ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Ivan K. BABENKO

Strong systolic freedom of closed manifolds end of polyhedrons

Tome 52, nº 4 (2002), p. 1259-1284.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_4_1259_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 4 (2002), 1259–1284

FORTE SOUPLESSE INTERSYSTOLIQUE DE VARIÉTÉS FERMÉES ET DE POLYÈDRES

par Ivan K. BABENKO

1. Introduction.

Les résultats déjà classiques de Loewner (non publié, voir [5]) et de Pu [21] (aussi [6]) peuvent être envisagés comme le début de la géométrie systolique. Durant les vingt dernières années, après l'article de Gromov [13], ce domaine de la géométrie a connu une période de développements assez importants. Nous renvoyons les lecteurs intéressés aux excellentes revues [7], [12] et [8] où est présenté l'historique du domaine ainsi que l'approche actuelle. On pourra aussi regarder l'article récent [18] développant les toutes dernières idées.

Mots-clés : Variété riemannienne – Polyèdre riemannien – Systole – Masse – Comasse.
Classification math. : 53C23 – 57Q99 – 58A25.

Présentons brièvement le contenu de ce travail dont le résultat principal est annoncé dans [4]. Pour une variété riemannienne fermée (M, g) de dimension n il est possible de mesurer de façon naturelle les volumes des classes d'homologie q-dimensionnelle à coefficients entiers. D'un point de vue naïf, ce procédé est le suivant. Si $a \in H_q(M, \mathbb{Z})$ est representé par le plongement d'une q-variété $\tau : N \to M$, alors N est munie de la métrique induite $\tau^*(g)$, on pose

$$\mathrm{Vol}_q(\tau, g) = \mathrm{Vol}(N, \tau^*(g)) \tag{1.1}$$

et cette valeur est dite volume du cycle singulier τ. On définit ensuite

$$\mathrm{Vol}_q(a, g) = \inf_{\tau} \mathrm{Vol}_q(\tau, g)$$

où τ parcourt tous les plongements des q-variétés appartenant à la classe a. Cette définition explicite souffre d'un défaut évident. Le problème célèbre de Steenrod sur la représentation des classes d'homologie entières par des variétés plongées a, en général, une solution négative. C'est-à-dire qu'il existe des classes qui ne se représentent pas de cette façon. Ce défaut peut être éliminé si on travaille avec les chaînes simpliciales singulières (lisses ou lipschitziennes) à la place des sous-variétés plongées. Cette dernière approche est moins évidente, mais elle devient déjà accessible pour un espace métrique quelconque.

Soit $c = \sum_i r_i \tau_i, r_i \in \mathbb{Z}$ une chaîne simpliciale singulière lipschitzienne, où les $\tau_i : \sigma^q \longrightarrow M$ sont des q-simplexes singuliers lipschitziens. On pose

$$\mathrm{Vol}_q(c, g) = \sum_i \mid r_i \mid \mathrm{Vol}_q(\tau_i, g),$$

où la définition du volume du simplexe singulier τ_i est analogue à celle de (1.1). On définit enfin le volume d'une classe d'homologie $a \in H_q(M, \mathbb{Z})$ comme

$$\mathrm{Vol}_q(a, g) = \inf_{c \in a} \mathrm{Vol}_q(c, g). \tag{1.2}$$

La fonction Vol sur le module d'homologie entière vérifie une certaine proprieté de convexité, mais elle ne représente, en général, aucune norme sur $H_q(M, \mathbb{Z})$. On obtient facilement à partir de la fonction-volume (1.2) une vraie norme en posant

$$\mathrm{mass}(a, g) = \lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \mathrm{Vol}_q(pa, g). \tag{1.3}$$

Si $a \in \mathrm{Tors}H_q(M,\mathbb{Z})$ alors $\mathrm{mass}(a) = 0$ et il est bien connu (voir [11]), que mass définit une norme sur le $\mathbb{Z}$-module libre $H_q(M,\mathbb{Z})/\mathrm{Tors}$. Cette norme coïncide avec la norme naturelle «mass» sur l'homologie réelle [11]. Il est évident au vu de la définition que $\mathrm{mass}(a) \leqslant \mathrm{Vol}_q(a)$. Cette inégalité peut être stricte. On remarque de plus qu'à partir de $n = 3$ la suite donnée par le membre de droite de (1.3) peut être strictement décroissante en p, voir [11].

Pour chaque variété riemannienne (M, g), la valeur suivante :

$$\mathrm{sys}_q(M,g) = \inf_{a \neq 0} \mathrm{Vol}_q(a,g)$$

est appelée *la systole homologique* ou en abrégé *la systole* de (M,g) ; ici a parcourt toutes les classes d'homologie entière q-dimensionnelle non nulle de M. Si a parcourt le sous-ensemble des classes homologiques d'ordre infini (c'est-à-dire a est non triviale modulo torsion), on déduit de cette formule la notion de *la systole homologique libre*, qui nous notons $\mathrm{lsys}_q(M,g)$. Il est évident que $\mathrm{lsys}_q(M,g) \geqslant \mathrm{sys}_q(M,g)$. On pose ensuite

$$\mathrm{stsys}_q(M,g) = \inf_{a \not\equiv 0} \mathrm{mass}_q(a,g)$$

où a parcourt le même sous-ensemble des classes homologiques d'ordre infini que précédemment et cette valeur est appelée *la systole stable* de (M,g). Comme on a remarqué auparavant $\mathrm{lsys}_q(M,g) \geqslant \mathrm{stsys}_q(M,g)$ et cette inégalité est stricte fréquemment. Si $q = 1$, en plus de la liste des systoles homologiques différentes on considère aussi la systole homotopique $\pi\mathrm{sys}_1(M,g)$ qui est égale à la plus courte longueur d'une géodésique fermée non contractile dans (M,g).

On appelle *rapport intersystolique* d'une variété riemannienne la fraction suivante :

$$\sigma^{*,*'}_{k,n-k}(M,g) = \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{*\mathrm{sys}_k(M,g)\ *'\,\mathrm{sys}_{n-k}(M,g)}\ , \tag{1.4}$$

et la fraction

$$\sigma^*_k(M,g) = \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{*\mathrm{sys}_k(M,g)^{n/k}} \tag{1.5}$$

est dite conformément *k-rapport systolique* de cette variété. Dans ces formules $*$sys comme $*'$sys représente une systole de notre liste systolique : sys, lsys, stsys, πsys. En cas d'utilisation de la systole habituelle «sys» on supprime l'indice correspondant «$*$» de σ.

La question naturelle des bornes inférieures de (1.4) et (1.5) si on varie la métrique sur M a une longue histoire et pour $\sigma_1(M,g)$ elle est assez bien connue [13], voir encore [7], [12] et [1]. Par contre, dans le cas de $\sigma_{k,n-k}$ et σ_k pour $k>1$ on a obtenu certains progrès dans cette direction seulement récemment [2], [3], [18], [19]. Une réponse complète pour la systole homologique libre dans le cas du rapport (1.5) si $k>1$ a été obtenue récemment par Katz et Suciu [19].

Théorème (KS). — *Chaque variété fermée M de dimension n vérifie pour $1<k<n$ l'égalité suivante :*

$$\inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{\mathrm{lsys}_k(M,g)^{n/k}}=0,$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur M.

Le fait de l'annulation de cette borne inférieure est souvent appelé *k-souplesse systolique libre* d'une variété. Nous remarquons que le remplacement de lsys_k par stsys_k dans (1.5) amène parfois à une borne positive pour σ_k^{st}, voir [14], [15].

Le rapport intersystolique (1.4) a été étudié dans [2], [3], [18], en particulier, dans certains cas, on a obtenu dans [2] sous des conditions topologiques supplémentaires sur M que

$$\inf_g \sigma_{k,n-k}(M,g)=0. \tag{1.6}$$

Comme on le verra ci-dessous ces conditions topologiques sont superflues. Remarquons que l'égalité du type (1.6) dans le cas de systoles libres est démontré pour chaque variété de dimension n paire et $k=n/2$ dans [3] (pour $n>4$) et dans [18] (si $n=4$). Cette égalité est appelée *$(k,n-k)$-souplesse* ou *souplesse intersystolique* d'une variété.

Le but principal de ce travail est de démontrer l'égalité du type (1.6) sans aucune restriction sur la topologie de M. En effet nous démontrons ici une variante forte de la souplesse intersystoloque qui implique (1.6) si $H_{n-k}(M,\mathbb{Z})$ n'a pas de torsion.

Théorème A. — *Chaque variété fermée M de dimension n vérifie pour $1\leqslant k<n/2$ l'égalité suivante :*

$$\inf_g \frac{\mathrm{Vol}(M,g)}{\mathrm{sys}_k(M,g)\,\mathrm{stsys}_{n-k}(M,g)}=0,$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes lisses sur M.

Remarquons que renforcer ce théorème en changant sys_k par stsys_k n'est pas possible comme on le voit avec le produit $S^k \times S^{n-k}$ où la borne inférieure du théorème pour deux systoles stables devient positive, [14], [15]. Nous ne savons pas si ce théorème est vrai dans le cas $n = 2k$.

COROLLAIRE. — *Soit une variété fermée de dimension $n > 2$ qui n'a pas de $n-k$-torsion en $\mathbb{Z}$-homologie pour un indice k donné dans l'intervalle $1 \leqslant k \leqslant n/2$. Alors, elle est $(k, n-k)$-souple.*

C'est une conséquence directe du théorème A pour $k < n/2$ et pour $n = 2k$ elle est démontrée dans [3] et [18]. D'autres conséquences du théorème A sont données dans le dernier paragraphe.

En effet le théorème A est une manifestation d'une propriété générale de souplesse qui est valable pour une classe d'espaces beaucoup plus vaste que la classe des variétés. Travailler avec les variétés n'est pas commode techniquement et pour cela nous étendons la classe d'espaces à étudier à la classe des polyèdres simpliciaux riemanniens. Les polyèdres simpliciaux sont bien adaptés pour pratiquement toutes les questions d'analyse qui se posent d'habitude sur les variétés. D'une part les métriques riemanniennes sont bien définies sur eux. D'autre part les formes différentielles existent sur les polyèdres simpliciaux, et le théorème de de Rham marche comme dans le cas des variétés. Ce dernier fait a éte observé par R. Thom dans les années 50. Une brève description de ces objets comme les notions de comasse d'une forme différentielle sur un polyèdre et de masse en homologie de polyèdres est donnée dans la partie 2.

Les notions de systole et de systole stable d'un polyèdre nous ramènent au résultat général dont le théorème A est une conséquence directe.

THÉORÈME B. — *Chaque polyèdre fini n-dimensionnel P vérifie pour $1 \leqslant k < n/2$ l'égalité suivante :*

$$\inf_g \frac{\mathrm{Vol}(P,g)}{\mathrm{sys}_k(P,g)\,\mathrm{stsys}_{n-k}(P,g)} = 0,$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes correspondant à la triangulation donnée sur P.

Cet article est consacré essentiellement à la démonstration de ce théorème. Nous utilisons pour ça une collection finie et simple de polyèdres simpliciaux pour lesquels le théorème B peut être vérifié directement en produisant une suite de métriques (une suite souple) qui diminue le rapport intersystolique. Le produit de sphères $S^k \times S^{n-k}$ joue un rôle central dans ce procédé. Des suites souples des métriques sur un tel produit ont été construites par plusieurs auteurs pour les dimensions différentes, mais la souplesse intersystolique de $S^k \times S^{n-k}$ a été démontrée en toute généralité par Katz, voir [16] et [17].

Les polyèdres élémentaires appartenant à cette collection sont appelés ci-après «les briques». Nous pouvons «brancher» l'une à l'autre de telles briques pour obtenir des polyèdres plus compliqués avec des propriétés topologiques donnés. Le processus de branchement ressemble beaucoup au jeu «Lego» et nous gardons ce terme par la suite. Pour les polyèdres composés de Lego systolique et nommés par la suite «les maisons», on démontre la souplesse par un procédé unique établi au sous-paragraphe 3.3. Une réserve suffisante de maisons de Lego nous permet de réduire la vérification de souplesse intersystolique d'un polyèdre arbitraire à un problème purement topologique résolu au sous-paragraphe 3.2. La partie finale de la démonstration du théorème B est établie au paragraphe 3.3.

Pour conclure l'introduction remarquons que notre approche appliquée à la souplesse intersystolique permet aussi d'obtenir une démonstration du théorème (KS) qui n'utilise pas l'homotopie rationnelle employée dans la démonstration originale [19].

2. Analyse sur les polyèdres.

2.1. Métriques riemanniennes et formes différentielles.

Pour les polyèdres simpliciaux nous allons utiliser un système de définitions déjà stable et standard qui correspond à celles de [23], par exemple. Par un polyèdre simplicial nous entendons toujours un espace topologique muni d'une triangulation. Tous les polyèdres considérés ensuite seront des polyèdres finis et donc compacts.

Soient P un polyèdre et $\tau \subset P$ un simplexe de la triangulation considérée. Ce simplexe est homéomorphe par définition au q-simplexe standard $\Delta^q = \mathbf{conv}\{e_0, ..., e_q\} \subset \mathbb{R}^{q+1}$, où **conv** est l'enveloppe convexe et $\{e_i\}_{i=0}^q$ est un repère orthonormé. Les coordonnées cartésiennes $\{x_i\}_{i=0}^q$ de $\mathbb{R}^{q+1}$ donnent les coordonnés barycentriques dans Δ^q et celles de $\tau \subset P$. Chaque ouvert U de l'hyperplan $\sum_{i=0}^q x_i = 1$ qui contient Δ^q sera nommé un *voisinage extérieur* de $\tau \subset P$.

DÉFINITION 2.1.1. — *Une métrique riemannienne sur un polyèdre P est une famille de métriques riemanniennes $\{g_\tau\}_{\tau\subset P}$, où τ parcourt tous les simplexes de P, qui vérifie les conditions :*

1. Chaque g_τ est une métrique riemannienne lisse dans un voisinage extérieur de τ.

2. Pour chaque paire de simplexes $\tau_1, \tau_2 \subset P$ on a l'égalité

$$g_{\tau_1}|_{\tau_1\cap\tau_2} = g_{\tau_2}|_{\tau_1\cap\tau_2}$$

considérée comme une égalité de deux formes quadratiques dans les coordonnées barycentriques de $\tau_1 \cap \tau_2$.

Une structure simpliciale sur P permet de travailler avec les applications lisses par morceaux de l'intervalle $I(1) = [0,1]$ dans P. Si P est muni d'une métrique riemannienne g on peut définir la longueur d'un chemin lisse par morceaux $\alpha : I(1) \to P$ en posant comme d'habitude

$$l_g(\alpha) = \int_0^1 |\ \alpha'\ |_g\ dt.$$

On utilise cette longueur pour définir la métrique sur P de la même manière que dans le cas des variétés

$$\rho_g(x,y) = \inf_\alpha\ l_g(\alpha),$$

où α parcourt l'ensemble des chemins lisses par morceaux joignant $x, y \in P$. Obtenu de telle façon l'espace métrique (P,ρ) est un espace de longueur.

Une autre structure naturelle pour les variétés existe sur les polyèdres.

DÉFINITION 2.1.2. — *Une forme differentielle sur un polyèdre P est une famille de formes differentielles $\{\alpha_\tau\}_{\tau\subset P}$ où τ parcourt tous les simplexes de P, qui vérifie les conditions :*

1. Chaque α_τ est une forme différentielle lisse dans un voisinage extérieur de τ.

2. Pour chaque paire de simplexes $\tau_1, \tau_2 \subset P$ on a l'égalité

$$\alpha_{\tau_1}|_{\tau_1\cap\tau_2} = \alpha_{\tau_2}|_{\tau_1\cap\tau_2}$$

considérée comme une égalité de deux formes differentielles dans les coordonnées barycentriques de $\tau_1 \cap \tau_2$.

L'ensemble $\mathcal{E}^*_{(s)}(P)$ des formes différentielles (simpliciales) sur P est un espace vectoriel gradué. Les opérations de produit extérieur et de dérivation extérieure appliquées sur les simplexes induisent une structure d'algèbre commutative graduée différentielle sur $\mathcal{E}^*_{(s)}(P)$. Il faut croire que R. Thom dans les années cinquante fut le premier qui définit cette algèbre pour les polyèdres arbitraires et démontra le théorème de de Rham dans ce cas.

THÉORÈME 2.1.3 (de Rham - Thom). — *Pour la cohomologie réelle singulière de P on a l'isomorphisme naturel*

$$H^*(P,\mathbb{R}) = H^*(\mathcal{E}^*_{(s)}(P)), \tag{2.1.1}$$

qui respecte les produits.

Une démonstration de ce résultat se trouve dans [24].

Remarque. — Si P est une variété lisse munie d'une triangulation lisse les formes différentielles (simpliciales) correspondant à cette triangulation ne sont même pas continues sur P en général. On construit facilement des exemples correspondants. Ce fait montre une grosse différence entre les formes usuelles sur une variété et les formes simpliciales adaptées à une triangulation sur la même variété.

Si P est une variété lisse, on la suppose toujours munie de triangulations lisses. Pour chaque triangulation donnée sur P nous avons une inclusion d'algèbres différentielles

$$\mathcal{E}^*(P) \subset \mathcal{E}^*_{(s)}(P), \tag{2.1.2}$$

et on déduit du (2.1.1) et du théorème de De Rham classique que (2.1.2) est un *quasi isomorphisme*, c'est-à-dire l'application cohomologique induite est un isomorphisme. Les formes simpliciales sont bien adaptées à des applications simpliciales. En effet, si $f : P_1 \to P_2$ est une application simpliciale elle induit l'application d'algèbres differentielles

$$f^* : \mathcal{E}^*_{(s)}(P_1) \longrightarrow \mathcal{E}^*_{(s)}(P_2). \tag{2.1.3}$$

Selon l'isomorphisme (2.1.1) l'application cohomologique induite par (2.1.3) et l'application induite par f sur la cohomologie singulière coïncident.

2.2. Comasse, masse et volume sur les polyèdres.

Pour un polyèdre riemannien quelconque (P,g) on peut définir les notions de comasse d'une forme différentielle, de masse et de volume d'une chaîne singulière lipschitzienne comme pour les variétés. Rappelons brièvement ces constructions.

Si $\alpha \in \mathcal{E}^*_{(s)}(P)$ alors pour chaque simplexe $\tau \in P$ comass$(\alpha \mid_\tau)$ est bien définie comme sur un sous-ensemble d'un espace euclidien, voir [10]. On pose ensuite

$$\mathrm{comass}_{(s)}(\alpha) = \max_{\tau \in P} \mathrm{comass}(\alpha \mid_\tau),$$

et on obtient une norme sur $\mathcal{E}^*_{(s)}(P)$. Remarquons que si P est une variété lisse, (2.1.2) est une inclusion isométrique.

Exemple 2.2.1. — Soient (M,g) une variété riemannienne m-dimensionnelle, Y un polyèdre simplicial fini. On considère une sous-variété n-dimensionnelle $N \subset M$ et une application simpliciale (par rapport à une triangulation lisse sur N) $f : N \longrightarrow Y$. On prend ensuite

$$X = Z(f) \bigcup_N M,$$

où $Z(f) = (N \times [0,1]) \bigcup_{(n,1)=f(n)} Y$ est le cylindre de f. Nous munissons cet espace d'une triangulation en prolongeant celle de N sur M entière. Soit $\alpha \in \mathcal{E}^p(M)$ une forme lisse, où $p > n$. Si on prolonge α par zéro sur X entier, on obtient une forme simpliciale $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{E}^*_{(s)}(X)$. Si $\widetilde{g}$ est une métrique sur X telle que $\widetilde{g} \mid_M = g$, alors

$$\mathrm{comass}_{(s)}(\widetilde{\alpha}) = \mathrm{comass}(\alpha).$$

Comme d'habitude l'espace dual à $\mathcal{E}^k_{(s)}(P)$ est l'espace des k-courants sur P, il est muni de la norme duale

$$\mathrm{mass}_{(s)}(T) = \sup\{T(\alpha), \alpha \in \mathcal{E}^*_{(s)}(P);\ \mathrm{comass}_{(s)}(\alpha) \leqslant 1\}.$$

Soit $c = \sum_i r_i \cdot f_i$ une chaîne singulière lipschitzienne, où les $f_i : \Delta^k \to P$ sont des applications lipschitziennes par rapport à ρ_g , les coefficients $\{r_i\}_i$ prenant leurs valeurs dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. La masse du courant correspondant

$$c(\alpha) = \sum_i r_i \int_{\Delta^k} f_i^*(\alpha)\,, \quad \alpha \in \mathcal{E}^*_{(s)}(P)$$

est appelée comme d'habitude la masse de la chaîne c. Pour une classe d'homologie $u \in H^*(M, \mathbf{k}), \mathbf{k} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ on pose

$$\mathrm{mass}_{(s)}(u) = \inf_{c \in u} \mathrm{mass}_{(s)}(c).$$

Si $f : \Delta^k \to P$ est un simplexe singulier lipschitzien, alors sa différentielle $\mathbf{d}f$ est bien définie presque partout et comme dans le cas des variétés le volume de cette application est défini aussi, voir [9]. Pour une chaîne singulière c comme ci-dessus on pose

$$\mathrm{Vol}_k(c,g) = \sum_i \mid r_i \mid \mathrm{Vol}_k(f_i,g). \tag{2.2.3}$$

Comme dans le cas de variétés nous avons l'inégalité

$$\mid c(\alpha) \mid \leqslant \mathrm{Vol}_k(c,g) \cdot \mathrm{comass}_{(s)}(\alpha)\,, \quad \alpha \in \mathcal{E}^*_{(s)}(P), \tag{2.2.4}$$

qui peut être stricte à cause d'une autoapplication éventuelle de c, voir [9].

Pour une classe d'homologie $u \in H_k(P,\mathbf{k})$, $\mathbf{k} = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ on pose

$$\mathrm{Vol}_k(u,g) = \inf_{c \in u} \mathrm{Vol}_k(c,g),$$

où les coefficients des chaînes correspondent à ceux de l'homologie. On tire de (2.2.4) l'inégalité suivante :

$$\mathrm{mass}_{(s)}(u) \leqslant \mathrm{Vol}_k(u), u \in H_k(P,\mathbf{k}), \tag{2.2.5}$$

qui peut être stricte dans le cas de $\mathbf{k} = \mathbb{Z}$. Pour les coefficients réels on déduit des résultats de [11], que $\mathrm{mass}_{(s)}$ et Vol_k coïncident. En effet, si on plonge $P \subset \mathbb{R}^N$ on obtient un rétracte localement lipschitzien, voir [10]. Soit $U \supset P$ un petit voisinage tubulaire qui se rétracte sur P. La métrique donnée g sur P se prolonge sur U comme une métrique riemannienne lisse par morceaux. Ceci définit sur U un intégrand paramétrique Ψ_g , convexe et positif au sens de [10]. Sur P et Ψ_g on peut finalemant appliquer les résultats de [11]. Énonçons une conséquence directe des propositions 2.1 et 5.8 de [11] sous une forme adaptée à nos besoins.

PROPOSITION 2.2.2. — *Pour chaque classe d'homologie réelle* $u \in H_k(P,\mathbb{R})$ *d'un polyèdre simplicial riemannien* (P,g),

$$\mathrm{mass}_{(s)}(u) = \mathrm{Vol}_k(u,g);$$

pour les classes d'homologie entière on a l'égalité

$$\mathrm{mass}_{(s)}(u) = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \mathrm{Vol}_k(lu,g).$$

Remarque. — Supposons que Θ est la triangulation donnée sur P. Si on prend une sous-division arbitraire $\Theta' \prec \Theta$, alors on obtient a priori deux masses pour la métrique donnée g : $\mathrm{mass}^{\Theta}_{(s)}$ et $\mathrm{mass}^{\Theta'}_{(s)}$. On déduit de la proposition (2.2.2) une conséquence immediate, que $\mathrm{mass}^{\Theta}_{(s)} = \mathrm{mass}^{\Theta'}_{(s)}$ sur l'homologie $H_k(P, \mathbb{R})$. On obtient aussi que dans le cas des variétés lisses $\mathrm{mass}_{(s)}$ ne dépend pas de choix de la triangulation et coïncide avec la masse lisse. Nous allons supprimer l'indice (s) dans ce cas.

L'inclusion des coefficients $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ induit l'application d'homologie $i_* : H_*(P, \mathbb{Z}) \to H_*(P, \mathbb{R})$. Introduisons la définition principale :

Définition 2.2.3. — *Pour chaque polyèdre riemannien (P, g) le nombre*

1)
$$\mathrm{sys}_k(P, g) = \inf_{\substack{u \in H_k(P,\mathbb{Z}) \\ u \neq 0}} \mathrm{Vol}_k(u, g)$$

*est appelé k-*systole *de (P, g).*

2)
$$\mathrm{lsys}_k(P, g) = \inf_{\substack{u \in H_k(P,\mathbb{Z}) \\ i_*(u) \neq 0}} \mathrm{Vol}_k(u, g)$$

*est appelé k-*systole libre *de (P, g).*

3)
$$\mathrm{stsys}_k(P, g) = \inf_{\substack{u \in H_k(P,\mathbb{Z}) \\ i_*(u) \neq 0}} \mathrm{mass}_k(u, g)$$

*est appelé k-*systole stable *de (P, g).*

Selon (2.2.5) $\mathrm{stsys}_k(P, g) \leqslant \mathrm{lsys}_k(P, g)$ et cette inégalité peut être stricte. On pose ensuite

$$\mathrm{Vol}_k(P, g) = \sum_{\tau \in P^k \setminus P^{k-1}} \mathrm{Vol}_k(\tau, g),$$

où, comme d'habitude, P^k est le k-squelette de P. Il est évident que

$$\mathrm{Vol}_k(P, g) = \mathrm{mass}_{(s)}(\overline{P^k \setminus P^{k-1}}, g) = \mathbf{h}_k(P^k),$$

où $\mathbf{h}_k$ est la mesure de Hausdorff k-dimensionnelle par rapport à la distance ρ_g. Si $\dim P = n$, $\mathrm{Vol}_n(P, g)$ est appelé le volume de P et nous supprimons l'indice n dans ce cas.

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application simpliciale entre polyèdres. Si g est une métrique riemannienne sur Y, son image réciproque $f^*(g)$ est une forme quadratique symétrique non négative, mais en géneral, dégénérée (si f n'est pas un homéomorphisme). Pour obtenir une vraie métrique sur X assez proche de $f^*(g)$ prenons une métrique fixée h sur X. Par exemple, on peut utiliser comme h la métrique induite pour le plongement canonique $X \longrightarrow \Delta^{N-1} \subset \mathbb{R}^N$, où N est le nombre de sommets de X. Pour $t > 0$ on pose ensuite $f^t(g) = f^*(g) + t^2h$, ceci définit une métrique riemannienne (simpliciale) sur X. Appelons cette métrique *t-image réciproque* de g, voir aussi [1], où les métriques analogues ont été construites un peu différemment. Il est évident que f contracte les distances par rapport aux métriques $f^t(g)$ et g pour chaque $t > 0$, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Lip} f \leqslant 1, \quad t > 0. \tag{2.2.6}$$

Nous allons travailler ci-après seulement avec de petites valeurs du parametre t. On voit facilement (voir aussi [1]), que la proposition suivante est vérifiée :

PROPOSITION 2.2.4.— *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application simpliciale entre deux polyèdres. Alors il existe une constante C ne dépendant que du type combinatoire de X, Y, f, telle que pour chaque métrique riemannienne g sur Y et chaque $\varepsilon > 0$ il existe $t > 0$ qui vérifie l'inégalité :*

$$\mathrm{Vol}_k(X, f^t(g)) \leqslant C\mathrm{Vol}_k(Y, g) + \varepsilon.$$

La proposition suivante est élémentaire, mais elle nous sera utile techniquement.

PROPOSITION 2.2.5.— *Soient (X, g_1) et (Y, g_2) deux polyèdres riemanniens et $f : X \longrightarrow Y$ une application simpliciale. Alors pour chaque forme différentielle $\alpha \in \mathcal{E}^k_{(s)}(Y)$ et chaque chaîne singulière $c \in C_k(X, \mathbf{k})$ on a les inégalités :*

$$\begin{aligned} \mathrm{comass}_{(s)}(f^*(\alpha)) &\leqslant (\mathrm{Lip} f)^k \,\mathrm{comass}_{(s)}(\alpha) \\ \mathrm{mass}_{(s)}(f_*(c)) &\leqslant (\mathrm{Lip} f)^k \,\mathrm{mass}_{(s)}(c) \\ \mathrm{Vol}_k(f_*(c), g_2) &\leqslant (\mathrm{Lip} f)^k \,\mathrm{Vol}_k(c, g_1). \end{aligned}$$

Pour chaque classe d'homologie $u \in H_k(X, , \mathbf{k})$ on obtient de là

$$\begin{aligned} \mathrm{mass}_{(s)}(f_*(u)) &\leqslant (\mathrm{Lip} f)^k \,\mathrm{mass}_{(s)}(u) \\ \mathrm{Vol}_k(f_*(u), g_2) &\leqslant (\mathrm{Lip} f)^k \,\mathrm{Vol}_k(u, g_1). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Pour chaque polyèdre riemannien n-dimensionnel (P, g) notons deux rapports intersystoliques (comparez avec (1.4)) :

$$\sigma_{(k,n-k)}(P, g) = \frac{\operatorname{Vol}(P, g)}{\operatorname{sys}_k(P, g)\operatorname{sys}_{n-k}(P, g)}\ ;$$

$$\sigma^{,st}_{(k,n-k)}(P, g) = \frac{\operatorname{Vol}(P, g)}{\operatorname{sys}_k(P, g)\operatorname{stsys}_{n-k}(P, g)}.$$

DÉFINITION 2.2.6. — *Un polyèdre P de dimension n est appelé $(k, n-k)$*-souple, *si*

$$\inf_g \sigma_{(k,n-k)}(P, g) = 0;$$

il est appelé $(k, n-k)$-fortement souple *si*

$$\inf_g \sigma^{,st}_{(k,n-k)}(P, g) = 0.$$

Ici g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes correspondant à la triangulation donnée sur P.

Remarque. — Si P est une variété lisse, il est naturel de considérer dans cette définition seulement l'ensemble des métriques lisses sur P.

PROPOSITION 2.2.7. — *Soient X et Y deux polyèdres de dimension n avec Y $(k, n-k)$-fortement souple. Supposons qu'il existe une application continue $f : X \longrightarrow Y$ telle que l'application induite dans l'homologie entière f_{*k} soit un monomorphisme, et de même f_{*n-k} soit un monomorphisme dans l'homologie rationnelle. Alors X est $(k, n-k)$-fortement souple.*

Démonstration. — Soit Θ la triangulation donnée sur X. En utilisant, s'il est nécessaire, une approximation simpliciale, on peut supposer que f est simpliciale par rapport à une subdivision $\Theta_1 \prec \Theta$. On considère les espaces des métriques riemanniennes $(M)(\Theta) \subset (M)(\Theta_1)$ adaptées aux triangulations Θ et Θ_1. D'après l'hypothèse du théorème il existe une suite (souple) de métriques riemanniennes $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ sur Y telles que

$$\lim_{i\to\infty} \sigma^{,st}_{(k,n-k)}(Y, g_i) = 0.$$

On pose $\varepsilon_i = \operatorname{Vol}(Y, g_i), i = 1, 2, \ldots$ et on considère la suite de métriques $g'_i = f_i^{t_i}(g_i)$, où t_i est une valeur du paramètre t , qui vérifie la proposition 2.2.4 pour $\varepsilon = \varepsilon_i$. Il est évident que $g'_i \in (M)(\Theta_1)$ et donc de la proposition 2.2.4 on déduit immédiatement que

$$\operatorname{Vol}(X, g'_i) \leqslant (C+1)\operatorname{Vol}(X, g_i), \tag{2.2.8}$$

où C est la même constante qui figure dans la proposition 2.2.4. De l'hypothèse «f_{*i} est un monomorphisme pour $i = k, n-k$» avec les inégalités (2.2.7) nous obtenons

$$\text{(2.2.9)} \qquad \operatorname{sys}_k^{\Theta_1}(X, g_i') \geqslant \operatorname{sys}_k(Y, g_i); \quad \operatorname{stsys}_m^{\Theta_1} k(X, g_i') \geqslant \operatorname{stsys}_m(Y, g_i),$$

où l'indice Θ_1 signifie que sys et stsys sur X sont adaptées à la triangulation Θ_1. Enfin de (2.2.8) et (2.2.9) on déduit immédiatement

$$\lim_{i\to\infty} \sigma'^{st,\Theta_1}_{(k,n-k)}(X, g_i') = 0.$$

Appelons dans la suite «nouveau» un p-simplexe $\tau \in \Theta_1$, s'il n'appartient à aucun p-simplexe de Θ. On considère sous-complexe $X' \subset X$ formé par les nouveaux simplexes de Θ_1. En utilisant le procédé de lissage sur les métriques $\{g_i'\}_{i=1}^{\infty}$, comme il a été fait dans [1] pour le cas des variétés, nous obtenons une suite de métriques riemanniennes $\{g_i''\}_{i=1}^{\infty}$ de $(M)(\Theta)$ qui vérifie l'égalité

$$\lim_{i\to\infty} \sigma'^{st,\Theta_1}_{(k,n-k)}(X, g_i'') = 0.$$

Les métriques $\{g_i''\}_{i=1}^{\infty}$ sont déjà adaptées à la triangulation Θ , et puisque d'après la proposition 2.2.2 $\operatorname{mass}_{(s)}$ ne dépend pas du choix d'une subdivision Θ_1, alors on peut supprimer l'indice Θ_1 dans la dernière égalité. Ceci achève la démonstration.

3. Lego systolique.

3.1. Assortiment de briques standardisées.

Nous fixons deux nombres naturels $k < m$ et construisons un assortiment fini de polyèdres simpliciaux que nous appelons les briques standardisées. Ils sont de deux types. Posons

$$\text{(3.1.1)} \qquad M(k,m) = S^k \times S^m \bigcup_{S^k} S^k \times I(L)\ ,$$

où $I(L) = [0, L]$ est l'intervalle et le recollement est effectué par les sphères plongées $S^k \times \{pt\}$ et $S^k \times \{0\}$. Il est évident que $S^k \times S^m \subset M(k,m)$ est un rétract par déformation. Les polyèdres $M(k,m)$ sont appelés *les briques élémentaires du premier type.* Pour trianguler les briques $M(k,m)$ nous fixons une triangulation sur les sphères S^q de dimensions $q = 1, 2, \ldots$. Chaque brique $M(k,m)$ a une structure cellulaire évidente et on pose une triangulation sur $M(k,m)$ pour respecter cette structure et telle que les sphères plongées $S^k \times \{0\}$ et $S^k \times \{L\}$ sont munies de la triangulation fixée ci-dessus.

On appelle *les briques élémentaires du deuxième type* les disques standard B^{k+i} de dimensions $k+i$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Pour les trianguler on prolonge la triangulation, déjà fixée sur les bords $S^{k+i-1} = \partial B^{k+i}$ à B^{k+i} tout entier.

3.2. Règle d'attachement (comment jouer au Lego).

Nous définissons maintenant quelques polyèdres simpliciaux finis de type spécial qui seront appelés ci-après *les maisons*. Les maisons se construisent par une règle unique à partir de briques standardisées. Pour chaque maison les nombres k et m sont fixés. On suppose que les structures cellulaires et simpliciales des complexes (3.1.1) sont fixées.

Nous attachons toujours les briques du deuxième type avec la règle de construire un CW-complexe qui a un seul sommet (une seule cellule de dimension zéro). Soit X une maison construite avec des briques du deuxième type, alors sa structure cellulaire est la suivante :

$$X = e^0 \bigcup_{j=0}^{m} \bigcup_{r \in I_j} e_r^{k+j}.$$

On déduit de la construction que le k-squelette de X est toujours un bouquet des k-sphères

$$X^k = \bigvee_{r=1}^{q} S_r^k.$$

Les k-sphères plongées dans $X^k \subset X$ sont appelées *les portes* de X. Pour établir une structure simpliciale sur X nous munissons les portes de X de la structures simpliciale coïncidente a celle du paragraphe 3.1. On suppose ensuite, sans perte de généralité, que chaque application de recollement des briques B^q est simpliciale. Cela nous permet de prolonger la structure simpliciale de X^k par récurrence sur X tout entier. Remarquons que pour effectuer ce procédé nous sommes en général obligés de faire les sous-divisions nécessaires des triangulations données sur les briques B^q.

Ensuite on considère un complexe de la forme suivante :

$$Y = \left(X \bigcup_{i=1}^{v} M_i(k,m) \right) \bigvee_{j=1}^{u} S_j^m \ , \tag{3.2.2}$$

où X est une maison, le recollement de chaque brique $M_i(k,m)$ est effectué par l'identification de son *entrée* $(S^k \times \{L\})$ avec une porte de X. Une porte de X peut être attachée à plusieurs de ces briques. Nous appelons : *maison avec des ailes* un complexe du type (3.2.2). Chaque aile est réunie avec sa maison par son *couloir* $S^k \times I(L)$, ou comme la réunion pointée dans le cas des u derniers termes de (3.2.2). Tous les éléments d'une maison avec des ailes vont jouer un rôle dans la construction des métriques spéciales sur cette maison.

Pour chaque maison avec des ailes (3.2.2) on définit $u+v$ projections :

$$\begin{aligned} \pi_i &: Y \longrightarrow M_i(k,m) \bigcup CS^k \ , i = 1, ..., v \\ \pi_j &: Y \longrightarrow S_j^m \ , \qquad\qquad j = 1, ..., u, \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

qui sont les contractions de X et toutes les ailes sauf une seule en un point. Ici CS^k est le cône sur S^k. La proposition suivante joue un rôle central dans la démonstration du théorème B.

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit P un polyèdre simplicial, fini, $(k+m)$-dimensionnel $(k < m)$. Alors, il existe une maison avec des ailes du type (3.2.2) et une application continue $f : P \longrightarrow Y$, telle que*

a) *f_{*i} est un monomorphisme en l'homologie entiere pour $i = k$, et en l'homologie rationnelle si $i = m$.*

b) *pour chaque $a \in H_m(P, \mathbb{Q})$ non nul, il existe une projection du type (3.2.3) qui vérifie $\pi_{l*} \circ f_*(a) \neq 0$.*

Démonstration. — Puisque $k < m$, il est bien connu, voir [22], que pour chaque élément $a \in H_m(P, \mathbb{Q})$ il existe une application

$$\psi_a : P \longrightarrow S^m,$$

telle que $\psi_a(a) \neq 0$. Choisissons une base modulo torsion $a_1, ..., a_s$ du module $H_m(P, \mathbb{Z})$ et soient $\psi_1, ..., \psi_s$ les applications correspondantes de P dans la sphère S^m.

On prend ensuite le $(k-1)$-squelette $P^{k-1} \subset P$ et on le contracte dans un point. L'espace obtenu $X = P/P^{k-1}$ est évidemment une maison. Soit

$$\phi : P \longrightarrow X \tag{3.2.4}$$

la projection naturelle. De la suite exacte de couple nous obtenons que l'application induite

$$\phi_* : H_k(P, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(X, \mathbb{Z}) \simeq H_k(P, P^{k-1}; \mathbb{Z}) \tag{3.2.5}$$

est un monomorphisme. Les applications $\phi, \psi_j; 1 \leqslant j \leqslant s$ définissent l'application suivante :

$$f'' = \phi \times \psi_1 \times \ldots \times \psi_s : P \longrightarrow X \times S^m \times \ldots \times S^m. \tag{3.2.6}$$

En utilisant, s'il est nécessaire, le théorème sur l'approximation cellulaire nous obtenons de f'' l'application

$$f' : P \longrightarrow Y',$$

où Y' est $(k+m)$-squelette du produit (3.2.6). On peut trouver facilement de (3.2.6) la structure cellulaire induite sur Y'. Puisque la dimension positive minimale des cellules dans le produit (3.2.6) est égale k, on obtient de là que

$$Y' = X \bigcup_{i=1}^{v} (S^k \times S^m)_i \bigvee_{j=1}^{u} S_j^m \ , \quad u + v = s,$$

où X est une maison et en plus les attachements de X et $(S^k \times S^m)_i, 1 \leqslant i \leqslant v$ sont effectués par des sphères S^k plongées. En remplaçant chaque sphère de recollement S^k par un cylindre $S^k \times I$, nous obtenons un espace Y du type (3.2.2) qui est équivalent à Y' à homotopie près. Ensuite on munit comme ci-avant Y d'une structure simpliciale cohérente à la structure cellulaire naturelle induite par celle de Y'. Nous comptons que l'application $f : P \longrightarrow Y$ équivalente à f' à homotopie près est déjà rendue simpliciale par rapport à cette triangulation sur Y.

De monomorphisme (3.2.5) nous obtenons facilement que f_{*k} est aussi un monomorphisme en l'homologie entiere. On voit sans peine que chaque application $\pi_j \circ f, 1 \leqslant j \leqslant u$ est équivalente à homotopie près à une parmi les applications $\psi_1, \ldots, \psi_s$. On considère la projection naturelle

$$\xi : M(k,m) \bigcup CS^k \longrightarrow S^m$$

et on compose les applications $\xi \circ \pi_i \circ f, 1 \leqslant i \leqslant v$. Nous voyons de même que chaque application composée $\xi \circ \pi_i \circ f$ est équivalente à homotopie près à une parmi les applications $\psi_1, \ldots, \psi_s$. Par notre construction étant donné que les applications $\psi_1, \ldots, \psi_s$ correspondent à une base de $H_m(P, \mathbb{Q})$, nous obtenons la propriété b) du théorème. Ceci achève la démonstration.

3.3. Métriques sur une maison avec des ailes ; démonstration du théorème principal.

Nous considérons une maison avec des ailes Y du type (3.2.2) et nous fixons une triangulation Θ sur Y cohérente à la structure cellulaire canonique donnée par (3.2.2). Nous supposons de même que sur chaque aile $M_i(k,m), 1 \leqslant i \leqslant v$ ou $S_j^m, 1 \leqslant j \leqslant u$ cette triangulation Θ est lisse. Maintenant nous allons construire une suite spéciale des métriques $\{g_p\}_{p=1}^{\infty}$ adaptées à la triangulation Θ. Dans l'intérieur de chaque aile, c'est-à-dire sur $S^k \times S^m$ ou sur S^m, ces métriques sont lisses.

PROPOSITION 3.3.1. — *Sur le produit des sphères $S^k \times S^m, k < m$ il existe une suite de métriques lisses $\{g_p\}_{p=1}^{\infty}$ et trois constantes réelles positives A, B, C qui vérifient les propriétés suivantes :*

a) $\mathrm{sys}_k(g_p) \geqslant A$;

b) *pour chaque $a \in H_m(S^k \times S^m, \mathbb{Z})$ non nul* $\mathrm{mass}(a) \geqslant Bp^2$;

c) $\mathrm{Vol}(g_p) \leqslant Cp$.

On peut trouver dans [2] et [17] la démonstration de cette proposition, même dans le cas plus général que les produits de deux sphères. Remarquons que le point *b*) de cette proposition peut être reformulé en termes des formes de calibration :

b*) *Il existe une suite de formes différentielles fermées $\{\alpha_p\}_{p=1}^{\infty}$ telle que :* $\mathrm{comass}(\alpha_p, g_p) \leqslant 1$ *et pour chaque $a \in H_m(S^k \times S^m, \mathbb{Z})$ non nul*

$$\left|\int_a \alpha_p\right| \geqslant Bp^2. \tag{3.3.1}$$

Les formes $\{\alpha_p\}_{p=1}^{\infty}$ qui figurent dans *b**) sont appelées *formes de calibration*. Enfin nous construisons une suite (souple) de métriques $\{h_p\}_{p=1}^{\infty}$ sur le polyèdre Y. Ces métriques seront définies sur chaque brique de Y, les conditions de recollement correct seront vérifiées automatiquement.

1. Nous prenons une métrique simpliciale g_0 sur le sous-polyèdre $X \subset Y$ et nous fixons g_0 pour la suite. Posons

$$h_p|_X = g_0, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

2. Sur chaque produit $S^k \times S^m \subset M_i(k,m),\ 1 \leqslant i \leqslant v$ posons

$$h_p|_{S^k \times S^m} = g_p, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

où $\{g_p\}_{p=1}^{\infty}$ une suite de métriques de la proposition 3.3.1.

3. Sur chaque composante S_j^m, $1 \leqslant j \leqslant u$ de (3.2.2) posons

$$h_p|_{S_j^m} = \text{ métrique euclidienne du rayon } p.$$

4. Il reste à définir h_p sur les couloirs $S^k \times I$. Puisque la métrique du départ g_0 est arbitraire, sans perte de généralité on peut supposer que toutes les cellules k-dimensionnelles $S^k \subset X$ sont isométriques. Considérons sur S^k une métrique euclidienne $\widehat{h} = \widehat{h}(p)$ de rayon variable en fonction de p qui domine pour chaque p les deux métriques $g_0|_{S^k}$ et $g_p|_{S^k \times S^m}$. Sur le cylindre $S^k \times [0, L]$ nous définissons la métrique h_p comme

$$\begin{aligned} h_p|_{S^k\times[0,1]} &= (1-t)g_0 + t\widehat{h} + (\mathrm{d}t)^2, && 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ h_p|_{S^k\times[1,L-1]} &= \widehat{h} + (\mathrm{d}t)^2, && 1 \leqslant t \leqslant L-1 \\ h_p|_{S^k\times[L-1,L]} &= (L-t)\widehat{h} + (t-L+1)g_p + (\mathrm{d}t)^2, && L-1 \leqslant t \leqslant L. \end{aligned}$$

On voit sans peine que les métriques $\{h_p\}_{p=1}^{\infty}$ définies plus haut seront simpliciales si nous demandons que les sphères plongées $S^k \times \{1\}$ et $S^k \times \{L-1\}$ soient plongées triangulées. Il est évident que cette triangulation du cylindre $S^k \times [0, L]$ est toujours possible. Étant donné que la triangulation choisie sur Y est cohérente avec la structure cellulaire naturelle, alors toutes les parties de la métrique h_p construite ci-dessus sont bien recollées entre elles et définissent une métrique globale h_p sur Y. La métrique h_p dépend encore d'un paramètre L que nous allons choisir prochainement comme il faut.

Proposition 3.3.2. — *La suite des métriques $\{h_p\}_{p=1}^{\infty}$ sur Y pour chaque $L \geqslant 3$ vérifie les propriétés suivantes :*

a) $\mathrm{Vol}(h_p) \leqslant Cvp + \mathrm{Vol}(g_0)$;

b) *si pour $a \in H_m(Y, \mathbb{Z})$ il existe un indice $1 \leqslant i \leqslant u$ ou $1 \leqslant j \leqslant v$ tel que $\pi_{*i}(a)$ ou $\pi_{*j}(a)$ non nul, alors* $\mathrm{mass}_{(s)}(a, h_p) \geqslant Bp^2$;

c) *Il existe une constante A_1 qui ne dépend pas de p, telle que pour chaque p on peut choisir L pour vérifier l'inégalité :* $\mathrm{sys}_k(h_p) \geqslant A_1$.

Les constantes C et B sont les mêmes que dans la proposition 3.3.1.

Démonstration. — a) La dimension de chaque couloir $S^k \times I(L)$ est strictement plus petite que $k + m = \dim Y$ et il n'apporte donc aucune contribution dans le volume de Y. Pour la même raison le volume de Y

ne dépend pas de la métrique sur les sommants $S_j^m, 1 \leqslant j \leqslant v$. On obtient donc pour chaque p l'égalité suivante :

$$\mathrm{Vol}(Y, h_p) = \mathrm{Vol}(X, h_p) + \sum_{i=1}^{u} \mathrm{Vol}(M_i(k,m), h_p).$$

En appliquant l'inégalité a) de la proposition 3.3.1 nous obtenons de cette dernière égalité la borne supérieure désirée pour $\mathrm{Vol}(h_p) = \mathrm{Vol}(Y, h_p)$.

b) Définissons sur $S^k \times S^m \bigcup CS^k$ la métrique $\widetilde{h}_p$ suivante. On pose

$$\widetilde{h}_p|_{S^k \times S^m \bigcup S^k \times [0,1]} = h_p|_{S^k \times S^m \bigcup S^k \times [0,1]}.$$

La métrique h_p sur $S^k \times \{1\}$ est une métrique euclidienne de rayon r et nous la prolongeons sur le cône CS^k pour obtenir le cône euclidien de rayon r et d'hauteur $L-2$ (on compte évidemment que $r < L-2$). Supposons que l'application

$$\pi_i : Y \longrightarrow S^k \times S^m \bigcup CS^k \simeq M_i(k,m) \bigcup CS^k$$

est réalisée comme la contraction du sous-polyèdre

$$Y \setminus \left((S^k \times S^m)_i \bigcup S^k \times [0, L-1]\right)$$

en un point. De la définition de $\widetilde{h}_p$ nous retirons immédiatement que $\mathrm{Lip}(\pi_i) \leqslant 1$. Enfin de (2.2.7) nous obtenons

$$\mathrm{mass}_{(s)}(a, h_p) \geqslant \mathrm{mass}_{(s)}(\pi_{*i}(a), \widetilde{h}_p)$$

pour chaque $a \in H_m(Y, \mathbb{Z})$. Pour conclure la démonstration de b) remarquons que cette dernière inégalité avec le lemme 3.3.3 (ci-après) et la proposition 3.3.1b) assurent l'inégalité désirée si $\pi_{*i}(a) \neq 0$.

c) Il est évident que la contraction en un point du bouquet $\bigvee_{j=1}^{u} S_j^m$ dans (3.2.2) n'augmente pas les distances. Puisque $k < m$, cette contraction induit un isomorphisme sur l'homologie k-dimensionnelle. Nous obtenons de ces deux faits l'inégalité

$$\mathrm{sys}_k(Y, h_p) \geqslant \mathrm{sys}_k\left(X \bigcup_{i=1}^{u} M_i(k,m), h_p\right).$$

Ceci nous permet de réduire notre démonstration au cas

$$Y = X \bigcup_{i=1}^{u} M_i(k,m).$$

On considère maintenant la réunion disjointe des produits de sphères $V = \bigcup_{i=1}^{u}(S^k \times S^m)_i$. Supposons que chaque sommant dans V est isométrique à $(S^k \times S^m, g_p)$, il est évident que

$$\mathrm{sys}_k(V, \cup g_p) = \mathrm{sys}_k(S^k \times S^m, g_p).$$

Si A est la même constante qui figure dans la proposition 3.3.1, nous posons $A_1 = \frac{1}{2}\min\{A, \mathrm{sys}_k(X, g_0)\}$. Le point c) devient une conséquence immédiate du lemme 3.3.4 ci-après. Ceci achève la démonstration.

LEMME 3.3.3. — *Soit $\{g_p\}_{p=1}^{\infty}$ la même suite des métriques sur $S^k \times S^m$ qui figure dans la proposition 3.3.1. Alors, pour chaque prolongement $\widetilde{g_p}$ de g_p sur le cône $S^k \times S^m \bigcup CS^k$ l'inégalité*

$$\mathrm{mass}_{(s)}(a, \widetilde{g_p}) \geqslant Bp^2, \quad a \in H_m(S^k \times S^m \bigcup CS^k, \mathbb{Z}) \text{ non nul}$$

est vérifiée avec la même constante B.

Démonstration. — On considère une forme de calibration α_p sur $S^k \times S^m$. Étant donné que $\deg \alpha_p = m > k$, alors si on prolonge cette forme comme zéro sur le cône CS^k on obtient la forme simpliciale bien définie sur $S^k \times S^m \bigcup CS^k$. Nous notons cette forme $\widetilde{\alpha}_p$. De la définition de formes simpliciales nous obtenons $d\widetilde{\alpha}_p = 0$. L'exemple 2.2.1 (pour $M = S^k \times S^m; Y = CS^k; f$ est l'application du recollement) nous assure que

$$\mathrm{comass}_{(s)}(\widetilde{\alpha}_p, \widetilde{g}_p) = \mathrm{comass}(\alpha_p, g_p) \leqslant 1$$

pour chaque prolongement $\widetilde{g}_p$ de la métrique g_p. Alors, $\widetilde{\alpha}_p$ est une forme de calibration pour chaque $\widetilde{g}_p$ qui prolonge g_p. On déduit immédiatement de là

$$\left|\int_a \widetilde{\alpha}_p\right| = \left|\int_{S^m} \widetilde{\alpha}_p\right| = \left|\int_{S^m} \alpha_p\right| \geqslant Bp^2,$$

où S^m est un sous-facteur plongé dans $S^k \times S^m$. Ceci achève la démonstration.

LEMME 3.3.4. — *Soient X et V deux polyèdres simpliciaux et*

$$Y = X \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{v} S^k \times I(L)\right) \bigcup V,$$

où chaque cylindre $S_i^k \times I(L)$, $1 \leqslant i \leqslant v$ *est collé par les sphères* $S_i^k \subset X$ *et* $S_i^k \subset V$, $1 \leqslant i \leqslant v$ *plongées simpliciales. Supposons que* Y *est muni d'une métrique qui vérifie deux propriétés :*

1) $S_i^k \times [1, L-1]$ *un cylindre euclidien de la longueur* $L-2$ *et de rayon* r *quelconque pour chaque* $1 \leqslant i \leqslant v$.

2) *Les rétractions naturelles de* $S_i^k \times [0,1]$ *dans* X *et de* $S_i^k \times [L-1, L]$ *dans* V *n'augmentent pas les distances pour chaque* $1 \leqslant i \leqslant v$.

Alors, pour L *suffisamment grand l'inégalité*

$$\operatorname{sys}_q(Y,g) \geqslant \frac{1}{2}\min\{\operatorname{sys}_q(X,g), \operatorname{sys}_q(V,g)\}$$

est vérifiée.

Démonstration. — On considère la partie du milieu $S_i^k \times [1, L-1]$ du i-ème couloir. Soit $t_0 \in [1, L-1]$, nous voyons que deux parties du i-ème couloir $S_i^k \times [0, t_0]$ et $S_i^k \times [t_0, L]$ admettent des rétractions par déformation dans X et V respectivement. Il est évident que ces rétractions n'augmentent pas les distances. Considérons la projection $\pi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}
&\pi(x) = 1, \text{ si } x \in X \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{v} S_i^k \times [0,1] \right) \\
&\pi(x) = L-1, \text{ si } x \in V \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{v} S_i^k \times [L-1, L] \right) \\
&\pi(x) = t, \text{ si } x \in \bigcup_{i=1}^{v} S_i^k \times [1, L-1],
\end{aligned}$$

ici $t \in [1, L-1]$ est la deuxième coordonnée du point x. Le sous-ensemble $\bigcup_{i=1}^{v} S_i^k \times [1, L-1] \subset Y$ est une variété lisse et l'application π sur ce sous-ensemble est lisse aussi. Soit $c \in C_q(Y, \mathbb{Z})$ un cycle entier singulier lipschitzien. Puisque $\operatorname{Lip}\pi \leqslant 1$, nous tirons de l'inégalité d'Eulenberg (voir [9]) que

$$\int_1^{L-1} \operatorname{Vol}_{q-1}(c \cap \pi^{-1}(t))\mathbf{d}t \leqslant c(q)\operatorname{Vol}_q(c),$$

où $c(q)$ est une constante ne dépendant que de la dimension q. Alors, il existe une valeur $t_0 \in [1, L-1]$ telle que

$$\operatorname{Vol}_{q-1}(c \cap \pi^{-1}(t_0)) \leqslant \frac{c(q)\operatorname{Vol}_q(c)}{L-2}. \tag{3.3.2}$$

Posons $R = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{sys}_q(X,g), \mathrm{sys}_q(V,g)\}$ et soit C la constante isopérimétrique pour les petits cycles dans S^k euclidienne de rayon r fixé (voir [13]). Autrement dit, pour chaque $(q-1)$-cycle b de volume plus petit que $\varepsilon = \varepsilon(r)$ dans S^k, il existe une chaîne $w, \partial w = b$ telle que

$$\mathrm{Vol}_q(w) \leqslant C(\mathrm{Vol}_{q-1}(b))^{\frac{q}{q-1}}.$$

Supposons qu'un cycle c vérifie l'inégalité $\mathrm{Vol}_q(c) \leqslant R$. Alors, de (3.3.2), en prenant $b = c \cap \pi^{-1}(t_0)$, on obtient

$$\mathrm{Vol}_{q-1}(b) \leqslant \frac{c(q)R}{L-2}.$$

Nous voyons que pour L assez grand $\mathrm{Vol}_{q-1}(b)$ devient suffisamment petit et l'inégalité isopérimétrique pour les petits cycles est applicable (on rappelle que r est fixé). A priori b appartient aux v exemplaires disjoints de la sphère S^k de rayon r et nous obtenons pour la chaîne w correspondante la borne supérieure suivante :

$$\mathrm{Vol}_q(w) \leqslant vC\left(\frac{c(q)R}{L-2}\right)^{\frac{q}{q-1}}.$$

Prenons maintenant L_0 suffisamment grand pour que l'inégalité

$$vC\left(\frac{c(q)R}{L-2}\right)^{\frac{q}{q-1}} \leqslant \frac{R}{2},$$

soit vérifiée quel que soit $L \geqslant L_0$. On tire de là aussitôt que $\mathrm{Vol}_q(w) \leqslant \frac{R}{2}$ pour chaque $L \geqslant L_0$. Considérons enfin deux cycles

$$c_1 = c \cap \pi^{-1}([t \leqslant t_0]) + w \quad ; \quad c_2 = c \cap \pi^{-1}([t_0 \leqslant t]) - w.$$

Il est évident que $c_1 + c_2 = c$, et alors au minimum l'un des deux cycles est non trivial en homologie. En appliquant les rétractions introduites au tout début de la preuve sur ces cycles, nous obtenons deux nouveaux cycles $\widetilde{c}_1$ dans X et $\widetilde{c}_2$ dans V et au minimum l'un des deux est non trivial. Pour les cycles obtenus on a

$$\mathrm{Vol}_q(\widetilde{c}_i) \leqslant \mathrm{Vol}_q(c_i) \leqslant \mathrm{Vol}_q(c) + \mathrm{Vol}_q(w) \leqslant R + \frac{R}{2} < 2R\ ; \quad i = 1, 2,$$

ce qui est contraire à la définition de R. Nous obtenons finalement que chaque cycle $c \in C_q(Y, \mathbb{Z})$ homologiquement non trivial vérifie l'inégalité

$$\mathrm{Vol}_q(c) \geqslant \frac{1}{2}\min\{\mathrm{sys}_q(X), \mathrm{sys}_q(V)\},$$

ceci achève la démonstration.

Pour obtenir le théorème B il reste à remarquer qu'il devient maintenant une conséquence directe et immédiate des propositions 3.2.1 et 3.3.2.

4. Remarques finales.

Dans cette partie nous donnons deux conséquences des théorèmes A et B concernant certains résultats obtenus dans [2]. Le théorème A donne la souplesse intersystolique d'une variété quelconque dans un contexte k-systole - $(n-k)$-mass ou k-systole - $(n-k)$-systole libre. En l'absence de torsion dans la dimension correspondante, la systole libre coïncide avec la systole habituelle et nous obtenons donc quelques conséquences sur la souplesse intersystolique pour deux systoles habituelles.

COROLLAIRE 4.1. — *Soit une variété fermée, orientable, de dimension $n > 2$ qui n'a pas de $(k-1)$-torsion en $\mathbb{Z}$-homologie pour un indice k donné dans l'intervalle $1 \leqslant k \leqslant n/2$. Alors, elle est $(k, n-k)$-souple. En particulier, chaque variété fermée et orientable de dimension $n > 2$ est $(1, n-1)$-souple.*

En effet, du théorème de dualité de Poincaré et de la dualité générale entre les torsions des $\mathbb{Z}$-homologie et $\mathbb{Z}$-cohomologie on déduit immédiatement que l'absence de $(k-1)$-torsion garantit l'absence de $(n-k)$-torsion. Ce corollaire couvre les théorèmes 1, 2, 3 de [2] avec des conditions topologiques essentiellement plus faibles que les conditions considérées dans [2].

Considérons ensuite le cas $k = 1$. Dans ce cas l'application (3.2.4) induit même un monomorphisme de groupes fondamentaux

$$\phi_* : \pi_1(P) \longrightarrow \pi_1(X). \tag{4.1}$$

En effet, si $k = 1$ le complexe X est équivalent à homotopie près au bouquet

$$X \simeq P \bigvee S^1 \bigvee \cdots \bigvee S^1,$$

où le nombre des cercles est égal au nombre de sommets de P moins 1.

Le fait que l'application (4.1) est un monomorphisme nous garantit que dans la démonstration du théorème principal B nous pouvons partout remplacer $\mathrm{sys}_1(P)$ par $\pi\mathrm{sys}_1(P)$. Et nous obtenons de là

COROLLAIRE 4.2. — *Chaque polyèdre fini P de dimension $n > 2$ vérifie l'égalité suivante :*

$$\inf_g \frac{\mathrm{Vol}(P, g)}{\pi \mathrm{sys}_1(P, g)\, \mathrm{stsys}_{n-1}(P, g)} = 0,$$

où g parcourt l'ensemble des métriques riemanniennes correspondant à la triangulation donnée sur P.

Dans le cas particulier des variétés orientables $H_{n-1}(P, \mathbb{Z})$ n'a pas de torsion et ce corollaire implique le théorème B de [2].

J'aimerais remercier M. Katz pour les remarques critiques qui m'ont aidé à améliorer ce texte. Ce travail a été particulièrement soutenu par le Fonds National Russe de Recherches Fondamentales (grant 99-01-01202a). Il a été commencé pendant mon séjour à Genève durant l'automne 1999. Je remercie le Fonds National Suisse pour la Recherche Scientifique qui a soutenu financièrement ma visite à L'Université de Genève. Je remercie aussi mes collègues de l'Université Montpellier II, spécialement D. Massart, J. Malgoire et J. Lafontaine, qui m'ont aidé à rédiger cette version française.

BIBLIOGRAPHIE

[1] I. BABENKO, Asymptotic invariants of smooth manifolds, Russian Acad. Sci. Izv. Math., Vol. 41 (1993), 1-38.

[2] I. BABENKO and M. KATZ, Systolic freedom of orientable manifolds, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, T. 31 (1998), 787-809.

[3] I. BABENKO, M. KATZ and A. SUCIU, Volumes, middle-dimensional systoles, and Whitehead products, Math. Res. Lett., Vol. 5 (1998), 461-471.

[4] I. BABENKO, Forte souplesse intersystolique de variétés fermées, Russ. Math. Surv., Vol. 55, n° 5 (2000), 171-172.

[5] M. BERGER, A l'ombre de Loewner, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., T. 5 (1972), 241-260.

[6] M. BERGER, Du côté de chez Pu, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., T. 5 (1972), 1-44.

[7] M. BERGER, Systoles et applications selon Gromov, exposé 771 Séminaire N. Bourbaki 1992/93 Astérisque, Vol. 216 (1993), 279-310.

[8] M. BERGER, Riemannian geometry during the second half of the twentieth century, Jahresber. Deutsch. Math. -Verein, Vol. 100 (1998), 45-208.

[9] Yu. BURAGO and V. ZALGALLER, Geometric inequalities, Springer, 1988.

[10] H. FEDERER, Geometric measure theory, Springer, 1969.

[11] H. FEDERER, Real flat chains, cochains and variational problems, Indiana Math. Journal, Vol. 24 (1974), 351-407.

[12] M. GROMOV, Systoles and intersystolic inequalities, (Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger, Collection SMF n° 1 (1996), 291-362.

[13] M. GROMOV, Filling Riemannian manifolds, J. Diff. Geom., Vol. 18 (1983), 1-147.

[14] M. GROMOV, Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces, Birkhäuser, 1999.

[15] J.J. HEBDA, The collars of Riemannian manifolds and stable isosystolic inequalities, Pacific J. of Math., Vol. 121 (1986), 339-356.

[16] M. KATZ, Counter-examples to isosystolic inequalities, Geometriae Dedicata, Vol. 57 (1995), 195-206.

[17] M. KATZ, Systolically free manifolds, Appendix D to [14].

[18] M. KATZ and A. SUCIU, Volume of Riemannian manifolds, geometric inequalities, and homotopy theory, in Rothenberg Festschrift (M. Farber, W. Lueck, S. Weinberger, eds), Contemporary Mathematics, AMS, 1999.

[19] M. KATZ and A. SUCIU, Systolic freedom of loopspaces, (Geometric and Functional Analysis) à paraître.

[20] J. MILNOR, Morse theory, Princeton Univ. Press, 1963.

[21] P.M. PU, Some inequalities in certain non-orientable Riemannian manifolds, Pacific J. of Math., Vol. 2 (1952), 55-71.

[22] J.-P. SERRE, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens, Ann. of Math., Vol. 58 (1953), 258-294.

[23] E.H. SPANIER, Algebraic topology, McGraw-Hill Book Company, 1966.

[24] R. SWAN, Thom's theory of differential forms on simplicial sets, Topology, Vol. 14 (1975), 271-273.

Manuscrit reçu le 1er mars 2001,
accepté le 5 mars 2002.

Ivan K. BABENKO,
Université Montpellier II
Département des Sciences Mathématiques
UMR 5030 (CNRS)
Case courrier 051
Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 (France).
babenko@darboux.math.univ-montp2.fr
et
Moscow State University
Department of Mathematics and Mechanics
119899 Moscow (Russia).
babenko@mech.math.msu.su