ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Mohamed Salah KHALGUI & Pierre TORASSO

La formule du caractère pour les groupes de Lie presque algébriques réels

Tome 52, n° 5 (2002), p. 1301-1363.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2002__52_5_1301_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
52, 5 (2002), 1301–1364

LA FORMULE DU CARACTÈRE POUR LES GROUPES DE LIE PRESQUE ALGÉBRIQUES RÉELS

par M.S. KHALGUI et P. TORASSO

1. Introduction.

Soit $G = (G, j, \mathbf{G})$ un groupe presque algébrique réel (voir le numéro 2.18 ci-après), $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie et $\mathfrak{g}^*$ le dual de $\mathfrak{g}$. Dans [16] et [17], M.S. Khalgui démontre une formule du caractère à la Kirillov pour les représentations unitaires irréductibles de G vérifiant certaines hypothèses. Sous ces hypothèses qui sont d'ailleurs génériquement vérifiées, sa formule donne la description dans un voisinage invariant de l'élément neutre de G du caractère de la représentation considérée (en fait, il démontre un résultat plus général qui concerne certaines représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe).

Le but de cet article est, sous une hypothèse supplémentaire, de donner une description de ces caractères dans un voisinage invariant d'un élément elliptique de G (voir le numéro 3.1.1). Comme G est la réunion de ces voisinages, on obtient ainsi, lorsque cette hypothèse est vérifiée pour tout élément elliptique, une description globale du caractère. Étant donné un élément elliptique $s \in G$, pour lequel cette hypothèse est satisfaite, nous obtenons une formule à la Kirillov-Duflo-Heckman-Vergne pour la

Mots-clés : Groupes presque algébriques – Formule du caractère – Méthode des orbites – Méthode de descente.
Classification math. : 22E30 – 22E45.

restriction du caractère au centralisateur $G(s)$ de s dans G. Une telle formule avait déjà été obtenue par M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne dans [8] pour les représentations de la série discrète d'un groupe de Lie semi-simple connexe et par A. Bouaziz dans [2] pour les représentations tempérées d'une classe de groupes réductifs contenant celle des groupes presque algébriques. D'autre part, dans [21], K. Maktouf a obtenu un résultat analogue pour certaines représentations unitaires irréductibles des groupes de Lie p-adiques résolubles ou à radical co-compact.

Donnons maintenant une description de notre résultat. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On note Ω_g la G-orbite de g, $G(g)$ le stabilisateur de g dans G et on désigne par $G(g)^{\mathfrak{g}}$ le revêtement métaplectique de $G(g)$ construit en utilisant son action symplectique canonique dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$. On suppose que g est G-admissible et bien polarisable. Soit τ un paramètre d'admissibilité de g relativement à G : τ est une représentation unitaire irréductible de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ vérifiant certaines conditions et qui est de dimension finie (voir le numéro 5.2.1). Soit $T_{g,\tau}$ la représentation associée par M. Duflo à (g, τ) (voir le numéro 5.2.4). Enfin, soit χ un caractère semi-rationnel de G, ψ une fonction positive sur Ω_g semi-invariante de poids χ et $A^{\psi}_{g,\tau}$ l'opérateur fermé de domaine dense dans l'espace de $T_{g,\tau}$ semi-invariant de poids χ associé à ψ (voir les numéros 5.1.6, 5.3.3 et 5.3.4).

Nous dirons que la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable si, pour toute mesure de Haar dx à gauche sur G et tout $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, l'opérateur $A^{\psi}_{g,\tau}T_{g,\tau}(\varphi dx)A^{\psi}_{g,\tau}$ est à trace. Si tel est le cas, la formule

$$\Theta_{g,\tau,\psi}(\varphi dx) = \operatorname{Tr}(A^{\psi}_{g,\tau}T_{g,\tau}(\varphi dx)A^{\psi}_{g,\tau})$$

définit une fonction généralisée χ^2-semi-invariante sur G, appelée le ψ-caractère de la représentation $T_{g,\tau}$. Bien évidemment, lorsque $\psi = 1$, dire que la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable revient à dire qu'elle est à trace et, dans ces conditions, la fonction généralisée $\Theta_{g,\tau,1} = \Theta_{g,\tau}$ est le caractère de $T_{g,\tau}$.

Maintenant soit s un élément elliptique de G. En particulier $\operatorname{Ad}s$ est semi-simple de valeurs propres de module 1. Soit $G(s)$ le centraliseur de s dans G, $\mathfrak{g}(s)$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}_s$ le supplémentaire de $\mathfrak{g}(s)$ dans $\mathfrak{g}$ défini par $\mathfrak{g}_s = (1-\operatorname{Ad}s)(\mathfrak{g})$ et Ω^s_g l'ensemble des points fixes de s dans Ω_g. Alors, lorsqu'il n'est pas vide, Ω^s_g est une sous-variété localement fermée de $\mathfrak{g}(s)^*$ réunion d'un nombre fini de $G(s)$-orbites, et à ce titre supporte une mesure canonique $d\beta_{\Omega^s_g}$ dont la restriction à chaque $G(s)$-orbite qu'il contient est la mesure de Liouville. Dans la suite, nous considèrerons la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}$ comme une mesure borélienne sur $\mathfrak{g}(s)^*$. Lorsque Ω_g^s est vide, nous conviendrons que $\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}$ est la mesure nulle.

Nous dirons que la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}$ est tempérée, s'il existe un nombre $M > 0$ et une norme $\|\ \|$ sur $\mathfrak{g}(s)^*$ tels que $\int_{\mathfrak{g}(s)^*}(1+\|l\|)^{-M}\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}(l) < \infty$.

À la suite de M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne dans [8] et de A. Bouaziz dans [2], nous définissons une fonction $\Phi_{g,\tau}^s$ sur Ω_g^s. Cette fonction est $G(s)$-invariante et sa définition fait intervenir le caractère de la représentation métaplectique. Elle est donnée par

$$\Phi_{g,\tau}^s(l) = \Phi(\mu_l(\tilde{s}))\,\mathrm{Tr}\,\tau_l(\tilde{s}),\ l \in \Omega_g^s,$$

où $\tilde{s}$ est un élément de $G(l)^{\mathfrak{g}}$ situé au-dessus de s, $\mu_l(\tilde{s})$ est l'image de $\tilde{s}$ dans le groupe métaplectique de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$, Φ est le caractère de la représentation métaplectique de ce dernier et τ_l est le paramètre d'admissibilité de l naturellement associé à τ. Voir le numéro 6.1.1.

Si $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert $G(s)$-invariant assez petit de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$, l'image $\mathcal{W}$ de $G \times \mathcal{V}$ par l'application $\gamma : (x, X) \mapsto xs\exp Xx^{-1}$ est un voisinage ouvert G-invariant de s dans G et γ induit un difféomorphisme de l'espace fibré $G \times_{G(s)} \mathcal{V}$ sur $\mathcal{W}$. Par suite, suivant la méthode de descente de Harish-Chandra, toute fonction généralisée Θ semi-invariante sur $\mathcal{W}$ possède une restriction Θ^s à $\mathcal{V}$, formellement définie par $\Theta^s(X) = \Theta(s\exp X)$, $X \in \mathcal{V}$.

Enfin, nous définissons une fonction $k_{\mathfrak{g},s}$ positive et analytique dans un voisinage G-invariant assez petit de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ en posant

$$k_{\mathfrak{g},s}(X) = \left(\det\nolimits_{\mathfrak{g}(s)} \frac{\mathrm{sh}(\mathrm{ad}\,X/2)}{\mathrm{ad}\,X/2}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\det_{\mathfrak{g}_s}(1-\mathrm{Ad}\,s\exp X)}{\det_{\mathfrak{g}_s}(1-\mathrm{Ad}\,s)}\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cet article.

THÉORÈME. — *Soit G un groupe presque algébrique réel. Alors, pour tout élément elliptique s de G, on peut choisir un voisinage ouvert G-invariant $\mathcal{V}_s$ de 0 dans $\mathfrak{g}(s)$ tel que les assertions suivantes soient vraies.*

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire bien polarisable et admissible, τ un paramètre d'admissibilité de g relativement à G, χ un caractère semi-rationnel de G dont la restriction à $G(g)$ est triviale, et ψ une fonction réelle positive semi-invariante de poids χ sur Ω_g. On suppose que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(g)$ est nilpotente. Alors,

(i) *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable,*

(b) *la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g}$ est tempérée;*

(ii) *si les conditions équivalentes du (i) sont satisfaites et si s est un élément elliptique de G tel que la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}$ soit également tempérée, alors on a l'égalité de fonctions généralisées sur $\mathcal{V}_s$:*

$$\Theta^s_{g,\tau,\psi}(X) = k^{-1}_{\mathfrak{g},s}(X) \int_{\Omega^s_g} \Phi^s_{g,\tau}(l)\psi(l)^2 e^{i<l,X>} d\beta_{\Omega^s_g}(l). \tag{1}$$

Lorsque la forme linéaire g est en position générique, elle est bien polarisable (voir [1]) et $\mathfrak{g}(g)$ est commutative (voir [11]). Si de plus G est unimodulaire, son orbite est fermée (voir [3]). Par ailleurs, si l'orbite Ω_g est fermée, la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g}$, de même que les mesures $\psi^2 d\beta_{\Omega^s_g}$, $s \in G$ semi-simple, sont tempérées (voir [4]). En particulier, supposant G unimodulaire, si g est en position générique et G-admissible, la formule 1 s'applique pour tout élément elliptique s et toute donnée d'admissibilité τ, fournissant ainsi une description globale du ψ-caractère de $T_{g,\tau}$.

Lorsque ψ est la fonction constante égale à 1, l'assertion (i) du théorème ainsi que la formule du caractère au voisinage de l'élément neutre ont été démontrées par M. S. Khalgui (voir [16] et [17]).

La généralisation aux ψ-caractères est justifiée par les raisons suivantes. L'une des applications possibles de la formule du caractère au voisinage des éléments semi-simples est la démonstration de la formule de Plancherel pour G, comme cela a été fait par M. Duflo et M. Vergne pour les groupes semi-simples connexes (voir [12]). Or, l'écriture de la formule de Plancherel pour les groupes non unimodulaires nécessite l'introduction de ψ-caractères, avec ψ une fonction semi-invariante de poids la racine carrée de l'inverse de la fonction module (voir [9]).

Il convient de mentionner que la formule au voisinage de l'élément neutre pour les ψ-caractères des représentations ψ-traçables des groupes résolubles a été obtenue par M. Duflo et M. Raïs (voir [10], où ils en déduisent, entre autre, la formule de Plancherel pour les groupes résolubles exponentiels), et que ce résultat a ensuite été généralisé par N. V. Pedersen au cas des semi-caractères des représentations factorielles normales des groupes résolubles simplement connexes (voir [22]).

Donnons maintenant le plan de l'article. Dans la section 2 nous fixons les notations. Dans la section 3, nous rappelons la notion d'ouverts elliptiques d'un groupe presque algébrique introduite par M. Duflo et M. Vergne dans [13] ainsi que leurs résultats et ceux de Harish-Chandra concernant la méthode de descente sur ces ouverts. Dans la section 4 nous rappelons un certain nombre de résultats concernant la représentation métaplectique, son caractère et ses applications aux extensions des représentations des groupes de Heisenberg dûs à M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne d'une part et à A. A. Kirillov d'autre part. Dans la section 5, nous rappelons la construction de représentations unitaires irréductibles par M. Duflo et nous construisons des opérateurs semi-invariants pour ces représentations. Dans la section 6, nous introduisons la fonction $\Phi^s_{g,\tau}$ et énonçons le résultat principal de cet article.

Les sections 7 et 8 sont consacrées à la démonstration de ce résultat. Dans la section 7, nous nous ramenons au cas où la fonction ψ est constante et égale à 1 : nous remarquons que la représentation $T_{g,\tau}$ est induite d'une représentation du même type de $K = \ker \chi$ et nous démontrons que si le résultat est vrai pour K et cette représentation, il est vrai pour $T_{g,\tau}$.

Dans la section 8, nous démontrons le résultat lorsque ψ est la fonction constante et égale à 1. Pour cela, nous raisonnons par récurrence sur la dimension de G et sommes amenés à examiner deux cas. Dans le premier cas le radical unipotent de G est un groupe de Heisenberg dont le centre Z est central dans G et la restriction de g à l'algèbre de Lie de Z est non nulle. Nos calculs utilisent alors les résultats sur le caractère de la représentation métaplectique, notamment les corollaires 4.2.1 et 4.2.2, ainsi que la formule due à A. A. Kirillov et rappelée dans la proposition 4.3.1. Dans le deuxième cas, nous supposons que $\mathfrak{g}$ contient un idéal abélien unipotent et G-invariant $\mathfrak{a}$ de sorte que, si H est le stabilisateur de la restriction de g à $\mathfrak{a}$, $T_{g,\tau}$ est l'induite d'une représentation de H vérifiant les conclusions du théorème. De la même façon que dans la section 7, nous en déduisons que le résultat est vrai pour $T_{g,\tau}$.

Nous achevons cette introduction par la question naturelle suivante. Soit Ω une orbite de la représentation co-adjointe de G, $d\beta_\Omega$ la mesure de Liouville sur Ω, ψ une fonction positive sur Ω semi-invariante de poids un caractère semi-rationnel de G, s un élément semi-simple de G et $d\beta_{\Omega^s}$ la mesure canonique supportée par l'ensemble Ω^s des points fixes de s dans Ω. Supposons que la mesure $\psi d\beta_\Omega$ est tempérée ; alors, en est-il de même de la mesure $\psi d\beta_{\Omega^s}$?

Une réponse positive à cette question, tout au moins pour les orbites des formes linéaires bien polarisables et dont l'algèbre de Lie du stabilisateur est nilpotente, montrerait que, pour une telle forme linéaire g, la formule 1 s'applique à toute représentation ψ-traçable $T_{g,\tau}$ et ce, pour tout élément elliptique s, fournissant ainsi une description globale de son ψ-caractère.

Enfin, nous remercions le referee pour d'utiles remarques.

2. Notations et généralités.

2.1. Toutes les variétés considérées sont au moins $\mathcal{C}^\infty$.

Si V est une variété, on note $\mathcal{D}(V)$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur V muni de sa topologie habituelle.

Si α est une densité $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur V, on note $d\alpha$ la mesure complexe qu'elle définit : si $\phi \in \mathcal{D}(V)$, on a $\int_V \phi d\alpha = \int_V (\phi\alpha)$ où, dans le membre de gauche, on intègre la densité à support compact $\phi\alpha$.

Si α est une fonction ou une densité $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété, on désigne par $\mathrm{Supp}\,\alpha$ son support.

Soit G un groupe de Lie muni d'une action $\mathcal{C}^\infty$ sur V : $(x, v) \mapsto x.v$, $x \in G$, $v \in V$. On en déduit, par transport de structure, une action à gauche de G sur les densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (resp. les fonctions généralisées) sur V, $(x, \alpha) \mapsto {}^x\alpha$ (resp. $(x, \theta) \mapsto {}^x\theta$). Ces actions sont telles que l'on ait

$$< {}^x\theta, \alpha >=< \theta, {}^{x^{-1}}\alpha >,$$

pour tout $x \in G$, toute densité $\mathcal{C}^\infty$ à support compact α et toute fonction généralisée θ sur V.

On sera aussi amené à considérer, lorsqu'on le fait agir sur lui-même par conjugaison, l'action de G à droite sur les fonctions $(x, \phi) \mapsto \phi^x$ définie par $\phi^x(y) = {}^{x^{-1}}\phi(y) = \phi(xyx^{-1})$, $x, y \in G$, $\phi \in \mathcal{D}(G)$.

2.2. Soit X et Y deux variétés. Si $\phi \in \mathcal{D}(X)$ et $\psi \in \mathcal{D}(Y)$, on désigne par $\phi \otimes \psi$ l'élément de $\mathcal{D}(X \times Y)$ défini par $\phi \otimes \psi(x, y) = \phi(x)\psi(y)$. De même, si α (resp. β) est une densité $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur X (resp. Y), on note $\alpha \otimes \beta$ la densité $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $X \times Y$ telle que $< \phi \otimes \psi, \alpha \otimes \beta >=< \phi, \alpha >< \psi, \beta >$, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(X)$ et $\psi \in \mathcal{D}(Y)$.

2.3. Si V est un espace vectoriel réel, on note V^* son dual algébrique et on désigne par $<,>$ la dualité canonique entre V^* et V. Si E est une partie de V, $E^\perp$ désigne son orthogonal dans V^*.

On note $GL(V)$ le groupe linéaire de V et $gl(V)$ l'algèbre de Lie de ce dernier, qui n'est autre que l'algèbre des endomorphismes de V.

Soit $x \in gl(V)$ et soit $W \subseteq U \subseteq V$ deux sous-espaces vectoriels de V invariants par x. Alors, on note $\det_{U/W} x$ le déterminant et $\mathrm{Tr}_{U/W}\, x$ la trace de l'endomorphisme de U/W induit par l'action de x.

Par ailleurs, soit G (resp. $\mathfrak{g}$) un groupe (resp. une algèbre de Lie) et supposons que V est muni d'une structure de G-module (resp. $\mathfrak{g}$-module). Soit $x \in G$ (resp. $\mathfrak{g}$) dont l'action dans V laisse invariants les sous-espaces W et U. De même on note $\det_{U/W} x$ le déterminant et $\mathrm{Tr}_{U/W}\, x$ la trace de l'endomorphisme de U/W induit par l'action de x.

2.4. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie et dv une mesure de Lebesgue sur V. Alors, l'application $\phi \mapsto \phi dv$ est une bijection de $\mathcal{D}(V)$ sur l'espace des densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur V.

Si $\phi \in \mathcal{D}(V)$, on note $\widehat{(\phi dv)}_V$ ou plus simplement $\widehat{(\phi dv)}$ la transformée de Fourier de la densité ϕdv : c'est la fonction sur V^* définie par

$$\widehat{(\phi dv)}_V(l) = \int_V e^{i<l,v>}\phi(v)dv.$$

On appelle mesure duale de la mesure dv, la mesure de Lebesgue dl sur V^* telle que l'on ait

$$\phi(0) = \int_{V^*} \widehat{(\phi dv)}_V dl,\ \phi \in \mathcal{D}(V).$$

Si $\phi \in \mathcal{D}(V)$, on définit la fonction $\phi^* \in \mathcal{D}(V)$ en posant $\phi^*(v) = \overline{\phi(-v)}$, $v \in V$. Si ϕ et ψ sont deux éléments de $\mathcal{D}(V)$, on note $\phi \star \psi$ leur produit de convolution, qui est défini en posant

$$\phi \star \psi(w) = \int_V \phi(v)\psi(w-v)dv,\ w \in V.$$

On notera que cette définition dépend du choix de la mesure de Lebesgue dv sur V.

2.5. On garde les notations du numéro précédent. Soit W un sous-espace vectoriel de V et dw une mesure de Lebesgue sur W. On appelle mesure quotient de dv par dw, la mesure de Lebesgue $d\dot{v}$ sur V/W caractérisée par le fait que

$$\int_V \phi dv = \int_{V/W} \left\{ \int_W \phi(v+w)dw \right\} d\dot{v},\ \phi \in \mathcal{D}(V).$$

D'autre part l'espace dual de V/W s'identifie à $W^\perp$. Si on munit $W^\perp$ de la mesure de Lebesgue $d\lambda$ duale de la mesure $d\dot{v}$, on a alors

$$(2) \qquad (\phi_{|W}dw)\widehat{_W}(l) = \int_{W^\perp} (\phi dv)\widehat{_V}(l_1+\lambda)d\lambda,\ l \in W^*,\ \phi \in \mathcal{D}(V),$$

où l_1 désigne un élément de V^* dont la restriction à W est l.

2.6. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit $\| \ \|$ une norme sur V et soit $d\beta$ une mesure borélienne sur V. Alors, il est bien connu que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un nombre $M > 0$ tel que $\int_V (1+\|v\|)^{-M} d\beta(v) < \infty$,

(ii) pour toute fonction de Schwarz ϕ sur V, l'intégrale $\int_V \phi d\beta$ est absolument convergente.

Si ces conditions sont satisfaites, l'application $\phi \mapsto \int_V \phi d\beta$ définit une distribution tempérée sur V. On dit alors que $d\beta$ est une mesure tempérée sur V.

2.7. Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une mesure de Lebesgue dx. On a alors le résultat suivant qui est de fait démontré dans [17] (voir la démonstration du théorème V.4) :

LEMME 2.7.1. — *On se donne $d\beta$ une mesure borélienne positive sur l'espace dual V^*. On suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans V tel que pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$ l'intégrale $\int_V (\alpha \star \alpha^* dx)\widehat{_V} d\beta$ soit convergente.*

Alors, $d\beta$ est une mesure tempérée sur V^*.

2.8. Soit H et H' deux groupes, $a : H \to H'$ un isomorphisme de groupes et ϕ une fonction sur (resp. une représentation de) H. Alors, on note ${}^a\phi$ la fonction sur (resp. la représentation de) H' définie en posant ${}^a\phi(x) = \phi(a^{-1}.x)$, $x \in H'$.

2.9. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ muni d'une action $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété V. On note $x.v$ le résultat de l'action de $x \in G$ sur $v \in V$. Si $v \in V$, on note $G(v)$ le stabilisateur de v dans G et $\mathfrak{g}(v)$ son algèbre de Lie.

Si $x \in G$, on note V^x l'ensemble des points fixes de x dans V.

2.10. On garde les notations du numéro précédent et on suppose de plus que V est un espace vectoriel réel de dimension finie, l'action de G y étant linéaire. Soit $s \in G$ agissant de manière semi-simple dans V. Alors, on pose $V_s = (s-1)V$. On a alors $V = V^s \oplus V_s$.

L'action de G dans V induit une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$: $(X, v) \mapsto X.v$, $X \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

2.11. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$. On définit alors deux fonctions analytiques sur $\mathfrak{g}$ en posant

$$S_{\mathfrak{g}}(X) = \det_{\mathfrak{g}} \frac{1 - \exp(-\operatorname{ad} X)}{\operatorname{ad} X} \tag{3}$$

$$j_{\mathfrak{g}}(X) = \det_{\mathfrak{g}} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{ad} X/2)}{\operatorname{ad} X/2}. \tag{4}$$

2.12. Si G est un groupe de Lie, on note G_0 sa composante neutre et $\operatorname{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G.

On appelle caractère de G, tout homomorphisme continu de G dans $\mathbb{C}^\times$, le groupe des éléments inversibles de $\mathbb{C}$.

2.13. Soit G un groupe de Lie réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $d_G x$ une mesure de Haar à gauche sur G et $d_{\mathfrak{g}} X$ une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$. On dit que les mesures $d_G x$ et $d_{\mathfrak{g}} X$ sont tangentes si $d_G \exp X / d_{\mathfrak{g}} X$ est égal à 1 en $X = 0$. Dans ce cas, on a $d_G \exp X = S_{\mathfrak{g}}(X) d_{\mathfrak{g}} X$ au voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$.

Soit H un sous-groupe fermé de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On note $\mathcal{C}_c(G; H)$ l'espace vectoriel des fonctions ϕ sur G, continues à support compact modulo H et vérifiant

$$\phi(xy) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} y| \phi(x), \ x \in G \text{ et } y \in H.$$

Lorsque H est trivial, $\mathcal{C}_c(G; H)$ est égal à $\mathcal{C}_c(G)$, l'espace des fonctions continues à support compact sur G. Le groupe G opère par translations à gauche dans $\mathcal{C}_c(G; H)$ et il existe, à une constante positive près, une unique forme linéaire positive et G-invariante sur cet espace. Nous dirons qu'une telle forme linéaire est une «mesure» invariante sur G/H.

Soit $d_G x$ (resp. $d_H x$) une mesure de Haar à gauche sur G (resp. H) et $d_{\mathfrak{g}} X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}} X$) la mesure de Lebesgue tangente. Alors, il existe une unique mesure invariante $d\dot{x}$ sur G/H telle que

$$\int_G \phi d_G x = \int_{G/H} \{ \int_H \phi(xy) |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} y|^{-1} d_H y \} d\dot{x},\ \phi \in \mathcal{C}_c(G).$$

Nous dirons alors que la mesure $d\dot{x}$ est la mesure quotient de $d_G x$ par $d_H x$. Désignons par $d\dot{X}$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ quotient de $d_{\mathfrak{g}} X$ par $d_{\mathfrak{h}} X$. Dans cette situation, nous dirons aussi que les mesures quotients $d\dot{x}$ et $d\dot{X}$ sont tangentes.

2.14. On garde les notations du numéro précédent et on se donne K un sous-groupe fermé de H d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Étant donné une mesure invariante $d_{G/H}\dot{x}$ (resp. $d_{H/K}\dot{x}$) sur G/H (resp. H/K), il existe une unique mesure invariante $d_{G/K}\dot{x}$ sur G/K telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c(G;K)$,

$$\int_{G/K} \phi d_{G/K}\dot{x} = \int_{G/H} \{ \int_{H/K} \phi(xy) |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} y|^{-1} d_{H/K}\dot{y} \} d_{G/H}\dot{x}.$$

Dans la formule précédente, deux des mesures invariantes déterminent entièrement la troisième.

2.15. Par représentation unitaire de G, nous entendons une représentation unitaire continue dans un espace de Hilbert séparable.

On reprend les notations du numéro 2.13 et on se donne une représentation unitaire T de H dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $\operatorname{Ind}_H^G T$ la classe d'équivalence de la représentation induite de T. On obtient un élément de cette classe d'équivalence en faisant agir G par translations à gauche dans l'espace des fonctions ϕ définies sur G et à valeurs dans $\mathcal{H}$, mesurables et vérifiant les relations suivantes :

(i) $$\phi(xy) = |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} y|^{\frac{1}{2}} T(y)^{-1} \phi(x),\ x \in G,\ y \in H,$$

(ii) $$\int_{G/H} |\phi(x)|^2 d\dot{x} < \infty,$$

où $d\dot{x}$ est une mesure invariante sur G/H. Cette réalisation de la représentation induite dépend bien évidemment du choix de cette mesure invariante.

2.16. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On note B_g la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ naturellement associée à g et telle que $B_g(X,Y) = < g, [X,Y] >$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. On note Ω_g l'orbite de g pour la représentation co-adjointe de G et on désigne par $d\beta_{\Omega_g}$ la mesure de Liouville sur Ω_g.

2.17. Soit G un groupe de Lie, $H \subseteq G$ un sous-groupe fermé et V une variété analytique munie d'une action analytique de H. Alors on note $G \times_H V$ l'espace fibré, de base G/H et de fibre associée V. Rappelons que c'est la variété analytique quotient de $G \times V$ par l'action à droite de H définie par $(y,(x,v)) \mapsto (xy, y^{-1}.v)$, $(x,v) \in G \times V$, $y \in H$.

2.18. On appelle groupe presque algébrique réel G, la donnée d'un triplet $(G,j,\mathbf{G})$ tel que G soit un groupe de Lie réel séparable, $\mathbf{G}$ soit un sous-groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{R}$ d'un certain $GL(V)$ où V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et j soit un morphisme de G dans le groupe $\mathbf{G}_\mathbb{R}$ des points réels de $\mathbf{G}$ vérifiant les conditions suivantes : le noyau $\ker j$ de j est un sous-groupe discret central de G et $j(G)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{G}_\mathbb{R}$, dense pour la topologie de Zariski. Nous noterons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{R}$ de $\mathbf{G}$, qui est une sous-algèbre de Lie de $gl(V)$ et que nous appellerons l'algèbre de Lie de G. Il est clair que G est un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On a une notion évidente de sous-groupe presque algébrique d'un groupe presque algébrique : c'est un sous-groupe de Lie H de G tel que si on désigne par $\mathbf{H}$ l'adhérence de Zariski de $j(H)$ dans $\mathbf{G}$, alors le triplet $(H, j_{|H}, \mathbf{H})$ soit un groupe presque algébrique.

Étant donné $\mathbf{G}$ un groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{R}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$, nous noterons ${}^u\mathbf{G}$ son radical unipotent, lequel est également défini sur $\mathbb{R}$. De même nous noterons ${}^u\mathfrak{g}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$, qui est l'algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ de ${}^u\mathbf{G}$.

Si $(G,j,\mathbf{G})$ est un groupe presque algébrique réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, le sous-groupe ${}^u\mathbf{G}_\mathbb{R}$ de $\mathbf{G}_\mathbb{R}$ se relève de manière unique en un sous-groupe ${}^uG$ de G appelé le radical unipotent de G. Alors ${}^uG$ est le sous-groupe analytique fermé de G d'algèbre de Lie ${}^u\mathfrak{g}$. Enfin, nous appellerons facteur réductif de G, l'image réciproque par j du groupe des points réels d'un facteur réductif de $\mathbf{G}$. Deux facteurs réductifs de G sont conjugués par un élément de ${}^uG$. Tout facteur réductif de G en est un sous-groupe presque algébrique et son algèbre de Lie est un facteur réductif de $\mathfrak{g}$. Enfin, G est isomorphe au produit semi-direct de l'un de ses facteurs réductifs par son radical unipotent.

3. Restriction de fonctions généralisées invariantes.

3.1. Voisinages elliptiques.

Les notions introduites dans ce paragraphe sont tirées de [13] auquel le lecteur est invité à se référer.

3.1.1. Soit $(G, j, \mathbf{G})$ un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Rappelons que nous avons choisi une réalisation de $\mathbf{G}$ comme sous-groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ d'un certain $GL(V)$, de sorte que $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie algébrique réelle de $gl(V)$. Si $X \in \mathfrak{g}$, il se décompose de manière unique dans $gl(V)$ sous la forme $X = S + H + N$, avec S elliptique (semi-simple de valeurs propres imaginaires pures), H hyperbolique (semi-simple de valeurs propres réelles) et N nilpotent, commutant deux à deux. Comme $\mathfrak{g}$ est algébrique, S, H et N sont dans $\mathfrak{g}$. On pose $S = S(X)$ et on l'appelle la partie elliptique de X.

Un élément g de G sera dit elliptique si $j(g)$ est semi-simple à valeurs propres de module 1, positivement hyperbolique s'il s'écrit $g = \exp H$ avec $H \in \mathfrak{g}$ hyperbolique et unipotent s'il s'écrit $g = \exp N$ avec $N \in \mathfrak{g}$ nilpotent. Si $g \in G$, il se décompose de manière unique dans G sous la forme $g = shu$ avec s elliptique, h positivement hyperbolique et u unipotent, commutant deux à deux. On pose $s = s(g)$ et on l'appelle la partie elliptique de g.

On note G_{ell} l'ensemble des éléments elliptiques de G.

Il est facile de voir que les notions que nous venons d'introduire ne dépendent pas du choix de la réalisation du groupe algébrique $\mathbf{G}$ comme sous-groupe d'un $GL(V)$.

3.1.2. Si $a > 0$, on note $\mathfrak{g}_a$ l'ensemble des éléments $X \in \mathfrak{g}$ tels que pour toute valeur propre λ de X dans $V_{\mathbb{C}}$, on ait $|\operatorname{Im}\lambda| < a$. Alors, $\mathfrak{g}_a$ est un ouvert $\operatorname{Ad} G$-invariant de $\mathfrak{g}$.

On pose $G_a = \exp \mathfrak{g}_a$. Si $0 < a \leqslant \pi$, G_a est un ouvert G-invariant de G.

DÉFINITION 3.1.1.— *Un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathfrak{g}$ sera dit G-elliptique, ou plus simplement elliptique lorsque aucune confusion n'est à craindre, s'il est $\operatorname{Ad} G$-invariant et si un élément de $\mathfrak{g}$ est dans $\mathcal{V}$ si et seulement si sa partie elliptique est dans $\mathcal{V}$.*

Un ouvert $\mathcal{W}$ de G sera dit G-elliptique, ou plus simplement elliptique lorsque aucune confusion n'est à craindre, s'il est G-invariant et si un *élément de G est dans $\mathcal{W}$ si et seulement si sa partie elliptique est dans $\mathcal{W}$.*

Par exemple, les ouverts $\mathfrak{g}_a$, $a > 0$, sont G-elliptiques et ils constituent une base de voisinages G-elliptiques de 0 dans $\mathfrak{g}$.

De même, les ouverts G_a, $0 < a \leqslant \pi$, sont G-elliptiques et ils constituent une base de voisinages G-elliptiques de 1 dans G.

Si z est un nombre complexe non nul, on note $\operatorname{Arg} z$ la détermination de son argument comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$. Désignons par $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (resp. $\mu_1, \ldots, \mu_l$) les valeurs propres distinctes de s dans $V_{\mathbb{C}}$ (resp. de $\operatorname{Ad} s$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$). On définit les nombres strictement positifs $\epsilon'_{\mathfrak{g}}(s)$, $\epsilon''_G(s)$ et $\epsilon_G(s)$, que l'on note plus simplement $\epsilon'(s)$, etc... lorsque aucune confusion n'est possible, en posant :

$$\begin{aligned}\epsilon'(s) &= \inf\{|\operatorname{Arg} \mu_i|,\ \mu_i \neq 1\,;\ \pi\}\\ \epsilon''(s) &= \inf\{|\operatorname{Arg} \lambda_i|,\ \lambda_i \neq 1\,;\ \pi\}.\\ \epsilon(s) &= \frac{1}{2} \inf\{|\operatorname{Arg} \lambda_i \lambda_j^{-1}|,\ i \neq j\,;\ \pi\}.\end{aligned}$$

On a $\epsilon(s) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon'(s)$, $\epsilon'(1) = \epsilon''(1) = \pi$ et $\epsilon(1) = \frac{\pi}{2}$.

Soit $a > 0$. On considère l'application $\gamma : G \times \mathfrak{g}(s)_a \to G$ définie par

$$\gamma(x, X) = xs \exp X x^{-1}.$$

Alors, si $0 < a \leqslant \pi$, l'image de γ est un ouvert noté $\mathcal{W}(s, a)$ de G qui est G-elliptique, et γ induit une submersion de $G \times \mathfrak{g}(s)_a$ sur $\mathcal{W}(s, a)$. Si l'on suppose de plus $0 < a \leqslant \epsilon'(s)$ (resp. $0 < a \leqslant \epsilon(s)$), l'application γ induit un revêtement (resp. un difféomorphisme) de l'espace fibré $G \times_{G(s)} \mathfrak{g}(s)_a$ (voir le numéro 2.17) sur $\mathcal{W}(s, a)$.

Les ouverts $\mathcal{W}(s, a)$, $0 < a \leqslant \pi$ constituent une base de voisinages G-elliptiques de s dans G. Enfin, si $x \in G$ et si $0 < a \leqslant \pi$, on a $x \in \mathcal{W}(s(x), a)$.

3.1.3. Les deux lemmes que nous allons énoncer nous seront utiles par la suite. Le premier d'entre eux est démontré dans [13]. Rappelons la décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe de sous-espaces $\operatorname{Ad} G(s)$-invariants :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(s) \oplus \mathfrak{g}_s,$$

où $\mathfrak{g}_s = (1 - \operatorname{Ad} s)\mathfrak{g}$.

LEMME 3.1.1. — *Soit* $0 < a \leqslant \epsilon'(s)$ *et* $X \in \mathfrak{g}(s)_a$. *Alors, on a* $\det_{\mathfrak{g}_s}(1 - \mathrm{Ad}(s \exp X)) > 0$.

Par s-sous-quotient d'un G-module de dimension finie M, on entend un quotient M_1/M_2 où $M_2 \subseteq M_1$ sont des sous-espaces $G(s)$-invariants de M.

LEMME 3.1.2. — (i) *Soit* $0 < a \leqslant \epsilon(s)$ *et* $X \in \mathfrak{g}(s)_a$. *Si un vecteur d'un s-sous-quotient de* $\mathfrak{g}$ *ou de* $\mathfrak{g}^*$ *est fixé par* $s \exp X$, *alors il est fixé par* s.

(ii) *Soit* $0 < a \leqslant \epsilon''(s)$ *et* $X \in \mathfrak{g}(s)_a$. *Si un vecteur d'un s-sous-quotient de* V *ou de* V^* *est fixé par* $s \exp X$, *alors il est fixé par* s.

Démonstration. — Nous ne donnons que la démonstration de (i), celle de (ii) étant identique.

Soit donc W un sous-quotient s-invariant de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathfrak{g}^*$ et $v \in W$ un vecteur fixé par $s \exp X$. On peut supposer $v \neq 0$.

Écrivons $v = \sum_\lambda v_\lambda$, où λ parcourt l'ensemble des valeurs propres de s dans $W_{\mathbb{C}}$ et v_λ appartient au sous-espace propre correspondant. Soit λ tel que $v_\lambda \neq 0$.

Comme s et X commutent, on a $s \exp X v_\lambda = v_\lambda$ et par suite v_λ est vecteur propre de $\exp X$ pour la valeur propre λ^{-1}. Il existe donc une valeur propre μ de X dans $W_{\mathbb{C}}$ telle que $\lambda e^\mu = 1$. Comme s est elliptique λ est de module 1, si bien que $\mu = i \,\mathrm{Im}\, \mu$. Par ailleurs, les valeurs propres de X dans $W_{\mathbb{C}}$ sont des différences de valeurs propres de X dans $V_{\mathbb{C}}$, de sorte que $|\,\mathrm{Im}\,\mu| \leqslant 2\epsilon(s)$. Enfin, λ est le quotient de deux valeurs propres de s dans $V_{\mathbb{C}}$, disons λ_1 et λ_2. On a donc

$$e^{i(\mathrm{Arg}\,\lambda_1 \lambda_2^{-1} + \mathrm{Im}\,\mu)} = 1.$$

Compte tenu de la définition de $\epsilon(s)$, on voit immédiatement que cette dernière égalité n'est possible que si $\lambda = 1$. On a bien alors $sv = v$. $\square$

3.2. La méthode de descente de Harish-Chandra.

3.2.1. Commençons par exposer quelques résultats dûs à Harish-Chandra (voir [14] et aussi [24]).

PROPOSITION 3.2.1. — *Soit* X *et* Y *deux variétés* $\mathcal{C}^\infty$ *et* $f : X \to Y$ *une submersion surjective. Alors, si* α *est une densité* $\mathcal{C}^\infty$ *à support compact* *sur X, il existe une unique densité $f_*\alpha$ $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur Y, telle que, pour toute fonction β $\mathcal{C}^\infty$ sur Y, on ait*

$$\int_X \beta \circ f d\alpha = \int_Y \beta df_*\alpha.$$

De plus, on a $\operatorname{Supp} f_*\alpha \subseteq f(\operatorname{Supp}\alpha)$ *et, si β est une fonction mesurable sur Y, alors β est localement intégrable sur Y si et seulement si $\beta \circ f$ l'est sur X et, dans ce cas, l'égalité ci-dessus reste vraie. Enfin, l'application $\alpha \mapsto f_*\alpha$ est une surjection de l'espace des densités $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur X sur celui sur Y.*

Considérons maintenant la situation suivante : H est un groupe de Lie agissant de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété M, K est un sous-groupe fermé de H agissant de manière $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété N et j est un plongement K-équivariant de N dans M tel que l'application naturelle $p : H \times N \to M$ soit une submersion surjective. On note $pr_2 : H \times N \to N$ la deuxième projection.

Étant donné χ un caractère de H (i.e. un homomorphisme continu de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^\times$), une fonction généralisée Θ sur M sera dite χ-semi-invariante si elle vérifie ${}^x\Theta = \chi(x)\Theta$, $x \in H$. Si χ est le caractère trivial, on dira simplement que Θ est H-invariante.

Soit χ un caractère de H. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.2.2. — *Soit Θ une fonction généralisée χ-semi-invariante sur M. Alors, il existe une unique fonction généralisée θ sur N telle que, pour toute densité α $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $H \times N$, on ait*

$$\Theta(p_*\alpha) = \theta(pr_{2,*}(\chi \otimes 1\, \alpha)). \tag{5}$$

La fonction généralisée θ est $\chi_{|K}$-semi-invariante et, si $\theta = 0$, on a $\Theta = 0$.

Définition 3.2.1. — *La fonction généralisée θ s'appelle la restriction de Θ à N ; on la note parfois $\Theta_{|N}$.*

Remarque 3.2.1. — Si α est une densité $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur H telle que $\int_H \chi d\alpha = 1$, pour toute densité β $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur N, on a

$$\theta(\beta) = \Theta(p_*(\alpha \otimes \beta)).$$

La proposition 3.2.2 a été démontrée par Harish-Chandra dans le cas où Θ est une fonction généralisée invariante, mais il n'est pas difficile d'étendre ce résultat au cas «semi-invariant».

3.2.2. Nous considérons maintenant la situation où un groupe presque algébrique réel G agit sur lui-même, ou plutôt sur certains de ses ouverts elliptiques par automorphismes intérieurs. On reprend donc les notations du paragraphe 3.1 et on se donne un caractère χ de G.

Soit $s \in G_{\text{ell}}$ et soit $0 < a \leqslant \pi$ de sorte que l'application γ est une submersion de $G \times \mathfrak{g}(s)_a$ sur $\mathcal{W}(s,a)$. Si Θ est un fonction généralisée χ-semi-invariante sur $\mathcal{W}(s,a)$, elle possède donc au sens précédent une restriction $\theta = \Theta^s$ à $\mathfrak{g}(s)_a$, laquelle est une fonction généralisée $\chi_{|G(s)}$-semi-invariante (pour l'action adjointe). Dans [13], M. Duflo et M. Vergne ont donné, lorsque a est suffisamment petit, une nouvelle caractérisation de Θ^s pour les fonctions généralisées invariantes (voir leur Lemme 46 et les remarques qui suivent). Leur résultat s'étend sans difficulté au cas semi-invariant.

On se donne donc des mesures de Haar à gauche dx et dy sur respectivement G et $G(s)$ et on pose $d\dot{x} = dx/dy$. On note dY la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)$ tangente à dy.

Proposition 3.2.3. — *Soit $0 < a \leqslant \epsilon(s)$. L'application $\Theta \mapsto \Theta^s$ induit une bijection de l'espace des fonctions généralisées χ-semi-invariantes sur $\mathcal{W}(s,a)$ sur l'espace des fonctions généralisées $\chi_{|G(s)}$-semi-invariantes sur $\mathfrak{g}(s)_a$. De plus, si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,a))$, on a*

$$(6)\quad \Theta(\alpha dx) = \int_{G/G(s)} \chi(x)|\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x| \times \left\{ \int_{\mathfrak{g}(s)_a} \Theta^s(Y)\alpha(xs\exp Y x^{-1}) \det\nolimits_{\mathfrak{g}_s}(1-(s\exp Y)^{-1}) S_{\mathfrak{g}(s)}(Y)dY \right\} d\dot{x}.$$

Enfin, la fonction généralisée Θ est C^k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$ (resp. localement intégrable) si et seulement s'il en est de même de Θ^s.

4. Sur la représentation métaplectique.

4.1. Rappels sur le groupe métaplectique.

4.1.1. Soit (V, B) un espace symplectique, i.e. V est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme symplectique B. On note $Sp(V)$ le groupe symplectique de V et on désigne par $Mp(V)$ son revêtement connexe à deux feuillets, appelé groupe métaplectique de V, qui est une extension centrale

$$1 \to \{1, \varepsilon\} \to Mp(V) \to Sp(V) \to 1.$$

Lorsque $V = \{0\}$, on convient que $Sp(V)$ est le groupe trivial et que $Mp(V)$ est le groupe à deux éléments $\{1, \varepsilon\}$.

On note $sp(V)$ l'algèbre de Lie de $Sp(V)$.

Soit (V, B) et (V', B') deux espaces symplectiques et $a : V \to V'$ un isomorphisme d'espaces symplectiques. Soit a l'isomorphisme de $Sp(V)$ sur $Sp(V')$ défini par $a(x) = axa^{-1}$. Alors, a se relève de manière unique en un isomorphisme de $Mp(V)$ sur $Mp(V')$ encore noté a.

4.1.2. Si H est un groupe agissant par automorphismes symplectiques dans V, on note H^V l'extension métaplectique correspondante de H : c'est le sous-groupe de $H \times Mp(V)$ constitué des couples (h, x) tels que $h \in H$ et $x \in Mp(V)$ ont même image dans $Sp(V)$. Le noyau du morphisme canonique de H^V dans H est un groupe à deux éléments dont on note ε l'élément non trivial. On désigne par μ_V le morphisme canonique de H^V dans $Mp(V)$.

Si x est un élément de H agissant trivialement dans V, il existe un unique élément de H^V situé au-dessus de x et dont l'image par μ_V est 1. On identifie x à cet élément. On obtient ainsi un relèvement canonique dans H^V, du sous-groupe de H constitué des éléments agissant trivialement dans V.

On se donne un deuxième espace symplectique V', un isomorphisme symplectique a de V sur V' (d'où, d'après le numéro précédent, un isomorphisme encore noté a de $Mp(V)$ sur $Mp(V')$), un groupe H' agissant par automorphismes symplectiques dans V' et un isomorphisme encore noté a de H sur H' vérifiant que $a(h.v) = a(h).a(v)$, $h \in H$ et $v \in V$. Alors, la formule $a(h, x) = (a(h), a(x))$, $(h, x) \in H^V$ définit un isomorphisme de H^V sur $H'^{V'}$, appelé relèvement canonique des isomorphismes a.

Plus généralement, si V est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée B dans lequel le groupe H agit par automorphismes fixant B, on note encore H^V l'extension métaplectique de H induite par son action dans l'espace symplectique $V/\ker B$ et par μ_V le morphisme canonique de H^V dans $Mp(V/\ker B)$.

4.1.3. On note N_V, ou plus simplement N lorsque aucune confusion n'est possible, le groupe de Heisenberg associé à V : $N = V \times \mathbb{R}$ muni de la loi

$$(v,t)(v',t') = \left(v + v', t + t' + \frac{1}{2}B(v,v')\right),\ (v,t),\ (v',t') \in N.$$

Alors $Z = \{(0,t)/t \in \mathbb{R}\}$ est le centre de N.

On note $\mathfrak{n}_V$, ou plus simplement $\mathfrak{n}$, l'algèbre de Lie de N. Alors $\mathfrak{n} = V \times \mathbb{R}$, muni du crochet

$$[(v,t),(v',t')] = (0, B(v,v')),\ (v,t),\ (v',t') \in \mathfrak{n},$$

l'application exponentielle de $\mathfrak{n}$ sur N étant donnée par

$$\exp(v,t) = (v,t),\ (v,t) \in \mathfrak{n}.$$

L'élément $Z_0 = (0,1)$ engendre le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ et on a $\mathfrak{n} = V \oplus \mathfrak{z}$, où l'on a identifié V avec le sous-espace de $\mathfrak{n}$ constitué des éléments $(v,0)$, $v \in V$.

Le groupe $Sp(V)$ et, au travers lui, le groupe $Mp(V)$ agissent par automorphismes dans N :

$$x.(v + tZ_0) = x.v + tZ_0,\ v \in V,\ t \in \mathbb{R},\ x \in Sp(V),$$

et donc dans $\mathfrak{n}$.

On désigne par T_V, ou plus simplement par T, la représentation unitaire irréductible de N telle que

$$T(0,t) = e^{it}\mathrm{Id},\ t \in \mathbb{R}.$$

Notons $\mathcal{H}_V$, ou plus simplement $\mathcal{H}$, l'espace de T. On sait qu'il existe une unique représentation unitaire S_V, notée plus simplement S, de $Mp(V)$ dans $\mathcal{H}$ telle que

$$S(x)T(n)S(x)^{-1} = T(x.n),\ n \in N,\ x \in Mp(V).$$

Nous appellerons cette représentation, la représentation métaplectique de $Mp(V)$. Elle est telle que

$$S(\varepsilon) = -\mathrm{Id}.$$

4.1.4. On se donne une décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ en somme directe orthogonale de deux sous-espaces symplectiques et on considère pour $j = 1,2$, le groupe de Heisenberg $N_j = N_{V_j}$ associé à V_j, T_j la représentation unitaire irréductible T_{V_j} d'espace $\mathcal{H}_j$ et S_j la représentation métaplectique correspondante de $Mp(V_j)$.

L'application $(n_1, n_2) \mapsto n_1 n_2$ de $N_1 \times N_2$ dans N est un homomorphisme surjectif de groupes de Lie et la représentation $T_1 \otimes T_2$ de $N_1 \times N_2$ passe au quotient en une représentation unitaire irréductible de N équivalente à T. Dans la suite de ce numéro, on suppose que T est égale à $T_1 \otimes T_2$ agissant dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Soit $j \in \{1,2\}$. On considère l'injection canonique de $Sp(V_j)$ dans $Sp(V)$ qui identifie l'élément x de $Sp(V_j)$ avec l'élément de $Sp(V)$ agissant comme x dans V_j et trivialement dans son orthogonal dans V. Cette injection induit une injection d'algèbres de Lie de $sp(V_j)$ dans $sp(V)$ et se relève de manière unique en une injection de $Mp(V_j)$ dans $Mp(V)$, laquelle vérifie

$$\begin{aligned} S(x) &= S_1(x) \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_2},\ x \in Mp(V_1) \\ &= Id_{\mathcal{H}_1} \otimes S_2(x),\ x \in Mp(V_2). \end{aligned}$$

En particulier, cette injection de $Mp(V_j)$ dans $Mp(V)$ envoie l'élément non trivial ε_j du noyau de la projection canonique de $Mp(V_j)$ sur $Sp(V_j)$, sur l'élément ε de $Mp(V)$.

Les sous-groupes $Mp(V_j)$, $j = 1,2$, sont le commutant l'un de l'autre et, si $x_j \in Mp(V_j)$, $j = 1,2$, on a

$$S(x_1 x_2) = S_1(x_1) \otimes S_2(x_2).$$

De plus, l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ induit une surjection de $Mp(V_1) \times Mp(V_2)$ sur le sous-groupe de $Mp(V)$ constitué des éléments laissant invariants les sous-espaces V_1 et V_2 dont le noyau est le sous-groupe à deux éléments engendré par $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

En particulier, si X est un élément de $sp(V)$ qui laisse invariante la décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ et si, pour $j = 1,2$, on note X_j l'élément de $sp(V_j) \subseteq sp(V)$ induit par X, on a

$$S(\exp X) = S_1(\exp X_1) \otimes S_2(\exp X_2),$$

où exp désigne l'application exponentielle pour le groupe métaplectique correspondant.

4.2. Une fonction sur le groupe métaplectique.

On reprend les notations du paragraphe précédent.

4.2.1. Soit $\mathfrak{l} \subset V_{\mathbb{C}}$ un lagrangien complexe pour B. Dans [8], M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne définissent un caractère $\rho_{\mathfrak{l}}$ du stabilisateur $Mp(V)_{\mathfrak{l}}$ de $\mathfrak{l}$ dans $Mp(V)$. Ce caractère est tel que,

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{l}}(x)^2 &= \det{}_{\mathfrak{l}}\, x,\ x \in Mp(V)_{\mathfrak{l}} \\ \rho_{\mathfrak{l}}(\varepsilon) &= -1. \end{aligned}$$

4.2.2. Reprenant les notations du numéro précédent, on note $\delta_{\mathfrak{l}}$ le caractère de $Mp(V)_{\mathfrak{l}}$ défini par

$$\delta_{\mathfrak{l}}(x) = \frac{\rho_{\mathfrak{l}}(x)}{|\rho_{\mathfrak{l}}(x)|}.$$

Rappelons que le lagrangien $\mathfrak{l}$ est dit positif, si la forme hermitienne $v \mapsto iB(v, \bar{v})$ est semi-définie positive sur $\mathfrak{l}$. Si $x \in Mp(V)$, il existe toujours un lagrangien positif x-invariant. On montre alors qu'étant donné $x \in Mp(V)$, le nombre $\delta_{\mathfrak{l}}(x)$ est indépendant du choix du lagrangien positif x-invariant $\mathfrak{l}$; on le note $\delta(x)$.

Reprenant les notations du numéro 4.1.2, on considère un espace vectoriel réel V de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée B et un groupe H agissant dans V par automorphismes laissant B invariante. On définit alors la fonction δ^V sur H^V en posant $\delta^V(x) = \delta(\mu_V(x))$, $x \in H^V$.

4.2.3. Soit $s \in Mp(V)$ un élément semi-simple et soit $\mathfrak{l} \subset V_{\mathbb{C}}$ un lagrangien complexe s-invariant. On note $q_{\mathfrak{l}}(s)$ le nombre de valeurs propres négatives de la forme hermitienne sur $\mathfrak{l} \cap (1-s)V_{\mathbb{C}}$ définie par $v \mapsto iB(v, \bar{v})$ et $n_{\mathfrak{l}}(s)$ le nombre de valeurs propres de s dans $\mathfrak{l} \cap (1-s)V$ qui sont dans l'intervalle $]1, +\infty[$. On pose

$$\Phi(s) = (-1)^{q_{\mathfrak{l}}(s)+n_{\mathfrak{l}}(s)} \det{}_{\mathfrak{l}\cap(1-s)V_{\mathbb{C}}}(1-s)^{-1} \rho_{\mathfrak{l}}(s). \tag{7}$$

On montre que ce nombre ne dépend pas du choix du lagrangien complexe s-invariant $\mathfrak{l}$. De plus, on voit facilement que $\Phi(s)/|\Phi(s)|$ est une racine quatrième de l'unité, tandis que

$$|\Phi(s)| = |\det{}_{V_s}(1-s^{-1})|^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

On étend la fonction Φ à $Mp(V)$ de la manière suivante : Soit $x \in Mp(V)$ et soit $x = sn$ sa décomposition en parties semi-simple et unipotente. Alors, on pose

$$\Phi(x) = \Phi(s).$$

On voit facilement que la fonction Φ ainsi définie est invariante par automorphismes intérieurs.

4.2.4. On reprend les notations du paragraphe 4.1 et on se donne un élément semi-simple s de $Mp(V)$. On considère l'action de N sur lui-même définie par

$$x.y = xys(x)^{-1},\ x, y \in N.$$

On définit une fonction généralisée Λ_s sur N en posant

$$\Lambda_s(\varphi dx) = \operatorname{Tr}(T(\varphi dx)S(s)),\ \varphi \in \mathcal{D}(N).$$

La fonction généralisée Λ_s est invariante pour l'action de N sur lui-même définie juste ci-dessus. Comme l'application $(x, X) \mapsto x.\exp X$ est une submersion de $N \times \mathfrak{n}(s)$ sur N, on voit que Λ_s possède une restriction à $\mathfrak{n}(s)$, notée λ_s. Dans [8], M. Duflo, G. Heckman et M. Vergne ont donné une expression pour λ_s, que nous rappelons ci-dessous.

Soit Z_0^* l'élément de $\mathfrak{n}^*$ tel que $Z_0^*(Z_0) = 1$ et que $Z^*_{0|V} = 0$. Soit

$$\Omega_0 = NZ_0^* = Z_0^* + \mathfrak{z}^{\perp}$$

l'orbite co-adjointe de Z_0^* sous N. Alors, l'ensemble Ω_0^s des points fixes de s dans Ω_0 est l'orbite co-adjointe de Z_0^* sous $N(s)$ et à ce titre supporte la mesure de Liouville $d\beta_{\Omega_0^s}$. On a alors le résultat suivant :

LEMME 4.2.1. — *On a l'égalité de fonctions généralisées*

$$\lambda_s = \Phi(s)\left(d\beta_{\Omega_0^s}\right)^{\widehat{}}. \tag{9}$$

Dans [21], K. Maktouf a démontré l'analogue de ce résultat dans le cas p-adique. Sa démonstration est encore valable dans le cas réel. Utilisant les résultats du numéro 3.2.1 concernant la méthode de descente de Harish-Chandra, on en déduit le corollaire ci-après.

On a la décomposition en somme directe orthogonale de sous-espaces symplectiques $V = V^s \oplus V_s$, si bien que reprenant les notations et résultats des numéros 4.1.3 et 4.1.4, on peut considérer le sous-groupe N_{V^s} (resp. N_{V_s}) de N et sa représentation T_{V^s} (resp. T_{V_s}) dans l'espace $\mathcal{H}_{V^s}$ (resp. $\mathcal{H}_{V_s}$) ainsi que la représentation métaplectique S_{V^s} (resp. S_{V_s}) de $Mp(V^s)$ (resp. $Mp(V_s)$) et identifier l'espace de T et de S à $\mathcal{H}_{V^s} \otimes \mathcal{H}_{V_s}$. Comme s agit trivialement dans V^s, on peut l'identifier à un élément de $Mp(V_s)$ de sorte que l'on ait

$$S(s) = \mathrm{Id}_{\mathcal{H}_{V^s}} \otimes S_{V_s}(s).$$

Si X est un élément de $sp(V)(s)$, on désigne par X_{V_s} sa restriction à V_s. On note $\exp_s$ l'application exponentielle du groupe $Mp(V_s)$.

Soit $d_{V_s}v$ une mesure de Lebesgue sur V_s. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(V_s)$ et $X \in sp(V)(s)$, l'opérateur, agissant dans $\mathcal{H}_{V_s}$,

$$\begin{aligned} &J(\varphi d_{V_s}v, s\exp_s X_{V_s}) \\ &= S_{V_s}(s\exp_s X_{V_s}) \int_{V_s} \varphi(v) e^{-\frac{1}{2}B((s\exp X)^{-1}v,v)} T_{V_s}(((s\exp X)^{-1}-1)v) d_{V_s}v \end{aligned}$$

est bien défini.

Corollaire 4.2.1. — *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(V_s)$ telle que*

$$\int_{V_s} \varphi(v) d_{V_s}v = 1.$$

Alors l'opérateur $J(\varphi d_{V_s}v, s)$ est à trace et l'on a

$$\mathrm{Tr}\, J(\varphi d_{V_s}v, s) = \Phi(s). \tag{10}$$

Soit $s \in Mp(V)_{\mathrm{ell}}$ et $X \in sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$. Alors, il résulte du lemme 3.1.2 et du fait que l'ouvert $sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$ est connexe, que $\det_{V_s}(1 - s\exp X) > 0$. On a alors le

Corollaire 4.2.2. — *Soit $s \in Mp(V)_{\mathrm{ell}}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(V_s)$ telle que*

$$\int_{V_s} \varphi(v) d_{V_s}v = 1.$$

Si $X \in sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$, l'opérateur $J(\varphi d_{V_s}v, s\exp_s X_{V_s})$ est à trace et on a

$$\mathrm{Tr}\, J(\varphi d_{V_s}v, s\exp_s X_{V_s}) = \frac{\Phi(s)}{|\Phi(s)|}\left(\det_{V_s}(1-(s\exp X)^{-1})\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$= \Phi(s)\left(\frac{\det_{V_s}(1-s^{-1})}{\det_{V_s}(1-(s\exp X)^{-1})}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Démonstration. — Il est facile de montrer que, sous les hypothèses du corollaire, l'opérateur $J(\varphi d_{V_s} v, s \exp_s X_{V_s})$ est à trace et que la fonction

$$X \mapsto \big(\det_{V_s}(1-(s \exp X)^{-1})\big)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Tr} J(\varphi d_{V_s} v, s \exp_s X_{V_s})$$

est $\mathcal{C}^\infty$ sur $sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$. De plus, si $X \in sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$ est semi-simple, alors il en est de même pour $\sigma = s \exp_s X_{V_s}$, et, d'après le lemme 3.1.2, on a $V^\sigma = V^s$ et $V_\sigma = V_s$. Il résulte alors du corollaire 4.2.1 que, pour $X \in sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$ semi-simple, on a

$$\operatorname{Tr} J(\varphi d_{V_s} v, s \exp_s X_{V_s}) = \Phi(s \exp_s X_{V_s}),$$

et par suite

$$\big(\det_{V_s}(1-(s \exp X)^{-1})\big)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Tr} J(\varphi d_{V_s} v, s \exp_s X_{V_s}) = \frac{\Phi(s \exp_s X_{V_s})}{|\Phi(s \exp_s X_{V_s})|}.$$

Cependant, le nombre $\Phi(s \exp_s X_{V_s})/|\Phi(s \exp_s X_{V_s})|$ est une racine quatrième de l'unité. Comme l'ensemble des éléments semi-simples de $sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$ est dense dans $sp(V)(s)_{\epsilon''(s)}$, on déduit de ce qui précède que la fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ouvert

$$X \mapsto \big(\det_{V_s}(1-(s \exp X)^{-1})\big)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Tr} J(\varphi d_{V_s} v, s \exp_s X_{V_s})$$

prend toutes ses valeurs dans l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité. Comme cet ouvert est connexe, cette fonction est constante. □

4.2.5. La représentation métaplectique étant somme de deux sous-représentations irréductibles, on sait, depuis les travaux de Harish-Chandra, qu'elle est à trace et que son caractère est une fonction localement intégrable sur Mp(V) qui est analytique sur l'ouvert des éléments réguliers. On peut démontrer le résultat plus précis suivant.

On note Θ_S le caractère de la représentation métaplectique. D'autre part, on désigne par $Mp(V)'$ l'ouvert de $Mp(V)$ constitué des éléments x tels que $\det_V(1-x) \neq 0$. Cet ouvert contient strictement celui des éléments réguliers.

THÉORÈME 4.2.1. — *Le caractère Θ_S de la représentation métaplectique est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $Mp(V)'$ et on a pour tout $x \in Mp(V)'$,*

$$\Theta_S(x) = \Phi(x).$$

L'analogue dans le cas p-adique de ce résultat a été démontré par K. Maktouf (voir [21], théorème 31). Sa démonstration s'étend sans difficulté au cas réel. Il convient de noter que M. Duflo avait donné auparavant une autre démonstration de cette formule pour le caractère de la représentation métaplectique d'un groupe symplectique sur un corps fini (non publié). Sa démonstration s'étend également aux cas réel et p-adique.

4.3. Extensions de représentations du groupe de Heisenberg. Une formule de A. A. Kirillov.

4.3.1. Soit $(G, j, \mathbf{G})$ un groupe presque algébrique réel dont le radical unipotent est un groupe de Heisenberg. On suppose que le centre Z de $N = {}^{u}G$ est central dans G. On note $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{z}$) l'algèbre de Lie de N (resp. de Z).

Soit $n \in \mathfrak{n}^*$ dont la restriction à $\mathfrak{z}$ soit non nulle. Soit $Z_0 \in \mathfrak{z}$ tel que $n(Z_0) = 1$ et soit V le noyau de n, de sorte que $\mathfrak{n} = V \oplus \mathbb{R}Z_0$. La forme bilinéaire alternée B_n (voir le numéro 2.16) induit une forme symplectique B dans V de sorte que l'on a $[X, Y] = B(X, Y)Z_0$, $X, Y \in V$. Reprenant les notations du numéro 4.1.3, on voit que l'application $(X, t) \mapsto X + tZ_0$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{n}_V$ sur $\mathfrak{n}$, lequel induit un isomorphisme de groupes de Lie de N_V sur N. On note alors T_n la représentation de N, transportée par cet isomorphisme de la représentation T_V de N_V : c'est la représentation unitaire irréductible de N associée à n par la méthode des orbites de Kirillov.

Le stabilisateur $G(n)$ de n dans G s'écrit $G(n) = R \times Z$, où R est un facteur réductif de G stabilisant V. On peut donc considérer l'extension métaplectique $R^{\mathfrak{n}}$ de R, qui n'est autre que R^V. On reprend les notations du numéro 4.1.2. On définit alors une représentation S_n de $R^{\mathfrak{n}}$ en posant $S_n = S \circ \mu_V$.

On définit alors une représentation S_nT_n du produit semi-direct $R^{\mathfrak{n}}N$ dans l'espace de T_n en posant :

$$S_nT_n(xy) = S_n(x)T_n(y),\ x \in R^{\mathfrak{n}},\ y \in N. \tag{13}$$

Maintenant, soit T une représentation unitaire de $R^{\mathfrak{n}}$ telle que $T(\varepsilon) = -\mathrm{Id}$. Elle s'étend en une représentation unitaire, encore notée T, de $R^{\mathfrak{n}}N$ triviale sur N. Alors le produit tensoriel $T \otimes S_nT_n$ passe au quotient en une représentation de $G = RN$. De plus, l'application $T \mapsto T \otimes S_nT_n$ induit une bijection de l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations unitaires irréductibles de $R^{\mathfrak{n}}$ prenant la valeur $-\mathrm{Id}$ en ε, sur l'ensemble des (classes d'équivalence de) représentations unitaires irréductibles de G dont la restriction à N est un multiple de T_n.

4.3.2. On garde les notations du numéro précédent et on se donne $g \in \mathfrak{g}^*$ tel que $g_{|\mathfrak{n}} = n$.

On note $\mathfrak{r}$ l'algèbre de Lie de R. Alors on a la décomposition en sous-espaces R-invariants :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus V \oplus \mathfrak{z},$$

d'où l'on déduit la décomposition duale

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{r}^* \oplus V^* \oplus \mathfrak{z}^*.$$

Soit r la restriction de g à $\mathfrak{r}$. Alors si on note Ω_r (resp. Ω_g) l'orbite de r (resp. g) sous R (resp. G), on a $\Omega_r + n = \Omega_g \cap (\mathfrak{r}^* \oplus \mathfrak{z}^*)$. De plus, Ω_g est fermée si et seulement Ω_r l'est.

D'après [20], Lemma 8, on peut choisir la mesure de Lebesgue $d_V v$ sur V de sorte que l'on ait

$$(14) \qquad \int_{\Omega_g} \varphi d\beta_{\Omega_g} = \int_{\Omega_r} \int_V \varphi(\exp v.(l+n)) d_V v d\beta_{\Omega_r}(l),\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_g).$$

Utilisant le fait que toute orbite co-adjointe de R dans $\mathfrak{r}^*$ est tempérée, on déduit facilement de la formule 14 que pour tout $g \in \mathfrak{g}^*$ tel que $g_{|\mathfrak{z}} \neq 0$, Ω_g est tempérée.

Si α est un élément de $\mathcal{D}(\mathfrak{g})$ et si $d_V v$ est une mesure de Lebesgue sur V, on définit un élément $\psi_{\alpha, d_V v}$ de $\mathcal{D}(\mathfrak{r})$ en posant,

(15)

$$\psi_{\alpha, d_V v}(X) = \mathrm{Tr}\left\{ \int_{V \times \mathbb{R}} \alpha(X + v + tZ_0) e^{it} S_n T_n(\exp(X+v)) d_V v dt \right\}.$$

La proposition suivante est conséquence de la démonstration de [20], Theorem 2.

Proposition 4.3.1. — *Soit $d_{\mathfrak{g}}X$, $d_{\mathfrak{r}}X$ et $d_V v$ des mesures de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ et V respectivement telles que $d_{\mathfrak{g}}X = d_{\mathfrak{r}}X d_V v dt$. Alors, si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathfrak{g})$, on a*

$$(16) \qquad \int_{\Omega_r} \left(j_{\mathfrak{r}}^{-1/2} \psi_{\alpha, d_V v} d_{\mathfrak{r}} X \right)^{\widehat{}} d\beta_{\Omega_r} = \int_{\Omega_g} \left(j_{\mathfrak{g}}^{-1/2} \alpha d_{\mathfrak{g}} X \right)^{\widehat{}} d\beta_{\Omega_g}.$$

5. Sur certaines représentations unitaires irréductibles des groupes presque algébriques réels et certains opérateurs semi-invariants associés.

Dans ce paragraphe nous rappelons la construction, par M. Duflo, de représentations unitaires irréductibles (voir [7]).

5.1. Sous-algèbres co-isotropes et sous-groupes induisants associés.

5.1.1. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Rappelons qu'une polarisation en g est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui est aussi un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire alternée B_g associée à g.

DÉFINITION 5.1.1. — *Une bonne polarisation en g est une polarisation $\mathfrak{p}$ qui est résoluble et qui satisfait la condition de Pukanszky : soit $g' \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$ telle que $g_{|\mathfrak{p}} = g'_{|\mathfrak{p}}$, alors* $\dim \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(g') = \dim \mathfrak{g}(g)_{\mathbb{C}}$.

La forme linéaire g sera dite bien polarisable si elle possède une bonne polarisation.

Rappelons que si $\mathfrak{g}$ est réductive, les formes linéaires g sur $\mathfrak{g}$ qui sont bien polarisables sont celles dont le stabilisateur $\mathfrak{g}(g)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

5.1.2. Jusqu'à la fin du paragraphe 5.1 on suppose que $G = (G, j, \mathbf{G})$ est un groupe presque algébrique sur $\mathbb{R}$, dont on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie, et on se donne $g \in \mathfrak{g}^*$.

DÉFINITION 5.1.2. — *Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ sera dite co-isotrope relativement à g si l'orthogonal $\mathfrak{b}^g$ de $\mathfrak{b}$ par rapport à B_g est contenu dans $\mathfrak{b}$.*

Soit donc $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre co-isotrope relativement à g, $b = g_{|\mathfrak{b}}$ et $B(b)_0$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}(b)$. Alors $B(b)_0.g$ est un ouvert du sous-espace affine $g + \mathfrak{b}^{\perp}$ de $\mathfrak{g}^*$.

DÉFINITION 5.1.3. — *On dit que la sous-algèbre $\mathfrak{b}$, co-isotrope relativement à g, vérifie la condition de Pukanszky si l'on a $B(b)_0.g = g + \mathfrak{b}^{\perp}$. On note $Cos(g)$ l'ensemble des sous-algèbres co-isotropes relativement à g, qui vérifient la condition de Pukanszky et qui sont algébriques.*

Un élément $\mathfrak{b}$ de $Cos(g)$ sera dit de type unipotent s'il possède un facteur réductif stabilisant la restriction de g à ${}^u\mathfrak{b}$. On note $Cosu(g)$ le sous-ensemble de $Cos(g)$ constitué des éléments de type unipotent.

5.1.3. Dans [6], Chapitre I numéro 20, M. Duflo construit pour chaque forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ un élément canonique de $Cosu(g)$, qu'il appelle sous-algèbre acceptable canonique et que nous notons $\mathfrak{b}_g$. Nous aurons besoin du résultat suivant, qui n'a rien à voir avec la suite de ce paragraphe.

LEMME 5.1.1. — *Supposons que $g \in \mathfrak{g}^*$ soit bien polarisable. Soit $\mathfrak{t}$ un idéal unipotent de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{g}(g)$ et tel que l'action de $\mathfrak{g}(g)$ dans $\mathfrak{t}$ soit nilpotente. Alors l'action de $\mathfrak{b}_g$ dans $\mathfrak{t}$ est nilpotente.*

Démonstration. — D'après [18], lemme 21, il existe un facteur réductif $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{b}_g$ tel que, si μ (resp. b) désigne la restriction de g à $\mathfrak{r}$ (resp, $\mathfrak{b}_g$), on ait

$$\mathfrak{g}(g) + ({}^u\mathfrak{b}_g)(b) = \mathfrak{r}(\mu) + ({}^u\mathfrak{b}_g)(b).$$

D'autre part, d'après [6] chapitre I proposition 28, puisque la forme linéaire g est bien polarisable, $\mathfrak{r}(\mu)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{r}$.

Comme l'action de $\mathfrak{g}(g)$ dans $\mathfrak{t}$ est nilpotente, il résulte de ce qui précède que $\mathfrak{r}(\mu)$ et donc $\mathfrak{r}$ centralise $\mathfrak{t}$. Il est alors clair que $\mathfrak{b}_g$ agit de manière nilpotente dans $\mathfrak{t}$. □

5.1.4. Soit $\mathfrak{b}$ un élément de $Cos(g)$ qui soit $G(g)$-invariant : il en existe toujours, y compris dans $Cosu(g)$, par exemple l'élément canonique de $Cosu(g)$ dont il est question au numéro précédent. On note B_0 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Alors $B = G(g)B_0$ est un sous-groupe presque algébrique de G, que l'on appelle le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{b}$ (voir le numéro 5.2.4 et la formule 23).

Voici deux exemples d'éléments de $Cos(g)$ et de sous-groupes induisants associés.

5.1.5. Soit $\mathfrak{a} \subset {}^u\mathfrak{g}$ un idéal abélien et G-invariant et A le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. On pose $a = g_{|\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(a)$, $h = g_{|\mathfrak{h}}$ et $H = G(a)$. Alors, $\mathfrak{h}$ est un élément $G(g)$-invariant de $Cos(g)$ (voir [7], IV.2 (13) Remark) et on a $H(h) = G(g)A$ (voir [23], p. 500-501), si bien que H est le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{h}$.

5.1.6. Un caractère χ de G est dit rationnel, s'il est le composé d'un caractère rationnel défini sur $\mathbb{R}$ de $\mathbf{G}$ avec j et il sera dit semi-rationnel si sa restriction à la composante neutre G_0 de G est de la forme ζ^α, où ζ est un caractère rationnel de G_0 et α est un réel.

On se donne χ un caractère semi-rationnel de G dont on suppose qu'il est trivial sur $G(g)$. On note K le noyau de χ, $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie et k la restriction de g à $\mathfrak{k}$.

LEMME 5.1.2. — *On conserve les hypothèses précédentes. Alors*

(i) $\mathfrak{k}$ *est un élément* $G(g)$*-invariant de* $Cos(g)$,

(ii) *on a* $K(k) = G(g)^u(K(k))$ *et* $K_1 = K(k)K_0$ *est le sous-groupe induisant associé à* $\mathfrak{k}$.

Démonstration. — Le résultat est évident si $d\chi = 0$. On suppose donc dans la suite de la démonstration que $d\chi \neq 0$, de sorte que $\dim \mathfrak{k} = \dim \mathfrak{g} - 1$. Comme $\mathfrak{g}(g) \subset \mathfrak{k}$, on a les inclusions suivantes $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{k}(g) \subset \mathfrak{k}(k) \subset \mathfrak{g}(k)$, tandis que, comme $\mathfrak{k}$ contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, d'après un résultat de Pukanszky (voir [23]), $G(k)_0.g = g + \mathfrak{k}^\perp$, où $G(k)_0$ désigne la composante neutre de $G(k)$. En particulier, on a $\dim \mathfrak{g}(k) = \dim \mathfrak{g}(g) + 1$. D'autre part, si r désigne l'application de restriction de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{k}^*$, on a $r(K.g) = K.k$; on voit donc que l'on a $\dim G.k = \dim \Omega_g - 1 \geqslant \dim \Omega_k \geqslant \dim K.g - 1 = \dim \Omega_g - 2$ et, comme les dimensions de Ω_g et de Ω_k sont paires, $\dim \Omega_k = \dim \Omega_g - 2$. On déduit de ceci que $\mathfrak{g}(k) = \mathfrak{k}(k)$ et aussi que $K(k)_0.g = g + \mathfrak{k}^\perp$, de sorte que $\mathfrak{k}$ est un élément de $Cos(g)$, bien évidemment $G(g)$-invariant.

Soit R_k, R_K et R un facteur réductif de $K(k)$, K et G respectivement, tel que $R_k \subset R_K \subset R$ et soit $\mathfrak{r}_k$, $\mathfrak{r}_K$ et $\mathfrak{r}$ leur algèbre de Lie respective. Comme R_K est le noyau de χ dans R, on en déduit que $\mathfrak{r}_K$ est R-invariante et qu'elle possède donc un supplémentaire R-invariant de dimension 1, disons $\mathbb{R}X_0$, dans $\mathfrak{r}$. Comme $d\chi(X_0) \neq 0$, on en déduit aisément que R centralise X_0. Utilisant le fait que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}X_0$, il n'est alors pas difficile de voir que $R_k \subset G(g)$. On a donc $K(k) = G(g)^u(K(k))$. Ceci achève la démonstration du lemme. □

5.1.7. Dans ce numéro, on se donne $\mathfrak{b}$ un élément $G(g)$-invariant de $Cos(g)$. On note b la restriction de g à $\mathfrak{b}$, B un sous-groupe presque algébrique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et contenant le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{b}$ et Ω_b la B-orbite de b. Alors on a la formule suivante, valable pour toute fonction φ intégrable ou mesurable et positive sur Ω_g :

$$(17) \qquad \int_{\Omega_g} \varphi d\beta_{\Omega_g} = \int_{G/B} \left\{ \int_{\Omega_b} \left\{ \int_{\mathfrak{b}^\perp} \varphi(x.(l+\lambda)) d\lambda \right\} d\beta_{\Omega_b}(l_1) \right\} d\dot{x},$$

où, $d\lambda$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{b}^{\perp}$, $d\dot{x}$ est la «mesure» invariante sur G/B tangente à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ duale de $d\lambda$ et où l est un élément quelconque de $\mathfrak{g}^*$ dont la restriction à $\mathfrak{b}$ est l_1.

La démonstration de cette formule est analogue à celle de la formule 18 ci-après qu'elle généralise et qui est due à Kirillov (voir [19], Lemma 7).

5.1.8. Dans ce numéro on se donne $\mathfrak{a} \subset {}^u\mathfrak{g}$ un idéal abélien, et on reprend les notations a, $\mathfrak{h}$, H, du numéro 5.1.5.

On pose $\mathfrak{q} = \ker a$; c'est un idéal H-invariant de $\mathfrak{h}$. Alors le sous-groupe analytique Q de H est invariant et le groupe $G_1 = H/Q$ est un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{q}$. La forme linéaire h, qui est orthogonale à $\mathfrak{q}$, peut être vue comme une forme linéaire g_1 sur $\mathfrak{g}_1$ et l'on a $\Omega_h = \Omega_{g_1}$.

Soit φ une fonction intégrable ou mesurable et positive sur Ω_g. Alors, on a

$$\int_{\Omega_g} \varphi d\beta_{\Omega_g} = \int_{G/H} \left\{ \int_{\Omega_{g_1}} \left\{ \int_{\mathfrak{h}^{\perp}} \varphi(x.(l+\lambda)) d\lambda \right\} d\beta_{\Omega_{g_1}}(l_1) \right\} d\dot{x}, \tag{18}$$

où, $d\lambda$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}^{\perp}$, $d\dot{x}$ est la «mesure» invariante sur G/H tangente à la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ duale de $d\lambda$ et où l est un élément quelconque de $\mathfrak{g}^*$ dont la restriction à $\mathfrak{h}$ est l_1.

5.2. Construction de représentations.

5.2.1. On suppose jusqu'à la fin du paragraphe 5.2 que $G = (G, j, \mathbf{G})$ est un groupe presque algébrique sur $\mathbb{R}$ dont on note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. Alors la forme bilinéaire alternée B_g induit une forme symplectique sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$. Soit H un groupe opérant dans $\mathfrak{g}$ par automorphismes fixant g (par exemple $H = G(g)$). Alors, il opère par automorphismes symplectiques dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$, si bien que l'on peut considérer l'extension métaplectique $H^{\mathfrak{g}}$ (voir le numéro 4.1.2). On peut aussi considérer la fonction $\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)}$ sur H définie au numéro 4.2.2, que l'on note plus simplement δ^g.

On désigne alors par $X_G(g)$ l'ensemble des (classes d'équivalence des) représentations unitaires irréductibles τ de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ telles que

$$\tau(\exp X) = e^{i<g,X>}\mathrm{Id},\ X \in \mathfrak{g}(g),$$
$$\tau(\varepsilon) = -\mathrm{Id}.$$

Les éléments de $X_G(g)$ sont les paramètres d'admissibilité de g relativement à G. Ils sont tous de dimension finie.

On remarquera que si $\tau \in X_G(g)$, l'application $x \mapsto \delta^g(x)\tau(x)$ passe au quotient en une représentation projective, notée $\delta^g\tau$, de $G(g)$ dans l'espace de τ.

DÉFINITION 5.2.1. — *La forme linéaire g sera dite G-admissible, ou plus simplement admissible lorsque aucune confusion n'est possible, si $X_G(g)$ est non vide.*

On note $\mathfrak{g}^*_G$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ qui sont bien polarisables et G-admissibles. On désigne alors par X_G l'ensemble des couples (g,τ) avec $g \in \mathfrak{g}^*_G$ et $\tau \in X_G(g)$. C'est l'ensemble des paramètres d'admissibilité de G.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et $a \in \mathrm{Aut}(G)$. Alors a induit un isomorphisme symplectique encore noté a de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(a.g)$ ainsi qu'un isomorphisme de $G(g)$ sur $G(a.g)$, lesquels se relèvent canoniquement en un isomorphisme a de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ sur $G(a.g)^{\mathfrak{g}}$ (voir le numéro 4.1.2). Par suite, le groupe $\mathrm{Aut}(G)$ des automorphismes de G opère naturellement dans X_G par la formule $a.(g,\tau) = (a.g, {}^a\tau)$.

5.2.2. On reprend les notations du numéro précédent. Soit $\mathfrak{b}$ un élément de $Cos(g)$ qui soit $G(g)$-invariant et B le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{b}$. On note b la restriction de g à $\mathfrak{b}$.

Alors g est bien polarisable (resp. G-admissible) si et seulement si b est bien polarisable (resp. B-admissible). En fait, on a $B(b) = G(g)^u(B(b))$ et il existe une bijection canonique $\tau \mapsto \tau^B$ de $X_G(g)$ sur $X_B(b)$ qui est déterminée par

$$\delta^g\tau(x) = \delta^b\tau^B(x),\ x \in G(g) \tag{19}$$

(voir [7], IV.2 (9) Lemma).

5.2.3. Dans ce numéro, on suppose que le radical unipotent de G est un groupe de Heisenberg dont le centre est central dans G, et on considère une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ telle que sa restriction au centre de ${}^u\mathfrak{g}$ soit non nulle. On reprend les notations, N, Z, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$, n, Z_0, V, R, $\mathfrak{r}$, r, ..., des numéros 4.3.1 et 4.3.2, et on considère $\mathfrak{r}$ comme l'algèbre de Lie du groupe $R^V = R^{\mathfrak{n}}$.

Alors, la forme linéaire g est bien polarisable (resp. G-admissible) si et seulement si r est bien polarisable (resp. $R^{\mathfrak{n}}$-admissible). De plus, on a

$G(g) = R(r)Z$ et il existe une injection canonique $\tau \mapsto \tau^{R^{\mathfrak{n}}}$ de $X_G(g)$ dans $X_{R^{\mathfrak{n}}}(r)$ qui est déterminée par

$$\delta^g \tau(x) = \delta^n(\tilde{x})(\delta^r \tau^{R^{\mathfrak{n}}})(\tilde{x}), \tag{20}$$

où $x \in R(r)$ et $\tilde{x} \in R(r)^{\mathfrak{n}}$ est situé au-dessus de x (voir [6], Chapitre III, numéro 20).

Soit ε l'élément non trivial du noyau de la projection naturelle de $R(r)^{\mathfrak{n}}$ sur $R(r)$, considéré comme un élément de $(R(r)^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{r}}$ (voir le numéro 4.1.2). On remarque alors que la formule 20 entraîne que l'on a

$$\tau^{R^{\mathfrak{n}}}(\varepsilon) = -\mathrm{Id}. \tag{21}$$

En particulier, l'image de $X_G(g)$ par l'application $\tau \mapsto \tau^{R^{\mathfrak{n}}}$ est le sous-ensemble de $X_{R^{\mathfrak{n}}}(r)$ constitué des éléments τ tels que $\tau(\varepsilon) = -\mathrm{Id}$.

Enfin, si g est bien polarisable, l'orbite Ω_g est fermée (voir les numéros 4.3.2 et 5.1.1).

5.2.4. M. Duflo associe à chaque élément (g, τ) de X_G, une représentation unitaire irréductible de G, notée $T_{G,g,\tau}$ ou plus simplement $T_{g,\tau}$ lorsque aucune confusion n'est possible.

D'après ce que nous avons vu dans le numéro 4.1.2, le centre de G possède un relèvement canonique dans $G(g)^{\mathfrak{g}}$. Si besoin est nous l'identifierons donc à un sous-groupe de ce dernier.

Si on reprend les notations des numéros 5.2.2 et 5.2.3, on a le résultat suivant :

Théorème 5.2.1. — *Soit G un groupe presque algébrique réel et $(g, \tau) \in X_G$.*

(i) *Les restrictions de $T_{g,\tau}$ et τ au centre de G sont multiples d'un même caractère.*

(ii) *Si (g', τ') est un autre élément de $X_G(g)$, les représentations $T_{g,\tau}$ et $T_{g',\tau'}$ sont équivalentes si et seulement si (g, τ) et (g', τ') sont situés dans la même G-orbite.*

(iii) *Si $a \in \mathrm{Aut}(G)$, on a*

$$T_{a.g,{}^a\tau} = {}^aT_{g,\tau}. \tag{22}$$

(iv) *Soit* $\mathfrak{b}$ *un élément* $G(g)$*-invariant de* $Cos(g)$ *et* B *le sous-groupe induisant correspondant. Alors, on a*

$$T_{G,g,\tau} = \mathrm{Ind}_B^G\, T_{B,b,\tau^B}. \tag{23}$$

(v) *On suppose que* G *et* g *sont comme dans le numéro* 5.2.3. *Alors, on a*

$$T_{G,g,\tau} = T_{R^n,r,\tau^{R^n}} \otimes S_n T_n. \tag{24}$$

L'assertion (i) du théorème et la formule 21 du numéro précédent montrent que le membre de droite de l'équation 24 est bien défini.

L'assertion (ii) implique que l'application $(g,\tau) \mapsto T_{g,\tau}$ induit une injection de $G\backslash X_G$ dans le dual unitaire $\hat{G}$ de G.

Les assertions (iv) et (v) permettent de ramener la construction des représentations $T_{G,g,\tau}$ au cas où G est un groupe réductif et même au cas où G est réductif et la forme linéaire g est telle que $G = G(g)G_0$.

Pour tout ceci voir [7].

5.2.5. Nous aurons à utiliser l'assertion (iv) du théorème 5.2.1 dans la situation particulière suivante : Comme dans le numéro 5.1.5, on se donne $\mathfrak{a} \subset {}^u\mathfrak{g}$ un idéal abélien et G-invariant. On note A le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, $a = g_{|\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(a)$, $h = g_{|\mathfrak{h}}$ et $H = G(a)$. Alors, on a vu que $\mathfrak{h}$ est un élément $G(g)$-invariant de $Cos(g)$ et que H est le sous-groupe induisant associé à $\mathfrak{h}$. Ainsi, l'élément τ^H de $X_H(h)$ est défini et l'on a

$$T_{g,\tau} = \mathrm{Ind}_H^G\, T_{H,h,\tau^H}. \tag{25}$$

Comme dans le numéro 5.1.8, on pose $\mathfrak{q} = \ker a$. On a vu que c'est un idéal H-invariant de $\mathfrak{h}$, que le sous-groupe analytique Q de H est invariant et que le groupe $G_1 = H/Q$ est un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{q}$, tandis que la forme linéaire h, qui est orthogonale à $\mathfrak{q}$, peut être vue comme une forme linéaire g_1 sur $\mathfrak{g}_1$. Comme Q opère trivialement dans $\mathfrak{h}$, il se relève de manière unique, comme expliqué plus haut, en un sous-groupe de $H(h)^{\mathfrak{h}}$ et la représentation τ^H passe au quotient en une représentation τ_1 de $G_1(g_1)^{\mathfrak{g}_1} = H(h)^{\mathfrak{h}}/Q$, élément de $X_{G_1}(g_1)$. Enfin, l'on a

$$T_{H,h,\tau^H} = T_{G_1,g_1,\tau_1} \circ p, \tag{26}$$

où p désigne la projection canonique de H sur G_1.

5.3. Construction d'opérateurs semi-invariants.

5.3.1. Soit G un groupe de Lie et T une représentation unitaire de G dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Soit χ un caractère de G et soit A un opérateur fermé dans $\mathcal{H}$, de domaine dense.

DÉFINITION 5.3.1. — *On dit que l'opérateur A est semi-invariant de poids χ pour la représentation T si, pour tout $x \in G$, on a : $T(x)A \subset \chi(x)AT(x)$.*

On sait que si T est irréductible, deux semi-invariants de même poids pour T sont proportionnels (voir [9]).

Soit T et T' deux représentations unitaires irréductibles et équivalentes d'espaces respectifs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$, et soit $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ un opérateur d'entrelacement. Alors l'application $A \mapsto I \circ A \circ I^{-1}$ induit une bijection canonique de l'ensemble des opérateurs à domaine dense dans $\mathcal{H}$ sur celui des opérateurs à domaine dense dans $\mathcal{H}'$, qui conserve la semi-invariance de poids donné. Ainsi, étant donné $T \in \hat{G}$, on pourra parler de l'ensemble des opérateurs semi-invariants de poids donné pour T.

Soit T une représentation unitaire de G, A un semi-invariant de poids χ pour T et $a \in \mathrm{Aut}(G)$. Alors A est un semi-invariant de poids ${}^a\chi$ pour la représentation ${}^aT$ de G.

5.3.2. Soit H un sous-groupe fermé de G. Soit T une représentation unitaire de H d'espace $\mathcal{H}$ et considérons la représentation $\mathrm{Ind}_H^G T$ de G. Supposons que le caractère χ soit trivial sur H, et soit ψ une fonction sur G semi-invariante de poids χ : $\psi(x^{-1}y) = \chi(x)\psi(y)$, $x, y \in G$. Alors, la formule suivante :

$$A^{\psi}_{H,T}(\varphi)(x) = \psi(x)\varphi(x) \tag{27}$$

où φ est un élément de l'espace de $\mathrm{Ind}_H^G T$, définit un opérateur fermé semi-invariant de poids χ pour $\mathrm{Ind}_H^G T$.

Soit $a \in \mathrm{Aut}(G)$. Alors les représentations ${}^a(\mathrm{Ind}_H^G T)$ et $\mathrm{Ind}_{a(H)}^G {}^aT$ sont canoniquement équivalentes et les opérateurs semi-invariants de poids ${}^a\chi$, $A^{\psi}_{H,T}$ et $A^{{}^a\psi}_{a(H),{}^aT}$ se correspondent à travers l'isomorphisme canonique. En particulier, si la représentation $\mathrm{Ind}_H^G T$ est irréductible, on peut écrire :

$$A^{\psi}_{H,T} = A^{{}^a\psi}_{a(H),{}^aT}. \tag{28}$$

5.3.3. On se donne $G = (G, j, \mathbf{G})$ un groupe presque algébrique réel d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $(g, \tau) \in X_G$ et χ un caractère semi-rationnel de G dont on suppose qu'il est trivial sur $G(g)$. On note K le noyau de χ, $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie, k la restriction de g à $\mathfrak{k}$ et on pose $K_1 = K(k)K_0$. On conserve ces notations jusqu'à la fin du paragraphe 5.3.

Compte tenu du lemme 5.1.2, $\mathfrak{k}$ est un élément $G(g)$-invariant de $Cos(g)$, K_1 est le sous-groupe induisant associé et, d'après le numéro 5.2.2, on a $K_1(k) = K(k)$. Nous noterons donc également τ^K la représentation τ^{K_1} de $K_1(k)^{\mathfrak{k}} = K(k)^{\mathfrak{k}}$ définie dans ce même numéro. Par ailleurs, K_1 est également le sous-groupe induisant de K associé à $\mathfrak{k} \in Cos(k)$. Il résulte alors du théorème 5.2.1 et du théorème d'induction par étages que l'on a $T_{K,k,\tau^K} = \mathrm{Ind}_{K_1}^K T_{K_1,k,\tau^K}$ et

$$T_{G,g,\tau} = \mathrm{Ind}_K^G T_{K,k,\tau^K}. \tag{29}$$

5.3.4. On reprend les notations du numéro précédent et on se donne ψ une fonction définie sur Ω_g, semi-invariante de poids χ. On note ψ_g la fonction semi-invariante de poids χ définie sur G par $\psi_g(x) = \psi(x.g)$. Compte tenu de la formule 29, on peut considérer l'opérateur semi-invariant de poids χ pour $T_{g,\tau}$, $A^{\psi_g}_{K,T_{K,k,\tau^K}}$ défini par l'équation 27. On note cet opérateur $A^{\psi}_{G,g,\tau}$ ou plus simplement $A^{\psi}_{g,\tau}$ lorsque aucune confusion n'est possible.

On vérifie à l'aide de la formule 28 que, pour $a \in \mathrm{Aut}(G)$, on a l'égalité d'opérateurs semi-invariants de poids ${}^a\chi$ pour la représentation ${}^a(T_{g,\tau})$:

$$A^{{}^a\psi}_{a.g,{}^a\tau} = A^{\psi}_{g,\tau}. \tag{30}$$

6. La formule du caractère au voisinage des éléments elliptiques.

Pour la suite de cette section, on se donne un groupe presque algébrique $(G, j, \mathbf{G})$ et on reprend les notations introduites dans le paragraphe 3.1.

6.1. Définition et propriétés de la fonction $\Phi^s_{G,g,\tau}$.

Dans ce paragraphe, on se donne un élément (g, τ) de X_G et un élément elliptique s de G. On considère l'orbite co-adjointe Ω_g de g et Ω^s_g, l'ensemble des points fixes de s dans Ω_g. On sait que Ω_g^s est une réunion finie de $G(s)$-orbites (voir par exemple [13] Lemme 63) ; ce dernier résultat reste d'ailleurs vrai si on suppose simplement s semi-simple.

Si H est un sous-groupe de G, on pose

$$G_{s,H} = \{x \in G / xsx^{-1} \in H\}.$$

6.1.1. On désigne simplement par μ_g le morphisme $\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)}$ de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ dans le groupe métaplectique de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(g)$ défini au numéro 4.1.2 et on considère la fonction Φ sur ce même groupe métaplectique définie au numéro 4.2.3.

On définit alors la fonction $\Phi^s_{G,g,\tau}$ (notée plus simplement $\Phi^s_{g,\tau}$ lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre) sur Ω_g^s comme suit :

$$\Phi^s_{G,g,\tau}(l) = \Phi(\mu_l(\tilde{s}))\,\mathrm{Tr}({}^x\tau(\tilde{s})),\ l \in \Omega_g^s, \tag{31}$$

où $x \in G$ est tel que $l = x.g$ et $\tilde{s}$ est un élément de $G(l)^{\mathfrak{g}}$ situé au-dessus de s (on vérifie facilement que le membre de droite de 31 ne dépend ni du choix de $x \in G$ tel que $l = x.g$, ni du choix de l'élément $\tilde{s}$ situé au-dessus de s).

Cette fonction a déjà été introduite dans [8] pour les groupes réductifs connexes, et dans [2] pour les groupes réductifs généraux. Elle est $G(s)$-invariante.

Lorsque s est central, on trouve la fonction constante égale à $\mathrm{Tr}\,\tau(s)$ sur Ω_g.

Enfin, on remarquera que l'on a

$$\Phi^s_{G,x.g,{}^x\tau} = \Phi^s_{G,g,\tau},\ x \in G. \tag{32}$$

6.1.2. Dans ce numéro, on se donne $\mathfrak{a} \subset {}^u\mathfrak{g}$, un idéal abélien et G-invariant et on reprend les notations du numéro 5.2.5.

Si H contient s, on note s_1 l'image de s dans G_1. On a alors $\Omega_h^s = \Omega_{g_1}^{s_1}$. Avec ces notations, on a le :

LEMME 6.1.1. — *On suppose que s est un élément de H. Alors, on a*

(i)

$$\Phi^{s_1}_{G_1,g_1,\tau_1} = \Phi^s_{H,h,\tau^H}. \tag{33}$$

(ii) *Soit $x \in G_{s,H}$ et soit $l \in \Omega_g^{xsx^{-1}}$ tels que $l_{|\mathfrak{h}}$ appartienne à Ω_h. On a*

$$\Phi^s_{G,g,\tau}(x^{-1}.l) = \det{}_{(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}(g))_{xsx^{-1}}}(1 - xsx^{-1})^{-1}\Phi^{xsx^{-1}}_{H,h,\tau^H}(l_{|\mathfrak{h}}). \tag{34}$$

Démonstration. — Le point (i) est évident. Montrons le point (ii). Par transport de structure, on a

$$\Phi^s_{G,g,\tau}(x^{-1}.l) = \Phi^{xsx^{-1}}_{G,x.g,{}^x\tau}(l).$$

Soit $\tilde{\mathfrak{l}}$ un sous-espace de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ contenant $\mathfrak{h}(l_{|\mathfrak{h}})$ et tel que $\mathfrak{l}_1 = \tilde{\mathfrak{l}}/\mathfrak{h}(l_{|\mathfrak{h}})_{\mathbb{C}}$ soit un lagrangien positif et xsx^{-1}-invariant de $\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(l_{|\mathfrak{h}})$. Alors, $\mathfrak{l} = \tilde{\mathfrak{l}}/\mathfrak{g}(l)_{\mathbb{C}}$ est un lagrangien positif et xsx^{-1}-invariant de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l)$. D'autre part, comme par hypothèse, $l_{|\mathfrak{h}} \in \Omega_h$ et comme $A.l = l + \mathfrak{h}^{\perp}$, il existe $y \in H$ tel que $l = y.g$. Les formules 7 et 31 montrent alors que le membre de gauche de l'équation 34 s'écrit :

$$\det{}_{\mathfrak{l}\cap(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(l))_{xsx^{-1}},\mathbb{C}}(1 - xsx^{-1})^{-1}\,\mathrm{Tr}(\delta^{l}\,{}^{y}\tau((xsx^{-1}))). \tag{35}$$

On montre de même que le membre de droite de 34 s'écrit :

$$\begin{aligned}\det{}_{(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}(g))_{xsx^{-1}}}&(1 - xsx^{-1})^{-1}\\ &\times \det{}_{\mathfrak{l}_1\cap(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}(l_{|\mathfrak{h}}))_{xsx^{-1}},\mathbb{C}}(1 - xsx^{-1})^{-1}\,\mathrm{Tr}(\delta^{l_{|\mathfrak{h}}}\,{}^{y}\tau^H((xsx^{-1}))).\end{aligned} \tag{36}$$

En tenant compte de la formule 19 donnant la relation existant entre ${}^{y}\tau$ et ${}^{y}\tau^H$ et du fait que $\mathfrak{h}(l_{|\mathfrak{h}}) = \mathfrak{g}(l) + \mathfrak{a}$, on voit facilement que les deux expressions 35 et 36 sont égales. □

6.1.3. Dans ce numéro, on se donne un caractère semi-rationnel χ de G trivial sur $G(g)$ et on reprend les notations du numéro 5.3.3. On a alors le résultat suivant :

LEMME 6.1.2. — *On suppose que s est un élément de K. Soit $x \in G_{s,K}$ et soit $l \in \Omega_g^{xsx^{-1}}$ tels que $l_{|\mathfrak{k}}$ appartienne à Ω_k. Alors, on a*

$$\Phi^s_{G,g,\tau}(x^{-1}.l) = \Phi^{xsx^{-1}}_{K,k,\tau^K}(l_{|\mathfrak{k}}). \tag{37}$$

Démonstration. — On peut supposer que $d\chi \neq 0$: dans le cas contraire, le résultat est trivial. Posons alors $s' = xsx^{-1}$ et soit $R_K \subset K$ (resp. $R \subset G$) un facteur réductif de K (resp. G) d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{r}_K$) et tel que $s' \in R_K \subset R$. Soit $X_0 \in \mathfrak{r}$ tel que $\mathbb{R}X_0$ soit un supplémentaire

R-invariant de $\mathfrak{r}_K$ dans $\mathfrak{r}$. Alors, on a vu au cours de la démonstration du lemme 5.1.2 que X_0 est centralisé par R et donc par s'. On a donc

$$\mathfrak{g}(s') = \mathfrak{k}(s') \oplus \mathbb{R}X_0 \tag{38}$$

$$\mathfrak{g}_{s'} = \mathfrak{k}_{s'}. \tag{39}$$

D'autre part, comme la forme bilinéaire alternée B_l induit une dualité $G(l)$-invariante entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{k}(l_{|\mathfrak{k}})/\mathfrak{g}(l)$, on voit que s' agit trivialement dans ce dernier espace.

Compte tenu de ces remarques, on montre alors facilement, en les explicitant, que les deux membres de la formule 37 sont égaux. □

6.1.4. Dans ce numéro, on suppose que le radical unipotent de G est un groupe de Heisenberg dont le centre est central dans G et que la restriction de g au centre de ${}^u\mathfrak{g}$ n'est pas nulle. On reprend les notations N, Z, $\mathfrak{n}$, n, Z_0, V, R, $\mathfrak{r}$, r, $R^{\mathfrak{n}} = R^V$, $\mu_{\mathfrak{n}} = \mu_V$, $\tau^{R^{\mathfrak{n}}}$,... des numéros 5.2.3, 4.3.2 et 4.3.1. On obtient alors facilement le résultat suivant :

LEMME 6.1.3. — *Soit $s \in R$ un élément elliptique et $l \in \Omega_g^s$ tel que $l_{|V} = 0$. Alors on a*

$$\Phi^s_{G,g,\tau}(l) = \Phi(\mu_{\mathfrak{n}}(\tilde{s}))\Phi^{\tilde{s}}_{R^{\mathfrak{n}},r,\tau^{R^{\mathfrak{n}}}}(l_{|\mathfrak{r}}), \tag{40}$$

où $\tilde{s}$ est un élément de $R^{\mathfrak{n}}$ situé au dessus de s.

6.2. La formule du caractère : énoncé du résultat.

6.2.1. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et s un élément semi-simple de G. On a vu que Ω_g^s qui est contenu dans $\mathfrak{g}(s)^*$, est une sous-variété localement fermée, réunion finie de $G(s)$-orbites co-adjointes. Si elle est non vide, elle supporte une mesure de Radon canonique, notée $d\beta_{\Omega_g^s}$, dont la restriction à chaque $G(s)$-orbite qu'elle contient est la mesure de Liouville de celle-ci. La mesure $d\beta_{\Omega_g^s}$ s'appelle alors la mesure de Liouville sur Ω_g^s.

Soit ψ une fonction continue positive sur Ω_g. Si $\Omega_g^s \neq \varnothing$, $\psi d\beta_{\Omega_g^s}$ peut être vue de manière naturelle comme une mesure borélienne sur $\mathfrak{g}(s)^*$. Si $\Omega_g^s = \varnothing$, on convient que $\psi d\beta_{\Omega_g^s}$ est la mesure borélienne nulle sur $\mathfrak{g}(s)^*$.

6.2.2. Soit $(g,\tau) \in X_G$, χ un caractère semi-rationnel de G dont la restriction à $G(g)$ est triviale, et ψ une fonction réelle positive semi-invariante de poids χ sur Ω_g. On considère l'opérateur $A^{\psi}_{g,\tau}$ semi-invariant de poids χ pour $T_{g,\tau}$ défini au numéro 5.3.4. Comme ψ est réelle, cet opérateur est self-adjoint.

Nous dirons que la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable, si pour toute mesure de Haar dx à gauche sur G et tout $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, l'opérateur $A^{\psi}_{g,\tau}T_{g,\tau}(\varphi dx)A^{\psi}_{g,\tau}$ est à trace. Si tel est le cas, l'application qui à φdx fait correspondre $A^{\psi}_{g,\tau}T_{g,\tau}(\varphi dx)A^{\psi}_{g,\tau}$ est linéaire continue de l'espace des densités $\mathcal{C}^\infty$ sur G, dans l'espace des opérateurs à trace de l'espace de $T_{g,\tau}$, comme il résulte du théorème du graphe fermé. On en déduit que la formule

$$\Theta_{G,g,\tau,\psi}(\varphi dx) = \mathrm{Tr}(A^{\psi}_{g,\tau}T_{g,\tau}(\varphi dx)A^{\psi}_{g,\tau})$$

définit une fonction généralisée χ^2-semi-invariante sur G (pour l'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs). Lorsque aucune confusion n'est possible, on note plus simplement $\Theta_{g,\tau,\psi}$ cette fonction généralisée.

Lorsque $\psi = 1$, dire que la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable revient à dire qu'elle est à trace, et dans ces conditions, la fonction généralisée $\Theta_{g,\tau,1} = \Theta_{g,\tau}$ est le caractère de $T_{g,\tau}$.

6.2.3. Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$. Soit $\nu_{\mathfrak{g},s}$ la fonction définie sur $G(s)$ par

$$\nu_{\mathfrak{g},s}(x) = \det\nolimits_{\mathfrak{g}_s}(1 - sx). \tag{41}$$

Si $X \in \mathfrak{g}(s)_{\epsilon'(s)}$, on a : $\nu_{\mathfrak{g},s}(\exp X) > 0$ et $\det_{\mathfrak{g}_s}(1 - (s\exp X)^{-1}) > 0$. On définit alors des fonctions $k_{\mathfrak{g},s}$ et $\delta_{\mathfrak{g},s}$ positives sur $\mathfrak{g}(s)$ et strictement positives et analytiques sur $\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$ en posant (cf les formules 3 et 4) :

$$k_{\mathfrak{g},s}(X) = j_{\mathfrak{g}(s)}(X)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\nu_{\mathfrak{g},s}(\exp X)}{\nu_{\mathfrak{g},s}(1)} \right|^{\frac{1}{2}} \tag{42}$$

$$\delta_{\mathfrak{g},s}(X) = \det\nolimits_{\mathfrak{g}_s}(1 - (s\exp X)^{-1})S_{\mathfrak{g}(s)}(X). \tag{43}$$

On reprend les notations du numéro précédent. Le résultat principal de cet article est le suivant :

THÉORÈME 6.2.1. — *Soit G un groupe presque algébrique réel, $(g,\tau) \in X_G$, χ un caractère semi-rationnel de G dont la restriction à $G(g)$ est triviale, et ψ une fonction réelle positive semi-invariante de poids χ sur Ω_g. On suppose que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(g)$ est nilpotente. Alors,*

(i) *les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) *la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable,*

(b) *la mesure* $\psi^2 d\beta_{\Omega_g}$ *est tempérée;*

(ii) *si les conditions équivalentes du (i) sont satisfaites et si* s *est un élément elliptique de* G *tel que la mesure* $\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}$ *soit également tempérée, alors la restriction* $\Theta^s_{g,\tau,\psi}$ *de la fonction généralisée* $\Theta_{g,\tau,\psi}$ *à* $\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$ *est donnée par*

$$\Theta^s_{g,\tau,\psi}(\varphi dY) = \int_{\Omega_g^s} \widehat{(k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\varphi dY)}_{\mathfrak{g}(s)} \Phi^s_{g,\tau}\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s},\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}), \tag{44}$$

où dY *est une mesure de Lebesgue sur* $\mathfrak{g}(s)$.

Remarque 6.2.1. — Soit g une forme linéaire telle que Ω_g soit fermée. Alors, si ψ est une fonction positive sur Ω_g semi-invariante de poids un caractère semi-rationnel, la mesure $\psi d\beta_{\Omega_g}$ ainsi que les mesures $\psi d\beta^s_{\Omega_g}$ pour $s \in G$ semi-simple sont tempérées (voir [4]). On voit alors que si de plus g est bien polarisable, admissible et telle que $\mathfrak{g}(g)$ soit nilpotente, pour toute donnée d'admissibilté τ en g, les assertions équivalentes du (i) théorème 6.2.1 sont satisfaites de même que, pour tout $s \in G_{\mathrm{ell}}$, l'hypothèse du (ii), et qu'enfin la formule 44 est vraie pour $\Theta^s_{g,\tau,\psi}$. Rappelons enfin que si g est en position générique, elle est bien polarisable (voir [1]), que $\mathfrak{g}(g)$ est nilpotente (en fait commutative, voir [11]) et que, si de plus G est unimodulaire, l'orbite Ω_g est fermée (voir [3]). Ainsi, lorsque G est unimodulaire, la formule du caractère 44 s'applique aux représentations $T_{g,\tau}$ lorsque g est en position générique.

Les sections 7 et 8 de ce travail sont consacrées à la démonstration du théorème 6.2.1.

7. Réduction au cas où χ est trivial.

Dans cette section, on suppose que le résultat est démontré lorsque χ est le caractère trivial et on en déduit que le théorème est vrai en toute généralité. On suppose donc que le caractère χ n'est pas trivial, i.e. $d\chi \neq 0$ et on reprend les notations du numéro 5.3.3, avec lesquelles on a

$$T_{g,\tau} = \mathrm{Ind}_K^G T_{K,k,\tau^K}.$$

D'après [17] Lemme 3, $\mathfrak{k}(k)$ est une algèbre de Lie nilpotente. Nous pouvons donc appliquer notre hypothèse au groupe K et à la représentation T_{K,k,τ^K}.

On choisit une mesure de Haar à gauche $d_G x$ (resp. $d_K x$) sur G (resp. K), on note $d_{\mathfrak{g}}X$ (resp. $d_{\mathfrak{k}}X$) la mesure de Lebesgue tangente sur $\mathfrak{g}$ (resp.

$\mathfrak{k}$) et on réalise la représentation induite $T_{g,\tau} = \mathrm{Ind}_K^G T_{K,k,\tau^K}$ en utilisant la mesure invariante $d\dot{x}$ sur G/K, quotient de $d_G x$ par $d_K x$ (voir le numéro 2.15).

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$. Alors, il n'est pas difficile de voir que $A^{\psi}_{g,\tau} T_{g,\tau}(\alpha d_G x) A^{\psi}_{g,\tau}$ est un opérateur à noyau continu $K_\alpha(x,y)$ donné par

(45)

$$K_\alpha(x,y) = \psi(g)^2 \chi(xy)^{-1} |\det_{\mathfrak{g}} x| \int_K \alpha(xzy^{-1}) T_{K,k,\tau^K}(z) d_K z,\ x,y \in G.$$

7.1. Démonstration de l'assertion (i) du théorème.

7.1.1. Dans ce numéro on suppose que la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g}$ est tempérée. Désignons par r l'application de restriction de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{k}^*$. Comme ψ est manifestement constante sur $r^{-1}(\Omega_k) = K.g$, il résulte de la formule 17, appliquée avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}$, $B = K$ et $b = k$, que la mesure $d\beta_{\Omega_k}$ est tempérée.

Maintenant supposons que $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(1, \frac{\pi}{2}))$. Remarquons que, comme χ est à valeurs réelles, pour $X \in \mathfrak{g}$, on a $\chi(\exp X) = 1$, si et seulement si $X \in \mathfrak{k}$. Il s'ensuit que l'on a $\mathcal{W}(1, \frac{\pi}{2}) \cap K = \mathcal{W}_K(1, \frac{\pi}{2})$. Compte tenu de notre hypothèse, on voit alors que, pour tout $x \in G$, l'opérateur $K_\alpha(x,x)$ est à trace et que sa trace est donnée par

$$\mathrm{Tr}(K_\alpha(x,x)) = \psi(g)^2 \chi(x)^{-2} |\det_{\mathfrak{g}} x| \int_{\Omega_k} ((\alpha^x)_{|K} \circ \exp k_{\mathfrak{k},1}^{-1} S_{\mathfrak{k}} d_{\mathfrak{k}} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{k}}\, d\beta_{\Omega_k}.$$

Cependant, comme on a $k_{\mathfrak{k},1} = (k_{\mathfrak{g},1})_{|\mathfrak{k}}$ et $S_{\mathfrak{k}} = (S_{\mathfrak{g}})_{|\mathfrak{k}}$, et compte tenu de la formule 2 il vient

$$\begin{aligned}(46)\qquad & \mathrm{Tr}(K_\alpha(x,x)) \\ &= \psi(g)^2 \chi(x)^{-2} |\det_{\mathfrak{g}} x| \int_{\Omega_k} \int_{\mathfrak{k}^\perp} (\alpha^x \circ \exp k_{\mathfrak{g},1}^{-1} S_{\mathfrak{g}} d_{\mathfrak{g}} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}}(l_1 + \lambda) d\lambda d\beta_{\Omega_k}(l) \\ &= \int_{\Omega_k} \int_{\mathfrak{k}^\perp} (\alpha \circ \exp k_{\mathfrak{g},1}^{-1} S_{\mathfrak{g}} d_{\mathfrak{g}} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}}(x.(l_1+\lambda)) \psi(x.(l_1+\lambda))^2 d\lambda d\beta_{\Omega_k}(l),\end{aligned}$$

où $d\lambda$ est la mesure sur $\mathfrak{k}^\perp$ duale de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ tangente à la mesure invariante $d\dot{x}$ sur G/K considérée plus haut et l_1 désigne un élément de $\mathfrak{g}^*$ dont la restriction à $\mathfrak{k}$ est l.

Compte tenu de la formule 17, toujours appliquée avec $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}$, $B = K$ et $b = k$, on voit alors que, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(1, \frac{\pi}{2}))$, on a

$$\int_{G/K} \mathrm{Tr}\, K_\alpha(x,x) d\dot{x} = \int_{\Omega_g} (\alpha \circ \exp k_{\mathfrak{g},1}^{-1} S_{\mathfrak{g}} d_{\mathfrak{g}} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}}\, d\beta_{\Omega_g},$$

les deux intégrales étant absolument convergentes.

D'autre part, l'opérateur $A^{\psi}_{g,\tau}T_{g,\tau}(\alpha d_G x)A^{\psi}_{g,\tau}$ est positif dès que l'opérateur $T_{g,\tau}(\alpha d_G x)$ l'est. Il n'est alors pas difficile de voir que les arguments désormais classiques développés dans [15] permettent de conclure que la représentation $T_{G,\tau}$ est ψ-traçable.

7.1.2. Dans ce numéro, on suppose qu'inversement la représentation est ψ-traçable. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$. Il résulte du théorème de Mercer que, pour presque tout $x \in G$, l'opérateur $K_\alpha(x,x)$ est à trace et que l'intégrale $\int_{G/K} \operatorname{Tr} K_\alpha(x,x)d\dot{x}$ est absolument convergente. En particulier, la représentation T_{K,k,τ^K} est traçable. Par suite, compte tenu de notre hypothèse, la mesure $d\beta_{\Omega_k}$ est tempérée et la formule du caractère au voisinage de l'élément neutre s'applique. Ainsi compte tenu de la formule 46, si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(1, \frac{\pi}{2}))$, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\operatorname{Tr}(A^{\psi}_{g,\tau}T_{g,\tau}(\alpha d_G x)A^{\psi}_{g,\tau})\\ &= \int_{G/K}\left\{\int_{\Omega_k}\int_{\mathfrak{k}^\perp}(\alpha \circ \exp k_{\mathfrak{g},1}^{-1}S_{\mathfrak{g}}d_{\mathfrak{g}}X)\widehat{}_{\mathfrak{g}}(x.(l_1+\lambda))\psi(x.(l_1\lambda))^2 d\lambda d\beta_{\Omega_k}(l)\right\}d\dot{x},\end{aligned}$$

les intégrales étant successivement absolument convergentes. Comme la fonction $k_{\mathfrak{g},1}^{-1}S_{\mathfrak{g}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et strictement positive sur $\mathfrak{g}_{\frac{\pi}{2}}$, on déduit de ceci que, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}_{\frac{\pi}{2}})$, dans l'expression suivante :

$$\int_{G/K}\left\{\int_{\Omega_k}\int_{\mathfrak{k}^\perp}(\alpha d_{\mathfrak{g}}X)\widehat{}_{\mathfrak{g}}(x.(l_1+\lambda))\psi(x.(l_1+\lambda))^2 d\lambda d\beta_{\Omega_k}(l)\right\}d\dot{x},$$

les intégrales sont successivement absolument convergentes. Maintenant soit $\mathcal{V}$ un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $\mathcal{V}-\mathcal{V}$ soit contenu dans $\mathfrak{g}_{\frac{\pi}{2}}$ et soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{V})$. Appliquant ce que nous venons de dire à la fonction $\alpha \star \alpha^*$ et utilisant la formule d'intégration 17, toujours appliquée sous les mêmes conditions, on en déduit que l'intégrale $\int_{\Omega_g}(\alpha\star\alpha^*)\widehat{}_{\mathfrak{g}}\,\psi^2 d\beta_{\Omega_g}$ est convergente. Il résulte alors du lemme 2.7.1 que la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g}$ est tempérée.

Ceci achève de ramener la démonstration du (i) du théorème au cas où le caractère χ est trivial.

7.2. Démonstration de l'assertion (ii) du théorème.

Dans ce numéro, on suppose à nouveau que la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g}$ est tempérée et on se donne $s \in G_{\mathrm{ell}}$ tel que la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}$ est tempérée. Nous voulons démontrer que si l'assertion (ii) du théorème est vraie lorsque χ est trivial, alors elle est vraie en toute généralité.

Compte tenu des numéros précédents, on sait que la représentation $T_{g,\tau}$ est ψ-traçable. Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$. D'après la formule 45 et le théorème de Mercer, on a alors

$$(47) \quad \Theta_{g,\tau,\psi}(\alpha d_G x) = \int_{G/K} \psi(g)^2 \chi(x)^{-2} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Theta_{K,k,\tau^K}((\alpha^x)_{|K} d_K y) d\dot{x}.$$

7.2.1. Comme χ est à valeurs positives, il est clair que $s \in K$. Par ailleurs il existe $X_0 \in \mathfrak{g}(s)$ tel que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}X_0$ (voir la démonstration du lemme 6.1.2). On en déduit que $G = KG(s)$, $G.s \cap K = K.s$, $\epsilon(s) = \epsilon_K(s)$ et $\mathcal{W}(s, \epsilon(s)) \cap K = \mathcal{W}_K(s, \epsilon(s))$.

Soit r (resp. r_s) l'application de restriction de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{k}^*$ (resp. $\mathfrak{g}(s)^*$ sur $\mathfrak{k}(s)^*$). On a $r_s = r_{|\mathfrak{g}(s)^*}$. Si ω est une $K(s)$-orbite contenue dans Ω_k^s, on pose $[\omega] = G(s).r^{-1}(\omega)$. Alors, on a le résultat suivant :

LEMME 7.2.1. — (i) *Si ω est une $K(s)$-orbite contenue dans Ω_k^s alors $r^{-1}(\omega)$ est une $K(s)$-orbite dans $\mathfrak{g}(s)^*$.*

(ii) *L'application $\omega \mapsto [\omega]$ est une bijection entre les ensembles finis d'orbites $K(s)\backslash\Omega_k^s$ et $G(s)\backslash\Omega_g^s$.*

Démonstration. — (i) Soit $X_0 \in \mathfrak{g}(s)$ tel que $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{k}(s) \oplus \mathbb{R}X_0$. Comme on a alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}X_0$, on voit que, pour tout $l \in \mathfrak{k}(s)^*$, $r^{-1}(l) = r_s^{-1}(l) \subset \mathfrak{g}(s)^*$. On a donc $r^{-1}(\omega) = r_s^{-1}(\omega) \subset \mathfrak{g}(s)^*$

Maintenant soit $l \in \omega$ et $l_1 \in r_s^{-1}(l)$. On a vu au cours des démonstrations des lemmes 5.1.2 et 6.1.2 que $K(l) = G(l_1)^u(K(l))$, $\dim K(l) = 1 + \dim G(l_1)$, $K(l)_0.l_1 = r^{-1}(l)$ et que s agit trivialement dans $\mathfrak{k}(l)/\mathfrak{g}(l_1)$. Soit donc $Y_0 \in {}^u(\mathfrak{k}(l))$ fixé par s et tel que $\mathbb{R}Y_0$ soit un supplémentaire de $\mathfrak{g}(l_1)$ dans $\mathfrak{k}(l)$. De plus, ${}^u(\mathfrak{k}(l)) \cap \mathfrak{g}(l_1)$ est une sous-algèbre de Lie de codimension 1 de l'algèbre de Lie unipotente ${}^u(\mathfrak{k}(l))$, donc un idéal. On a alors $K(l)_0 = \exp \mathbb{R}Y_0 G(l_1)_0$ et par suite $\exp \mathbb{R}Y_0.l_1 = r^{-1}(l)$, d'où la première assertion du lemme.

(ii) Soit $x \in G$ tel que $x.g \in \Omega_g^s$. Comme on a $G = \exp \mathbb{R}X_0 K$, on peut écrire $x = \exp tX_0 y$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $y \in K$. Mais alors, le fait que X_0 et $x.g$ sont s-invariants implique que $y.g$ et $y.k$ le sont aussi. Ceci montre que $\Omega_g^s = G(s).r^{-1}(\Omega_k^s)$ et donc que $\Omega_g^s = \cup_{\omega \in K(s)\backslash\Omega_k^s} [\omega]$. Il nous reste donc à voir que les $[\omega]$ sont deux à deux disjoints.

Soient donc ω et ω' dans $K(s)\backslash\Omega_k^s$ tels que $[\omega] = [\omega']$. Comme $G(s) = \exp \mathbb{R}X_0 K(s)$, on voit qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ $l \in r^{-1}(\omega)$ et $l' \in r^{-1}(\omega')$ tels que $l' = \exp tX_0.l$. Mais alors, on a $\psi(l') = \chi(\exp -tX_0)\psi(l)$. Comme

$r^{-1}(\omega)$ et $r^{-1}(\omega')$ sont tous deux contenus dans $r^{-1}(\Omega_k)$ qui n'est autre que la K-orbite de g, on a $\psi(l') = \psi(l)$. Il s'ensuit que $t = 0$. D'où le lemme. $\square$

7.2.2. Comme, avec les notations du lemme 6.1.2, la formule 17 s'applique aux orbites ω et $[\omega]$ dans $\mathfrak{k}(s)^*$ et $\mathfrak{g}(s)^*$, on voit que la mesure $\psi^2 d\beta_{\Omega_k^s}$ est tempérée.

Maintenant soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s, \epsilon(s)))$. Supposant que le théorème est vrai pour K et la représentation T_{K,k,τ^K}, compte tenu de ce qui précède, de la formule 47, et de la proposition 3.2.3, on peut écrire

$$(48)\quad \Theta_{g,\tau,\psi}(\alpha d_G x) = \int_{G/K} \psi(g)^2 \chi(x)^{-2} |\det{}_{\mathfrak{g}} x| \left\{ \int_{K/K(s)} |\det{}_{\mathfrak{k}} y| \right.$$
$$\left. \times \left\{ \int_{\Omega_k^s} \widehat{((\alpha^{xy})_{|K}(s \exp .) k_{\mathfrak{k},s}^{-1} \delta_{\mathfrak{k},s} d_{\mathfrak{k}(s)} Z)}_{\mathfrak{k}(s)} \Phi_{K,k,\tau^K}^s d\beta_{\Omega_k^s} \right\} d\dot{y} \right\} d\dot{x},$$

où $d\dot{y}$ est la mesure invariante sur $K/K(s)$ quotient de $d_K x$ par la mesure de Haar à gauche sur $K(s)$ tangente à la mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{k}(s)}$ et où les intégrales sont successivement convergentes.

Cependant, comme $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{k}_s$ (voir la formule 39), on a $k_{\mathfrak{k},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{k},s} = (k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s})_{|\mathfrak{k}(s)}$. Désignant par $\mathfrak{k}(s)^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}(s)$ dans $\mathfrak{g}(s)^*$, par $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)$ et par $d\lambda$ la mesure sur $\mathfrak{k}(s)^{\perp}$ duale de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{k}(s)$ quotient de $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ par $d_{\mathfrak{k}(s)}X$, et compte tenu de la formule 2, on peut réécrire comme suit la formule 48 :

$$\Theta_{g,\tau,\psi}(\alpha d_G x) = \int_{G/K} \psi(g)^2 \chi(x)^{-2} |\det{}_{\mathfrak{g}} x| \left\{ \int_{K/K(s)} |\det{}_{\mathfrak{k}} y| \right.$$
$$\times \left\{ \int_{\Omega_k^s} \left\{ \int_{\mathfrak{k}(s)^{\perp}} \widehat{(\alpha^{xy}(s \exp .) k_{\mathfrak{g},s}^{-1} \delta_{\mathfrak{g},s} d_{\mathfrak{g}(s)} Z)}_{\mathfrak{g}(s)} (l_1 + \lambda) d\lambda \right\} \right.$$
$$\left. \left. \times \Phi_{K,k,\tau^K}^s d\beta_{\Omega_k^s}(l) \right\} d\dot{y} \right\} d\dot{x},$$

où l_1 désigne un élément de $\mathfrak{g}(s)^*$ dont la restriction à $\mathfrak{k}(s)$ est l et où les intégrales sont successivement convergentes.

Comme la fonction Φ_{K,k,τ^K}^s (resp. $\Phi_{G,g,\tau}^s$) est constante sur les $K(s)$-orbites (resp. $G(s)$-orbites), les nombres $\Phi_{K,k,\tau^K}^s(\omega)$, $\omega \in K(s)\backslash\Omega_k^s$ (resp. $\Phi_{G,g,\tau}^s(\omega)$, $\omega \in G(s)\backslash\Omega_g^s$) sont bien définis. Alors, compte tenu du lemme 6.1.2, on a

$$\Phi_{K,k,\tau^K}^s(\omega) = \Phi_{G,g,\tau}^s([\omega]),\ \omega \in K(s)\backslash\Omega_k^s.$$

Modulo la convergence absolue d'intégrales qui sera justifiée ultérieurement, on peut donc réécrire la formule 49 sous la forme

$$\Theta_{g,\tau,\psi}(\alpha d_G x) = \sum_{\omega \in K(s)\backslash \Omega_k^s} \Phi^s_{G,g,\tau}([\omega]) I_\omega(\kappa \alpha d_G x), \tag{50}$$

où κ est l'unique fonction $\mathcal{C}^\infty$ et G-invariante sur $\mathcal{W}(s, \epsilon(s))$ dont la restriction à $\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$ est $k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}$ et où on a posé, pour $\omega \in K(s)\backslash\Omega_k^s$,

$$\begin{aligned} I_\omega(\alpha d_G x) = \int_{G/K} & \psi(g)^2 \chi(x)^{-2} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x| \left\{ \int_{K/K(s)} |\det\nolimits_{\mathfrak{k}} y| \right. \\ & \left. \times \left\{ \int_\omega \left\{ \int_{\mathfrak{k}(s)^\perp} (\alpha^{xy}(s \exp .) d_{\mathfrak{g}(s)} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)} (l_1 + \lambda) d\lambda \right\} d\beta_\omega(l) \right\} d\dot{y} \right\} d\dot{x}. \end{aligned} \tag{51}$$

Soit $\omega \in K(s)\backslash\Omega_k^s$. On peut écrire, modulo la convergence absolue des intégrales,

$$\begin{aligned} I_\omega(\alpha d_G x) &= \int_{G/K(s)} \psi(g)^2 \chi(x)^{-2} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x| \\ &\quad \times \left\{ \int_\omega \left\{ \int_{\mathfrak{k}(s)^\perp} (\alpha^{x}(s \exp .) d_{\mathfrak{g}(s)} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)} (l_1 + \lambda) d\lambda \right\} d\beta_\omega(l) \right\} d\dot{x} \\ &= \int_{G/G(s)} \chi(x)^{-2} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x| \left\{ \int_{G(s)/K(s)} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}(s)} y| \psi(g)^2 \chi(y)^{-2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \int_\omega \left\{ \int_{\mathfrak{k}(s)^\perp} (\alpha^{xy}(s \exp .) d_{\mathfrak{g}(s)} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)} (l_1 + \lambda) d\lambda \right\} d\beta_\omega(l) \right\} d\dot{y} \right\} d\dot{x} \\ &= \int_{G/G(s)} \chi(x)^{-2} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x| \left\{ \int_{G(s)/K(s)} \psi(g)^2 \chi(y)^{-2} \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \int_\omega \left\{ \int_{\mathfrak{k}(s)^\perp} (\alpha^{x}(s \exp .) d_{\mathfrak{g}(s)} Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)} (y.(l_1 + \lambda)) d\lambda \right\} d\beta_\omega(l) \right\} d\dot{y} \right\} d\dot{x}, \end{aligned}$$

la mesure invariante $d\dot{x}$ sur $G/G(s)$ étant la mesure quotient de $d_G x$ par la mesure de Haar à gauche sur $G(s)$ tangente à $d_{\mathfrak{g}} Z$.

Remarquant que la formule 17 s'applique aux orbites ω et $[\omega]$ dans $\mathfrak{k}(s)^*$ et $\mathfrak{g}(s)^*$, on obtient, toujours modulo la convergence absolue des intégrales,

$$(52)\quad I_\omega(\alpha d_G x) = \int_{G/G(s)} \chi(x)^{-2}|\det_{\mathfrak{g}} x| \times \left\{ \int_{[\omega]} (\alpha^x(s\exp .)d_{\mathfrak{g}(s)}Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)}(l)\psi(l)^2 d\beta_{[\omega]}(l) \right\} d\dot{x}.$$

Comme la mesure $\psi^2 d\beta_{[\omega]}$ est tempérée, il n'est pas difficile de voir que, si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$, la fonction

$$I_{\omega,\alpha}(x) = \int_{[\omega]} |(\alpha^x(s\exp .)d_{\mathfrak{g}(s)}Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)}(l)|\psi(l)^2 d\beta_{[\omega]}(l),$$

est un élément de $\mathcal{C}_c(G;G(s))$. Il s'ensuit que, dans la formule 52 l'intégrale double est absolument convergente. On peut donc refaire à l'envers les calculs ayant mené dans ce qui précède de la formule 51 à la formule 52, pour justifier la convergence absolue de l'intégrale apparaissant dans la formule 51. Reportant ceci dans l'équation 50 et tenant compte du lemme 7.2.1, on obtient :

$$\begin{aligned}(53)\quad \Theta_{g,\tau,\psi}(\alpha d_G x) &= \sum_{\omega\in K(s)\backslash\Omega_k^s} \Phi^s_{G,g,\tau}([\omega])\Big\{ \int_{G/G(s)} \chi(x)^{-2}|\det_{\mathfrak{g}} x| \\ &\quad \times\Big\{ \int_{[\omega]} ((\kappa\alpha)^x(s\exp .)d_{\mathfrak{g}(s)}Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)}(l)\psi(l)^2 d\beta_{[\omega]}(l)\Big\} d\dot{x}\Big\} \\ &= \int_{G/G(s)} \chi(x)^{-2}|\det_{\mathfrak{g}} x| \\ &\quad \times\Big\{ \int_{\Omega_g^s} ((k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}\alpha^x)(s\exp .)d_{\mathfrak{g}(s)}Z)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)}\Phi^s_{G,g,\tau}\psi^2 d\beta_{\Omega_g^s}\Big\} d\dot{x}.\end{aligned}$$

D'où la formule cherchée pour $\Theta^s_{g,\tau,\psi}$, compte tenu de la formule 6 de la proposition 3.2.3.

8. Démonstration du théorème lorsque le caractère χ est trivial.

Dans cette partie, on démontre le théorème lorsque χ est le caractère trivial et la fonction ψ est constante égale à 1. Tout d'abord, l'assertion (i) a été démontrée par Khalgui dans [17].

Pour démontrer l'assertion (ii), on raisonne par récurrence sur la dimension de G. Ce faisant nous devons examiner deux cas de réduction.

8.1. Démonstration de l'assertion (ii) du théorème : premier cas de réduction.

Dans ce paragraphe, on suppose soit que G est réductif, soit que le radical unipotent de G est un groupe de Heisenberg dont le centre est central dans G et que la restriction de g au centre de ${}^u\mathfrak{g}$ n'est pas nulle. Le cas où G est réductif ayant été traité par Bouaziz (voir [2]) on se place, jusqu'à la fin de ce paragraphe, dans l'autre cas et on reprend les notations du numéro 6.1.4. Avec ces notations, grâce au théorème 5.2.1 formule 24, on a $T_{G,g,\tau} = T_1 \otimes S_n T_n$, où pour simplifier les notations on a posé $T_1 = T_{R^{\mathfrak{n}},r,\tau^{R^{\mathfrak{n}}}}$.

Compte tenu des hypothèses, l'orbite de g est fermée (voir le numéro 5.2.3). Or il est bien connu que toute orbite co-adjointe fermée d'un groupe presque algébrique est tempérée (voir [4]). On voit donc que la mesure $d\beta_{\Omega_g^s}$ est tempérée, si bien que les hypothèses de l'assertion (ii) du théorème sont automatiquement satisfaites. Il nous reste à calculer $\Theta_{g,\tau}^s$.

On peut supposer que s est un élément de R de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(s) &= \mathfrak{r}(s) \oplus \mathfrak{n}(s) \\ \mathfrak{n}(s) &= V^s \oplus \mathfrak{z} \\ G(s) &= R(s)N(s). \end{aligned}$$

On choisit une mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{r}}X$ (resp. $d_{\mathfrak{r}(s)}X$, $d_{V^s}v$, $d_{V_s}w$) sur chacun des espaces $\mathfrak{r}$ (resp. $\mathfrak{r}(s)$, V^s, V_s). On identifie $\mathfrak{z}$ avec $\mathbb{R}$ au moyen de l'application $t \mapsto tZ_0$ et on munit $\mathfrak{z}$ de la mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{z}}Z$ image, par cette application, de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On désigne par $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)$ produit des mesures $d_{\mathfrak{r}(s)}X$, $d_{V^s}v$ et $d_{\mathfrak{z}}Z$ et par $d_{\mathfrak{g}}X$ la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$ produit des mesures $d_{\mathfrak{r}}X$, $d_{V_s}w$, $d_{V^s}v$ et $d_{\mathfrak{z}}Z$. Enfin, on désigne par d_Gx (resp. d_Rx, $d_{G(s)}x$ et $d_{R(s)}x$) la mesure de Haar sur G (resp. R, $G(s)$ et $R(s)$) tangente à la mesure de Lebesgue $d_{\mathfrak{g}}X$ (resp. $d_{\mathfrak{r}}X$, $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ et $d_{\mathfrak{r}(s)}X$) et par $d_{G/G(s)}\dot{x}$ (resp. $d_{R/R(s)}\dot{x}$) la mesure quotient correspondante sur $G/G(s)$ (resp. $R/R(s)$).

Soit $\gamma : G \times \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)} \to \mathcal{W}(s, \epsilon(s))$ la submersion définie par $\gamma(x, X) = xs \exp X x^{-1}$ et désignons par γ' l'application de $R \times V_s \times \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$ dans $\mathcal{W}(s, \epsilon(s))$ définie par $\gamma'(x, X, Y) = \gamma(x \exp X, Y)$, $(x, X, Y) \in R \times V_s \times \mathfrak{g}(s)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)})$. Alors γ' est également une submersion sur $\mathcal{W}(s,\epsilon(s))$, et on a le lemme suivant.

LEMME 8.1.1. — *Soit Θ une fonction généralisée G-invariante sur $\mathcal{W}(s,\epsilon(s))$. Alors, si $\alpha \in \mathcal{D}(R \times V_s)$ est telle que $\int_{R\times V_s} \alpha d_R x d_{V_s} w = 1$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)})$, on a*

$$\Theta^s(\varphi d_{\mathfrak{g}(s)} Y) = \Theta(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)} Y)). \tag{54}$$

Démonstration. — Soit $\beta \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$ telle que $\beta d_G x = \gamma'_*$ $(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)} Y)$. Par définition de l'image directe d'une densité par une submersion, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$, on a :

$$\begin{aligned}(55)\ &\int_{\mathcal{W}(s,\epsilon(s))} \psi(x)\beta(x) d_G x\\ &= \int_{R\times V_s\times \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}} \psi(x \exp ws \exp Y \exp(-w) x^{-1})\\ &\qquad \times \alpha(x,w)\varphi(Y) d_R x d_{V_s} w d_{\mathfrak{g}(s)} Y\\ &= \int_{R/R(s)\times V_s\times \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}} \psi(x \exp ws \exp Y \exp(-w) x^{-1})\\ &\qquad \times \left\{ \int_{R(s)} \alpha(xy, y^{-1}.w)\varphi(\mathrm{Ad}\, y^{-1}.Y) d_{R(s)} y \right\} d_{V_s} w d_{\mathfrak{g}(s)} Y d_{R/R(s)} \dot{x}.\end{aligned}$$

On déduit de ce que l'application γ induit un difféomorphisme de $G \times_{G(s)} \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}$ sur $\mathcal{W}(s,\epsilon(s))$, que l'application γ' en induit également un de $R \times_{R(s)} (V_s \times \mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)})$ sur $\mathcal{W}(s,\epsilon(s))$. Il en résulte qu'il existe une fonction $\tilde{\beta} \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$ telle que l'on ait

$$\begin{aligned}&\tilde{\beta}(x \exp ws \exp Y \exp(-w) x^{-1})\\ &\qquad = \delta_{\mathfrak{g},s}(Y)^{-1} \int_{R(s)} \alpha(xy, y^{-1}.w)\varphi(\mathrm{Ad}\, y^{-1}.Y) d_{R(s)} y.\end{aligned}$$

Par suite, la formule 55 s'écrit

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{W}(s,\epsilon(s))} \psi(x)\beta(x) d_G x\\ &\qquad = \int_{G/G(s)} \left\{ \int_{\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}} (\psi\tilde{\beta})(xs \exp Y x^{-1}) \delta_{\mathfrak{g},s}(Y) d_{\mathfrak{g}(s)} Y \right\} d_{G/G(s)} \dot{x}.\end{aligned}$$

Appliquant la proposition 3.2.3 à la fonction généralisée constante égale à 1 et à la fonction $\psi\tilde{\beta} \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$, on voit que l'on a, pour tout

$\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$,

$$\int_{\mathcal{W}(s,\epsilon(s))} \psi(x)\beta(x)d_Gx = \int_{\mathcal{W}(s,\epsilon(s))} \psi(x)\tilde{\beta}(x)d_Gx,$$

d'où l'on déduit que $\beta = \tilde{\beta}$.

Mais alors, utilisant encore la proposition 3.2.3, et tenant compte de ce que la distribution Θ^s est $G(s)$-invariante et de ce que $\int_{R\times V_s} \alpha d_Rxd_{V_s}w = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\Theta(\beta d_G x) &= \int_{R/R(s)\times V_s} \left\{ \int_{\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}} \Theta^s(Y)\tilde{\beta}(x \exp ws \exp Y \exp(-w)x^{-1}) \right. \\
&\qquad \left. \times\, \delta_{\mathfrak{g},s}(Y) d_{\mathfrak{g}(s)}Y \right\} d_{V_s}w d_{R/R(s)}\dot{x} \\
&= \int_{R/R(s)\times V_s} \left\{ \int_{\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}} \Theta^s(Y) \left\{ \int_{R(s)} \alpha(xy, y^{-1}.w) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. \times\, \varphi(\mathrm{Ad}y^{-1}.Y) d_{R(s)}y \right\} d_{\mathfrak{g}(s)}Y \right\} d_{V_s}w d_{R/R(s)}\dot{x} \\
&= \int_{R/R(s)\times V_s} \left\{ \int_{R(s)} \left\{ \int_{\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}} \Theta^s(Y)\varphi(\mathrm{Ad}y^{-1}.Y) d_{\mathfrak{g}(s)}Y \right\} \right. \\
&\qquad \left. \times\, \alpha(xy, y^{-1}.w) d_{R(s)}y \right\} d_{V_s}w d_{R/R(s)}\dot{x} \\
&= \int_{R\times V_s} \alpha(x,w) d_R x d_{V_s} w \times \int_{\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}} \Theta^s(Y)\varphi(Y) d_{\mathfrak{g}(s)}Y \\
&= \Theta^s(\varphi d_{\mathfrak{g}(s)}Y).
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme. □

Soit donc $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)})$ et soit $\alpha \in \mathcal{D}(R\times V_s)$ comme dans le lemme. Il vient donc :

$$\Theta^s_{G,g,\tau}(\varphi d_{\mathfrak{g}(s)}Y) = \Theta_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)}Y)). \tag{56}$$

Nous devons donc dans un premier temps calculer l'opérateur à trace $T_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)}Y))$. On peut supposer que α s'écrit $\alpha(x,v) = \alpha_1(x)\alpha_2(w)$ avec $\alpha_1 \in \mathcal{D}(R)$ et $\alpha_2 \in \mathcal{D}(V_s)$ telles que

$$\int_R \alpha_1(x) d_R x = \int_{V_s} \alpha_2(w) d_{V_s} w = 1.$$

Alors, compte tenu de la proposition 3.2.1, on a

$$T_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)} Y))$$
$$= \int_{R\times V_s\times \mathfrak{r}(s)_{\epsilon(s)}\times V^s\times\mathbb{R}} T_{G,g,\tau}(x \exp ws \exp(X+v+tZ_0)\exp(-w)x^{-1})$$
$$\times \alpha_1(x)\alpha_2(w)\varphi(X+v+tZ_0) d_R x d_{V_s} w d_{\mathfrak{r}(s)} X d_{V^s} v dt.$$

Cependant, on a

$$\exp ws \exp(X+v+tZ_0)\exp -w$$
$$= s\exp\left(X+v+\left(t-\frac{1}{2}B\left((s\exp X)^{-1}w,w\right)\right)Z_0\right)$$
$$\exp\left(\left((s\exp X)^{-1}-1\right)w\right),$$

de sorte que si $\tilde{s}$ (resp. $\tilde{x}$) désigne un élément de $R^{\mathfrak{n}}$ situé au-dessus de s (resp. x), on a

$$T_{G,g,\tau}(x\exp ws\exp(X+v+tZ_0)\exp(-w)x^{-1})$$
$$= \exp i\left(t-\frac{1}{2}B((s\exp X)^{-1}w,w)\right) T_1(x\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}} Xx^{-1})$$
$$\otimes \left(S_n(\tilde{x})S_nT_n(\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}N}(X+v))T_n(\exp((s\exp X)^{-1}-1)w)S_n(\tilde{x}^{-1})\right).$$

Définissant l'opérateur $K(\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}} X)$ dans l'espace de S_nT_n en posant :

$$K(\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}} X)$$
$$= S_n(\tilde{s})\int_{V_s\times V^s\times\mathbb{R}} \alpha_2(w)\varphi(X+v+tZ_0)e^{i(t-\frac{1}{2}B((s\exp X)^{-1}w,w))}$$
$$\times S_nT_n(\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}N}(X+v))T_n(\exp((s\exp X)^{-1}-1)w) d_{V_s}w d_{V^s}v dt,$$

on a

$$T_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w\otimes\varphi d_{\mathfrak{g}(s)}Y)) = \int_{R\times\mathfrak{r}(s)_{\epsilon(s)}} \alpha_1(x)T_1(x\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}} Xx^{-1})$$
$$\otimes(S_n(\tilde{x})K(\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}} X)S_n(\tilde{x})^{-1}) d_R x d_{\mathfrak{r}(s)} X.$$

On pose $n^s = n_{|\mathfrak{n}(s)}$ et on considère la représentation $S_{n^s}T_{n^s}$ du produit semi-direct $R(s)^{\mathfrak{n}(s)}N(s)$. Comme s agit trivialement dans V^s, on peut supposer que $\mu_{\mathfrak{n}}(\tilde{s})$ (voir le numéro 4.1.2) est un élément de $Mp(V_s)$. Dans ces conditions, compte tenu du numéro 4.1.4 et avec les notations du numéro 4.2.4, on peut écrire

$$K(\tilde{s}\exp_{R^{\mathfrak{n}}} X) = K_1(\exp_{R(s)^{\mathfrak{n}(s)}} X)\otimes J(\alpha_2 d_{V_s}w, \mu_{\mathfrak{n}}(\tilde{s})\mu_{\mathfrak{n}_s}(\exp_{R(s)^{\mathfrak{n}_s}} X)),$$

où on a posé

$$K_1(\exp_{R(s)^{\mathfrak{n}(s)}} X) = \int_{V^s \times \mathbb{R}} \varphi(X + v + tZ_0) e^{it} S_{n^s} T_{n^s}(\exp_{R(s)^{\mathfrak{n}(s)} N(s)}(X + v)) d_{V^s} v dt.$$

Il résulte de [20], Lemma 5 et sa démonstration que les deux opérateurs $K_1(\exp_{R(s)^{\mathfrak{n}(s)}} X)$ et $J(\alpha_2 d_{V_s} w, \mu_{\mathfrak{n}}(\tilde{s}) \mu_{\mathfrak{n}_s}(\exp_{R(s)^{\mathfrak{n}_s}} X))$ sont à trace et, considérés comme des fonctions de la variable X à valeurs dans l'espace des opérateurs à trace correspondant, sont $\mathcal{C}^\infty$. Il est alors clair que $X \mapsto \operatorname{Tr}(K(\tilde{s} \exp_{R^{\mathfrak{n}}} X))$ est un élément de $\mathcal{D}(\mathfrak{r}(s)_{\epsilon(s)})$. On déduit facilement de ces considérations que l'on a

$$\Theta_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)} Y)) = \operatorname{Tr}\left(\int_{R \times \mathfrak{r}(s)_{\epsilon(s)}} \alpha_1(x) \operatorname{Tr}(K(\tilde{s} \exp_{R^{\mathfrak{n}}} X)) T_1(x \tilde{s} \exp_{R^{\mathfrak{n}}} X x^{-1}) d_R x d_{\mathfrak{r}(s)} X \right).$$

Comme d'après [2], 5.5.3. Théorème, la formule du caractère 44 est vraie pour la représentation $T_1 = T_{R^{\mathfrak{n}},r,\tau^{R^{\mathfrak{n}}}}$ du groupe $R^{\mathfrak{n}}$ au voisinage de $\tilde{s}$ et comme $\epsilon(s) \leqslant \epsilon_{R^{\mathfrak{n}}}(\tilde{s})$, on a donc

$$\Theta_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)} Y)) = \int_{\Omega^s_\tau} \widehat{(\operatorname{Tr}(K(\tilde{s} \exp_{R^{\mathfrak{n}}} .)) k_{\mathfrak{r},s}^{-1} d_{\mathfrak{r}(s)} X)}_{\mathfrak{r}(s)} \Phi^{\tilde{s}}_{R^{\mathfrak{n}},r,\tau^{R^{\mathfrak{n}}}} d\beta_{\Omega^s_\tau}.$$

D'une part, d'après 3.1.2, on a $\epsilon(s) \leqslant \frac{1}{2}\epsilon'(s)$ et d'autre part, il est clair que $\epsilon'(s) \leqslant \epsilon''(\mu_{\mathfrak{n}}(\tilde{s}))$. Mais alors, en tenant compte du corollaire 4.2.2, on peut écrire

$$\Theta_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w \otimes \varphi d_{\mathfrak{g}(s)} Y)) = \int_{\Omega^s_\tau} \widehat{\left(\left(\frac{\det_{V_s}(1 - s^{-1})}{\det_{V_s}(1 - (s \exp .)^{-1})} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Tr}(K_1(\exp_{R(s)^{\mathfrak{n}(s)}} .)) k_{\mathfrak{r},s}^{-1} d_{\mathfrak{r}(s)} X \right)}_{\mathfrak{r}(s)} \times \Phi(\mu_{\mathfrak{n}}(\tilde{s})) \Phi^{\tilde{s}}_{R^{\mathfrak{n}},r,\tau^{R^{\mathfrak{n}}}} d\beta_{\Omega^s_\tau}.$$

De la décomposition

$$\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{r}(s) \oplus V^s \oplus \mathfrak{z},$$

on déduit la décomposition duale

$$\mathfrak{g}(s)^* = \mathfrak{r}(s)^* \oplus V^{*s} \oplus \mathfrak{z}^*.$$

Dans ces conditions, l'application $\omega \mapsto G(s).(\omega + n)$ induit une bijection de l'ensemble des $R(s)$-orbites dans Ω^s_τ sur l'ensemble des $G(s)$-orbites dans Ω^s_g. Utilisant alors la proposition 4.3.1, tout en tenant compte de ce que la fonction $\Phi^{\tilde{s}}_{R^{\mathfrak{n}},r,\tau^{R^{\mathfrak{n}}}}$ est constante sur les $R(s)$-orbites dans Ω^s_r, et du fait que

$$\left(\frac{\det_{V_s}(1-s^{-1})}{\det_{V_s}(1-(s\exp X)^{-1})}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\nu_{\mathfrak{r},s}(1)}{\nu_{\mathfrak{r},s}(\exp X)}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{\nu_{\mathfrak{g},s}(1)}{\nu_{\mathfrak{g},s}(\exp X)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on obtient

$$\begin{aligned}&\Theta_{G,g,\tau}(\gamma'_*(\alpha d_R x d_{V_s} w\otimes\varphi d_{\mathfrak{g}(s)}Y))\\&\quad=\sum_{\Omega\in G(s)\backslash\Omega^s_g}\Phi(\mu_{\mathfrak{n}}(\tilde{s}))\Phi^{\tilde{s}}_{R^{\mathfrak{n}},r,\tau^{R^{\mathfrak{n}}}}(\Omega\cap\mathfrak{r}(s)^*)\int_\Omega \widehat{(k^{-1}_{\mathfrak{g},s}\varphi d_{\mathfrak{g}(s)}Y)}_{\mathfrak{g}(s)}d\beta_\Omega.\end{aligned}$$

D'où le résultat cherché dans le cas considéré, compte tenu du lemme 6.1.3 et de 56.

8.2. Démonstration de l'assertion (ii) du théorème : deuxième cas de réduction.

8.2.1. Dans cette partie, on se donne un idéal abélien G-invariant non nul $\mathfrak{a}$ contenu dans ${}^u\mathfrak{g}$ (il en existe toujours lorsque G n'est pas réductif) et on reprend les notations du numéro 5.2.5. On sait alors que $\mathfrak{g}_1(g_1)$ est nilpotente (voir [16]).

Il découle de la formule 18 que la mesure $d\beta_{\Omega_{g_1}}$ est tempérée dès que $d\beta_{\Omega_g}$ l'est. On suppose de plus que l'on a démontré le résultat pour le groupe G_1 et la représentation T_{G_1,g_1,τ_1}. Il suffit alors d'en déduire le résultat pour G et la représentation $T_{G,g,\tau}$: en effet, ou bien G_1 est de dimension strictement inférieure à celle de G et on peut lui appliquer ainsi qu'à T_{G_1,g_1,τ_1} l'hypothèse de récurrence, ou bien dans le cas contraire, G_1 et T_{G_1,g_1,τ_1} satisfont les hypothèses du premier cas de réduction.

8.2.2. Dans ce numéro nous supposons que l'idéal $\mathfrak{a}$ est contenu dans $\ker g$. Dans ce cas, on a $\mathfrak{q}=\mathfrak{a}$, $G_1=G/Q$ et $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$, la forme linéaire g est dans $\mathfrak{q}^\perp={\mathfrak{g}_1}^*$ et l'on a $g=g_1$, $\Omega_g=\Omega_{g_1}$, et les deux mesures de Liouville $d\beta_{\Omega_g}$ et $d\beta_{\Omega_{g_1}}$ sont égales. Désignons par p aussi bien la projection canonique de G sur G/Q que celle de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{q}$. Alors, on a $G_1(g_1)=p(G(g))$ et la restriction de p à $G(g)$ induit de manière canonique un morphisme surjectif, encore noté p de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ sur $G_1(g_1)^{\mathfrak{g}_1}$, et enfin, on a $\tau = \tau_1 \circ p$ et $T_{G,g,\tau} = T_{G_1,g_1,\tau_1} \circ p$.

Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$ tel que la mesure $d\beta_{\Omega_g^s}$ est tempérée. On pose $s_1 = p(s)$. Alors s_1 est un élément de $G_{1,\mathrm{ell}}$ et l'on a $\epsilon(s) \leqslant \epsilon_{G_1}(s_1)$. Il est clair que $\Omega_g^s = \Omega_{g_1}^{s_1}$. De plus, pour tout $0 < a \leqslant \epsilon(s)$, p envoie $\mathcal{W}(s,a)$ sur l'ouvert $\mathcal{W}(s_1,a)$ de G_1.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s))$ et soit dx une mesure de Haar sur G. Choisissons une mesure de Haar $d_Q x$ sur Q, notons $d_{\mathfrak{q}}X$ la mesure de Lebesgue tangente sur $\mathfrak{q}$ et posons

$$\alpha_1(x) = \int_Q \alpha(xy)d_Q y = \int_{\mathfrak{q}} \alpha(x \exp Y)d_{\mathfrak{q}}Y.$$

Alors $\alpha_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s_1,\epsilon(s)))$ et, si les mesures de Haar $d_G x$ (resp. $d_{G_1}x$) sur G (resp. sur G_1) sont telles que $d_G x = d_{G_1}x d_Q y$, on a clairement

$$\Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x) = \Theta_{G_1,g_1,\tau_1}(\alpha_1 d_{G_1}x).$$

Si $\Omega_g^s = \varnothing$, l'hypothèse faite sur G_1 montre que la formule 44 est vraie pour G.

Supposons donc que $\Omega_g^s \neq \varnothing$. Compte tenu de la proposition 3.2.3, il vient alors

$$\begin{aligned}&\Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x)\\ &= \int_{G_1/G_1(s_1)} |\det{}_{\mathfrak{g}_1} x| \left\{ \int_{\mathfrak{g}_1(s)_{\epsilon(s)}} \Theta^{s_1}_{G_1,g_1,\tau_1}(X)\alpha_1^x(s\exp X)\delta_{\mathfrak{g}_1,s_1}(X)d_{\mathfrak{g}_1(s_1)}X \right\} d\dot{x},\end{aligned}$$

où $d\dot{x}$ est la mesure quotient de $d_{G_1}x$ par la mesure de Haar sur $G_1(s_1)$ tangente à $d_{\mathfrak{g}_1(s_1)}X$.

Grâce à l'hypothèse faite sur G_1 et au lemme 6.1.1 (i), on en déduit

$$\begin{aligned}\Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x) = &\int_{G_1/G_1(s_1)} |\det{}_{\mathfrak{g}_1} x| \\ &\times \left\{ \int_{\Omega_{g_1}^{s_1}} \widehat{\left(\alpha_1^x(s\exp .)k^{-1}_{\mathfrak{g}_1,s_1}\delta_{\mathfrak{g}_1,s_1}d_{\mathfrak{g}_1(s_1)}X\right)}_{\mathfrak{g}_1(s_1)} \Phi^s_{g,\tau} d\beta_{\Omega_{g_1}^{s_1}} \right\} d\dot{x}.\end{aligned}$$

Évaluons la transformée de Fourier $\widehat{\left(\alpha_1^x(s\exp .)\gamma_{\mathfrak{g}_1,s_1}d_{\mathfrak{g}_1(s_1)}X\right)}_{\mathfrak{g}_1(s_1)}$, où pour simplifier l'écriture des formules, nous avons posé $\gamma_{\mathfrak{g},s} = k^{-1}_{\mathfrak{g},s}\delta_{\mathfrak{g},s}$.

En premier lieu, on a la décomposition $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(s) \oplus \mathfrak{q}_s$, et on choisit les mesures de Lebesgue $d_{\mathfrak{q}(s)}X$ et $d_{\mathfrak{q}_s}X$ sur respectivement $\mathfrak{q}(s)$ et $\mathfrak{q}_s$ de sorte que $d_{\mathfrak{q}}X = d_{\mathfrak{q}(s)}X d_{\mathfrak{q}_s}X$. Remarquons que $\mathfrak{q}(s)$ est un idéal abélien unipotent de $\mathfrak{g}(s)$. Alors, on peut écrire pour $l \in \mathfrak{g}_1(s_1)^*$,

$$\begin{aligned}
&\widehat{\left(\alpha_1^x(s\exp .)\gamma_{\mathfrak{g}_1,s_1} d_{\mathfrak{g}_1(s_1)}X\right)}_{\mathfrak{g}_1(s_1)}(l)\\
&\quad = |\det_{\mathfrak{q}} x| \int_{\mathfrak{g}_1(s_1)} \left\{\int_{\mathfrak{q}} \alpha^x(s\exp X \exp Y) d_{\mathfrak{q}}Y\right\} \gamma_{\mathfrak{g}_1,s_1}(\dot{X}) e^{i<l,\dot{X}>} d\dot{X}\\
&\quad = |\det_{\mathfrak{q}} x| \int_{\mathfrak{g}_1(s_1)} \left\{\int_{\mathfrak{q}(s)\times\mathfrak{q}_s} \alpha^x(s\exp X \exp Y \exp Z) d_{\mathfrak{q}(s)}Y d_{\mathfrak{q}_s}Z\right\}\\
&\quad \times \gamma_{\mathfrak{g}_1,s_1}(\dot{X}) e^{i<l,\dot{X}>} d\dot{X}\\
&\quad = |\det_{\mathfrak{q}} x| \int_{\mathfrak{g}(s)\times\mathfrak{q}_s} \alpha^x(s\exp X \exp Z)\gamma_{\mathfrak{g}_1,s_1}\circ p(X)\\
&\quad \times \det_{\mathfrak{q}(s)}\left(\frac{1-\exp -X}{X}\right) e^{i<l,X>} dX dZ\\
&\quad = |\det_{\mathfrak{q}} x| \int_{\mathfrak{g}(s)\times\mathfrak{q}_s} \alpha^{x\exp Z}(s\exp X)\gamma_{\mathfrak{g}_1,s_1}\circ p(X)\\
&\quad \times \det_{\mathfrak{q}(s)}\left(\frac{1-\exp -X}{X}\right) |\det_{\mathfrak{q}_s}(1-(s\exp X)^{-1})| e^{i<l,X>} dX dZ.
\end{aligned}$$

Cependant, on a

$$\delta_{\mathfrak{g},s}(X) = \delta_{\mathfrak{g}_1,s_1}\circ p(X)\det_{\mathfrak{q}(s)}\left(\frac{1-\exp -X}{X}\right) |\det_{\mathfrak{q}_s}(1-(s\exp X)^{-1})|.$$

Comme $G_1/G_1(s_1) = G/G(s)\exp \mathfrak{q}_s$, on déduit de ce qui précède que l'on a

$$\begin{aligned}
&\Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x)\\
&\quad = \int_{G/G(s)} |\det_{\mathfrak{g}} x| \left\{\int_{\Omega_g^s} \widehat{\left(\alpha^x(s\exp .)k_{\mathfrak{g}_1,s_1}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s} d_{\mathfrak{g}(s)}X\right)}_{\mathfrak{g}(s)} \Phi_{g,\tau}^s d\beta_{\Omega_g^s}\right\} d\dot{x}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a démontré que l'on a

$$\Theta_{g,\tau}^s(\varphi dY) = \int_{\Omega_g^s} \widehat{(k_{\mathfrak{g}_1,s_1}^{-1}\varphi dY)}_{\mathfrak{g}(s)} \Phi_{g,\tau}^s d\beta_{\Omega_g^s},\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}(s)_{\epsilon(s)}), \tag{57}$$

c'est-à-dire la formule cherchée avec $k_{\mathfrak{g}_1,s_1}$ à la place de $k_{\mathfrak{g},s}$. Nous pourrions dès maintenant montrer que l'on peut remplacer $k_{\mathfrak{g}_1,s_1}$ par $k_{\mathfrak{g},s}$ sans changer la validité de notre formule. Cependant, il est préférable de passer directement au cas suivant, qui contient celui-ci comme cas particulier, d'autant que dans la démonstration nous aurons à utiliser la formule 57. Il est d'ailleurs intéressant pour la suite de remarquer que cette formule reste vraie dès que G_1, g_1 et τ_1 satisfont aux conclusions du théorème. En particulier, il n'est nullement nécessaire de supposer que $\mathfrak{g}(g)$ est une algèbre de Lie nilpotente.

8.2.3. Désormais nous retournons à la situation générale du cas considéré au numéro 8.2.1.

On choisit une mesure de Haar à gauche $d_G x$ (resp. $d_H x$) sur G (resp. H), on note $d_{\mathfrak{g}}X$ (resp. $d_{\mathfrak{h}}X$) la mesure de Lebesgue tangente sur $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$) et on réalise la représentation induite $T_{g,\tau} = \mathrm{Ind}_H^G T_{H,h,\tau^H}$ (voir la formule 25) en utilisant la mesure invariante $d\dot{x}$ sur G/H, quotient de $d_G x$ par $d_H x$ (voir le numéro 2.15).

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(G)$. Alors, $T_{g,\tau}(\alpha d_G x)$ est un opérateur à noyau continu $K_\alpha(x,y)$ donné par
(58)
$$K_\alpha(x,y) = |\det_{\mathfrak{g}} x| \int_H |\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(z)|^{-\frac{1}{2}} \alpha(xzy^{-1}) T_{H,h,\tau^H}(z) d_H z,\ x,y \in G.$$

Grâce au théorème de Mercer, on a alors

$$\Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x) = \int_{G/H} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Theta_{H,h,\tau^H}(|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{-\frac{1}{2}}(\alpha^x)_{|H} d_H y) d\dot{x}, \tag{59}$$

l'intégrale étant absolument convergente.

8.2.4. Soit $s \in G_{\mathrm{ell}}$. Faisons tout d'abord l'hypothèse que $G.s \cap H = \varnothing$. Alors, il résulte du lemme 3.1.2 (i) que $\mathcal{W}(s,\epsilon(s))$ ne rencontre pas H. On déduit alors de la formule 59 que si $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$, on a $\Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x) = 0$. Comme il est clair par ailleurs que notre hypothèse entraîne que $\Omega_g^s = \varnothing$, le théorème est vrai dans ce cas.

8.2.5. Maintenant nous nous plaçons dans le cas où $G.s \cap H \neq \varnothing$. Nous pouvons même supposer que $s \in H$, ce que nous ferons à partir de maintenant.

Posons $G_{s,H} = \{x \in G / xsx^{-1} \in H\}$. On sait que $G.s \cap H$ est la réunion disjointe d'un nombre fini de H-orbites, disons

$$G.s \cap H = \amalg_{1 \leqslant i \leqslant n} H.s_i,$$

avec $s_1 = s$ de sorte que l'on a aussi

$$G_{s,H} = \amalg_{1\leqslant i\leqslant n} Hx_iG(s),$$

où, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \in G$ est tel que $x_isx_i^{-1} = s_i$, avec $x_1 = 1$ (voir [13], Lemme 63). Dans ces conditions et grâce au lemme 3.1.2, on a $H \cap \mathcal{W}(s, \epsilon(s)) = \amalg_{1\leqslant i\leqslant n} \mathcal{W}_H(s_i, \epsilon(s))$. De plus, il est immédiat que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $\epsilon(s) = \epsilon(s_i) \leqslant \epsilon_H(s_i)$.

Maintenant soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s, \epsilon(s)))$. Pour une telle fonction, on pose $\alpha_s = \mathbf{1}_{\mathcal{W}_H(s,\epsilon(s))}\alpha_{|H}$, étant entendu que $\mathbf{1}_E$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble E. Comme le support de $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s, \epsilon(s)))$ rencontre H suivant un compact contenu dans la réunion disjointe des ouverts $\mathcal{W}_H(s_i, \epsilon(s))$, $1 \leqslant i \leqslant n$, il est clair que $\alpha_s \in \mathcal{D}(\mathcal{W}_H(s, \epsilon(s)))$ et que $\alpha \mapsto \alpha_s$ est une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\mathcal{W}(s, \epsilon(s)))$ dans $\mathcal{D}(\mathcal{W}_H(s, \epsilon(s)))$.

Alors, il résulte de la formule 59 que l'on a

$$(60)\quad \Theta_{g,\tau}(\alpha d_Gx) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int_{G/H} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Theta_{H,h,\tau^H}(|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{-\frac{1}{2}} (\alpha^x)_{s_i} d_Hy) d\dot{x},$$

modulo la convergence absolue des intégrales apparaissant dans la somme.

Si pour $s \in H_{\mathrm{ell}}$ et $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s, \epsilon(s)))$, on pose

$$(61)\qquad I_s(\alpha d_Gx) = \int_{G/H} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Theta_{H,h,\tau^H}(|\det_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{-\frac{1}{2}} (\alpha^x)_s d_Hy) d\dot{x},$$

l'équation 60 s'écrit :

$$(62)\qquad \Theta_{g,\tau}(\alpha d_Gx) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} I_{s_i}(\alpha d_Gx).$$

Avant d'étudier les intègrales I_s, nous allons donner une description de Ω_g^s.

8.2.6. On garde les notations du numéro précédent. On désigne par r (resp. r_s) l'application de restriction, projection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ (resp. $\mathfrak{g}(s)^*$) sur $\mathfrak{h}^*$ (resp. $\mathfrak{h}(s)^*$). On a les décompositions en somme directe $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}(s)^* \oplus \mathfrak{g}_s^*$ et $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{h}(s)^* \oplus \mathfrak{h}_s^*$, si bien que r_s est la restriction de r à $\mathfrak{g}(s)^*$. Si E est une partie de Ω_h^s, on pose $[E]_s = G(s)r_s^{-1}(E)$. On a alors le lemme suivant.

Lemme 8.2.1. — *On a*

$$(63)\qquad r^{-1}(\Omega_h) = H.g$$

(64) $$(r^{-1}(\Omega_h))^s = r_s^{-1}(\Omega_h^s)$$

(65) $$\Omega_g^s = \amalg_{1\leqslant i\leqslant n} x_i^{-1}G(s_i)(r^{-1}(\Omega_h))^{s_i}.$$

De plus, chaque $x_i^{-1}G(s_i)(r^{-1}(\Omega_h))^{s_i} = x_i^{-1}[\Omega_h^{s_i}]_{s_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, *est un ouvert de* Ω_g^s, *réunion finie de* $G(s)$*-orbites. Plus précisément, l'application* $\omega \mapsto [\omega]_s$ *induit une bijection de* $H(s)\backslash\Omega_h^s$ *sur* $G(s)\backslash[\Omega_h^s]_s$.

Démonstration. — La première égalité est conséquence immédiate de ce que l'on a $A.l = l + \mathfrak{h}^\perp$, $l \in \Omega_g$ (voir [23], p. 500-501).

Comme on a

(66) $$A(s).l = l + \mathfrak{h}(s)^\perp,\ l \in \Omega_g^s,$$

l'orthogonal étant pris dans $\mathfrak{g}(s)^*$, pour établir la deuxième égalité, il suffit de montrer que r_s induit une surjection de $(r^{-1}(\Omega_h))^s$ sur Ω_h^s. Soit donc $l \in \Omega_h^s$. Alors, il existe $y \in H$ tel que $l = y.h$ et $y^{-1}sy \in H(h)$. Mais on a vu au numéro 5.2.5 que $H(h) = G(g)A$. Comme les facteurs réductifs de $H(h)$ sont conjugués, on en déduit que, quitte à multiplier y à droite par un élément de $H(h)$, on peut supposer que $y^{-1}sy \in G(g)$. On a alors $y.g \in \Omega_g^s$ et $r_s(y.g) = l$, d'où notre assertion.

Maintenant, soit $l \in H.g$ et soit $x \in G$. Alors, les assertions suivantes sont clairement équivalentes :

(i) $x.l \in \Omega_g^s$,

(ii) $l \in (H.g)^{x^{-1}sx}$ et $x^{-1}sx \in H$,

(iii) il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $x \in G(s)x_i^{-1}H$ et $l \in (H.g)^{x^{-1}sx}$,

(iv) il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ et $y \in H$ tels que $x \in G(s)x_i^{-1}y$ et $l \in (H.g)^{y^{-1}s_iy} = y^{-1}.(H.g)^{s_i}$,

(v) il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $x.l \in x_i^{-1}G(s_i)r^{-1}(\Omega_h)^{s_i}$.

La troisième égalité sera alors démontrée dès que l'on aura établi que les $x_i^{-1}G(s_i)r^{-1}(\Omega_h) = G(s)x_i^{-1}r^{-1}(\Omega_h)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont deux à deux disjoints. Or si $l \in G(s)x_i^{-1}r^{-1}(\Omega_h) \cap G(s)x_j^{-1}r^{-1}(\Omega_h)$, on voit immédiatement qu'il existe $x, x' \in G(s)$, $y, y' \in H$ et $z \in G(g)$ tels que $xx_i^{-1}y = x'x_j^{-1}y'z$. Comme $G(g)$ est inclus dans H et comme les doubles classes $G(s)x_i^{-1}H$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont deux à deux disjointes, notre assertion est démontrée.

Comme pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a

$$x_i^{-1}G(s_i)(r^{-1}(\Omega_h))^{s_i} = G(s)x_i^{-1}(r^{-1}(\Omega_h))^{s_i},$$

l'avant dernière assertion du lemme est claire.

Maintenant, soit $\omega \in H(s)\backslash\Omega_h^s$. Alors, il résulte de 66, que $r_s^{-1}(\omega)$ est une $H(s)$-orbite. Pour établir la dernière assertion du lemme, il suffit de démontrer que, si ω et ω' sont deux éléments de $H(s)\backslash\Omega_h^s$ tels que $[\omega]_s = [\omega']_s$, alors on a $\omega = \omega'$. Or, compte tenu de ce que l'on vient de voir, si l'on a $[\omega]_s = [\omega']_s$, étant donnés $l \in \omega$ (resp. $l' \in \omega'$) et $l_1 \in r_s^{-1}(l)$ (resp. $l_1' \in r_s^{-1}(l')$), il existe $x \in G(s)$ tel que $l_1' = x.l_1$. Mais l_1 et l_1' étant tous deux dans Ω_h, on a $(l_1')_{|\mathfrak{a}} = (l_1)_{|\mathfrak{a}} = a$. Il s'ensuit que $x \in H(s)$ et donc que $\omega = \omega'$. □

8.2.7. Dans ce numéro, nous reprenons l'étude des intégrales I_s introduites en 8.2.5. Tout d'abord, il résulte du lemme 8.2.1 et de la formule 18 que la mesure $d\beta_{\Omega_h^s}$ est tempérée.

Soit $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$. Remarquons d'abord que, pour tous $x \in G$ et $X \in \mathfrak{h}(s)_{\epsilon(s)}$, on a $(\alpha^x)_s(s\exp X) = \alpha^x(s\exp X)$. Alors l'hypothèse faite sur G_1 et T_{G_1,g_1,τ_1}, ainsi que les résultats du numéro 8.2.2 permettent d'écrire que l'on a

$$\Theta_{H,h,\tau^H}(|\det\nolimits_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|^{-\frac{1}{2}}(\alpha^x)_s d_H y) = \int_{H/H(s)} |\det\nolimits_{\mathfrak{h}} y|$$
$$\times\Big\{\int_{\Omega_h^s} (\alpha^{xy}(s\exp.)|\det\nolimits_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(s\exp.)|^{-\frac{1}{2}} k_{\mathfrak{g}_1,\dot{s}}^{-1}\delta_{\mathfrak{h},s} d_{\mathfrak{h}(s)}Y\widehat{)}_{\mathfrak{h}(s)}\Phi_{H,h,\tau^H}^s d\beta_{\Omega_h^s}\Big\}d\dot{y},$$

où $\dot{s}$ désigne l'image de s par la projection canonique de H sur G_1, $d_{\mathfrak{h}(s)}Y$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{h}(s)$ et $d\dot{y}$ est la mesure quotient de $d_H y$ par la mesure de Haar à gauche sur $H(s)$ tangente à cette dernière. Il vient alors :

$$(67)\quad I_s(\alpha d_G x) = \int_{G/H} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x|\Big\{\int_{H/H(s)} |\det\nolimits_{\mathfrak{h}} y|$$
$$\times\Big\{\int_{\Omega_h^s}(\alpha^{xy}(s\exp.)|\det\nolimits_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(s\exp.)|^{-\frac{1}{2}} k_{\mathfrak{g}_1,\dot{s}}^{-1}\delta_{\mathfrak{h},s} d_{\mathfrak{h}(s)}Y\widehat{)}_{\mathfrak{h}(s)}$$
$$\times\,\Phi_{H,h,\tau^H}^s d\beta_{\Omega_h^s}\Big\}d\dot{y}\Big\}d\dot{x},$$
$$= \sum_{\omega\in H(s)\backslash\Omega_h^s}\Phi_{H,h,\tau^H}^s(\omega)\Big\{\int_{G/H} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x|\Big\{\int_{H/H(s)} |\det\nolimits_{\mathfrak{h}} y|$$
$$\times\Big\{\int_{\omega}(\alpha^{xy}(s\exp.)|\det\nolimits_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(s\exp.)|^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\, k_{\mathfrak{g}_1,\dot{s}}^{-1}\delta_{\mathfrak{h},s} d_{\mathfrak{h}(s)}Y\widehat{)}_{\mathfrak{h}(s)} d\beta_{\omega}\Big\}d\dot{y}\Big\}d\dot{x}\Big\},$$

modulo la convergence absolue des intégrales portant sur G/H.

Maintenant nous allons nous intéresser dans cette expression à l'intégrale portant sur ω. Soit $\omega \in H(s)\backslash\Omega_h^s$. Nous allons montrer que, pour $\alpha \in \mathcal{D}(\mathfrak{h}(s)_{\epsilon(s)})$, on a

$$\text{(68)}\quad \Phi^s_{H,h,\tau^H}(\omega)\int_\omega (\alpha|\det{}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(s\exp.)|^{-\frac12}k^{-1}_{\mathfrak{g}_1,\dot s}\delta_{\mathfrak{h},s}d_{\mathfrak{h}(s)}Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{h}(s)}d\beta_\omega$$
$$= \Phi^s_{g,\tau}([\omega]_s)\int_\omega (\alpha k^{-1}_{\mathfrak{g},s}\delta_{\mathfrak{g},s}d_{\mathfrak{h}(s)}Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{h}(s)}d\beta_\omega.$$

Pour ce faire, nous allons évaluer la fonction sur $\mathfrak{h}(s)_{\epsilon(s)}$ définie par

$$\text{(69)}\qquad C = |\det{}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(s\exp.)|^{-\frac12}k^{-1}_{\mathfrak{g}_1,\dot s}\delta_{\mathfrak{h},s}k_{\mathfrak{g},s}\delta^{-1}_{\mathfrak{g},s}.$$

Compte tenu des formules 42 et 43 définissant les fonctions $k_{\mathfrak{g},s}$ et $\delta_{\mathfrak{g},s}$ et de ce que $\mathfrak{g}_1(\dot s) = \mathfrak{h}(s)/\mathfrak{q}(s)$ et $(\mathfrak{g}_1)_{\dot s} = \mathfrak{h}_s/\mathfrak{a}_s$, tandis que $\mathfrak{h}$ agit trivialement dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{q} = \mathfrak{a}(s)/\mathfrak{q}(s)$, il vient

$$\text{(70)}\quad C(X) = |\det{}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(s\exp X)|^{-\frac12}\det{}_{\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{h}(s)}\left(\frac{\operatorname{sh}X/2}{X/2}\right)^{\frac12}$$
$$\times\det{}_{\mathfrak{a}(s)}\left(\frac{\operatorname{sh}X/2}{X/2}\right)^{\frac12}\left|\frac{\det_{\mathfrak{g}_s/\mathfrak{h}_s}(1-s\exp X)}{\det_{\mathfrak{g}_s/\mathfrak{h}_s}(1-s)}\right|^{\frac12}\left|\frac{\det_{\mathfrak{a}_s}(1-s\exp X)}{\det_{\mathfrak{a}_s}(1-s)}\right|^{\frac12}$$
$$\times|\det{}_{\mathfrak{g}_s/\mathfrak{h}_s}(1-(s\exp X)^{-1})|^{-1}\det{}_{\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{h}(s)}\left(\frac{1-\exp -X}{X}\right)^{-1}.$$

Cependant, $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}(g)$ est un idéal s-invariant de $\mathfrak{h}$ tandis que la forme bilinéaire alternée B_g induit une dualité H-invariante entre $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{a}/\mathfrak{t}$. Par suite, cette forme bilinéaire induit également une dualité $H(s)$-invariante entre $\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{h}(s)$ et $\mathfrak{a}(s)/\mathfrak{t}(s)$ d'une part et $\mathfrak{g}_s/\mathfrak{h}_s$ et $\mathfrak{a}_s/\mathfrak{t}_s$ d'autre part. Il en résulte que, pour $X \in \mathfrak{h}(s)$, l'on a :

$$\begin{aligned}
\det{}_{\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{h}(s)}\left(\frac{\operatorname{sh}X/2}{X/2}\right) &= \det{}_{\mathfrak{a}(s)/\mathfrak{t}(s)}\left(\frac{\operatorname{sh}X/2}{X/2}\right)\\
\det{}_{\mathfrak{g}_s/\mathfrak{h}_s}(1-s\exp X) &= \det{}_{\mathfrak{a}_s/\mathfrak{t}_s}(1-(s\exp X)^{-1})\\
\det{}_{\mathfrak{g}_s/\mathfrak{h}_s}(1-(s\exp X)^{-1}) &= \det{}_{\mathfrak{a}_s/\mathfrak{t}_s}(1-s\exp X)\\
\det{}_{\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{h}(s)}\left(\frac{1-\exp -X}{X}\right) &= \det{}_{\mathfrak{a}(s)/\mathfrak{t}(s)}\left(\frac{\exp X-1}{X}\right)\\
\det{}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(s\exp X) &= \det{}_{\mathfrak{a}/\mathfrak{t}}(s\exp X)^{-1}\\
&= \det{}_{\mathfrak{a}(s)/\mathfrak{t}(s)}(\exp X)^{-1}\det{}_{\mathfrak{a}_s/\mathfrak{t}_s}(s\exp X)^{-1}.
\end{aligned}$$

Reportant ces égalités dans 70, on obtient :

$$
\begin{aligned}
C(X) = {} & |\det_{\mathfrak{a}/\mathfrak{t}}(s\exp X)|^{\frac12} \det_{\mathfrak{a}(s)}\Big(\frac{\operatorname{sh} X/2}{X/2}\Big) \\
& \times \det_{\mathfrak{t}(s)}\Big(\frac{\operatorname{sh} X/2}{X/2}\Big)^{-\frac12} \left|\frac{\det_{\mathfrak{a}_s}(s\exp X)}{\det_{\mathfrak{a}_s} s}\right|^{-\frac12} \\
& \times \left|\frac{\det_{\mathfrak{a}_s}(1-s\exp X)}{\det_{\mathfrak{a}_s}(1-s)}\right| \left|\frac{\det_{\mathfrak{t}_s}(1-(s\exp X)^{-1})}{\det_{\mathfrak{t}_s}(1-s^{-1})}\right|^{-\frac12} \\
& \times |\det_{\mathfrak{a}_s}(1-s\exp X)|^{-1} \\
& \times |\det_{\mathfrak{t}_s}(1-s\exp X)| \\
& \times \det_{\mathfrak{a}(s)}\Big(\frac{\exp X-1}{X}\Big)^{-1} \det_{\mathfrak{t}(s)}\Big(\frac{\exp X-1}{X}\Big) \\
= {} & \det_{\mathfrak{a}(s)}(\exp X/2)\det_{\mathfrak{a}(s)}\Big(\frac{\operatorname{sh} X/2}{X/2}\Big) |\det_{\mathfrak{a}_s}(s\exp X)|^{\frac12} \\
& \times \left|\frac{\det_{\mathfrak{a}_s}(s\exp X)}{\det_{\mathfrak{a}_s} s}\right|^{-\frac12} |\det_{\mathfrak{a}_s}(1-s)|^{-1} \det_{\mathfrak{a}(s)}\Big(\frac{\exp X-1}{X}\Big)^{-1} \\
& \times \det_{\mathfrak{t}(s)}(\exp -X/2)\det_{\mathfrak{t}(s)}\Big(\frac{\exp X-1}{X}\Big)\det_{\mathfrak{t}(s)}\Big(\frac{\operatorname{sh} X/2}{X/2}\Big)^{-\frac12} \\
& \times |\det_{\mathfrak{t}_s}(s\exp X)|^{-\frac12} \left|\frac{\det_{\mathfrak{t}_s}(1-(s\exp X)^{-1})}{\det_{\mathfrak{t}_s}(1-s^{-1})}\right|^{-\frac12} \\
& \times |\det_{\mathfrak{t}_s}(1-s\exp X)|.
\end{aligned}
$$

On en déduit facilement que, pour $X \in \mathfrak{h}(s)_{\epsilon(s)}$:

$$C(X) = \det_{\mathfrak{a}_s/\mathfrak{t}_s}(1-s)^{-1} D(X), \tag{71}$$

avec

$$D(X) = \left|\frac{\det_{\mathfrak{t}_s}(1-s\exp X)}{\det_{\mathfrak{t}_s}(1-s)}\right|^{\frac12} \det_{\mathfrak{t}(s)}\Big(\frac{\operatorname{sh} X/2}{X/2}\Big)^{\frac12}. \tag{72}$$

Compte tenu de 69, 71 et du lemme 6.1.1 (ii), le membre de gauche de la formule 68 s'écrit

$$\Phi^s_{g,\tau}([\omega]_s) \int_\omega (\alpha k^{-1}_{\mathfrak{g},s}\delta_{\mathfrak{g},s} D d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{h}(s)} d\beta_\omega. \tag{73}$$

On peut supposer que $h \in \omega$. Alors h, vue comme forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ est bien polarisable et on a $\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{a}$, de sorte que l'action de $\mathfrak{h}(h)$ dans $\mathfrak{t}$ est nilpotente. Compte tenu du lemme 5.1.1, on voit donc que la sous-algèbre acceptable canonique $\mathfrak{b}_h$ associée à h agit de manière nilpotente dans $\mathfrak{t}$. Cependant, $\mathfrak{b}_h$ étant canonique, elle est invariante par s. On en déduit facilement que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_h(s)$ est un élément de $Cosu(h)$, où h est vue ici comme une forme linéaire sur $\mathfrak{h}(s)$. Désignons par b la restriction de h à $\mathfrak{b}$ et par B le sous-groupe induisant de $H(s)$ associé à $\mathfrak{b}$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}(\mathfrak{h}(s)_{\epsilon(s)})$. Alors, d'après la formule 18 dont on reprend les notations, on peut écrire

$$(74)\quad \int_\omega (\varphi D d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} d\beta_\omega = \int_{H(s)/B} \Big\{ \int_{\Omega_b} \Big\{ \int_{\mathfrak{b}^\perp} (\varphi D d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} (x.(l+\lambda)) d\lambda \Big\} d\beta_{\Omega_b}(l_1) \Big\} d\dot{x}.$$

Cependant, la formule d'inversion de Fourier permet d'écrire, pour un choix convenable de la mesure de Lebesgue dX sur $\mathfrak{b}$,

$$\int_{\mathfrak{b}^\perp} (\varphi D d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} (x.(l+\lambda)) d\lambda = |\det_{\mathfrak{h}(s)} \mathrm{Ad}\, x| \int_{\mathfrak{b}} \varphi(x.X) D(x.X) e^{i<l_1, X>} dX.$$

Cependant, on a vu que $\mathfrak{b}_h$ agit de manière nilpotente dans $\mathfrak{t}$. Il s'ensuit que $\mathfrak{b}$ agit de manière nilpotente à la fois dans $\mathfrak{t}(s)$ et dans $\mathfrak{t}_s$, de sorte que l'on a $D(x.X) = 1$, pour tout $X \in \mathfrak{b}$ et tout $x \in H(s)$. Il vient donc

$$\int_{\mathfrak{b}^\perp} (\varphi D d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} (x.(l+\lambda)) d\lambda = \int_{\mathfrak{b}^\perp} (\varphi d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} (x.(l+\lambda)) d\lambda.$$

Reportant cette dernière égalité dans l'équation 74, on obtient

$$\int_\omega (\varphi D d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} d\beta_\omega = \int_\omega (\varphi d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} d\beta_\omega.$$

On en déduit immédiatement la relation 68. Reportant cette dernière dans 67, pour tout $\alpha \in \mathcal{D}(\mathcal{W}(s, \epsilon(s)))$, il vient

$$(75)\quad I_s(\alpha d_G x) = \sum_{\omega \in H(s)\backslash \Omega_h^s} \Phi^s_{g,\tau}([\omega]_s) \Big\{ \int_{G/H} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Big\{ \int_{H/H(s)} |\det_{\mathfrak{h}} y| \times \Big\{ \int_\omega (\alpha^{xy}(s \exp .) k_{\mathfrak{g},s}^{-1} \delta_{\mathfrak{g},s} d_{\mathfrak{h}(s)} Y)\widehat{}_{\mathfrak{h}(s)} d\beta_\omega \Big\} d\dot{y} \Big\} d\dot{x} \Big\},$$

modulo la convergence absolue des intégrales portant sur G/H.

Désignant par $\mathfrak{h}(s)^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}(s)$ dans $\mathfrak{g}(s)^*$, par $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)$ et par $d\lambda$ la mesure sur $\mathfrak{h}(s)^\perp$ duale de la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{h}(s)$ quotient de $d_{\mathfrak{g}(s)}X$ par $d_{\mathfrak{h}(s)}X$, on peut alors, grâce à la formule 2 et modulo la convergence absolue des intégrales portant sur G/H, réécrire comme suit la formule 75 :

$$(76)\qquad I_s(\alpha d_G x) = \sum_{\omega\in H(s)\backslash\Omega_h^s} \Phi_{g,\tau}^s([\omega]_s)\Big\{\int_{G/H} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x|\Big\{\int_{H/H(s)} |\det\nolimits_{\mathfrak{h}} y|$$
$$\times\Big\{\int_\omega\int_{\mathfrak{h}(s)^\perp} (\alpha^{xy}(s\exp .)k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}d_{\mathfrak{g}(s)}Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)}(l_1+\lambda)d\lambda\Big\}d\beta_\omega(l)\Big\}d\dot y\Big\}d\dot x\Big\},$$

où l_1 désigne un élément de $\mathfrak{g}(s)^*$ dont la restriction à $\mathfrak{h}(s)$ est l et où les intégrales sont toujours successivement convergentes.

8.2.8. On reprend les notations du numéro précédent. De la même façon qu'aux numéros 7.2.1 et 7.2.2 on a établi la formule 52 ainsi que la convergence absolue de l'intégrale double y apparaissant, et en tenant compte de ce que d'après le lemme 8.2.1, on a $[\Omega_h^s]_s = \amalg_{\omega\in H(s)\backslash\Omega_h^s}[\omega]_s$, on obtient, pour tout $\alpha\in\mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$:

$$I_s(\alpha d_G x) = \int_{G/G(s)} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x|\Big\{\int_{[\Omega_h^s]_s} (\alpha^x(s\exp .)k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}d_{\mathfrak{g}(s)}Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)}\Phi_{g,\tau}^s d\beta_{\Omega_g^s}\Big\}d\dot x,$$

où $d_{\mathfrak{g}(s)}Y$ est une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}(s)$, où $d\dot x$ est la mesure invariante sur $G/G(s)$ quotient de $d_G x$ par la mesure de Haar à gauche sur $G(s)$ tangente à $d_{\mathfrak{g}(s)}Y$ et où l'intégrale double est absolument convergente.

Reportant cette formule dans 62, on a, pour $\alpha\in\mathcal{D}(\mathcal{W}(s,\epsilon(s)))$,

$$(77)\quad \Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\int_{G/G(s_i)} |\det\nolimits_{\mathfrak{g}} x|$$
$$\times\Big\{\int_{[\Omega_h^{s_i}]_{s_i}} (\alpha^x(s_i\exp .)k_{\mathfrak{g},s_i}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s_i}d_{\mathfrak{g}(s_i)}Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s_i)}\Phi_{g,\tau}^{s_i}d\beta_{\Omega_g^{s_i}}\Big\}d\dot x.$$

Maintenant, soit $1\leqslant i\leqslant n$. Par transport de structure et grâce à la formule 32 on a $\Phi_{g,\tau}^{s_i}(x_i.l) = \Phi_{g,\tau}^s(l)$, $l\in\Omega_g^s$, tandis que, comme $k_{\mathfrak{g},s_i}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s_i}(x_i.X) = k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}(X)$, $X\in\mathfrak{g}(s)$, on a pour $l\in\mathfrak{g}(s)^*$:

$$(\alpha^x(s_i\exp .)k_{\mathfrak{g},s_i}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s_i}d_{\mathfrak{g}(s_i)}Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s_i)}(x_i.l)$$
$$= c_i(\alpha^{xx_i}(s\exp .)k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}d_{\mathfrak{g}(s)}Y)\widehat{\ }_{\mathfrak{g}(s)}(l),$$

où $c_i = |\det(x_i : \mathfrak{g}(s) \to \mathfrak{g}(s_i))|$, le déterminant étant calculé relativement à une base de $\mathfrak{g}(s)$ (resp. $\mathfrak{g}(s_i)$) univolumique pour $d_{\mathfrak{g}(s)}Y$ (resp. $d_{\mathfrak{g}(s_\imath)}Y$).

Comme x_i induit un isomorphisme de variétés symplectiques de $x_i^{-1}[\Omega_h^{s_\imath}]_{s_\imath}$ sur $[\Omega_h^{s_\imath}]_{s_\imath}$, il résulte de ce qui précède que l'on a

$$(78) \quad \int_{[\Omega_h^{s_\imath}]_{s_\imath}} (\alpha^x(s_i \exp .)k_{\mathfrak{g},s_\imath}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s_\imath}d_{\mathfrak{g}(s_\imath)}Y)\widehat{}_{\mathfrak{g}(s_\imath)}\Phi_{g,\tau}^{s_\imath}d\beta_{\Omega_g^{s_\imath}}$$
$$= c_i \int_{x_\imath^{-1}[\Omega_h^{s_\imath}]_{s_\imath}} (\alpha^{xx_\imath}(s \exp .)k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}d_{\mathfrak{g}(s)}Y)\widehat{}_{\mathfrak{g}(s)}\Phi_{g,\tau}^{s}d\beta_{\Omega_g^s}.$$

Cependant, pour toute fonction $\varphi \in L^1(G; G(s))$, on a

$$(79) \qquad \int_{G/G(s_\imath)} \varphi(xx_i)d\dot{x} = c_i' \int_{G/G(s)} \varphi(x)d\dot{x},$$

avec $c_i' = |\det(x_i : \mathfrak{g}_s \to \mathfrak{g}_{s_\imath})|$, le déterminant étant calculé relativement à une base de $\mathfrak{g}_s$ (resp. $\mathfrak{g}_{s_\imath}$) univolumique pour la mesure de Lebesgue tangente à la mesure quotient considérée sur $G/G(s)$ (resp. $G/G(s_i)$). Il est alors clair que $c_ic_i' = |\det_{\mathfrak{g}} x_i|$.

Il résulte alors de 78 et 79 que

$$\int_{G/G(s_\imath)} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Big\{ \int_{[\Omega_h^{s_\imath}]_{s_\imath}} (\alpha^x(s_i \exp .)k_{\mathfrak{g},s_i}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s_\imath}d_{\mathfrak{g}(s_\imath)}Y)\widehat{}_{\mathfrak{g}(s_\imath)}\Phi_{g,\tau}^{s_\imath}d\beta_{\Omega_g^{s_\imath}} \Big\} d\dot{x}$$
$$= \int_{G/G(s)} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Big\{ \int_{x_\imath^{-1}[\Omega_h^{s_\imath}]_{s_\imath}} (\alpha^x(s \exp .)k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}d_{\mathfrak{g}(s)}Y)\widehat{}_{\mathfrak{g}(s_\imath)}\Phi_{g,\tau}^{s}d\beta_{\Omega_g^s} \Big\} d\dot{x}.$$

Reportant cette dernière formule dans 77 et tenant compte du lemme 8.2.1, on obtient finalement

$$\Theta_{g,\tau}(\alpha d_G x)$$
$$= \int_{G/G(s)} |\det_{\mathfrak{g}} x| \Big\{ \int_{\Omega_g^s} (\alpha^x(s \exp .)k_{\mathfrak{g},s}^{-1}\delta_{\mathfrak{g},s}d_{\mathfrak{g}(s)}X)\widehat{}_{\mathfrak{g}(s)} \Phi_{g,\tau}^{s}d\beta_{\Omega_g^s} \Big\} d\dot{x}.$$

Ceci achève la démonstration du théorème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ANDLER, La formule de Plancherel pour les groupes algébriques complexes unimodulaires, Acta. Math., 154 (1985), 1–104.

[2] A. BOUAZIZ, Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes, J. Funct. Anal., 70 (1987), 1–79.

[3] J.-Y. CHARBONNEL, Sur les orbites de la représentation coadjointe, Compositio Math., 46 (1982), 273–305.

[4] J.-Y. CHARBONNEL, Sur les caractères des groupes de Lie, J. Funct. Anal., 72 (1987), 94–150.

[5] M. DUFLO, Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie, Harmonic Analysis and Group Representations (A.F. Talamanca, éd.), CIME, 1980, Liguori Editori, Napoli, 1982, 129-221.

[6] M. DUFLO, Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques, Acta. Math., 149 (1982), 153–213.

[7] M. DUFLO, On the Plancherel formula for algebraic real Lie groups, Lie Group Representations, III (College Park, Md., 1982/1983) (R. Herb, R. Johnson, R. Lipsman et J. Rosenberg, éds.), Lectures notes in Mathematics, no. 1077, Springer Verlag, Berlin/New York, 1984, 101–165.

[8] M. DUFLO, G. HECKMAN et M. VERGNE, Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner, Mem. Soc. Math. Fr., 15 (1984), 65–128.

[9] M. DUFLO et C. C. MOORE, On the Regular Representation of a Nonunimodular Locally Compact Group, J. Funct. Anal., 21 (1976), 209–243.

[10] M. DUFLO et M. RAÏS, Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles, Ann. Scien. Ecole Norm. Sup., 9 (1976), 107–144.

[11] M. DUFLO et M. VERGNE, Une propriété de la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 268 (1969), A583-A585.

[12] M. DUFLO et M. VERGNE, La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels, Representations of Lie Groups (Kyoto, Hiroshima, 1986), Adv. Stud. Pure Math., no. 14, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[13] M. DUFLO et M. VERGNE, Cohomologie équivariante et descente, Astérisque, 215 (1993), 1–108.

[14] HARISH-CHANDRA, Invariant eigendistribution on a semisimple Lie group, Trans. Amer. Math. Soc., 119 (1965), 457–508.

[15] M.S. KHALGUI, Sur les caractères des groupes de Lie à radical cocompact, Bull. Soc. Math. France, 109 (1981), 331-372.

[16] M.S. KHALGUI, Caractères des groupes de Lie, J. Funct. Anal., 47 (1982), 64–77.

[17] M.S. KHALGUI, Caractères des représentations factorielles normales d'un groupe de Lie connexe, Mém. Soc. Math. France, 15 (1984), 219–253.

[18] M.S. KHALGUI et P. TORASSO, Formule de Poisson-Plancherel pour un groupe presque algébrique réel. I. Transformée de Fourier d'intégrales orbitales, J. Funct. Anal., 116 (1993), 359–440.

[19] A. A. KIRILLOV, Characters of unitary representations of Lie groups, Funct. Anal. Appl., 2 (1968), 40–55.

[20] A. A. KIRILLOV, Characters of the unitary representations of Lie groups : Reduction theorems, Funct. Anal. Appl., 3 (1969), 36–47.

[21] K. MAKTOUF, Le caractère de la représentation métaplectique et la formule du caractère pour certaines représentations d'un groupe de Lie presque algébrique sur un corps p-adique, J. Funct. Anal., 164 (1999), 249–339.

[22] N. V. PEDERSEN, Semicharacters and solvable Lie groups, Math. Ann., 247 (1980), 191–244.

[23] L. PUKANSZKY, Unitary representations of solvable Lie groups, Ann. Scien. École Norm. Sup., 4 (1971) 81–137

[24] V. S. VARADARAJAN, Harmonic Analysis on Real Reductive Lie Groups, Lecture Notes in Mathematics, vol. 576, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1977.

Manuscrit reçu le 12 décembre 2001,
accepté le 5 mars 2002.

Mohamed Salah KHALGUI,
Faculté des Sciences de Tunis
Département de Mathématiques
Campus universitaire
1060 Tunis (Tunisie).
MohamedSalah.Khalgui@fst.rnu.tn

Pierre TORASSO,
Université de Poitiers
UMR CNRS 6086
«Groupes de Lie et géométrie»
Mathématiques
SP2MI, BP 30179
86962 Chasseneuil Cedex (France).
torasso@mathlabo.univ-poitiers.fr