ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GEORGES DE RHAM

Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable

Annales de l'institut Fourier, tome 2 (1950), p. 51-67

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1950__2__51_0>

COMPLEXES A AUTOMORPHISMES ET HOMÉOMORPHIE DIFFÉRENTIABLE

par **G. de RHAM** (Lausanne et Genève).

Dans cet article, je donne d'abord une nouvelle définition des invariants d'un complexe à automorphismes, qui généralisent un peu la « torsion » introduite par K. Reidemeister (1) et W. Franz (2), et que j'ai déjà étudiés ailleurs (3). J'indique ensuite une méthode qui permet d'appliquer ces invariants à l'étude de transformations topologiques différentiables d'une variété en elle-même, en établissant leur invariance vis-à-vis des homéomorphismes différentiables. Cette méthode est indépendante de la théorie de la triangulation des variétés différentiables qui, d'après J. H. C. Whitehead (4), permet d'établir la même invariance ; elle me paraît digne d'intérêt à cause de sa simplicité. Pour terminer, cette méthode est appliquée aux rotations de la sphère, ce qui conduit à la classification topologique différentiable des formes de Clifford de l'espace sphérique.

1. **Préliminaire algébrique.** — Soit E un espace vectoriel (5) de rang fini n sur le corps K des nombres complexes. Appelons *volume dans* E tout produit extérieur de n vecteurs de E. Les volumes dans E

(1) K. Reidemeister, Complexes and Homotopy Chains (*Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 56 (1950), p. 297-307). D'autres références sont indiquées dans cet article.

(2) W. Franz, Uber die Torsion einer Uberdeckung (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 173 (1935), p. 245-253).

(3) G. de Rham, Sur les complexes avec automorphismes (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 12 (1939), p. 191-211).

(4) J. H. C. Whitehead, On C^1-Complexes (*Annals of Mathematics*, vol. 41 (1940), p. 809-824.

(5) Voir N. Bourbaki, Algèbre, *Chapitres* II *et* III.

forment un espace vectoriel de rang un sur K. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, de rang $n_1 (0 < n_1 < n)$, v_1 un volume dans E_1 et v_2 un volume dans E/E_1. Si E_2 est un sous-espace vectoriel supplémentaire de E_1, canoniquement isomorphe à E/E_1, il correspond à v_2 un volume bien déterminé $\bar{v}_2$ dans E_2. Le produit extérieur de v_1 et $\bar{v}_2$ est alors un n-vecteur, c'est-à-dire un volume v dans E et l'on vérifie immédiatement qu'il ne dépend que de v_1 et v_2 dont il est fonction bilinéaire. Nous l'appellerons simplement le *produit de* v_1 *et* v_2 et nous écrirons $v = v_1 v_2$ ou $v_2 = v/v_1$. Il est clair que deux de ces volumes déterminent le troisième, au moins lorsqu'ils ne sont pas nuls. Afin que ces relations conservent un sens lorsque $n_1 = 0$ ou $n_1 = n$ on conviendra qu'*un volume dans un espace vectoriel de rang zéro est simplement un nombre de* K.

Considérons maintenant un *système* $(C', C'', \mathfrak{L})$ formé par deux espaces vectoriels C' et C'', de rang fini sur K, un homomorphisme de C' dans C'' et un homomorphisme de C'' dans C', désignés tous deux par $\mathfrak{L}$, dont les produits se réduisent à zéro, $\mathfrak{L}^2 = 0$. Désignons par H' et H'' les images de C'' et C' et par F' et F'' les images réciproques de 0 (noyaux des homomorphismes $\mathfrak{L}$). On a $C' \supset F' \supset H'$ et $C'' \supset F'' \supset H''$. Posons encore $B' = F'/H'$ et $B'' = F''/H''$.

Dans la suite, C' et C'' seront les modules des chaînes d'un complexe, de dimensions impaire et paire respectivement, et $\mathfrak{L}$ l'opération qui donne le bord d'une chaîne. F' et F'' seront alors les sous-modules des chaînes fermées, H' et H'' ceux des chaînes homologues à zéro et B' et B'' les modules d'homologie (ou modules de Betti).

Soient c', b', h, c'', b'', h'' des volumes dans C', B', H', C'', B'', H'', respectivement. Le produit $h'b'$ est alors un volume dans F' et $c'/h'b'$ est un volume dans C'/F'. Comme $\mathfrak{L}$ applique isomorphiquement C'/F' sur H'', ce dernier volume est appliqué sur un volume dans H'', $\mathfrak{L}c'/h'b'$, dont le rapport à h'' est un nombre a de K. Ce nombre est proportionnel à c' et inversement proportionnel à h', b' et h''. Soit b le nombre analogue obtenu en permutant les signes $'$ et $''$. Le quotient b/a ne dépend plus de h' ni de h'' ; il est proportionnel à c'' et à b', inversement proportionnel à c' et à b''. Nous le désignerons par

$$D(b'c''/b''c') = \frac{\mathfrak{L}c''/h''b''}{h'} \frac{h''}{\mathfrak{L}c'/h'b'}$$

et nous l'appellerons la fonction D associée au système $(C', C'', \mathfrak{L})$.

2. **Les invariants Δ_ζ d'un complexe à automorphismes.** — Les *complexes à automorphismes* considérés dans la suite seront exclusivement des complexes à un nombre fini de cellules, munis d'un automorphisme γ qui engendre un groupe cyclique G, d'ordre fini h, d'automorphismes ne laissant aucune cellule fixe (sauf l'automorphisme identique γ^h). Chaque cellule a d'un tel complexe appartient à un cycle de h cellules, $\gamma^k a$ ($k=0, 1, \ldots, h-1$), qui sont permutées circulairement sous l'effet de γ. Si $a_1, \ldots, a_n$ est un *système fondamental de cellules,* c'est-à-dire un ensemble qui contient une cellule et une seule de chaque cycle, prise avec une orientation, toute chaîne c du complexe, à coefficients dans K, est égale à une combinaison linéaire à coefficients dans K des $\gamma^k a_i$ ($k=0, 1, \ldots, h-1$; $i=1, \ldots, n$), qu'on peut représenter par une combinaison linéaire des a_i, $c=\sum \xi_i a_i$, avec des coefficients ξ_i pris dans l'algèbre A de G sur K. Si $\alpha \in A$, on pose $\alpha c=\sum(\alpha\xi_i)a_i$. L'espace vectoriel de toutes les chaînes du complexe est ainsi un A-module, et il en est de même de C', C'', F', F'', H', H'', B' et B'', en reprenant les notations introduites ci-dessus.

Posons, pour chaque racine h-ième de l'unité ζ,

$$e_\zeta=\frac{1}{h}\left[1+\frac{\gamma}{\zeta}+\cdots+\left(\frac{\gamma}{\zeta}\right)^{h-1}\right].$$

Chacun des e_ζ engendre un idéal de A qui est isomorphe à K et A est la somme directe de ces h idéaux. En désignant par $c_\zeta(\xi)$ le nombre de K obtenu en remplaçant γ par ζ dans l'expression du nombre ξ de A, on a $\xi e_\zeta=c_\zeta(\xi)e_\zeta$ et $\xi=\sum c_\zeta(\xi)e_\zeta$.

Soit C un A-module et c un élément de C. En posant $c_\zeta=e_\zeta c$, on a $c=\sum c_\zeta$ et $\gamma c=\sum \zeta c_\zeta$. Pour une racine h-ième donnée de l'unité ζ, l'ensemble de tous les c_ζ forme un sous-module C_ζ de C, invariant, qui est constitué par tous les $c\in C$ qui satisfont à l'équation $\gamma c=\zeta c$ ou à l'équation équivalente $c=e_\zeta c$. Le A-module C est la somme directe des C_ζ.

Cette décomposition s'applique en particulier aux A-modules C', C'', F', F'', H', H'', B', B'' associés à un complexe à automorphismes. B'_ζ et F'_ζ/H'_ζ étant canoniquement isomorphes, nous les identifierons, ainsi que B''_ζ et F''_ζ/H''_ζ. Pour chaque ζ, on a alors un système

$(C'_\zeta, C''_\zeta, \mathfrak{L})$ auquel est associée une fonction des volumes b'_ζ, c''_ζ, b''_ζ, c'_ζ dans B'_ζ, C''_ζ, B''_ζ, C'_ζ respectivement,

$$D_\zeta = D(b'_\zeta c''_\zeta / b''_\zeta c'_\zeta).$$

En précisant le choix des volumes c'_ζ et c''_ζ, nous allons en déduire des fonctions ne dépendant essentiellement plus que de b'_ζ et b''_ζ.

Soient a_i $(i = 1, \ldots, p)$ les cellules de dimension impaire d'un système fondamental. Elles forment une base de C' relativement à A. Les chaînes $e_\zeta a_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ forment alors une base de C'_ζ relativement à K et leur produit extérieur est un volume dans C'_ζ, que nous appellerons un *volume distingué*. A chaque système fondamental de cellules est ainsi associé un volume distingué dans C'_ζ et de même dans C''_ζ. Comment ces volumes distingués changent-ils lorsqu'on change le système fondamental de cellules? On passe d'un système fondamental à un autre en remplaçant chaque cellule par l'une de ses transformées et changeant éventuellement son orientation, ce qui revient à la multiplier par un facteur de la forme $\pm\gamma^q$, et en les permutant. Cela équivaut à une substitution linéaire dont le déterminant est aussi un nombre de A de la forme $\pm\gamma^q$. Par suite le volume distingué dans C'_ζ est multiplié par un facteur de la forme $\pm\zeta^q$, le signe $\pm$ et l'exposant q étant indépendants de ζ, et l'on a un résultat analogue pour les volumes distingués dans les C''_ζ.

Nous désignerons par $\Delta_\zeta = \Delta(b'_\zeta / b''_\zeta)$ *la valeur de la fonction* D_ζ *dans laquelle* c'_ζ *et* c''_ζ *sont remplacés par des volumes distingués.*

Il résulte de ce qui précède que, *pour chaque racine h-ième de l'unité* ζ, Δ_ζ *est une fonction des volumes* b'_ζ *et* b''_ζ, *homogène de degré* $+1$ *par rapport au premier et de degré* -1 *par rapport au second, dont la valeur est déterminée seulement à un facteur près de la forme* $\pm\zeta^q$, *le signe* $\pm$ *et l'exposant* q *étant indépendants de* ζ. Ce signe et cet exposant dépendront du système fondamental choisi pour déterminer les volumes distingués.

Dans le cas où B'_ζ *et* B''_ζ *sont de rang zéro,* b'_ζ *et* b''_ζ *sont des nombres de* K. *Nous conviendrons de les choisir égaux à* 1. Δ_ζ *est alors un nombre de* K *bien déterminé au facteur près* ± 1. Ce nombre n'est pas autre chose que la « torsion » de W. Franz.

Considérons en particulier le cas où chaque classe d'homologie est invariante par γ. Alors B'_ζ et B''_ζ se réduisent à zéro pour $\zeta \neq 1$, tandis que $B'_1 = B'$ et $B''_1 = B''$. Il existe des bases de B' et de B'' qui sont en même temps des bases pour les groupes des classes d'homologie qui contiennent des chaînes fermées à coefficients entiers. Ces bases définissent des volumes b' et b'' qui sont déterminés au signe près. La valeur correspondante de Δ_1 est alors aussi déterminée au signe près.

3. **L'invariance des Δ_ζ.** — Nous allons établir que les Δ_ζ sont invariants dans certaines transformations du complexe à automorphismes. Avant de définir ces transformations, il convient d'établir quelques lemmes.

On dira qu'un complexe est *homologiquement trivial*, si ses groupes d'homologie, avec l'anneau des entiers rationnels comme domaine de coefficients, se réduisent à zéro.

Lemme 1. — Si C est un sous-complexe fermé de $\overline{C}$ et si $\overline{C}$ (mod C) est homologiquement trivial, les groupes d'homologie de C sont canoniquement isomorphes à ceux de $\overline{C}$. Et réciproquement.

Soit en effet $\bar{c}$ une chaîne fermée (mod C); elle borde (mod C) une chaîne $\bar{c}_1$, de sorte que $\mathfrak{L}\bar{c}_1 = \bar{c} - c_1$, c_1 étant une chaîne de C. Cela montre d'abord que toute chaîne fermée $\bar{c}$ de $\overline{C}$ est homologue à une chaîne c_1 de C; ensuite que si une chaîne de C borde une chaîne $\bar{c}$ de $\overline{C}$, elle borde une chaîne c_1 de C. Ces deux faits entraînent que l'homomorphisme canonique des groupes d'homologie de C dans ceux de $\overline{C}$ est un isomorphisme sur.

Réciproquement, supposons que cet homomorphisme soit un isomorphisme sur. Soit $\bar{c}$ une chaîne fermée (mod C); $\mathfrak{L}\bar{c}$ est une chaîne de C qui, bordant dans $\overline{C}$, doit aussi border une chaîne c de C; $\bar{c} - c$ est alors une chaîne fermée de $\overline{C}$ qui doit être homologue à une chaîne c_1 de C, de sorte que $\bar{c} - c - c_1 = \mathfrak{L}\bar{c}_1$ et $\bar{c}$ borde (mod C) $\bar{c}_1$. Cela entraîne que $\overline{C}$ (mod C) est homologiquement trivial.

Lemme 2. — Les modules C′ et C″ d'un complexe homologiquement trivial, possèdent des bases formées par des chaînes f'_i, g'_j et f''_j, g''_i respectivement ($i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$), telles que $f'_i = \mathfrak{L}g''$ et $f''_j = \mathfrak{L}g'_j$, qu'on obtient en effectuant des substitutions unimodulaires à coefficients entiers sur les cellules de dimensions impaire et paire respectivement.

En effet, soient f_i ($i = 1, \ldots, n$) des chaînes formant une base pour le groupe additif des chaînes fermées à coefficients entiers, et soit g_i une chaîne à coefficients entiers bordée par f_i. Une telle chaîne existe parce que le complexe est homologiquement trivial. Si c est une chaîne quelconque à coefficients entiers, f son bord, on a $f = \sum x_i f_i$ et, $c - \sum x_i g_i$ étant fermée, $c = \sum x_i g_i + \sum y_i f_i$, les x_i et les y_i étant entiers. Ces $2n$ chaînes f_i, g_i forment donc une base pour le groupe additif de toutes les chaînes à coefficients entiers et se déduisent par suite des cellules au moyen d'une substitution unimodulaire à coefficients entiers. Le lemme résulte immédiatement de là en séparant les chaînes f_i en chaînes de dimension impaire et de dimension paire.

Lemme 3. — Si le complexe C_2 se déduit du complexe C_1 en subdivisant une cellule, on peut construire un complexe C dont C_1 et C_2 sont des sous-complexes fermés tels que C (mod C_1) et C (mod C_2) soient homologiquement triviaux.

Soit a^q la cellule de C_1, de dimension q, subdivisée dans le passage à C_2. C_2 contient toutes les cellules de C_1 sauf a^q, et en plus d'autres cellules, de dimension $\leqslant q$, qui proviennent de la subdivision ; il existe une chaîne de dimension q formée avec ces dernières cellules, que l'on désigne par Sd. a^q, ayant même bord que a^q. Formons alors un complexe C avec toutes les cellules de C_1 et de C_2 et encore une nouvelle cellule a^{q+1} bordée par a^q — Sd. a^q. Le complexe C (mod C_2) qui se réduit aux deux cellules a^{q+1} et a^q dont la seconde borde (mod C_2) la première, est homologiquement trivial, et il en est de même de C (mod C_1).

Définition. — Un complexe à automorphismes sera dit *simple*, s'il contient un sous-complexe fermé homologiquement trivial dont les cellules forment un système fondamental.

Un tel complexe se compose de h sous-complexes fermés isomorphes entre eux, qui sont permutés circulairement par γ, et il est lui-même homologiquement trivial. Ses modules d'homologie se réduisant à zéro, Δ_ζ est un nombre de K, bien déterminé au facteur près $\pm \zeta^q$.

Lemme 4. — Les invariants Δ_ζ d'un complexe à automorphismes qui est simple sont tous égaux à un.

Soit C_1 un sous-complexe fermé homologiquement trivial dont les cellules forment un système fondamental. En appliquant à ce complexe C_1 le lemme 2, on obtient des chaînes f'_i, f''_j, g'_j, g''_i qui forment des bases relativement à A des modules C′ et C″ du complexe C. Les chaînes $e_\zeta f'_i$, $e_\zeta g'_j$ ($i = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, q$) forment alors une base de C'_ζ et leur produit extérieur est un volume distingué c'_ζ. Le produit extérieur des chaînes $e_\zeta f'_i$ ($i = 1, \ldots, p$) est un volume h'_ζ dans H'_ζ et le produit extérieur des chaînes $e_\zeta g'_i$ représente un volume dans C'_ζ/H'_ζ qui est égal à c'_ζ/h'_ζ. Soient c''_ζ et h''_ζ les volumes définis d'une manière analogue dans C''_ζ et H''_ζ. La relation $f'_i = \mathfrak{L}g''_i$ montre qu'on a $\mathfrak{L}c''/h'' = h'$; on a de même $\mathfrak{L}c'/h' = h''$, d'où résulte $\Delta_\zeta = 1$.

Définition. — $\overline{C}$ étant un complexe à automorphismes et C un sous-complexe fermé de $\overline{C}$ invariant par l'automorphisme γ, on dira que $\overline{C}$ est une *extension simple* de C si $\overline{C}$ (mod C) est simple.

Nous appellerons aussi extension simple l'opération qui consiste à passer de C à $\overline{C}$. D'après le lemme 1, nous pouvons *identifier* les modules d'homologie de C et ceux de $\overline{C}$.

Théorème 1. — *Si $\overline{C}$ est une extension simple de* C, *les invariants Δ_ζ relatifs à* C *sont égaux aux invariants analogues $\overline{\Delta}_\zeta$ relatifs à $\overline{C}$.*

Désignons par $\overline{C}'_\zeta, \ldots$, respectivement $\underline{C}'_\zeta, \ldots$, les modules relatifs à $\overline{C}$, respectivement $\overline{C}$ (mod C), analogues aux modules $C'_\zeta, \ldots$, relatifs à C, et pour alléger l'écriture supprimons l'indice ζ qui sera sous-entendu jusqu'à la fin de la démonstration. Un volume distingué $\underline{c}'$ dans $\overline{C}'$ peut être représenté par le produit $\overline{c}' = c'\underline{c}'$ de volumes distingués dans C' et $\underline{C}'$. De même, on peut écrire $\overline{h}' = h'\underline{h}'$, où $\overline{h}'$, h' et $\underline{h}'$ sont des volumes dans $\overline{H}'$, H' et $\underline{H}'$ respectivement. $\overline{B}'$ étant identifié à B' et $\underline{B}'$ se réduisant à zéro, on a $\overline{b}' = b'$ et $\underline{b}' = 1$. On a des relations analogues en remplaçant $'$ par $''$ et l'on obtient

$$\frac{\mathfrak{L}\overline{c}''/\overline{h}''\overline{b}''}{\overline{h}'} = \frac{\mathfrak{L}c''/h''b''}{h'}\,\frac{\mathfrak{L}\underline{c}''/\underline{h}''}{\underline{h}'}$$

et une autre relation qui se déduit de celle-là en échangeant les signes $'$ et $''$. Ces deux dernières relations entraînent $\overline{\Delta}_\zeta = \Delta_\zeta\underline{\Delta}_\zeta$, où $\underline{\Delta}_\zeta$ est l'invariant relatif à $\overline{C}$ (mod C) qui se réduit à 1 par hypothèse, d'où finalement $\overline{\Delta}_\zeta = \Delta_\zeta$.

D'après ce théorème, si l'on peut passer d'un complexe à automorphismes à un autre par un nombre fini d'extensions simples et d'opérations qui sont l'inverse d'une extension simple, on sera assuré que ces deux complexes à automorphismes ont les mêmes invariants

Δ. En particulier, l'opération qui consiste à subdiviser de manières correspondantes les cellules d'un cycle se ramène aisément, en vertu du lemme 3, à une extension simple suivie d'une opération inverse; elle n'altère donc pas les invariants Δ_ζ.

4. Recouvrements convexes d'une variété différentiable. — Soit V une variété compacte, différentiable de classe C^r ($r \geqslant 3$). Étant donnée une métrique riemannienne sur V, c'est-à-dire un ds^2 défini positif, dont les coefficients sont supposés de classe C^2 (c'est-à-dire ayant des dérivées secondes continues, par rapport aux coordonnées locales), on sait qu'il existe un nombre positif ρ tel que, si la distance de deux points de V est $< \rho$, ils sont les extrémités d'un arc géodésique de longueur $< \rho$ et d'un seul. Un ensemble E de V sera dit *convexe*, par rapport à ce ds^2, si tout arc de géodésique de longueur $< \rho$ dont les extrémités appartiennent à E est contenu tout entier dans E. Nous considérerons des ensembles convexes ouverts de diamètre $< \rho$; on démontre facilement qu'un tel ensemble est homéomorphe à la boule ouverte (intérieur d'une sphère euclidienne) et l'intersection d'un nombre fini de tels ensembles, si elle n'est pas vide, est encore un ensemble ouvert convexe.

Définition. — On appellera *recouvrement convexe de* V tout recouvrement fini de V par des ensembles ouverts qui sont convexes et de diamètre $< \rho$ relativement à un même ds^2.

Lemme 5. — La boule B_r définie dans l'espace $Ox_1 \cdots x_n$ par $\sum x_i^2 < r^2$ est un ensemble convexe par rapport à un ds^2 donné (à coefficients de classe C^2), pourvu que r soit assez petit.

Les géodésiques du ds^2 donné ont, relativement à la métrique euclidienne définie par $\sum dx_i^2$, une courbure euclidienne qui, au voisinage du point O, est bornée par un nombre positif A. Supposons $r < 1/A$. S'il y avait un arc géodésique de longueur $< \rho$ joignant deux points x et y de B_r et sortant de B_r, en déplaçant y vers x à l'intérieur de B_r, on obtiendrait à un instant un arc géodésique tangent intérieurement à la sphère euclidienne qui limite B_r; sa courbure au point de contact serait supérieure à A, ce qui est impossible.

Il résulte immédiatement de ce lemme que chaque point de V est contenu dans un ensemble ouvert convexe par rapport à un ds^2

donné, et aussi par rapport à deux ds^2 distincts donnés. En tenant compte du théorème de Borel-Lebesgue, on voit qu'*il existe des recouvrements convexes de* V, *qui sont convexes à la fois par rapport à deux* ds^2 *donnés.*

Soit R un recouvrement convexe de V, formé par les ensembles U_i ($i = 1, \ldots, m$). Le *nerf* de R est un complexe simplicial N, dont les sommets S_i correspondent biunivoquement aux ensembles U_i, plusieurs sommets appartenant à un même simplexe de N si les ensembles correspondants ont une intersection non vide, et dans ce cas seulement. Nous représenterons N dans l'espace numérique à m dimensions, en plaçant le sommet S_i correspondant à U_i sur le point unité du i-ième axe de coordonnées Ox_i.

THÉORÈME 2. — *Le nerf d'un recouvrement convexe de* V *a le même type d'homotopie que* V.

Ce théorème m'a été communiqué par A. Weil, et c'est à lui qu'est due la démonstration qui suit (6). Il est contenu dans une proposition plus générale, mais de démonstration plus difficile, de K. Borsuk (7).

Dire que V et N ont le même type d'homotopie, c'est dire qu'il existe une application φ de V dans N et une application f de N dans V, telles que $f\varphi$ et φf sont homotopes à l'identité (toutes les applications envisagées sont supposées continues).

Soit $\Psi_i(y)$ une fonction continue dans V, nulle hors de U_i et strictement positive dans U_i. On peut construire une telle fonction pour chaque indice i. La fonction $\varphi_i(y) = \Psi_i(y)/\sum \Psi_j(y)$ est aussi continue, nulle hors de U_i, strictement positive dans U_i, et l'on a la partition de l'unité $\sum \varphi_i(y) = 1$ dans V. A cette partition est associée l'*application* φ *de* V *dans* N qui applique le point y de V sur le point x de N de coordonnées $x_i = \varphi_i(y)$, ($i = 1, \ldots, m$). L'application associée à toute autre partition de l'unité en fonctions $\bar{\varphi}_i(y)$ jouissant des mêmes propriétés est homotope à φ, comme on le voit en considérant l'application associée à la partition en les fonctions $t\bar{\varphi}_i(y) + (1 - t)\varphi_i(y)$ et faisant varier t de 0 à 1. Par suite, *l'application* φ *détermine un homomorphisme canonique des groupes*

(6) A. Weil, Manuscrit non publié.

(7) K. Borsuk, On the Imbedding of Systems of Compacta in Simplicial Complexes (*Fundamenta Mathematicae*, vol. 35 (1948), p. 217-234.

d'homologie de V *dans ceux de* N. On verra que cet homomorphisme est en fait un isomorphisme sur.

Considérons la subdivision barycentrique N′ de N. Les sommets d'un simplexe σ de N′ sont les barycentres de simplexes de N qu'on peut ordonner de manière que chacun soit une face du suivant. Soient S_i, ..., S_j les sommets du premier simplexe de cette suite. Associons à σ l'ensemble $E(\sigma) = U_i \cap \cdots \cap U_j$, intersection des ensembles de R correspondant à ces sommets. Il est clair que si σ' est une face de σ, $E(\sigma') \subset E(\sigma)$. Si l'un des sommets de σ est un sommet S_i de N, en particulier si σ se réduit à S_i, $E(\sigma) = U_i$.

Montrons qu'on peut construire *une application f de* N *dans* V, *telle que, pour tout simplexe σ de* N′, $f\sigma \subset E(\sigma)$. On définit d'abord f aux sommets de N′, en choisissant arbitrairement l'image de chacun de ces sommets dans l'ensemble associé. Ensuite, on étend sucessivement la définition de f aux simplexes de N′ de dimensions 1, 2, ..., en respectant la condition $f\sigma \subset E(\sigma)$. Cela est possible; supposons en effet f définie sur le squelette à p dimensions de N′, et soit σ un simplexe de dimension $p+1$; en vertu de la condition imposée, f applique la frontière de σ dans $E(\sigma)$ qui est homéomorphe à une boule, et l'on peut par suite prolonger f à l'intérieur de σ de manière que $f\sigma \subset E(\sigma)$.

L'application $f\varphi$ de V *en elle-même est homotope à l'identité*. En effet, soit y un point de V, σ le simplexe de N′ qui contient φy ; $E(\sigma)$ étant contenu dans l'un des ensembles U_i qui contient y, les points y et $f\varphi y$ sont les extrémités d'un arc géodésique de longueur $< \rho$, qui varie d'une manière continue avec y; en déplaçant $f\varphi y$ vers y le long de cet arc, on déforme f en l'identité,

Il reste à prouver que *l'application φf de* N *en lui-même est homotope à l'identité*. Pour cela, considérons les simplexes s et σ de N et N′ respectivement qui contiennent à leur intérieur un point donné x de N. Comme $E(\sigma)$ est contenu dans l'un des ensembles de R correspondant aux sommets de s, soit U_k, on a $fx \in U_k$ et par suite $\varphi_k(fx) > 0$. La k-ième coordonnée de x, $x_k(x)$, est aussi positive, puisque x est à l'intérieur de s. Soit $h_i(x)$ le plus petit des deux nombres $\varphi_i(fx)$ et $x_i(x)$; pour chaque x il y a un indice k tel que $h_k(x) > 0$, par suite $\sum h_j(x)$ est une fonction continue et strictement positive sur N. Soit g l'application de N en lui-même qui applique x sur le point gx dont la i-ième coordonnée est

$$g_i(x) = h_i(x) / \sum h_j(x).$$

En considérant les applications de N en lui-même qui appliquent x sur les points dont la i-ième coordonnée est $tg_i(x) + (1 - t)\varphi_i(fx)$ et $tx_i(x) + (1 - t)g_i(x)$ respectivement et faisant varier t de 0 à 1, on voit que φf est homotope à g et g homotope à l'identité, d'où résulte notre affirmation.

Un corollaire immédiat de ce théorème est que l'homomorphisme des groupes d'homologie déterminé par φ est un *isomorphisme canonique des groupes d'homologie de* V *sur ceux de* N. Nous pourrons par suite identifier les groupes d'homologie du nerf de tout recouvrement convexe de V à ceux de V.

5. **Transformations topologiques différentiables.** — Considérons une transformation topologique T de la variété V en elle-même, différentiable de classe C^3, qui engendre un groupe cyclique d'ordre fini h de transformations sans points fixes (sauf la transformation identique T^h). On appellera *recouvrement convexe de* (V, T) tout recouvrement R de V qui est convexe au sens précédent par rapport à un ds^2 invariant relativement à T, et tel que, quel que soit l'ensemble U de R, ses h transformés T^kU ($k = 0, 1, \ldots, h-1$) appartiennent aussi à R et sont deux à deux sans points communs.

L'existence de tels recouvrements résulte du lemme 5. En effet, si l'on a un recouvrement de V formé d'ensembles ouverts suffisamment petits et convexes par rapport à un ds^2 invariant relativement à T, en lui adjoignant les transformés de ses ensembles par les puissances de T, on obtient un recouvrement convexe de (V, T). On voit de même qu'*il existe de tels recouvrements qui sont convexes par rapport à deux ds^2 invariants distincts donnés.*

La transformation T se traduit sur le nerf d'un recouvrement convexe de (V, T) par un automorphisme γ. Ce nerf est par suite un complexe à automorphismes. Les modules d'homologie de deux recouvrements convexes de (V, T), étant canoniquement isomorphes à ceux de V, sont canoniquement isomorphes entre eux. De plus, cet isomorphisme est un A-isomorphisme, c'est-à-dire qu'il est permutable avec γ. On peut par suite identifier les modules d'homologie des nerfs de deux recouvrements convexes de (V, T).

THÉORÈME 3. — *Les nerfs de deux recouvrements convexes de* (V, T) *ont les mêmes invariants* Δ_ζ.

Soient R et R′ deux recouvrements convexes de (V, T). Montrons d'abord qu'on peut les réunir par une suite de recouvrements convexes de (V, T) telle que chacun se déduit du précédent en ajoutant ou en enlevant un cycle de h ensembles permutés circulairement par T. R et R′ sont convexes relativement à deux ds^2 invariants distincts, mais, comme on l'a remarqué, il existe un recouvrement convexe de (V, T), R″, qui est convexe par rapport à chacun des deux ds^2. Cela étant, on passe de R à R ∪ R″ en ajoutant successivement les cycles d'ensembles de R″, puis de R ∪ R″ à R″ en enlevant successivement les cycles d'ensembles de R, et l'on passe ensuite d'une manière analogue de R″ à R″ ∪ R′ et à R′, ce qui établit notre assertion.

Il suffit dès lors de prouver que les nerfs N et N′ de deux recouvrements convexes de (V, T), R et R′, dont le second se déduit du premier par l'adjonction d'un cycle de h ensembles, ont les mêmes invariants Δ_ζ. Pour cela, en vertu du théorème 1, il suffit de vérifier que N′ est une extension simple de N.

Il est clair que N est un sous-complexe fermé de N′. Soit U, TU, ..., $T^{h-1}U$ le cycle d'ensembles appartenant à R′ et pas à R, et S, γS, ..., $\gamma^{h-1}S$ les sommets correspondants de N′. Soit R_1 le recouvrement de V obtenu en adjoignant seulement U à R, et N_1 le nerf de R_1. Les simplexes de N′ qui n'appartiennent pas à N sont ceux qui contiennent l'un des h sommets $\gamma^k S$, ceux qui appartiennent à N_1 et pas à N sont ceux qui contiennent le sommet S. Il n'existe pas de simplexe de N′ contenant deux des sommets $\gamma^k S$, puisque les ensembles correspondants $T^k U$ ne se coupent pas. Il résulte de là que N_1 (mod N) est un sous-complexe fermé de N′ (mod N), dont les cellules forment un système fondamental pour N′ (mod N), et qui d'autre part est homologiquement trivial, en vertu du lemme 1 (réciproque) parce que les modules d'homologie de N_1 sont canoniquement isomorphes à ceux de N. Ainsi N′ (mod N) est simple et N′ est une extension simple de N, ce qui achève la démonstration.

D'après ce théorème, les invariants Δ_ζ d'un recouvrement convexe de (V, T) sont des invariants attachés au système (V, T). Soit $\overline{T}$ une autre transformation topologique de V en elle-même, différentiable de classe C^3, qui engendre comme T un groupe cyclique d'ordre h de transformations sans points fixes. Supposons qu'il existe un homéomorphisme f de V sur elle-même, différentiable de classe C^3, qui change T en $fTf^{-1} = \overline{T}$. Alors f applique isomorphiquement les modules d'homologie B'_ζ et B''_ζ relatifs à (V, T) sur ceux relatifs à $(V, \overline{T})$ et à des volumes b'_ζ et b''_ζ dans les premiers correspondent des volumes fb'_ζ et fb''_ζ dans les derniers. De plus, f change tout recouvrement convexe de (V, T) en un recouvrement convexe de $(V, \overline{T})$. Il en résulte que l'invariant $\Delta_\zeta = \Delta(b'_\zeta/b''_\zeta)$ attaché à (V, T) est égal, au facteur près $\pm\zeta^q$, à l'invariant analogue

$$\overline{\Delta}_\zeta = \Delta(fb'_\zeta/fb''_\zeta)$$

attaché à $(V, \overline{T})$, calculé pour les volumes correspondants.

6. **Invariance vis-à-vis des homéomorphismes de classe C^1.** — Nous avons supposé l'homéomorphisme f de classe C^3. En réalité, *il suffit qu'il soit de classe* C^1, car on peut prouver que, s'il existe un homéomorphisme f de classe C^1 satisfaisant à $fTf^{-1} = \overline{T}$, il en existe un de classe C^3 satisfaisant à la même condition.

Soient W et $\overline{W}$ les variétés qui se déduisent de V en identifiant les points équivalents par rapport aux groupes engendrés par T et $\overline{T}$ respectivement. D'après un théorème bien connu de H. Whitney, on peut représenter W et $\overline{W}$ par des variétés de classe C^∞ (et même analytiques) dans un espace euclidien E. Si g est une application topologique de classe C^1 de W sur $\overline{W}$, on peut prolonger g en une application G de classe C^1 de E en lui-même. G peut être approchée par une suite d'applications de classe C^∞ (et même analytiques) $G_m (m = 1, 2, \ldots)$ de E en lui-même, de manière que, pour $m \to \infty$, les coordonnées dans E de $G_m x$ et leurs dérivées premières par rapport aux coordonnées de x tendent uniformément vers les coordonnées et dérivées correspondantes de Gx. Si m est assez grand, pour $x \in W$, $G_m x$ est très voisin de $\overline{W}$ et a sur $\overline{W}$ une projection orthogonale bien déterminée $g_m x$. Cela définit une application g_m de W dans $\overline{W}$, qui est de classe C^∞ ; c'est une application sur $\overline{W}$ parce qu'elle a le même degré que g, qui est ± 1, et elle est topologique, car son jacobien ne peut s'annuler (pour m assez grand).

Cela étant, un homéomorphisme f de classe C^1, satisfaisant à $fTf^{-1} = \overline{T}$, induit une application topologique g de classe C^1 de W sur $\overline{W}$, et l'application g_m qui approche g est induite par un homéomorphisme f_m, qui satisfait à $f_m T f_m^{-1} = \overline{T}$, et qui est de classe C^3.

En conclusion, nous voyons que, s'il existe un homéomorphisme f de V sur elle-même, de classe C^1, satisfaisant à

$$fTf^{-1} = \overline{T},$$

on a l'égalité $\Delta(b'_\zeta/b''_\zeta) = \Delta(fb'_\zeta/fb''_\zeta)$ entre les invariants attachés à (V, T) et à (V, $\overline{T}$).

7. **Rotations de la sphère.** — Considérons le cas où V est la sphère à $2n - 1$ dimensions et T une rotation. Rappelons comment l'on obtient une subdivision polyèdrale invariante par T ([8]) ([9]).

En introduisant des coordonnées complexes $z_1, \ldots, z_n$ dans l'espace euclidien E^{2n} contenant V, on peut ramener les équations de la rotation T à $z'_k = \zeta_k z_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, l'équation de V étant

$$\sum |z_k|^2 = 1.$$

Les nombres ζ_k et ζ_k^{-1} sont les racines caractéristiques de T ; avec nos hypothèses, ce sont des racines primitives h-ièmes de l'unité. Soit l_k un entier tel que $\zeta_k^{l_k} = e^{2i\pi/h}$; les $2n$ entiers (mod h) l_k et $-l_k$ déterminent les racines caractéristiques.

Soit a^{2k-2} la cellule définie dans V par les équations

$$z_1 = \cdots = z_{n-k} = 0, \qquad \arg z_{n-k+1} = 0$$

et a^{2k-1} celle définie par

$$z_1 = \cdots = z_{n-k} = 0, \qquad 0 < \arg z_{n-k+1} < 2\pi/h.$$

Les cellules a^q $(q = 0, 1, \ldots, 2n-1)$ et leurs transformées $\gamma^j a^q$ par les T^j $(j = 1, \ldots, h-1)$ fournissent une subdivision polyèdrale invariante qui définit un complexe à automorphismes P. En orientant convenablement ces cellules, on a

$$\mathfrak{L}a^{2k-1} = (\gamma^{l_k} - 1)a^{2k-2}, \qquad \mathfrak{L}a^{2k-2} = (1 + \gamma + \cdots + \gamma^{h-1})a^{2k-3},$$

d'où résulte, pour $\zeta \neq 1$,

$$\mathfrak{L}e_\zeta a^{2k-1} = (\zeta^{l_k} - 1)e_\zeta a^{2k-2}, \qquad \mathfrak{L}e_\zeta a^{2k-2} = 0,$$

([8]) G. de Rham, Sur les nouveaux invariants topologiques de M. Reidemeister (*Recueil Mathématique*, Moscou 1936, t. I (43), p. 737-743).

([9]) G. de Rham, Sur les conditions d'homéomorphie de deux rotations de la sphère à n dimensions et sur les complexes avec automorphismes (*Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique*, XII, *Topologie Algébrique*, p. 87-95).

et, pour $\zeta = 1$,

$$\mathfrak{L}e_1 a^{2k-1} = 0, \qquad \mathfrak{L}e_1 a^{2k-2} = he_1 a^{2k-3}.$$

On est dans le cas examiné à la fin du n° 2, les modules B'_ζ et B''_ζ se réduisent à zéro pour $\zeta \neq 1$, les chaînes fermées $he_1 a^{2n-1}$ et $e_1 a^0$ fournissent des bases des modules $B'_1 = B'$ et $B''_1 = B''$ respectivement dans lesquels elles définissent des volumes. On obtient alors les valeurs suivantes pour les invariants du complexe à automorphismes P :

$$\Delta_\zeta = \prod_{k=1}^{n} (\zeta^{l_k} - 1)^{-1}$$

pour $\zeta \neq 1$ et

$$\Delta_1 (he_1 a^{2n-1} / e_1 a^0) = h^n.$$

Pour nous assurer que les valeurs ainsi obtenues sont bien les invariants Δ_ζ du nerf d'un recouvrement convexe de (V, T), en vertu de la remarque faite après le théorème 1 concernant l'invariance des Δ_ζ dans une subdivision, il suffit de vérifier qu'il existe un recouvrement convexe de (V, T) dont le nerf est isomorphe à une subdivision de P. Pour cela, remarquons que les cellules a^q sont découpées sur la sphère V par des variétés planes de E^{2n} qui passent par l'origine O. On peut les décomposer en simplexes qui sont également découpés par des variétés planes passant par o, et en décomposant de manière correspondante les transformées d'une même cellule, on obtient un complexe simplicial invariant C qui est une subdivision de P et qui a par suite les mêmes invariants Δ_ζ.

Relativement à la métrique induite sur V par la métrique euclidienne de E^{2n}, les ensembles convexes de V sont découpés par des cônes convexes de sommet O dans E^{2n}. Soit s un simplexe de C, B_s la projection centrale sur V de la boule de rayon ε centrée au barycentre des sommets de s dans E^{2n} et U_s l'intérieur du plus petit ensemble convexe sur V contenant s et B_s.

Chaque point intérieur de s appartient à U_s, quel que soit $\varepsilon > 0$. Si s_1 est une face de s_2, $U_{s_1} \cap U_{s_2}$ n'est pas vide. Au contraire, si s_1 n'est pas une face de s_2 ni s_2 une face de s_1, $U_{s_1} \cap U_{s_2}$ est vide pourvu que ε soit assez petit. En effet, si s_1 et s_2 n'ont pas de sommet commun, cela est clair ; si s_1 et s_2 ont des sommets communs, on peut construire un hyperplan de E^{2n} qui passe par o et par ces sommets communs et qui partage V en deux demi-sphères contenant respectivement à leur intérieur les intérieurs de s_1 et s_2 ; si ε est assez petit, ces demi-sphères contiennent respectivement B_{s_1} et B_{s_2}, et par suite U_{s_1} et U_{s_2} qui ne pourront avoir de point commun.

De là résulte que, si ε est assez petit, les ensembles U_s forment un recouvrement convexe de (V, T) dont le nerf est isomorphe à la subdivision barycentrique de C, qui est évidemment aussi une subdivision de P. Les invariants Δ_ζ qui viennent d'être calculés sont donc bien ceux de tout recouvrement convexe de (V, T).

Considérons alors une autre rotation $\overline{T}$ de V, dont les équations ont la même forme que celles de T, pour laquelle les restes (mod h) qui déterminent les racines caractéristiques sont $\overline{l}_k$, $-\overline{l}_k$. S'il existe un homéomorphisme différentiable f de V en elle-même tel que $fTf^{-1}=\overline{T}$, on aura, pour chaque racine h-ième de l'unité ζ,

$$\prod_{k=1}^{n}(\zeta^{l_k}-1)=\pm\zeta^q\prod_{k=1}^{n}(\zeta^{\overline{l}_k}-1).$$

De là résulte, comme l'a démontré W. Franz [10], que l'ensemble des restes (mod h)l_k, $-l_k$ est identique à l'ensemble des restes $\overline{l}_k$, $-\overline{l}_k$, ce qui entraîne l'existence d'une rotation r de V telle que $rTr^{-1}=\overline{T}$: *si les rotations* T *et* $\overline{T}$ *sont différentiablement homéomorphes, elles sont isométriques.*

Ces relations entraînent aussi la congruence

$$l_1l_2\cdots l_k\equiv\pm\overline{l}_1\overline{l}_2\cdots\overline{l}_n \pmod h,$$

et en considérant l'invariant Δ_1, on voit que le signe est + ou — selon que f conserve ou renverse l'orientation. On en déduit aisément que la rotation r conserve ou renverse l'orientation en même temps que f.

8. **Formes de Clifford de l'espace sphérique.** — Soit W une variété à courbure constante positive, c'est-à-dire une forme de Clifford de l'espace sphérique, à un nombre impair de dimensions [11]. Son revêtement universel est la sphère et les transformations de revêtement forment un groupe fini Γ de rotations sans points fixes. Soit $\overline{W}$ une autre variété analogue et $\overline{\Gamma}$ le groupe cor-

[10] *Loc. cit.* (2).

[11] Sur la détermination des formes de Clifford de l'espace sphérique, voir : G. Vincent, Les groupes linéaires finis sans points fixes (*Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 20, p. 117-171).

respondant. Si W est différentiablement homéomorphe à $\overline{W}$, Γ est isomorphe à $\overline{\Gamma}$ et il existe un homéomorphisme différentiable f de la sphère en elle-même tel que $f\Gamma f^{-1}=\overline{\Gamma}$. On peut alors considérer Γ et $\overline{\Gamma}$ comme deux représentations linéaires d'un même groupe abstrait G, de manière que si $\Gamma(\xi)$ et $\overline{\Gamma}(\xi)$ sont les rotations qui représentent le même élément ξ de G, on ait $f\Gamma(\xi)f^{-1}=\overline{\Gamma}(\xi)$. Les rotations $\Gamma(\xi)$ et $\overline{\Gamma}(\xi)$ ont par suite les mêmes racines caractéristiques, en vertu du n° 7, et les deux représentations, ayant même caractère, sont équivalentes. Cela entraîne l'existence d'une rotation r telle que $r\Gamma(\xi)r^{-1}=\overline{\Gamma}(\xi)$ pour chaque ξ, et cette rotation x définit une isométrie de W sur $\overline{W}$, d'où le théorème: *deux formes de Clifford de l'espace sphérique qui sont différentiablement homéomorphes sont isométriques.*

(Parvenu aux Annales en février 1951.)