initiale* de U l'élément de $\bigoplus_{i\geqslant 0} E_{\rho(U)+i}\delta\xi_i$ noté $\operatorname{in}(U)$ et défini par

$$\operatorname{in}(U) = \sum_{\rho(u_i)-i=\rho(U)} \operatorname{in}(u_i)\delta\xi_i.$$

Pour un sous-espace vectoriel $G \subset \bigoplus_{i\geqslant 0} E\delta\xi_i$ non nul, nous noterons $\operatorname{in}(G)$ le sous-espace de $\bigoplus_q(\bigoplus_{i\geqslant 0} E_{q+i}\delta\xi_i)$ engendré par les parties initiales des vecteurs de G. Pour $q \in \mathbb{Q}$, posons alors $\mathcal{Z}_q = \operatorname{in}(\mathcal{Z}) \cap (\bigoplus_{i\geqslant 0} E_{q+i}\delta\xi_i)$ et $\mathcal{Z}'_q = \operatorname{in}(\mathcal{Z}') \cap (\bigoplus_{i\geqslant 0} E_{q+i}\delta\xi_i)$. En particulier, tout rationnel q tel que $\mathcal{Z}'_q$ ou $\mathcal{Z}_q$ n'est pas nul est contenu dans l'ensemble $\{q \in \mathbb{Q}^+ \mid \exists i \in \mathbb{N},\, q+i \in \Pi\}$. Par ailleurs, nous avons la décomposition

$$\mathcal{Z}'_q = E_q\delta f^s \oplus \eta(\mathcal{Z}_{q+1}) \tag{6}$$

pour tout rationnel $q \in \mathbb{Q}$ (Lemme 2.3).

À l'aide des lemmes 4.3 et 4.4, on montre que l'action de s sur $\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ respecte la filtration par le poids ρ, induit une action de degré zéro sur $\operatorname{gr}\mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$, et que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, l'endomorphisme de $\operatorname{gr}_q \mathcal{Z}'/\mathcal{Z}$ provenant de la multiplication par $(s - \varrho + |\alpha| + q)$ est nul. Nous déduisons alors du théorème 1.1 que le polynôme de Bernstein de δf^s est donné par

$$b(\delta f^s, s) = (s+1)\prod_{\mathcal{Z}_q \subsetneq \mathcal{Z}'_q} (s - \varrho + |\alpha| + q). \tag{7}$$

Remarque 4.5.

i) Les racines de $b(\delta f^s, s)$ sont donc des rationnels de l'intervalle $[\varrho - |\alpha| - \sigma, \varrho - |\alpha|]$. En utilisant [3], on peut montrer que σ est majoré par $n(\varrho + 1)$.

ii) Lorsque $f \in \mathcal{J}$, l'espace $\mathcal{Z}$ est nul (Remarque 2.5) et les sauts q sont les éléments de Π. Cela donne en particulier une formule explicite dans le cas quasi-homogène pour chacune des situations de la proposition 1.3.

Nous terminons ce paragraphe avec la preuve de la proposition 1.4. Faisons d'abord quelques rappels sur la V-filtration (voir [19], [22]).

Soit $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$, une hypersurface lisse d'une variété analytique complexe de dimension $n+1$. Notons $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$ le faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}$ à coefficients holomorphes.

DÉFINITION 4.6. — *Un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module cohérent $\mathcal{N}$ est spécialisable le long de $\mathcal{Y}$ si toute section locale $u \in \mathcal{N}$ satisfait, en tout point $w \in \mathcal{X}$ au voisinage duquel elle est définie, à une équation du type : $c(t(\partial/\partial t))u = tP\cdot u$ dans un système de coordonnées (x,t) tel que $\mathcal{Y}$ ait pour équation $t = 0$, où $c(s) \in \mathbb{C}[s]$ est un polynôme non nul et $P \in \mathcal{D}_{\mathcal{X},w}$ un opérateur de la forme $\sum_j P_j \left(t\partial/\partial t\right)^j$ avec les P_j indépendants de $(\partial/\partial t)$.*

Le polynôme de Bernstein en w de la section $u \in \mathcal{N}$ d'un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module spécialisable est alors défini de la façon habituelle; on le notera $c(u,s)$. Cela généralise bien sûr la notion classique de polynôme de Bernstein, les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Modules holonomes étant spécialisables le long de toute hypersurface lisse (Remarque 2.2). Observons cependant qu'avec les notations introduites à la remarque 2.2, le polynôme $b(mf^s, s)$ coïncide au signe près avec $c(m \otimes \delta(t-f), -s-1)$, le signe venant du fait que c'est l'action de $t(\partial/\partial t)$ et non de $-(\partial/\partial t)t$ qui est utilisée dans la définition précédente.

Munissons $\mathbb{C}$ de l'ordre lexicographique dans sa décomposition $\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$. La *$V$-filtration canonique* d'un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module spécialisable $\mathcal{N}$ le long de $\mathcal{Y}$ est alors la filtration $\{V_\alpha \mathcal{N}\}_{\alpha \in \mathbb{C}}$ croissante définie de la façon suivante : au voisinage de tout point $w \in \mathcal{X}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $V_\alpha \mathcal{N}$ est l'ensemble des sections locales $u \in \mathcal{N}$ dont toutes les racines de leur polynôme de Bernstein sont au moins égales à $-\alpha - 1$. Pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on notera $\mathrm{gr}_\beta^V \mathcal{N} = V_\beta \mathcal{N} / \cup_{\gamma < \beta} V_\gamma \mathcal{N}$.

La proposition 1.4 repose sur le lemme suivant, qui se démontre à partir des propriétés classiques de la V-filtration canonique et des V-bonnes filtrations de Modules spécialisables (pour les détails, voir [24], [22])

LEMME 4.7. — *Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}$-Module spécialisable le long de $\mathcal{Y}$, et w un point de $\mathcal{X}$. Notons $\mathcal{B}_w \subset \mathbb{C}$, l'ensemble des opposées des racines du polynôme de Bernstein de toute section de $\mathcal{N}$ définie sur un voisinage de w.*

(i) *L'ensemble des opposées des racines des polynômes de Bernstein des éléments d'un système générateur (fini) local de $\mathcal{N}$ définit un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{gr}^V_\beta \mathcal{N}$ est nul au voisinage de w si $\beta \notin \mathcal{A} + \mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{B}_w$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{A} + \mathbb{Z}$.*

(ii) *Soit $\beta \in \mathbb{C}$. Alors $\mathrm{gr}^V_\beta \mathcal{N}$ est non nul au voisinage de w si et seulement si il existe une section locale de $\mathcal{N}$ définie au voisinage de w dont le polynôme de Bernstein ait la racine $-\beta - 1$.*

En particulier, si $\beta \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$, $\mathrm{gr}^V_\beta \mathcal{N}$ est non nul au voisinage de w si et seulement si β appartient à l'ensemble $\mathcal{B}_w + \mathbb{Z}$.

Preuve de la proposition 1.4. — Rappelons que $\mathcal{R}$ est engendré par δ (Remarque 3.7). Aussi $\delta \otimes \delta(t - f)$ engendre le $\mathcal{D}_{x,t}$-module $i_+(\mathcal{R})$ (Proposition 3.1) et les racines de son polynôme de Bernstein sont à un entier près les opposées de celles de $b(\delta f^s, s)$. D'autre part, pour tout rationnel $q \in \mathbb{Q}$:

$$\sum_{r \in q+\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} E_r = \sum_{r \in q+\mathbb{Z}} \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{gr}_r \frac{\mathcal{Z}'}{\mathcal{Z}}$$

d'après l'identité (6). L'assertion est alors une conséquence directe de (7) et du lemme précédent, la conclusion résultant de la construction algébrique des cycles évanescents (cf. [19], [22]).

4.3. Le calcul effectif.

D'après les identités (6) et (7), il s'agit d'établir un procédé pour calculer les espaces $\mathcal{Z}_q$. La méthode suivie est identique à celle de [4]. Nous en rappelons ici les grandes lignes, puis calculons un exemple (pour les détails, voir [4], [24]).

Étendons la fonction ρ à $\bigoplus_{i \geqslant 0} DE\delta\xi_i$ en posant

$$\rho(\sum \partial^\beta u_{\beta,i}\delta\xi_i) = \min\{\rho(u_{\beta,i}) - i - \alpha \cdot \beta\,;\, u_{\beta,i} \neq 0\}.$$

En itérant la formule de montée du poids suivante :

$$\begin{aligned}&(s+w-\chi-\varrho)\partial^\beta u\delta\xi_i\\&\qquad=[(i+w+\alpha\cdot\beta-\rho(u))\partial^\beta u-\partial^\beta(\chi(u)-\rho(u)u)]\delta\xi_i+\partial^\beta hu\delta\xi_{i+1}\end{aligned}$$

pour $u\in\mathcal{O}$ non nul, $i\in\mathbb{N}$ et $\beta\in\mathbb{N}^n$, et en utilisant conjointement la réécriture par division (Lemme 4.4) on construit une suite $(S_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant L}$ de bons opérateurs S_ℓ de degré $\ell+1$ et une suite $(H_\ell)_{0\leqslant\ell\leqslant L-1}$ d'éléments de $\bigoplus_{i\geqslant 0} DE\delta\xi_i$ de poids $q_{\ell+1}$, vérifiant :

- $S_\ell\delta f^{s+1}=(s+1)H_\ell$ pour $0\leqslant\ell\leqslant L-1$, et $S_L\delta f^{s+1}=0$;
- $H_\ell=\sum_{i=0}^{\aleph-2}H_{\ell,i}\delta\xi_i$ avec $H_{\ell,i}\in DE$, tel que $\deg H_{\ell,i}\leqslant\ell-i$;
- $q_1>1$ et $q_\ell<q_{\ell+1}$ pour $1\leqslant\ell\leqslant L-1$.

Par construction, les H_ℓ déterminent des éléments de $\mathcal{Z}$. En fait, si $U\in\mathcal{D}[s]\delta f^s$ est tel qu'il existe $P(s)\in\mathcal{D}[s]$ avec $(s+1)U=P(s)\cdot\delta f^{s+1}$, alors par division par les opérateurs S_ℓ, nous avons

$$(s+1)U=(s+1)\sum_{i=0}^{L-1}P_iH_i+R\delta f^{s+1}$$

pour des opérateurs $P_i,R\in\mathcal{D}$; mais alors $R\delta f^{s+1}\in\mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$. La suite des H_ℓ détermine donc l'espace $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}=\Big\{\sum_{\ell=0}^{L-1}c(a_\ell H_\ell)\mid a_\ell\in\mathcal{O}\Big\}. \tag{8}$$

On en déduit que pour tout $q\in\mathbb{Q}^+$, $\mathcal{Z}_q$ s'obtient en prenant les parties initiales des éléments de poids q de l'espace

$$\Big\{\sum_{\ell=0}^{L-1}c(a_\ell H_\ell)\mid a_\ell\in\bigoplus_{q'=0}^{q-q_{\ell+1}}\mathcal{O}_{q'}\Big\}.$$

Exemple. — Prenons $n=2$, $p=1$, $g(\underline{x})=x_1^5+x_2^5$ et $f(\underline{x})=x_1^3+\lambda x_2^4$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Le polynôme g est quasi-homogène à singularité isolée, de poids $\varrho=5/3$ pour le système $\alpha=(1/3,1/3)$, et l'application $(\mathrm{in}(f),g)$ définit l'origine. Nous allons calculer $b(\delta f^s,s)$ pour tout $\lambda\in\mathbb{C}$.

Comme $\mathcal{J}=(x_1^5+x_2^5,x_1^3+(4/3)\lambda x_2^4,3x_1^2x_2^4-4\lambda x_1^4x_2^3)\mathcal{O}$, son idéal initial est $(x_1^5+x_2^5,x_1^3,x_1^2x_2^4)\mathbb{C}[x]$. Soit $E\subset\mathbb{C}[x]$ le supplémentaire de $\mathrm{in}(\mathcal{J})$ engendré par les monômes $x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}$ tels que $(\gamma_1,\gamma_2)\in[0,2]\times[0,4]-\{(2,4)\}$. Aussi l'ensemble Π est $\{k/3\,|\,0\leqslant k\leqslant 5\}$ et $\sigma=5/3$. Enfin, nous avons $\chi=(1/3)x_1(\partial/\partial x_1)+(1/3)x_2(\partial/\partial x_2)$ et $h=f-\chi(f)=-(\lambda/3)x_2^4$.

Si $\lambda = 0$, l'application (f, g) est de plus quasi-homogène. D'après la remarque 4.5, nous avons

$$b(\delta f^s, s) = (s+1)\prod_{k=0}^{5}\Big(s - 1 + \frac{k}{3}\Big).$$

Supposons $\lambda \neq 0$ et déterminons une suite (H_ℓ). Nous avons les identités :

$$\begin{aligned}\Big(s+1-\chi-\frac{5}{3}\Big)\delta f^{s+1} &= (s+1)h\delta f^s \;=\; (s+1)H_0\\ \Big(s+\frac{4}{3}-\chi-\frac{5}{3}\Big)x_2^4\delta f^s &= -\frac{\lambda x_2^8}{3}\delta\xi_1\end{aligned}$$

où $\rho(H_0) = 4/3$. En divisant x_2^8 par l'idéal $\mathcal{J}$, il vient

$$x_2^8 = \frac{1}{1+(64\lambda^3/27)x_1x_2^2}\Big[\Big(x_2^3 + \frac{4\lambda}{3}x_1^2x_2^2\Big)g - \Big(x_1^2x_2^3 + \frac{4\lambda}{3}x_1^4x_2^2 - \frac{16\lambda^2}{9}x_1x_2^6\Big)\chi(f)\Big].$$

Soit $\nu \in \mathcal{O}$ le coefficient de $\chi(f)$. D'après l'identité (4), nous avons

$$x_2^8\delta\xi_1 = \nu\chi(f)\delta\xi_1 = \Big[\Big(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + 1\Big)\nu - \chi(\nu)\Big]\delta f^s.$$

Comme $\mathcal{O}_{\geqslant 2} \subset \mathcal{J}$, $x_1\nu$, $x_2\nu$ et $\nu + x_1^2x_2^3$ appartiennent à $\mathcal{J}$. Il existe donc un opérateur $T \in \mathcal{D}$ de degré au plus deux tel que

$$\Big(\Big(s-\chi-\frac{1}{3}\Big)\Big(s-\chi-\frac{2}{3}\Big) - T\Big)\delta f^{s+1} = (s+1)\frac{\lambda^3x_1^2x_2^3}{27}\delta f^s = (s+1)H_1.$$

Le poids de H_1 étant égal à σ, $(s-\chi)H_1$ appartient à $\mathcal{D}\mathcal{J}\delta f^s$; en particulier, H_2 est nul. D'après (8), $\mathcal{Z}$ est donc engendré par $x_1^2x_2^3, x_1x_2^4$ et x_2^4. Nous déduisons alors des identités (6) et (7) que

$$b(\delta f^s, s) = (s+1)\prod_{k=0}^{4}\Big(s - 1 + \frac{k}{3}\Big)$$

lorsque $\lambda \neq 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. E. Björk, Analytic $\mathcal{D}$-Modules and Applications, Kluwer Academic Publishers 247, 1993.

[2] J. Briançon, Weierstrass préparé à la Hironaka, Soc. Math. France, Astérisque 7-8 (1973), 67–73.

[3] J. BRIANÇON, Sur le degré des relations entre polynômes, C.R. Acad. Sci., Paris, 297 (1983), 553–556.

[4] J. BRIANÇON, M. GRANGER, Ph. MAISONOBE, M. MINICONI, Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein : cas non dégénéré, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 39-3 (1989), 553–610.

[5] J. BRIANÇON, H. MAYNADIER, Sur le nombre de Milnor d'une singularité semi-quasi-homogène, article en préparation.

[6] V. GINSBURG, Characteristic varieties and vanishing cycles, Invent. Math., 84 (1986), 327–402.

[7] G. M. GREUEL, Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständeigen Durchschnitten, Math. Ann., 214 (1975), 235–266.

[8] G. M. GREUEL, H. HAMM, Invarianten quasihomogener vollständiger Durschnitte, Invent. Math., 49 (1978), 67–86.

[9] A. GROTHENDIECK, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, Pub. Math. I.H.E.S., 29 (1966), 95–105.

[10] M. KASHIWARA, B-functions and holonomic systems, Invent. Math., 38 (1976), 33–53.

[11] M. KASHIWARA, On the holonomic systems of differential equations II, Invent. Math., 49 (1978), 121–135.

[12] M. KASHIWARA, Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations, Lect. Notes in Math., 1016 (1983), 134–142.

[13] D. T. LÊ, Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection, Funct. Anal. and its Appl., 8 (1974), 127–131.

[14] B. MALGRANGE, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, Lect. Notes in Math., 459 (1975), 98–119.

[15] B. MALGRANGE, Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente, Soc. Math. France, Astérisque, 101-102 (1983).

[16] H. MAYNADIER, Équations fonctionnelles pour une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée et un germe semi-quasi-homogène, Thèse UNSA, 1996.

[17] H. MAYNADIER, Polynômes de Bernstein-Sato associés à une intersection complète quasi-homogène à singularité isolée, Bull. Soc. Math. France, 125 (1997), 547–571.

[18] Z. MEBKHOUT, Local cohomology of analytic spaces, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 12 (1977), 247–256.

[19] Z. MEBKHOUT, Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents, Travaux en cours, 35, Hermann, 1989.

[20] T. MIWA, Determination of b-functions, the case of quasi-homogeneous, isolated singularity, en japonais, Suuriken Koukyuuroku, 225 (1975), 62–71.

[21] T. OAKU, Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules, Adv. Appl. Math., 19 (1997), 61–105.

[22] C. SABBAH, D-modules et cycles évanescents (d'après B. Malgrange et M. Kashiwara), Conférence de La Rábida 1984, Hermann (1987), 53–98.

[23] K. SAÏTO, Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen, Invent. Math., 14 (1971), 123–142.

[24] T. TORRELLI, Équations fonctionnelles pour une fonction sur un espace singulier, Thèse UNSA, 1998.

[25] T. TORRELLI, Équations fonctionnelles pour une fonction sur une intersection complète quasi homogène à singularité isolée, C. R. Acad. Sci., Paris, 330 (2000), 577–580.

[26] T. TORRELLI, Un calcul de polynôme Bernstein associé à un faisceau de coniques non dégénéré, C. R. Acad. Sci., Paris, 331 (2000), 47–50.

[27] T. YANO , On the theory of b-functions, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., 14 (1978), 111–202.

Manuscrit reçu le 6 octobre 2000,
révisé le le 23 mars 2001,
accepté le 25 mai 2001.

Tristan TORRELLI,
Université Henri Poincaré
Institut Élie Cartan
UMR 7502 UHP-CNRS-INRIA
B. P. 239
54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex (France).
torrelli@iecn.u-nancy.fr