ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

François PIERROT

Structure de certaines C^*-algèbres associées aux réseaux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Tome 52, n° 5 (2002), p. 1287-1299.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_5_1287_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 5 (2002), 1287–1299

STRUCTURE DE CERTAINES C^*-ALGÈBRES ASSOCIÉES AUX RÉSEAUX DE $PSL_2(\mathbb{R})$

par François PIERROT

1. Introduction.

Notations. — Soit G un groupe localement compact. On note $C^*(G)$ la C^*-algèbre maximale de G, $C_r^*(G)$ sa C^*-algèbre réduite et λ_G : $C^*(G) \to C_r^*(G)$ l'application quotient. On appelle dual de G et on note $\widehat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence unitaire de représentations unitaires irréductibles de G muni de la topologie de Fell; on appelle dual réduit de G et on note $\widehat{G}_r$ le sous-espace fermé de $\widehat{G}$ formé des classes de représentations unitaires irréductibles faiblement contenues dans la représentation régulière, et ε_G la représentation triviale. Soit A une C^*-algèbre. On note $\mathbf{M}(A)$ la C^*-algèbre des multiplicateurs de A. Soit π : $A \to B$ un morphisme surjectif de C^*-algèbres. On note $\overline{\pi} : \mathbf{M}(A) \to \mathbf{M}(B)$ son extension aux multiplicateurs.

Soit G un groupe localement compact, Γ un sous-groupe fermé. Rappelons (*cf.* [Ri] et [BV]) que l'action de $L^1(\Gamma)$ sur $L^1(G)$ s'étend en un morphisme que nous noterons génériquement j de $C^*(\Gamma)$ dans l'algèbre $\mathbf{M}(C^*(G))$ des multiplicateurs de $C^*(G)$, ainsi qu'en un morphisme que nous noterons génériquement j_r de $C_r^*(\Gamma)$ dans $\mathbf{M}(C_r^*(G))$; on a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C^*(\Gamma) & \xrightarrow{j} & \mathbf{M}(C^*(G)) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \lambda_\Gamma} & & \big\downarrow{\scriptstyle \overline{\lambda_G}} \\ C_r^*(\Gamma) & \xrightarrow{j_r} & \mathbf{M}(C_r^*(G)) \end{array}$$

Mots-clés : C^*-algèbres – Représentations unitaires – (g, K)-modules – Réseaux.
Classification math. : 22D25 – 43A15.

Le morphisme j_r est toujours injectif alors qu'en général j n'est pas injectif (*cf.* [Ri] et [BV]). Soit $C^*_G(\Gamma)$ la complétion de l'algèbre involutive $C_C(\Gamma)$ pour la norme induite par j. L'application induit en particulier un isomorphisme entre $C^*_G(\Gamma)$ et une sous-C^*-algèbre $\mathbf{M}(C^*(G))$. D'après le diagramme précédent, et comme j_r est injectif, le morphisme λ_Γ se factorise en un morphisme surjectif $\lambda^G_\Gamma : C^*_G(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)$ tel que $\lambda^G_\Gamma \circ j = \lambda_\Gamma$. Un problème naturel consiste à déterminer la structure de

$$I^G_\Gamma = \operatorname{Ker}(\lambda^G_\Gamma).$$

Soit $I_G = \operatorname{Ker}(\lambda_G)$. Le noyau $\operatorname{Ker}(\overline{\lambda_G})$ est l'idéal $\mathbf{M}(C^*(G), I_G)$ de $\mathbf{M}(C^*(G))$ formé des multiplicateurs dont l'image est contenue dans I_G. Ce noyau contient (en général strictement) $\operatorname{Ker}(\lambda_G)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & I^G_\Gamma & \longrightarrow & C^*_G(\Gamma) & \xrightarrow{\lambda^G_\Gamma} & C^*_r(\Gamma) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle j} & & \big\downarrow{\scriptstyle j} & & \big\downarrow{\scriptstyle j_r} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}(\overline{\lambda_G}) & \longrightarrow & \mathbf{M}(C^*(G)) & \xrightarrow{\overline{\lambda_G}} & \mathbf{M}(C^*_r(G)) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les flèches verticales sont des injections. Dans cet article, nous démontrons le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit $G = PSL_2(\mathbb{R})$ et Γ un réseau dans G. Alors, le morphisme j induit un isomorphisme de I^G_Γ sur* $\operatorname{Ker}(\lambda_G) \subset C^*(G)$.

Paramétrons comme il est usuel (*cf.* [L]) la série supplémentaire de $PSL_2(\mathbb{R})$ par $]0,1[$ et associons au paramètre 1 la représentation triviale. Pour tout sous-espace X de $]0,1]$, notons $\widetilde{X}$ l'adhérence de X dans $]0,1]$ et $\widehat{\Gamma}_X$ le sous-espace de $\widehat{\Gamma}$ formé des restrictions à Γ des représentations irréductibles de G de paramètre dans X.

COROLLAIRE 2. — *L'idéal I^G_Γ est équivalent au sens de Morita à* $C_0(]0,1])$. *De plus,*

1. *le spectre de $C^*_G(\Gamma)$ est $\widehat{\Gamma}_{]0,1]} \cup \widehat{\Gamma}_r$, et pour tout sous-ensemble X non vide de* $]0,1[$, *on a $\overline{\widehat{\Gamma}_X} = \widehat{\Gamma}_{\widetilde{X}} \cup \widehat{\Gamma}_r$;*

2. *les applications j et λ^G_Γ induisent des isomorphismes $K_*(C^*(\Gamma)) \simeq K_*(C^*_G(\Gamma)) \simeq K_*(C^*_r(\Gamma))$.*

Soit G un groupe de Lie connexe simple non compact, π une représentation unitaire irréductible de G qui n'est pas dans la série discrète et qui n'est pas la représentation triviale. Soit Γ un réseau dans G. Dans [CS], les auteurs démontrent que la restriction $\pi_{|\Gamma}$ est encore irréductible; dans [BH], les auteurs démontrent que $\pi_{|\Gamma}$ contient faiblement la représentation régulière λ_Γ de Γ. Soit $C^*_\pi(\Gamma)$ la complétion de l'algèbre involutive $C_C(\Gamma)$ pour la norme induite par la représentation π. La relation de contenance faible se traduit par un morphisme surjectif $\lambda^\pi_\Gamma : C^*_\pi(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma)$. Supposons dorénavant que π n'est pas dans le dual réduit. Alors $\pi_{|\Gamma}$ n'est pas faiblement équivalente à λ_Γ. Donc $\mathrm{Ker}(\lambda^\pi_\Gamma)$ est non trivial, et l'un des problèmes soulevés dans [B] consiste à déterminer ce noyau.

Soit π_1 et π_2 des représentations unitaires irréductibles qui ne sont pas dans le dual réduit, distinctes de la représentation triviale et qui de plus ne sont pas unitairement équivalentes. D'après [CS], les restrictions $(\pi_1)_{|\Gamma}$ et $(\pi_2)_{|\Gamma}$ ne sont pas unitairement équivalentes, et d'après [B], elles ne sont pas faiblement équivalentes, d'où la question naturelle ([B]) de savoir si l'une peut contenir faiblement l'autre. Dans [BH], les auteurs montrent que c'est impossible pour $G = PSL_2(\mathbb{R})$ et $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$. Dans cet article, nous répondons à ces questions pour $G = PSL_2(\mathbb{R})$ et pour tous les réseaux de G.

THÉORÈME 3. — *Soit Γ un réseau dans $PSL_2(\mathbb{R})$. Soit π une représentation unitaire irréductible dans la série supplémentaire de $PSL_2(\mathbb{R})$ représentée dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}_\pi$. Alors on a une suite exacte scindée :*

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi) \longrightarrow C^*_\pi(\Gamma) \xrightarrow{\lambda^\Gamma_\pi} C^*_r(\Gamma) \longrightarrow 0.$$

De plus,

1. *l'adhérence de $\{\pi\}$ dans $\widehat{\Gamma}$ est $\widehat{\Gamma}_r \cup \{\pi\}$,*
2. *$K_0(C^*_\pi(\Gamma)) \simeq K_0(C^*_r(\Gamma)) \oplus \mathbb{Z}$ et $K_1(C^*_\pi(\Gamma)) \simeq K_1(C^*_r(\Gamma))$.*

THÉORÈME 4. — *Soit π_1, π_2 deux représentations unitaires irréductibles de la série supplémentaire de $PSL_2(\mathbb{R})$ non unitairement équivalentes.*

1. *$(\pi_1)_{|\Gamma}$ n'est pas faiblement contenue dans $(\pi_2)_{|\Gamma}$.*
2. *Il existe un isomorphisme $\phi : C^*_{\pi_1}(\Gamma) \to C^*_{\pi_2}(\Gamma)$ tel que $\lambda^\Gamma_{\pi_2} \circ \phi = \lambda^\Gamma_{\pi_1}$.*

Remarque. — L'isomorphisme ϕ n'est pas canonique; en particulier, d'après la première assertion du théorème 4 ou d'après [B], il existe $\gamma \in \Gamma$, tel que $\phi(\pi_1(\gamma)) \neq \pi_2(\gamma)$.

La démonstration de ces résultats repose sur les considérations suivantes. La série principale (respectivement supplémentaire) de $PSL_2(\mathbb{R})$ est paramétrée de façon naturelle par $i\mathbb{R}^+$ (resp. $]0,1[$). En choisissant convenablement des bases des espaces de Hilbert associés, les représentations correspondantes de l'algèbre de Lie sont définies dans un même espace de Hilbert, varient continûment en fonction du paramètre $s \in \mathbb{R}^+ \cup]0,1[$ (pour la norme d'opérateurs) et les différences sont des opérateurs compacts. On déduit alors de [A] que l'on a le même phénomène au niveau de leurs exponentielles. Ceci permet de "recoller" les séries principales et supplémentaires en un champ de représentations qui est un champ continu non seulement pour $C^*(G)$ mais également pour la sous-algèbre de $\mathbf{M}(C^*(G))$ engendrée par les éléments du groupe G. On obtient ainsi la structure de $C^*_G(\Gamma)$ pour les réseaux Γ de G. Il est très probable que la même méthode s'applique dans le cas des réseaux de $SO(n,1)$.

Cet article s'organise de la façon suivante. Dans la partie 2, nous faisons des rappels concernant les représentations irréductibles de $PSL_2(\mathbb{R})$ et leur structure infinitésimale, et nous construisons le champ continu de représentations. Dans la partie 3, nous démontrons les théorèmes de structure des C^*-algèbres associées aux réseaux de $PSL_2(\mathbb{R})$ énoncés ci-dessus et nous concluons par quelques considérations générales.

Je remercie G. Skandalis pour des discussions fructueuses, ainsi que Pierre de la Harpe et Alain Valette pour leurs remarques sur une version préliminaire de cet article.

2. Représentations de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Soit $G = PSL_2(\mathbb{R})$, $K = PSO_2(\mathbb{R})$. Rappelons la liste des classes de représentations unitaires irréductibles de G telle qu'elle est donnée dans [L], p. 122 :

- Les représentations intégrables de la série discrète paramétrées par un entier impair n tel que $|n| \geqslant 3$. Elles définissent des ouverts fermés de $\widehat{G}$.
- Les deux représentations non intégrables de la série discrète π^+ et π^- qui ne sont pas isolées dans $\widehat{G}$.
- Les représentations de la série principale unitaire paramétrées par $s \in i\mathbb{R}^+$ et celles de la série supplémentaire paramétrées par $s \in]0,1[$.

- La représentation triviale.

Soit $\mathbb{H}$ l'espace de Hilbert séparable de base $(e_n)_{n\in 2\mathbb{Z}}$, muni de la représentation unitaire diagonale de K pour laquelle chaque e_n est de poids n. Soit $\mathcal{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{H}$ engendré par les e_n. Il est K-invariant.

Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On identifie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ à $sl_2(\mathbb{C})$. Les $(\mathfrak{g}, K)$-modules associés (*cf.* [W2], p. 81) aux séries principales et supplémentaires se réalisent tous dans le K-module $\mathcal{H}$ de la façon suivante ([L]) : soit $E^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{smallmatrix}\right)$ et $E^- = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{smallmatrix}\right)$; soit $s \in i\mathbb{R}^+ \cup\,]0,1[$. En posant $\forall n \in 2\mathbb{Z}$, $\pi_s(E^+)(e_n) = (n(n+2) - (s+1)(s-1))^{1/2} e_{n+2}$ et $\pi_s(E^-) = (-\pi_s(E^+))^*_{|\mathcal{H}}$, on obtient une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module irréductible. Pour la structure préhilbertienne de $\mathcal{H}$ héritée de $\mathbb{H}$, ce $(\mathfrak{g}, K)$-module est unitaire et le paramètre de la représentation unitaire irréductible du groupe associée, notée encore π_s, est s. Pour $s = 1$, ceci définit encore une structure de $(\mathfrak{g}, K)$-module π_1, non irréductible. Celui-ci est somme directe de trois $(\mathfrak{g}, K)$-modules irréductibles unitaires, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$, où $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}e_0$ et où $\mathcal{H}^+$ (resp. $\mathcal{H}^-$) est l'espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\in 2\mathbb{N}^*}$ (resp. par $(e_n)_{n\in -2\mathbb{N}^*}$). Les classes de représentations irréductibles unitaires associées sont :

- la représentation triviale sur $\overline{\mathcal{H}_0}$;
- la représentation de la série discrète non intégrable π^+ sur $\overline{\mathcal{H}_+}$;
- la représentation de la série discrète non intégrable π^- sur $\overline{\mathcal{H}_-}$.

On note π_1 la représentation unitaire du groupe associée sur $\mathbb{H} = \overline{\mathcal{H}_0} \oplus \overline{\mathcal{H}_+} \oplus \overline{\mathcal{H}_-}$.

Soit $\mathcal{X} = i\mathbf{R}^+ \cup\,]0,1]$ considéré comme sous-espace topologique de $\mathbb{C}$ et H un générateur de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K.

LEMME 5. — *Soit $X = \alpha E^+ + \beta E^- + \gamma H \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.*

1. *Pour tous $s, s' \in \mathcal{X}$, $\pi_s(X) - \pi_{s'}(X)$ se prolonge en un opérateur compact de norme inférieure ou égale à : $(|\alpha| + |\beta|)C(s,s')$ où la constante $C(s,s')$ est égale à*

$$\sup_{n\in 2\mathbb{Z}} |((n(n+2) - (s+1)(s-1))^{1/2} - (n(n+2) - (s'+1)(s'-1))^{1/2})|.$$

2. *Pour tout $s \in \mathcal{X}$, soit $k_s(X) \in \mathbf{K}(\mathbb{H})$ l'opérateur prolongeant $\pi_s(X) - \pi_0(X)$. Pour tout sous-espace compact Y de $\mathcal{X}$, l'application qui à $s \in Y$, associe $k_s(X)$ définit un élément $k_Y(X) \in \mathbf{K}(\mathbb{H} \otimes C(Y))$.*

Démonstration.

1. Posons $C(s,n) = (n(n+2) - (s+1)(s-1))^{1/2}, s \in \mathcal{X}, n \in 2\mathbb{Z}$. Soit $S \in U(\mathbb{H})$ défini par $\forall n \in 2\mathbb{Z}$, $S(e_n) = e_{n+2}$. Alors, pour tout $n \in 2\mathbb{Z}$, $S^*(\pi_s(X) - \pi_{s'}(X))(e_n) = (C(s,n) - C(s',n))e_n$. Donc $S^*(\pi_s(X) - \pi_{s'}(X))$ et par conséquent $\pi_s(X) - \pi_{s'}(X)$ se prolongent en des opérateurs compacts et $\|\pi_s(X) - \pi_{s'}(X)\| = \|S^*(\pi_s(X) - \pi_{s'}(X))\| = C(s,s')$.

2. Cela résulte immédiatement du résultat qui précède et de l'identification entre $\mathbf{K}(\mathbb{H} \otimes C(Y))$ et l'algèbre des fonctions continues de Y dans $\mathbf{K}(\mathbb{H})$.

Pour la notion d'opérateur régulier, on renvoie à [Lan] (voir également [Ba] et [Wo]).

PROPOSITION 6. — *Soit A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien, T un opérateur régulier autoadjoint sur E, $S \in \mathbf{L}(E)$, $S = S^*$.*

1. *L'opérateur $T + S$ est régulier autoadjoint.*

2. *Supposons que S est T-continu au sens où l'application qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $\exp(itT)S\exp(-itT)$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{L}(E)$. Soit A une sous-algèbre normiquement fermée de $\mathbf{L}(E)$ telle que $\exp(itT)S\exp(-itT) \in A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\exp(i(T+S))\exp(-iT) - 1 \in A.$$

Démonstration.

1. *Cf.* [Lan] et [Ba], corollaire 4.5.

2. Posons pour $t \in \mathbb{R}$, $S_t = \exp(itT)iS\exp(-itT)$. D'après [A] p. 84,

$$\exp(i(S+T))\exp(-iT) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\Sigma_n} S_{t_1}S_{t_2}...S_{t_n}d\mu_n((t_1,...,t_n))$$

où $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Sigma_n = \{(t_1,\ldots,t_n) | 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \ldots \leqslant t_n \leqslant 1\}$ et μ_n désigne la mesure de Lebesgue sur Σ_n. Les intégrales sont normiquement convergentes dans A et la somme est normiquement convergente; d'où l'assertion.

COROLLAIRE 7. — *Soit A une C^*-algèbre, E un A-module hilbertien. Soit T un opérateur régulier autoadjoint, $S \in \mathbf{K}(E)$, $S = S^*$. Alors*

$$\exp(i(T+S)) - \exp(iT) \in \mathbf{K}(E).$$

Démonstration. — Comme $S \in \mathbf{K}(E)$, l'opérateur S est T-continu. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente.

PROPOSITION 8. — *Soit Y un sous-espace compact de $\mathcal{X}$. Il existe un morphisme fortement continu π_Y de G dans $U(\mathbb{H} \otimes C(Y))$ tel que $\forall g \in G, \forall s \in Y, (\pi_Y(g))_s = \pi_s(g)$. De plus, $\forall g \in G$, $\pi_Y(g) - (\pi_0 \otimes 1_{C(Y)})(g)$ est compact.*

Démonstration. — Soit $X \in \mathfrak{g}$. Notons encore $\forall s \in Y, \pi_s(X)$ l'opérateur anti-autoadjoint non borné sur $\mathbb{H}$ dont la restriction à $\mathcal{H}$ est $\pi_s(X)$. Posons $\pi_Y(X) = \pi_0(X) + k_Y(X)$. D'après la proposition 6 et le corollaire 7, $\pi_Y(X)$ est un opérateur régulier anti-autoadjoint et $\exp(\pi_Y(X)) - \exp(\pi_0(X))$ est compact. De plus, $\forall s \in Y, (\exp(\pi_Y(X)))_s = \exp(\pi_s(X)) = \pi_s(\exp(X))$. Donc $\exp(\pi_Y(X))$ ne dépend que de $\exp(X)$ ce qui permet de définir $\pi_Y : G \to U(\mathbb{H} \otimes C(Y))$ en posant $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\pi_Y(\exp(X)) = \exp(\pi_Y(X))$. Reste à montrer que π_Y est fortement continu et cela résulte immédiatement du lemme élémentaire qui suit.

LEMME 9. — *Soit G un groupe de Lie et $\pi : G \to U(E)$ un morphisme dans le groupe $U(E)$ des unitaires d'un C^*-module E. On suppose que $\forall X \in \mathfrak{g}$, l'application qui à $t \in \mathbb{R}$, associe $\pi(\exp(tX))$ est fortement continue. Alors le morphisme π est fortement continu.*

Démonstration. — Soit $U = \prod_{i=1}^{n}]-a_i, b_i[$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, V un voisinage de l'identité dans G et $\phi : U \to V$ un difféomorphisme tel que $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$, on a $\phi(x) = \prod_{i=1}^{n} \phi((0, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0))$. Notons que si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ sont des applications fortement continues d'un espace localement compact X dans $\mathbf{L}(E)$ telles que $\phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$ sont bornées en norme, alors $\phi = \phi_1 \ldots \phi_n$ est fortement continue. Il suffit alors d'appliquer cette remarque à $X = \prod_{i=1}^{n}[-a_i/2, b_i/2]$, et $\phi_i : X \to \mathbf{L}(E), i = 1, \ldots, n$, définies par $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in X$, $\phi_i(x_1, \ldots, x_n) = \pi \circ \phi(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$.

Remarque. — Soit Y_1, Y_2 deux parties compactes de $\mathcal{X}$. Les restrictions à $Y_1 \cap Y_2$ des représentations π_{Y_1}, π_{Y_2} construites dans la démonstration du lemme précédent coïncident; donc il existe une unique représentation de $C^*(G)$ dans $\mathbf{L}(\mathbb{H} \otimes C_0(\mathcal{X}))$ notée $\pi_{\mathcal{X}}$ dont la restriction à chaque partie compacte Y de $\mathcal{X}$ coïncide avec la représentation π_Y construite dans la démonstration du lemme. Il est aisé d'en déduire la structure de $C^*(PSL_2(\mathbb{R}))$ résultat dû à Milicic ([M], voir également [V]). Soit $\mathbb{H}^+$ et $\mathbb{H}^-$ deux espaces de Hilbert séparables de dimension infinie, et $\mathbb{H} = \mathbb{H}^+ \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{H}^-$. Alors on a un isomorphisme

$$C^*(PSL_2(\mathbb{R})) \simeq A \oplus (\oplus_{n \in 2\mathbb{Z}+1, |n|>1} \mathbf{K}(\mathbb{H}))$$

où A est la sous-C^*-algèbre de $C_0(\mathcal{X}, \mathbf{K}(\mathbb{H}))$ formée des fonctions dont la valeur en 1 appartient $\mathbf{K}(\mathbb{H}^+) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbf{K}(\mathbb{H}^-)$. En effet, soit $B = A \oplus (\oplus_{n\in 2\mathbb{Z}+1,|n|>1}\mathbf{K}(\mathbb{H}))$; soit $\forall n \in 2\mathbb{Z}+1, |n| > 1$, π_n la représentation irréductible dans la série discrète de paramètre n. Enfin, soit $\pi = \pi_{\mathcal{X}} \oplus (\oplus_{n\in 2\mathbb{Z}+1,|n|>1}\pi_n)$ la représentation injective de $C^*(PSL_2(\mathbb{R}))$ à valeurs dans $\mathbf{M}(B)$. Il résulte de ce qui précède que π induit un isomorphisme de $C^*(PSL_2(\mathbb{R}))$ sur B.

Pour toute représentation $\pi : C^*(G) \to \mathbf{K}(\mathbb{H})$, notons $\pi_* : K_0(C^*(G)) \to \mathbb{Z}$ le morphisme induit. Au cours des remarques finales, nous utiliserons le lemme suivant qui est une conséquence triviale de la structure de $C^*(PSL_2(\mathbb{R}))$.

LEMME 10. — $\forall s \in \mathbb{R}^+ \cup\,]0,1], (\pi_s)_* = 0$.

Démonstration. — Identifions topologiquement $\mathcal{X}$ à $]0,1]$. Le morphisme $\pi_{\mathcal{X}} : C^*(G) \to \mathbf{K}\otimes C_0(\mathcal{X}) \subset \mathbf{K}\otimes \widetilde{C_0(\mathcal{X})} \simeq \mathbf{K}\otimes C([0,1])$ induit une homotopie entre π_s, et le morphisme nul. D'où le résultat.

3. Démonstration des théorèmes et conséquences.

Démontrons les théorèmes 3 et 4. Soit Γ un réseau dans G et $\pi = \pi_s$ la représentation irréductible unitaire de G dans la série supplémentaire de paramètre $s \in]0,1[$, réalisée dans l'espace de Hilbert $\mathbb{H}$, comme dans la section précédente. D'après la proposition qui précède, $\forall g \in G, \pi(g) - \pi_0(g)$ est compact. La restriction $(\pi_0)_{|\Gamma}$ est faiblement contenue dans λ_Γ, et donc d'après [BH] elle lui est quasi-équivalente. Ainsi $\lambda_\Gamma^{\pi_0}$ est un isomorphisme. Par conséquent, l'identité de $C_C(\Gamma)$ induit un morphisme qu'on notera π_0 de $C^*_\pi(\Gamma)$ sur $C^*_{\pi_0}(\Gamma)$ tel que $\lambda_\Gamma^{\pi_0} \circ \pi_0 = \lambda_\Gamma^\pi$. Identifions $C^*_\pi(\Gamma)$ et $C^*_{\pi_0}(\Gamma)$ à leurs images respectivement par π et π_0 dans $\mathbf{L}(\mathbb{H})$. Alors $\forall x \in C^*_\pi(\Gamma) \subset \mathbf{L}(\mathbb{H})$, $x - \pi_0(x) \in \mathbf{K}(\mathbb{H})$. Soit $x \in I_\Gamma^\pi = \mathrm{Ker}(\lambda_\Gamma^\pi)$. Alors $\pi_0(x) = 0$ et donc $x \in \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$. Ainsi, $I_\Gamma^\pi \subset \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$. L'idéal I_Γ^π est un idéal non vide de la sous-C^*-algèbre irréductible $C^*_\pi(\Gamma)$ de $\mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)$, donc ([D], p. 52) une sous-algèbre irréductible de $\mathbf{L}(\mathbb{H})$, de plus contenue dans $\mathbf{K}(\mathbb{H})$ et donc ([D], corollaire 4.1.6.), $I_\Gamma^\pi = \mathbf{K}(\mathbb{H})$. D'où la suite exacte du théorème 3. L'assertion 1 du théorème 4 en résulte.

Soit $q : \mathbf{L} \to \mathbf{L}(\mathbb{H})/\mathbf{K}(\mathbb{H})$ l'application quotient. Le morphisme λ_Γ^π induit un isomorphisme $\overline{\lambda_\Gamma^\pi} : q(C^*_\pi(\Gamma)) \simeq C^*_r(\Gamma)$ tel que $\overline{\lambda_\Gamma^\pi} \circ q = \lambda_\Gamma^\pi$.

Comme $\mathbf{K}(\mathbb{H}) \subset C^*_\pi(\Gamma)$, et comme $\forall x \in C^*_\pi(\Gamma)$, $x - \pi_0(x) \in \mathbf{K}(\mathbb{H})$, on a $C^*_\pi(\Gamma) = C^*_{\pi_0}(\Gamma) + \mathbf{K}(\mathbb{H})$. En considérant alors $C^*_{\pi_0}(\Gamma)$ comme sous-algèbre de $C^*_\pi(\Gamma)$, on obtient un morphisme noté encore π_0 de $C^*_\pi(\Gamma)$ dans elle-même, telle que $q \circ \pi_0 = q$, et tel que $\forall x \in C^*_\pi(\Gamma)$, $\|\pi_0(x)\| = \|\lambda^{\pi_0}_\Gamma(x)\|$. Donc ce morphisme se factorise en un morphisme $\overline{\pi_0} : C^*_r(\Gamma) \to C^*_\pi(\Gamma)$, tel que $\overline{\pi_0} \circ \lambda^\pi_\Gamma = \pi_0$. Alors

$$\begin{aligned}
\lambda^\pi_\Gamma \circ \overline{\pi_0} \circ \lambda^\pi_\Gamma &= \overline{\lambda^\pi_\Gamma} \circ q \circ \overline{\pi_0} \circ \lambda^\pi_\Gamma \\
&= \overline{\lambda^\pi_\Gamma} \circ q \circ \pi_0 \\
&= \overline{\lambda^\pi_\Gamma} \circ q \\
&= \lambda^\pi_\Gamma.
\end{aligned}$$

Comme λ^π_Γ est surjective, on a $\lambda^\pi_\Gamma \circ \overline{\pi_0} = \mathrm{Id}$. Donc $\overline{\pi_0}$ est une section pour λ^π_Γ; d'où le théorème 3.

Soit π' une représentation dans la série supplémentaire de G. Alors $C^*_{\pi'}(\Gamma) = C^*_{\pi_0}(\Gamma) = C^*_\pi(\Gamma) \subset \mathbf{L}(\mathbb{H})$. Notons $\Phi : C^*_\pi(\Gamma) \simeq C^*_{\pi'}(\Gamma)$ l'isomorphisme induit et $\pi'_0 : C^*_{\pi'}(\Gamma) \to C^*_{\pi_0}(\Gamma)$ le morphisme tel que $\lambda^{\pi_0}_\Gamma \circ \pi'_0 = \lambda^{\pi'}_\Gamma$. Comme $\pi'_0(\mathbf{K}(\mathbb{H})) = 0$, et comme $\forall \gamma \in \Gamma$, $\pi'(\gamma) - \pi(\gamma) \in \mathbf{K}(\mathbb{H})$, on a $\forall \gamma \in \Gamma$, $\pi'_0(\Phi(\pi(\gamma))) = \pi'_0(\pi'(\gamma)) = \pi_0(\gamma) = \pi_0(\pi(\gamma))$. Donc $\pi'_0 \circ \Phi = \pi_0$ et donc

$$\begin{aligned}
\lambda^{\pi'}_\Gamma \circ \Phi &= (\lambda^{\pi_0}_\Gamma)^{-1} \circ \pi'_0 \circ \Phi \\
&= (\lambda^{\pi_0}_\Gamma)^{-1} \circ \pi_0 \\
&= \lambda^\pi_\Gamma\ ;
\end{aligned}$$

d'où l'assertion 2 du théorème 4.

Démontrons le théorème 1. Notons simplement π le morphisme construit dans la proposition 8 et noté $\pi_{[0,1]}$. Comme π_0 est quasi-équivalente à λ_Γ, π induit un morphisme injectif noté encore π de $C^*_G(\Gamma)$ dans $\mathbf{L}(\mathbb{H} \otimes C([0,1]))$. Comme $\forall x \in C^*(\Gamma)$, $\pi(x) - (\pi_0 \otimes 1_{C([0,1])})(x) \in \mathbf{K}(\mathbb{H} \otimes C([0,1]))$, on a $\forall x \in I^G_\Gamma$, $\pi(x) \in \mathbf{K}(\mathbb{H} \otimes C([0,1]))$, et même puisque $\pi_0(x) = 0, \pi^+(x) = 0, \pi^-(x) = 0$, on a $\pi(x) \in \mathbf{K}(E) \subset \mathbf{K}(\mathbb{H} \otimes C_0(]0,1]))$, où E est le sous-$C_0(]0,1])$-module hilbertien de $\mathbb{H} \otimes C_0(]0,1])$ formé des fonctions continues de $]0,1]$ dans $\mathbb{H}$ tendant vers 0 à l'infini dont l'image en 1 est incluse dans $\mathbb{C}e_0$. Soit $\pi_E : I^G_\Gamma \to \mathbf{K}(E)$ le morphisme induit. Soit $s \in]0,1]$. Si $s \neq 1$, on a vu que $((\pi_E)_s)(I^G_\Gamma) = (\pi_s)(I^G_\Gamma) = \mathbf{K}(E_s)$ et c'est encore vrai si $s = 1$ puisque Γ n'est pas moyennable. Par ailleurs, soit $s, s' \in]0,1]$ distincts. Si $1 \notin \{s, s'\}$, d'après [CS], $((\pi_E)_s)_{|\Gamma}$ $(= (\pi_s)_{|\Gamma})$ et $((\pi_E)_s)_{|\Gamma}$ $(= (\pi_s)_{|\Gamma})$ ne sont pas unitairement équivalentes et donc leurs restrictions à I^G_Γ ne le sont pas non plus. Ceci est également vrai si $1 = s' \neq s$ puisque $(\pi_E)_1$ est de dimension finie. Donc $\pi(I_\Gamma^G)$ est une sous-algèbre riche de $\mathbf{K}(E)$ qui est de type I donc lui est égal ([D], proposition 11.1.6.); d'où le théorème 1.

Enfin, comme X est non vide, d'après [BH], $\widehat{\Gamma}_r \subset \overline{\widehat{\Gamma}_X}$. Comme le spectre de $I_\Gamma^G = I_G$ s'identifie topologiquement à $]0,1]$, $\overline{\widehat{\Gamma}_X} \setminus \widehat{\Gamma}_r = \widehat{\Gamma}_{\widetilde{X}}$. Comme I_Γ^G est contractile, λ_Γ^G induit un isomorphisme $K_*(C_G^*(\Gamma)) \simeq K_*(C_r^*(\Gamma))$. Le corollaire 2 résulte alors de la K-moyennabilité de Γ (*cf.* [K]).

Remarques.

• Le fait que $(\lambda_\Gamma^\pi)_*$ soit surjective résulte également de [Ka]; en effet, d'après [K], le groupe Γ vérifie la conjecture de Baum-Connes, ce qui implique que l'application $(\lambda_\Gamma)_* : K_*(C^*(\Gamma)) \to K_*(C_r^*(\Gamma))$ est surjective et donc que l'application $(\lambda_\Gamma^\pi)_* : K_*(C_\pi^*(\Gamma)) \to K_*(C_r^*(\Gamma))$ l'est également. Notons en revanche que d'après le théorème 3 et puisque Γ est K-moyennable ([K]), $\pi_* : K_0(C^*(\Gamma)) \to K_0(C_\pi^*(\Gamma))$ n'est pas surjective. On obtient un exemple plus géométrique de la façon suivante. Soit Γ un sous-groupe discret cocompact de G sans torsion. Soit $\tau_{G/\Gamma} : C^*(G) \to \mathbf{K}(L^2(G/\Gamma))$ le morphisme associé à la représentation quasi-régulière. Alors $(\tau_{G/\Gamma})_* : K_0(C^*(G)) \to K_0(\tau_{G/\Gamma}(C^*(G)))$ n'est pas surjectif. En effet, d'après [Ma], la représentation triviale de G est isolée dans la représentation quasi-régulière. On peut donc identifier $\tau_{G/\Gamma}(C^*(G))$ à $\mathbb{C} \oplus \mathrm{Ker}(\overline{\varepsilon})$, où $\overline{\varepsilon} : \tau_{G/\Gamma}(C^*(G)) \to \mathbb{C}$ est le morphisme induit par la représentation triviale. Soit $F = K_0(\mathbb{C})$ le facteur correspondant de $K_0(\tau_{G/\Gamma}(C^*(G)))$, isomorphe (par l'application induite par $\overline{\varepsilon}$) à $\mathbb{Z}$. Montrons que $F \cap (\tau_{G/\Gamma})_*(K_0(C^*(G))) = \{0\}$. Par l'absurde, soit $x \in K_0(C^*(G))$ tel que $0 \neq (\tau_{G/\Gamma})_*(x) \in F$. Alors $0 \neq (\varepsilon)_*(x) \in \mathbb{Z}$ et donc d'après le lemme 10, $(\pi^+)_*(x) + (\pi^-)_*(x) = -\varepsilon_*(x) \neq 0$. Or les multiplicités de π^+ et π^- sont égales à une même constante strictement positive $m > 0$ (*cf.* [W]; ceci peut également se déduire du lemme 10 et de [P]). Les morphismes π^+ et π^- induisent des morphismes qu'on notera encore $(\pi^+)_*, (\pi^-)_* : K_0(\tau_{G/\Gamma}(C^*(G))) \to \mathbb{Z}$ nuls sur F et tels que $(\pi^+)_* \circ (\tau_{G/\Gamma})_* = m(\pi^+)_*$ et $(\pi^-)_* \circ (\tau_{G/\Gamma})_* = m(\pi^-)_*$. Donc $(\pi^+)_* \circ (\tau_{G/\Gamma})_*(x) \neq 0$ ou $(\pi^-)_* \circ (\tau_{G/\Gamma})_*(x) \neq 0$ et donc $(\tau_{G/\Gamma})_*(x) \notin F$; contradiction.

• Soit

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\ J & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{q} & D \end{array}$$

un diagramme commutatif de groupes où $q \circ j = 0$, la flèche π_2 est surjective et π_3 injective. Si la suite horizontale du haut est exacte, celle du bas est exacte. En appliquant ceci à

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{K}(E) & \longrightarrow & C^*_G(\Gamma) & \xrightarrow{\lambda^G_\Gamma} & C^*_r(\Gamma) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi & & \downarrow = & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi) & \longrightarrow & C^*_\pi(\Gamma) & \xrightarrow{\lambda^\pi_\Gamma} & C^*_r(\Gamma) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

le théorème 3 (excepté l'assertion disant que la suite exacte est scindée) est bien un corollaire du théorème 1 (mais de toute façon, la démonstration du théorème 1 utilise les théorèmes 3 et 4). Notons d'ailleurs que la suite exacte $0 \to I^G_\Gamma \to C^*_G(\Gamma) \to C^*_r(\Gamma) \to 0$ n'est pas scindée. En effet, soit s une section. Soit $p = 1 - s(1)$. Alors p est une projection appartenant à $\mathbf{K}(E)$ qui est inclus dans $\mathbf{K} \otimes C_0(]0,1])$ qui est lui-même contractile. Donc $p = 0,\ s(1) = 1$. Soit ε la représentation triviale de $C^*(\Gamma)$; le morphisme $\varepsilon \circ s$ est alors un caractère non trivial de $C^*_r(\Gamma)$, ce qui est impossible puisque Γ n'est pas moyennable. En revanche, il résulte aisément de ce qui précède que pour tout quotient Q de $C^*_G(\Gamma)$ dont le spectre contient $\widehat{\Gamma}_r$ mais pas la représentation triviale, le quotient $Q \to C^*_r(\Gamma)$ admet une section.

Concluons par les considérations générales suivantes, les notations étant celles de l'introduction.

Proposition 11. — *Soit Γ un réseau d'un groupe de Lie simple connexe non compact G. Soit π et π_0 deux représentations unitaires irréductibles de G qui ne sont pas dans la série discrète. On suppose de plus que π_0 est dans le dual réduit.*

1. *Soit $B_\pi = C^*_\pi(\Gamma) \cap \mathbf{K}(\mathbb{H})$. Alors $B_\pi = 0$ ou $B_\pi = \mathbf{K}(\mathbb{H})$.*

2. *On a $B_\pi \subset \mathrm{Ker}(\lambda^\pi_\Gamma)$.*

3. *Il existe $W \in \mathbf{L}(\mathbb{H}_{\pi_0}, \mathbb{H}_\pi)$ tel que $W^*W = 1$, et $\forall \gamma \in \Gamma$, $W^*\pi(\gamma)W - \pi_0(\gamma) \in \mathbf{K}(\mathbb{H}_{\pi_0})$. Si de plus, π est dans le dual réduit, on peut supposer de plus que W est unitaire.*

Supposons dorénavant que π n'est pas dans le dual réduit.

4. *S'il existe $V \in \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi, \mathbb{H}_{\pi_o})$ tel que $V^*V = 1$ et $\forall \gamma \in \Gamma$, $V^*\pi_0(\gamma)V - \pi(\gamma) \in \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$ alors $C^*_\pi(\Gamma)$ contient $\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$ et la suite $0 \to \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi) \to C^*_\pi(\Gamma) \xrightarrow{\lambda^\pi_\Gamma} C^*_r(\Gamma) \to 0$ est exacte et semi-scindée.*

5. *Il existe un unitaire $U \in \mathbf{L}(\mathbb{H}_{\pi_0}, \mathbb{H}_\pi)$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma$, $U^*\pi(\gamma)U - \pi_0(\gamma) \in \mathbf{K}(\mathbb{H}_{\pi_0})$ si, et seulement si, on a une suite exacte scindée $0 \to \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi) \to C^*_\pi(\Gamma) \xrightarrow{\lambda^\pi_\Gamma} C^*_r(\Gamma) \to 0$.*

6. *Si on a une suite exacte semi-scindée* $0 \to \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi) \to C^*_\pi(\Gamma) \xrightarrow{\lambda^\pi_\Gamma} C^*_r(\Gamma) \to 0$ *et si* Γ *est* K*-moyennable, alors cette suite est scindée.*

Démonstration.

1. Si $B_\pi \neq 0$, alors B_π est une sous-C^*-algèbre irréductible de $\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$ donc lui est égale.

2. Notons encore $q : \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi) \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_\pi)/\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$. La restriction à B_π de $\tau_\Gamma \circ \lambda^\pi_\Gamma$ est une trace finie donc nulle. Donc $\tau \circ \lambda^\pi_\Gamma$ se factorise en une trace sur $q(C^*_\pi(\Gamma))$ et donc λ^π_Γ se factorise en une application $\overline{\lambda^\pi_\Gamma} : q(C^*_\pi(\Gamma)) \to C^*_r(\Gamma)$. (Ceci est un cas particulier d'un résultat de [B] qui affirme que tout quotient non trivial de $C^*_\pi(\Gamma)$ contient faiblement λ_Γ.)

3. Soit $\pi_0 : C^*_\pi(\Gamma) \to \mathbf{L}(\mathbb{H}_{\pi_0})$ l'application induite. D'après [Vo], comme π_0 est nulle sur B_π, il existe $W \in \mathbf{L}(\mathbb{H}_{\pi_0}, \mathbb{H}_\pi)$ tel que $\forall \gamma \in \Gamma$, $W^*\pi(\gamma)W - \pi_0(\gamma) \in \mathbf{K}(\mathbb{H}_{\pi_0})$. Si $\pi \in \widehat{G}_r$, alors π et π_0 induisent deux représentations de $C^*_r(\Gamma)$ ne rencontrant pas les opérateurs compacts. L'existence d'un tel unitaire résulte alors de [Vo].

4. S'il existe un tel V, alors $\operatorname{Ker}(\lambda^\pi_\Gamma) \subset \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$. Or $\operatorname{Ker}(\lambda^\pi_\Gamma) \neq 0$ et donc $B_\pi = \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$. Enfin, $\operatorname{Ker}(\lambda^\pi_\Gamma) = \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$ puisque $\mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi)$ est simple. L'application qui à $\gamma \in \Gamma$ associe $V^*\pi_0(\gamma)V$ induit une section complètement positive à cette suite exacte.

5. Étant donné un tel unitaire, le morphisme $U\pi_0U^*$ fournit une section à la suite exacte. Réciproquement, soit s une section de la suite exacte. Comme $C^*_r(\Gamma)$ est exacte d'après [BCH], $C^*_{\pi_0}(\Gamma) \cap \mathbf{K}(\mathbb{H}_{\pi_0}) = 0$ et donc on a une autre suite exacte scindée, $0 \to \mathbf{K}(\mathbb{H}_{\pi_0}) \to C^*_{\pi_0}(\Gamma) + \mathbf{K}(\mathbb{H}_{\pi_0}) \to C^*_r(\Gamma) \to 0$. On a donc deux extensions de $C^*_r(\Gamma)$ essentielles unitales scindées, et à nouveau l'existence d'un tel unitaire résulte de [Vo].

6. La suite exacte semi-scindée $0 \to \mathbf{K}(\mathbb{H}_\pi) \to C^*_\pi(\Gamma) \xrightarrow{\lambda^\pi_\Gamma} C^*_r(\Gamma) \to 0$ définit un élément dans $\operatorname{Ext}^{-1}(C^*_r(\Gamma))$ qui est nul puisque son image dans $\operatorname{Ext}^{-1}(C^*(\Gamma))$ l'est. Comme cette extension est essentielle, elle est absorbante d'après [Vo], et comme elle définit l'élément nul de $\operatorname{Ext}^{-1}(C^*_r(\Gamma))$, elle est scindée.

BIBLIOGRAPHIE

[A] H. Araki, Expansionals in Banach Algebra, Ann. Sci. de l'École Normale Supérieure, 4e série, t. 6 (1973), 67–84.

[Ba] S. Baaj, Multiplicateurs non bornés, Thèse de 3ème cycle, Paris VI (1980).

[B] M. BEKKA, Restrictions of unitary representations to lattices and associated C^*-algebras, JFA, 143 (1997).

[BCH] M. BEKKA, M. COWLING, P. de la HARPE, Some groups whose reduced C^*-algebra is simple, Publ. Math. IHES, 80 (1994), 117–134.

[BH] M. BEKKA, P. de la HARPE, Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière, Bull. Soc. Math. France, 122 (1994), 333–342.

[BV] M. BEKKA, A. VALETTE, Lattices in semi-simple Lie groups, and multipliers of group C^*-algebras, Astérisque 232, SMF (1995), 67–79.

[CS] M. COWLING, T. STEGER, The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices, J. Reine. Angew. Math., 420 (1991), 85–98.

[D] J. DIXMIER, Les C^*-algèbres et leurs représentations, Gauthiers-Villars, 1964.

[K] G. KASPAROV, Lorentz groups: K-theory of unitary representations and crossed products, Soviet. Math. Dokl., 29 (1984).

[L] S. LANG, $SL_2(\mathbb{R})$, Addison-Wesley, 1975.

[Lan] E.C. LANCE, Hilbert C^*-modules, a toolkit for operator algebraists, London Math. Soc. Lect. Notes Series, 210.

[Ma] G.A. MARGULIS, Discrete subgroups of semisimple Lie groups, Springer Verlag, 1989.

[M] D. MILICIC, Topological representations of the group C^*-algebra of $SL_2(\mathbb{R})$, Glas. Mat., 6 (26) (1971), 231–246.

[P] F. PIERROT, Thèse de doctorat, Paris VII (2000).

[Ri] M.A. RIEFFEL, Induced representations of C^*-algebras, Adv. in Math., 13 (1974), 176–257.

[V] A. VALETTE, Notes on the structure and the K-theory of the C^*-algebra associated to $SL_2(\mathbb{R})$, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. B, XXXVI (1984), 29–56.

[Vo] D. VOICULESCU, A non-commutative Weyl-Von Neumann theorem, Rev. R. Maths. Pures Appl., 21 (1976), 97–113.

[W] N. WALLACH, On the Selberg trace formula in the case of compact quotient, Bull. AMS., vol 62, 2 (1976), 171–195.

[W2] N. WALLACH, Real reductive groups I, Academic Press, 1988.

[Wo] S. L. WORONOWICZ, Unbounded elements affiliated with C^*-algebras and non-compact quantum groups, Comm. Math. Phys., 136 (1991), 399–432.

Manuscrit reçu le 9 janvier 2001,
accepté le 10 janvier 2002.

François PIERROT,
École Normale Supérieure
D.M.A.
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05 (France).