ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Mireille MARTIN-DESCHAMPS

Minimalité des courbes sous-canoniques

Tome 52, nº 4 (2002), p. 1027-1040.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_4_1027_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 4 (2002), 1027–1040

MINIMALITÉ DES COURBES SOUS-CANONIQUES

par Mireille MARTIN-DESCHAMPS

0. Introduction.

Dans cet article nous montrons le résultat suivant :

THÉORÈME 3.9. — *Soient $\mathbb{P}^3$ l'espace projectif de dimension 3 sur un corps k algébriquement clos, $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$, n un entier relatif tel que $H^0\mathcal{E}(n-1) = 0$ et $H^0\mathcal{E}(n) \neq 0$, C une courbe schéma des zéros d'une section non nulle de $\mathcal{E}(n)$. Alors C est une courbe minimale dans sa classe de biliaison.*

Ce résultat s'inscrit dans un contexte un peu plus large. Si $R = k[X, Y, Z, T]$ est l'anneau de polynômes associé à $\mathbb{P}^3$, il y a des liens forts entre les faisceaux cohérents (ou les fibrés) sur $\mathbb{P}^3$, les R-modules gradués de longueur finie et les courbes localement Cohen-Macaulay de $\mathbb{P}^3$.

Dans [HMDP], nous avons défini sur l'ensemble des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^3$ la relation d'équivalence de psi-équivalence. Grâce à des résultats d'Horrocks ([Ho]) et Rao ([R]), nous obtenons en particulier :

COROLLAIRE 1.9. — *L'application qui à une courbe C associe son faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$ induit une bijection de l'ensemble des classes de biliaison de courbes sur l'ensemble des faisceaux cohérents de dimension projective $\leqslant 1$ à psi-équivalence et tensorisation par une puissance du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ près.*

Mots-clés : Fibré – Biliaison – Courbe minimale – Courbe sous-canonique.
Classification math. : 14H50 – 14F05.

Sachant que chacun de ces deux ensembles possède des éléments minimaux, les courbes minimales d'une part, les faisceaux réflexifs de rang 2 minimaux (cf. 1.4) d'autre part, des questions naturelles se posent :

Question I. Dans une classe de biliaison, la courbe minimale est-elle le schéma des zéros d'une section d'un faisceau réflexif de rang 2?

La réponse est négative, comme on le voit facilement sur un contre-exemple (cf. [B]). Si M est un module de Koszul de type (n_1, n_2, n_3, n_4), c'est-à-dire un quotient de R par une suite régulière (f_1, f_2, f_3, f_4) où f_i est de degré n_i avec $n_1 \leqslant n_2 < n_3 \leqslant n_4$, la courbe minimale générale associée au module $M \oplus M$ n'est pas le schéma des zéros d'une section d'un faisceau réflexif de rang 2.

On peut reposer la question dans le cas particulier où il y a des fibrés dans la classe de psi-équivalence considérée. Utilisant la correspondance bijective entre les courbes qui sont le schéma des zéros d'une section d'un fibré de rang 2 et les courbes sous-canoniques ([H1]), on peut alors poser la question suivante :

Question II. Si une classe de biliaison contient des courbes sous-canoniques, la courbe minimale est-elle aussi sous-canonique?

Par exemple, dans la classe de biliaison associée à un module de Kozsul de type (n_1, n_2, n_3, n_4) avec $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$ et $n_1+n_4 = n_2+n_3$, la courbe minimale est sous-canonique.

Comme le montre A. Buraggina (cf. [B] 5), cette question est équivalente à la question suivante, qui nous a été posée par Hartshorne et Ellia, et à laquelle nous donnerons une réponse positive en 3.9 :

Question III. Soit $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$, n un entier relatif tel que $H^0\mathcal{E}(n-1) = 0$ et $H^0\mathcal{E}(n) \neq 0$, soit C une courbe schéma des zéros d'une section non nulle de $\mathcal{E}(n)$. Est-elle minimale dans sa classe de biliaison?

Au premier paragraphe, nous rappelons différentes relations d'équivalence sur des ensembles d'objets associés à $\mathbb{P}^3$ (isomorphisme stable, psi-équivalence, biliaison) et nous établissons les correspondances entre les ensembles quotients puis l'existence d'éléments minimaux. Une version détaillée de ces résultats se trouve dans [MD], c'est pourquoi nous ne redonnons pas ici les démonstrations.

Dans le deuxième paragraphe, nous étudions, pour toute courbe C tracée sur une surface Q, le faisceau $\mathcal{L}(C) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q)$, qui est un faisceau réflexif de $\mathcal{O}_Q$-modules associé à C considérée comme diviseur généralisé sur Q (cf. [H2]). Ses sections globales (à un twist près) sont liées aux biliaisons élémentaires que l'on peut faire à partir de la courbe (cf. 2.1) et à ses propriétés de minimalité.

Le troisième paragraphe est consacré à la preuve du résultat principal de cet article, à savoir : **la réponse à la question III est positive**. Le point clef est le lemme 3.6 qui permet de montrer qu'on ne peut pas faire une biliaison élémentaire descendante à partir de C.

Notations. — On désigne par k un corps algébriquement clos et par R l'anneau de polynômes $k[X, Y, Z, T]$. L'espace projectif $\mathbb{P}^3_k$ sera noté simplement $\mathbb{P}^3$ et son faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$. Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$-module nous noterons $h^i\mathcal{F}$ la dimension de l'espace vectoriel $H^i\mathcal{F}$, et $H^i_*\mathcal{F}$ le R-module gradué $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^i\mathcal{F}(n)$.

Un faisceau est *dissocié* s'il est somme directe de faisceaux inversibles $\bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n_i)$.

Une courbe C de $\mathbb{P}^3$ est un sous-schéma fermé purement de dimension 1, localement Cohen-Macaulay, défini par un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$. Son faisceau dualisant est le faisceau $\omega_C = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_C, \omega_P) = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})(-4)$.

On note $e(C) = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}$, $s_0(C) = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$.

Le module de Rao de C est le R-module gradué de longueur finie $M_C = H^1_*\mathcal{J}_C$. Il joue un rôle important dans la classification des courbes gauches.

Une courbe C est *minimale* dans sa classe de biliaison si son module de Rao a le décalage minimum, c'est-à-dire si pour toute courbe C' de la classe de biliaison de C on a $M_{C'} \simeq M_C(-h)$ avec $h \geqslant 0$.

Une courbe C est *sous-canonique* s'il existe un entier $a \in \mathbb{Z}$ et un isomorphisme : $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(a)$, où ω_C est le faisceau dualisant de C.

1. Des faisceaux cohérents aux courbes.

Le lecteur pourra trouver dans [MD] les démonstrations détaillées des résultats de ce paragraphe.

L'équivalence stable est définie sur l'ensemble des fibrés :

DÉFINITION 1.1. — *Deux fibrés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sur $\mathbb{P}^3$ sont dits stablement isomorphes s'il existe des fibrés dissociés $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ et un isomorphisme $\mathcal{F} \oplus \mathcal{L} \simeq \mathcal{F}' \oplus \mathcal{L}'$.*

Dans [HMDP], nous avons défini sur l'ensemble des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^3$ la notion de pseudo-isomorphisme :

DÉFINITION 1.2. — *Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ des faisceaux cohérents sur $\mathbb{P}^3$ et soit f un morphisme de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{N}'$. On dit que f est un pseudo-isomorphisme (en abrégé un psi) s'il induit :*

i) *un isomorphisme $H^0\mathcal{N}(n) \to H^0\mathcal{N}'(n)$ pour tout $n \ll 0$,*

ii) *un isomorphisme $H^1_*\mathcal{N} \to H^1_*\mathcal{N}'$,*

iii) *une injection $H^2_*\mathcal{N} \to H^2_*\mathcal{N}'$.*

Deux faisceaux cohérents seront dits pseudo-isomorphes s'il existe une chaîne de psi qui les joint.

On définit ainsi une relation d'équivalence appelée psi-équivalence, qui est une extension à l'ensemble des faisceaux cohérents de dimension projective $\leqslant 1$ de l'isomorphisme stable pour les fibrés vectoriels vérifiant $H^2_* = 0$, comme le montre l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1.3. — *L'application canonique de l'ensemble $\mathcal{S}tab$ des classes d'isomorphisme stable de fibrés $\mathcal{F}$ de $\mathbb{P}^3$ vérifiant $H^2_*\mathcal{F} = 0$ dans l'ensemble $\mathcal{P}si$ des classes de pseudo-isomorphisme de faisceaux cohérents de dimension projective (locale) $\leqslant 1$ est une bijection.*

Démonstration. — L'injectivité est une conséquence de [HMDP] 2.11 et 2.8, la surjectivité de [HMDP] 2.10.

Il y a donc des fibrés dans chaque classe de $\mathcal{P}si$. Il y a d'autres éléments remarquables, ce sont les faisceaux réflexifs de rang 2. D'après [HMDP] 2.10, ils sont tous obtenus comme quotient d'un fibré vectoriel par un sous-faisceau dissocié, et [MDP2] permet de les caractériser. On obtient en particulier le résultat suivant :

PROPOSITION 1.4. — *Il existe des faisceaux réflexifs de rang 2 dans chaque classe de $\mathcal{P}si$. L'ensemble de leurs premières classes de Chern a une borne inférieure, et les faisceaux qui atteignent cette borne ont tous la même cohomologie. On dira que ce sont les faisceaux réflexifs* **minimaux** *de la classe.*

Remarque 1.5. — Buraggina (cf. [B]) a montré que la troisième classe de Chern de ces faisceaux réflexifs minimaux est aussi minimale, et donc que s'il y a des fibrés de rang 2 dans la classe ($c_3 = 0$) ce sont les éléments minimaux et que dans ce cas tous les éléments minimaux sont des fibrés.

Le résultat suivant, qui est une conséquence facile de [Ho], établit un lien entre les fibrés et les R-modules gradués :

PROPOSITION 1.6 (Horrocks, cf. [Ho]). — *L'application qui envoie un R-module gradué de longueur finie sur le faisceau associé à son deuxième module de syzygies induit une bijection de $\mathcal{M}_f$, ensemble des classes d'isomorphisme de tels modules, dans $\mathcal{S}tab$. La bijection réciproque est induite par l'application qui envoie un fibré $\mathcal{F}$ sur son premier module de cohomologie $H^1_*\mathcal{F}$.*

COROLLAIRE 1.7. — *L'application qui envoie un faisceau $\mathcal{N}$ de dimension projective $\leqslant 1$ sur $H^1_*\mathcal{N}$ induit une bijection de $\mathcal{P}si$ sur $\mathcal{M}_f$.*

Passons maintenant aux courbes :

PROPOSITION 1.8 (Rao, cf. [R]). — *Soit $\mathcal{B}il$ l'ensemble des classes de biliaison de courbes de $\mathbb{P}^3$. L'application qui à une courbe C associe son module de Rao $H^1_*\mathcal{J}_C$ induit une bijection de $\mathcal{B}il$ sur le quotient de $\mathcal{M}_f$ par l'action de décalage des degrés.*

COROLLAIRE 1.9. — *L'application qui à une courbe C associe son faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$ induit une bijection de $\mathcal{B}il$ sur le quotient de $\mathcal{P}si$ par l'action de tensorisation par une puissance du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$.*

Il y a deux manières particulières de construire la bijection réciproque, correspondant aux deux types de représentants particuliers dans une classe, les fibrés et les faisceaux réflexifs de rang 2 :

– soit $\mathcal{F}$ un fibré; il existe un faisceau dissocié $\mathcal{P}$, un entier h, une courbe C et une suite exacte $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C(h) \to 0$ (dans [MDP2] on caractérise tous les faisceaux dissociés $\mathcal{P}$ qui conviennent). On associe à la classe de $\mathcal{F}$ la classe de biliaison de C.

– soit $\mathcal{N}$ un faisceau réflexif de rang 2; on lui associe la classe de biliaison d'une courbe obtenue comme schéma des zéros d'une section non nulle de $\mathcal{N}(n)$ pour un entier n bien choisi (en particulier si $H^0\mathcal{N}(n-1) = 0$ et $H^0\mathcal{N}(n) \neq 0$, toute section non nulle de $\mathcal{N}(n)$ convient).

2. Étude du dual de l'idéal d'une courbe tracée sur une surface.

Dans tout ce paragraphe, on désignera par Q une surface de degré s, non nécessairement intègre, de $\mathbb{P}^3$. Toute courbe C tracée sur Q, définie par un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$ et un faisceau d'idéaux relatif $\mathcal{J}_{C/Q}$, correspond à un diviseur généralisé effectif sur Q. On lui associe le faisceau réflexif de $\mathcal{O}_Q$-modules $\mathcal{L}(C) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q)$ (cf. [H2]).

Soit $h \in \mathbb{Z}$; une section de $\mathcal{L}(C)(h)$ est un homomorphisme $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$.

Les sections globales de $\mathcal{L}(C)$ (à un twist près) sont liées aux propriétés de minimalité de la courbe. En effet dans la description des classes de biliaison, on utilise l'opération de biliaison élémentaire, qui s'obtient en pratiquant deux liaisons successives, l'une des surfaces liantes étant commune aux deux liaisons. Plus précisément, on a le résultat suivant :

PROPOSITION 2.1. — *Soient C et C' deux courbes tracées sur Q et soit $h \in \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *C' est obtenue à partir de C par une double liaison par des intersections complètes d'idéaux (Q, S) et (Q, S') avec $\deg S' - \deg S = h$.*

2) *Il existe un homomorphisme injectif $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$ d'image $\mathcal{J}_{C'/Q}$.*

3) *On a un isomorphisme $\mathcal{L}(C)(h) \simeq \mathcal{L}(C')$.*

On a alors $M_C \simeq M_{C'}(h)$.

On dit que C' est obtenue à partir de C par une **biliaison élémentaire de hauteur h sur Q**, *ascendante (resp. descendante) si $h > 0$ (resp. $h < 0$).*

Démonstration. — Voir [MDP1] III.2.3 et [H2] 4.

Remarque 2.2. — Par dualité sur Q, un homomorphisme $u : \mathcal{J}_{C/Q}\,(-h) \to \mathcal{O}_Q$ est injectif si et seulement si le support (schématique) de la section correspondante u de $\mathcal{L}(C)(h)$ est égal à Q.

PROPOSITION 2.3. — *Soient C une courbe tracée sur Q, $h \in \mathbb{Z}$ et $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$ un homomorphisme. On a un diagramme commutatif* *de suites exactes de $\mathcal{O}_Q$-modules :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J}_{C/Q}(-h) & \xrightarrow{j} & \mathcal{O}_Q(-h) & \to & \mathcal{O}_C(-h) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle u^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \\ 0 & \to & \mathcal{O}_Q & \xrightarrow{j^\vee} & \mathcal{L}(C) & \to & \omega_C(4-s) & \to & 0 \end{array}$$

où $j : \mathcal{J}_{C/Q} \to \mathcal{O}_Q$ est l'injection canonique.

Démonstration. — Partant de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{J}_{C/Q} \xrightarrow{j} \mathcal{O}_Q \to \mathcal{O}_C \to 0$$

on obtient la première ligne en la tensorisant par $\mathcal{O}_Q(-h)$ et la deuxième ligne en lui appliquant le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\bullet, \mathcal{O}_Q)$. En effet, on a

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Q) = 0$$

et

$$\omega_C = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C, \omega_Q) = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_Q)(s-4).$$

L'égalité $u^\vee j = j^\vee u$, qui entraîne l'existence de θ, est une conséquence du lemme facile d'algèbre suivant :

LEMME 2.4. — *Soit A un anneau commutatif, J un idéal de A, j l'injection canonique de J dans A et u un homomorphisme A-linéaire de J dans A. Alors on a $u^\vee j = j^\vee u$.*

Démonstration. — Soient α et β deux éléments de J. On a

$$u^\vee j(\alpha)(\beta) = j(\alpha)u(\beta) = \alpha u(\beta) = u(\alpha\beta),$$
$$j^\vee u(\alpha)(\beta) = u(\alpha)j(\beta) = \beta u(\alpha) = u(\alpha\beta).$$

Gardant les notations de 2.3, on en déduit les deux résultats suivants, qui seront très utiles dans la suite :

COROLLAIRE 2.5. — *Pour tout entier strictement négatif h, on a un isomorphisme $\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q(h)) = H^0(\mathcal{L}(C)(h)) \simeq H^0\omega_C(4-s+h)$ qui à u associe θ.*

Démonstration. — Cela résulte de la suite exacte :

$$0 \to H^0\mathcal{O}_Q(h) \to \mathcal{H}om(\mathcal{J}_{C/Q}, \mathcal{O}_Q(h)) \to H^0\omega_C(4-s+h) \to 0.$$

COROLLAIRE 2.6. — *Soit C' une courbe contenue dans C. On a une injection canonique $\mathcal{L}(C') \subseteq \mathcal{L}(C)$. Alors u appartient à $H^0(\mathcal{L}(C')(h))$ si et seulement si θ se factorise à travers la projection $\mathcal{O}_C(-h) \to \mathcal{O}_{C'}(-h)$.*

Démonstration. — Soient $j' : \mathcal{J}_{C'/Q} \to \mathcal{O}_Q$ et $i : \mathcal{J}_{C/Q} \to \mathcal{J}_{C'/Q}$ les injections canoniques. Supposons que u se prolonge en $u' : \mathcal{J}_{C'/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{J}_{C/Q}(-h) & \xrightarrow{j} & \mathcal{O}_Q(-h) & \to & \mathcal{O}_C(-h) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{J}_{C'/Q}(-h) & \xrightarrow{j'} & \mathcal{O}_Q(-h) & \to & \mathcal{O}_{C'}(-h) & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle u'} & & \downarrow{\scriptstyle u'^{\vee}} & & \downarrow{\scriptstyle \theta'} & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_Q & \xrightarrow{j'^{\vee}} & \mathcal{L}(C') & \to & \omega_{C'}(4-s) & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle i^{\vee}} & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}_Q & \xrightarrow{j^{\vee}} & \mathcal{L}(C) & \to & \omega_C(4-s) & \to & 0.
\end{array}$$

L'égalité $i^{\vee}u'^{\vee} = u^{\vee}$ montre que la composée des trois flèches verticales de droite n'est autre que θ, qui se factorise comme annoncé.

Inversement, si θ se factorise à travers la projection $\mathcal{O}_C(-h) \to \mathcal{O}_{C'}(-h)$, le diagramme précédent dans lequel on supprime la troisième ligne nous donne l'existence de la flèche u'.

Remarque 2.7. — D'après 2.1 et 2.2, l'étude de la minimalité d'une courbe tracée sur Q est liée à l'existence de sections de $\mathcal{L}(C)(h)$ de support égal à Q avec h négatif. D'après 2.5, l'existence de sections non nulles de $\mathcal{L}(C)(h)$ est équivalente à l'existence de sections non nulles de $\omega_C(4-s+h)$, donc, puisqu'on a $H^0\omega_C(4-s+h) = H^1\mathcal{O}_C(s-4-h)$, à l'inégalité $h \geqslant s-4-e(C)$; il sera possible d'en obtenir avec $h < 0$ si et seulement si $s_0(C) \leqslant s < e(C)+4$. Il faut ensuite étudier quelles sont les sections non nulles et dont le support est strictement contenu dans Q, qui ne peuvent exister que si Q n'est pas intègre.

3. Minimalité des courbes sous-canoniques.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$, n un entier et C une courbe qui est le schéma des zéros d'une section non nulle de $\mathcal{E}(n)$. On a alors $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(2n+c_1-4)$, où c_1 est la première classe de Chern de $\mathcal{E}$. De plus, toute courbe sous-canonique peut s'obtenir de cette manière ([H1]).*

DÉFINITION 3.2. — *Une telle courbe est dite minimale pour $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E}(n-1)$ n'a pas de section globale non nulle.*

Nous allons tout d'abord établir plusieurs résultats techniques sur les courbes sous-canoniques, qui nous seront utiles pour la preuve du résultat fondamental (3.8).

LEMME 3.3. — *Soit C une courbe sous-canonique, et C' une courbe contenue dans C distincte de C. Alors il existe une courbe C'' contenue dans C et des isomorphismes : $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C \simeq \omega_{C''}(-\alpha)$, $\mathcal{J}_{C''}/\mathcal{J}_C \simeq \omega_{C'}(-\alpha)$ où α est l'entier qui vérifie $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(\alpha)$. De plus, $\mathcal{J}_{C''}$ (resp. $\mathcal{J}_{C'}$) est l'annulateur de $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$ (resp. $\mathcal{J}_{C''}/\mathcal{J}_C$).*

Démonstation. — On considère la suite exacte $0 \to \mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C'} \to 0$ et on lui applique le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\bullet, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$. Le support de $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$ étant de dimension 1, le faisceau $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ est nul. On obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C'}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to \mathcal{E}xt^2(\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to 0.$$

Sachant qu'on a des isomorphismes : $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C'}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \omega_{C'}(4)$, $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \omega_C(4) \simeq \mathcal{O}_C(\alpha+4)$, on en déduit un isomorphisme : $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4)$ où C'' est un sous-schéma fermé de C qui vérifie $\mathcal{J}_{C''}/\mathcal{J}_C \simeq \omega_{C'}(-\alpha)$.

D'autre part, en appliquant de nouveau le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\bullet, \mathcal{O}_{\mathbb{P}})$ à la suite exacte obtenue :

$$0 \to \omega_{C'}(4) \to \omega_C(4) \to \mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4) \to 0$$

et en tenant compte des isomorphismes canoniques $\mathcal{E}xt^2(\omega_C(4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \mathcal{O}_C$ et $\mathcal{E}xt^2(\omega_{C'}(4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \mathcal{O}_{C'}$ on obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C'} \to \mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_{C''}(\alpha + 4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \to 0$$

ce qui prouve que C'' n'est pas vide, que $\mathcal{E}xt^3(\mathcal{O}_{C''}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0$, donc que C'' est une courbe (localement Cohen-Macaulay) et que $\mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{C''}, (\alpha + 4), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}) \simeq \omega_{C''}(-\alpha) \simeq \mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$.

La deuxième assertion résulte du fait que l'annulateur de $\omega_{C'}$ (resp. $\omega_{C''}$) n'est autre que $\mathcal{J}_{C'}$ (resp. $\mathcal{J}_{C''}$).

LEMME 3.4. — *Soient C une courbe sous-canonique, n un entier et θ une section de $\mathcal{O}_C(n)$. Il existe deux courbes C' et C'' contenues dans C telles que C'' soit la plus grande courbe contenue dans le support (schématique) du conoyau de θ, que $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$ soit le noyau de θ et que $\mathcal{J}_{C''}$ soit l'annulateur de $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$. Si $\theta \neq 0$, C' n'est pas vide et si $n < 0$, C'' n'est pas vide.*

Démonstration. — L'image de $\theta : \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(n)$ est un quotient de $\mathcal{O}_C$, autrement dit θ peut se factoriser de la manière suivante : $\theta = \epsilon p$, où p est la projection de $\mathcal{O}_C$ sur un quotient $\mathcal{O}_{C'}$ et ϵ est une injection $\mathcal{O}_{C'} \to \mathcal{O}_C(n)$. Ceci entraîne en particulier que tous les associés de $\mathcal{O}_{C'}$ sont de dimension 1, donc que C' est une courbe (non vide si $\theta \neq 0$).

Le conoyau de θ est de la forme $\mathcal{O}_Z(n)$ où Z est un sous-schéma fermé de C. Soit C'' la plus grande courbe contenue dans Z, qui est égale à Z en dehors d'un nombre fini de points. D'après 3.3, si C'' n'est pas vide, il existe une courbe C'_1 et une suite exacte $0 \to \omega_{C'_1}(-\alpha) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C''} \to 0$, et ϵ se factorise par une injection $\mathcal{O}_{C'} \to \omega_{C'_1}(n-\alpha)$ qui est un isomorphisme en-dehors d'un nombre fini de points. On en déduit que C' et C'_1 sont égales et toujours d'après 3.3, que $\mathcal{J}_{C''}$ est l'annulateur de $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$.

Si $n < 0$, θ n'est pas injective (sinon son conoyau serait de longueur finie et aurait une caractéristique d'Euler strictement négative) donc C'' n'est pas vide.

LEMME 3.5. — *Soient C une courbe sous-canonique, Q une surface de degré s contenant C, h un entier, $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$ un homomorphisme non nul d'image $\mathcal{J}_{\Gamma/Q}$ où Γ est un sous-schéma fermé de Q et θ la section correspondante de $\omega_C(4+h-s) = \mathcal{O}_C(\alpha+4+h-s)$. Soient C' et C'' les deux courbes correspondant à θ par 3.4. Alors u est une section non nulle de $\mathcal{L}(C')(h)$ et C'' est contenue dans Γ.*

Démonstration. — Par construction, θ se factorise par la projection de $\mathcal{O}_C$ sur $\mathcal{O}_{C'}$. On en déduit par 2.6 que u est une section de $\mathcal{L}(C')(h)$. Il existe donc un homomorphisme non nul $u' : \mathcal{J}_{C'/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$ d'image $\mathcal{J}_{\Gamma'/Q}$ qui induit u.

On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{J}_{C/Q}(-h) & \to & \mathcal{J}_{C'/Q}(-h) & \to & \mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C(-h) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & \mathcal{J}_{\Gamma/Q} & \to & \mathcal{J}_{\Gamma'/Q} & \to & \mathcal{J}_{\Gamma'}/\mathcal{J}_\Gamma & \to & 0 \end{array}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont surjectives. On en déduit que $\mathcal{J}_{\Gamma'}/\mathcal{J}_\Gamma$ est un quotient de $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C(-h)$ donc que l'annulateur de $\mathcal{J}_{\Gamma'}/\mathcal{J}_\Gamma$ est contenu dans celui de $\mathcal{J}_{C'}/\mathcal{J}_C$, qui d'après 3.4 est égal à $\mathcal{J}_{C''}$. Cet annulateur contient évidemment $\mathcal{J}_\Gamma$, donc $\mathcal{J}_\Gamma$ est contenu dans $\mathcal{J}_{C''}$.

Le résultat suivant est un point clef pour la preuve du théorème 3.9 :

LEMME 3.6. — *Soient C une courbe sous-canonique, Q une surface* *de degré s contenant C, h_1 et h_2 deux entiers, $u_i : \mathcal{J}_{C/Q}(-h_i) \to \mathcal{O}_Q$ (pour $i \in \{1,2\}$) deux homomorphismes non nuls et θ_i les sections correspondantes de $\omega_C(4+h_i-s) = \mathcal{O}_C(\alpha+4+h_i-s)$. Si u_1 est injectif et si $\theta_2\theta_1 = 0$, $H^0(\mathcal{L}(C)(h_1+h_2))$ n'est pas nul.*

Démonstration. — Pour $i \in \{1,2\}$ soient C_i' et C_i'' les courbes associées à θ_i comme on les a construites en 3.4. Alors $\theta_i = \epsilon_i p_i$, où p_i est la projection de $\mathcal{O}_C$ sur un quotient $\mathcal{O}_{C_i'}$ et ϵ_1 (resp. ϵ_2) est une injection de $\mathcal{O}_{C_1'}$ dans $\mathcal{O}_C(a+h-s)$ (resp. de $\mathcal{O}_{C_2'}$ dans $\mathcal{O}_C(n_0)$).

Supposons que u_1 soit injectif et soit $\mathcal{J}_{\Gamma_1/Q}$ son image, où Γ_1 est une courbe de Q. D'après 2.1, on a un isomorphisme $\mathcal{L}(C)(h_1) \simeq \mathcal{L}(\Gamma_1)$.

D'après 3.5, $H^0(\mathcal{L}(C_2')(h_2))$ contient u_2 donc n'est pas nul et C_1'' est contenue dans Γ_1.

Si le produit $\theta_2\theta_1$ est nul, on a $\epsilon_2 p_2 \epsilon_1 p_1 = 0$ (en omettant les décalages), et $p_2\epsilon_1 = 0$ puisque p_1 est surjectif et ϵ_2 injectif. On en déduit que C_2' est contenu dans le support du conoyau de ϵ_1, qui est aussi le conoyau de θ_1, donc dans la plus grande courbe contenue dans ce support, c'est-à-dire C_1''. C_2' est donc aussi contenu dans Γ_1.

On a donc une inclusion pour tout n :

$$H^0(\mathcal{L}(C_2')(n)) \subseteq H^0(\mathcal{L}(\Gamma_1)(n)) = H^0(\mathcal{L}(C)(n+h_1))$$

et ce dernier espace vectoriel n'est pas nul pour $n = h_2$.

Remarque 3.7. — Si u_1 n'est pas injectif, on peut considérer son image $\mathcal{J}_{\Gamma_1/Q}$, où Γ_1 est un sous-schéma fermé de Q. On a encore une inclusion $\mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1/Q}, \mathcal{O}_Q(n)) \subseteq H^0(\mathcal{L}(C)(n+h_1))$, mais seulement une flèche : $H^0(\mathcal{L}(C_2')(n)) \to \mathcal{H}om(\mathcal{J}_{\Gamma_1/Q}, \mathcal{O}_Q(n))$.

PROPOSITION 3.8. — *Soient $\mathcal{E}$ un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$, C une courbe sous-canonique minimale pour $\mathcal{E}$, Q une surface de degré s contenant C et h un entier négatif. On ne peut pas faire à partir de C de biliaison élémentaire de hauteur h sur Q.*

Démonstration. — Quitte à tensoriser $\mathcal{E}$ par un faisceau inversible, on peut supposer qu'on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a) \to \mathcal{E} \to \mathcal{J}_C \to 0$$

et qu'on a $H^0\mathcal{E}(a-1) = 0$, puisque C est minimale pour $\mathcal{E}$. Remarquons qu'on a aussi $H^0\mathcal{J}_C(a-1) = 0$, donc $s \geqslant a$.

On a aussi $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(a-4)$.

Si on peut faire à partir de C une biliaison élémentaire de hauteur h sur Q, il existe un homomorphisme injectif $u_1 : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$ qui correspond à un élément non nul θ_1 de $H^0\mathcal{O}_C(a+h-s)$.

Soit $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{Z} \mid h^0\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}$. D'après ce qui précède, on a $n_0 \leqslant a+h-s < 0$.

Soit θ_2 un élément non nul de $H^0\mathcal{O}_C(n_0)$ qui correspond d'après 2.5 à un homomorphisme non nul $u_2 : \mathcal{J}_{C/Q} \to \mathcal{O}_Q(s-a+n_0)$.

Le produit $\theta_2\theta_1$ est une section de $\mathcal{O}_C(a+h-s+n_0)$ et il est nul par définition de n_0. On en déduit par 3.6 que $H^0(\mathcal{L}(C)(s-a+n_0+h)) = H^0\mathcal{O}_C(n_0+h)$ n'est pas nul, ce qui donne une contradiction avec la définition de n_0.

THÉORÈME 3.9. — *Soit C une courbe sous-canonique minimale pour un fibré $\mathcal{E}$ de rang 2 sur $\mathbb{P}^3$. Alors C est minimale dans sa classe de biliaison.*

Démonstration. — Soit $H_{\gamma,M}$ le schéma de Hilbert des courbes à cohomologie et module de Rao constants contenant C, qui est irréductible (cf. [MDP1] V et VI). Nous aurons besoin des résultats des deux lemmes suivants :

LEMME 3.10. — *L'ensemble des courbes sous-canoniques de $H_{\gamma,M}$, minimales pour un fibré, est un ouvert.*

Démonstration. — On a un isomorphisme $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(\alpha)$. Une courbe C' de $H_{\gamma,M}$ est sous-canonique si et seulement si il existe un entier α' et un isomorphisme $\omega_{C'} \simeq \mathcal{O}_{C'}(\alpha')$. Mais puisque C et C' ont même cohomologie, on a alors $\alpha = \alpha'$. L'isomorphisme $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(\alpha)$ correspond à une section de $\omega_C(-\alpha)$ qui se prolonge sur un voisinage U de C dans $H_{\gamma,M}$ (cf. [MDP1] VII 3.3 et 3.5). Pour toute courbe C' de U, il existe un homomorphisme injectif (quitte à restreindre U) $\mathcal{O}_{C'} \to \omega_{C'}(-\alpha)$ qui est un isomorphisme car les deux faisceaux ont même polynôme de Hilbert.

Soit C' une courbe sous-canonique de $H_{\gamma,M}$. On voit facilement que C' est minimale pour le fibré auquel elle correspond si et seulement si $H^0\mathcal{J}_{C'}(\alpha+3)$ est nul et l'ensemble des courbes C' de $H_{\gamma,M}$ vérifiant $H^0\mathcal{J}_{C'}(\alpha+3) = 0$ est soit vide, soit égal à $H_{\gamma,M}$.

LEMME 3.11. — *L'ensemble des courbes de $H_{\gamma,M}$ pour lesquelles on peut faire une biliaison (s,h) est un ouvert.*

Démonstration. — C'est une conséquence de [MDP1] VII 4.7.

Fin de la démonstration du théorème 3.9. — Si C n'est pas minimale dans sa classe de biliaison, il existe un entier $m \geqslant 1$, une suite de courbes $C_0, C_1, \ldots, C_m$ telle que C_{i+1} s'obtienne à partir de C_i par une biliaison élémentaire de hauteur strictement positive, et C à partir de C_m par une déformation à cohomologie et module de Rao constants (cf [MDP1] IV 5). Soit s le degré de la surface sur laquelle on fait la biliaison élémentaire qui fait passer de C_{m-1} à C_m et $-h$ sa hauteur. L'ouvert des courbes de $H_{\gamma,M}$ pour lesquelles on peut faire une biliaison (s,h) est donc non vide. Puisque $H_{\gamma,M}$ est irréductible, cet ouvert rencontre l'ouvert des courbes sous-canoniques minimales pour un fibré, et la proposition 3.6 donne une contradiction.

BIBLIOGRAPHIE

[BBM] E. BALLICO, G. BOLONDI, J. MIGLIORE, The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of $\mathbb{P}^n$, Amer. J. Math., 113 (1991), 117–128.

[B] A. BURAGGINA, Biliaison classes of reflexive sheaves, Math. Nachr., 201 (1999), 53–76.

[H1] R. HARTSHORNE, Stable Vector Bundles of rank 2 on $\mathbb{P}^3$, Math. Ann., 238 (1978), 229–280.

[H2] R. HARTSHORNE, Generalized Divisors on Gorenstein Schemes, K-Theory, 8 (1994), 287–339.

[Ho] G. HORROCKS, Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. Lond. Math. Soc., 14 (1964), 689–713.

[HMDP] R. HARTSHORNE, M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Un théorème de Rao pour les familles de courbes gauches, Journal of Pure and Applied Algebra Algebra, 155 (2001), 53–76.

[MD] M. MARTIN-DESCHAMPS, From coherent sheaves to curves in $\mathbb{P}^3$, à paraître dans Le Matematiche (Catania), volume en l'honneur de Silvio Greco.

[MDP1] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Sur la classification des courbes gauches, Astérisque, Vol. 184–185, 1990.

[MDP2] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN, Quand un morphisme de fibrés dégénère-t-il le long d'une courbe lisse? Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series/200. Marcel Dekker, Inc., July 1998.

[M] J. Migliore, Geometric Invariants of Liaison, J. Algebra, 99 (1986), 548–572.

[R] A.P. Rao, Liaison among curves in $\mathbb{P}^3$, Invent. Math., Vol. 50 (1979), 205–217.

Manuscrit reçu le 3 juillet 2001,
accepté le 10 janvier 2002.

Mireille MARTIN-DESCHAMPS,
Université de Versailles
Laboratoire de Mathématiques
UMR 8100 du CNRS
45, avenue des États-Unis
78035 Versailles Cedex (France).
mmd@math.uvsq.fr