



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Enrique ARTAL BARTOLO, Philippe CASSOU-NOGUÈS & Hélène MAUGENDRE

Quotients jacobiens d'applications polynomiales

Tome 53, n° 2 (2003), p. 399-428.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_2_399_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

QUOTIENTS JACOBIEENS D'APPLICATIONS POLYNOMIALES

par E. ARTAL BARTOLO⁽¹⁾,
P. CASSOU-NOGUÈS & H. MAUGENDRE

1. Introduction.

Soient $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ deux polynômes. Nous considérons l'application $\phi := (f, g) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Nous fixons les coordonnées (x, y) à la source et les coordonnées (a, b) à l'arrivée. Dans le cas local, c'est-à-dire lorsque

$$f, g \in \mathbb{C}\{x, y\} \quad \text{et} \quad \phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

est un morphisme fini, H. Maugendre a mis en évidence dans [12] le rapport entre le polygone de Newton (local) du lieu discriminant de ϕ et l'ensemble des quotients jacobiens de (f, g) qui est un invariant de la topologie des entrelacs locaux de f et g .

Notre propos dans ce travail est de généraliser ce résultat au cas affine. Nous supposons que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, les polynômes $f - a$ et $g - b$ n'ont pas de facteurs communs et que ϕ est dominante. Nous notons J le lieu jacobien de ϕ . Soit

$$\phi(J) =: \Delta$$

le lieu discriminant de ϕ ; c'est une courbe algébrique de \mathbb{C}^2 . Soit S le lieu de non-propreté de ϕ , i.e., S est le plus petit sous-ensemble algébrique de \mathbb{C}^2

⁽¹⁾ Le premier auteur est partiellement financé par DGES PB97-0284-C02-01 et BFM2001-1488-C02-02.

Mots-clés : Applications polynomiales – Quotients jacobiens – Polygone de Newton – Variétés graphées.

Classification math. : 14F45 – 14E35 – 57M25.

tel que la restriction $\phi| : \mathbb{C}^2 \setminus \phi^{-1}(S) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus S$ est propre; S est aussi une courbe algébrique de \mathbb{C}^2 (voir [8]). Soient

$$C := \Delta \cup S \quad \text{et} \quad \mathcal{J} := \phi^{-1}(C).$$

Notons que l'application

$$\phi| : \mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus C$$

est un revêtement non ramifié et que C est minimale pour cette propriété. La courbe C va jouer le rôle de la courbe discriminante dans le cas local.

Nous avons besoin de préciser quelques notations pour introduire la notion qui va remplacer les quotients jacobiens et les pentes du polygone de Newton du cas local. Dans

$$\Lambda := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{(0, 0)\},$$

nous définissons la relation d'équivalence

$$(1.1) \quad (n_1, n_2) \sim (m_1, m_2) \iff \exists u \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ tel que } (m_1, m_2) = u(n_1, n_2).$$

Nous notons \mathcal{D} le quotient de Λ par cette action et

$$\mathcal{S} := \{+, -, 0\}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

On a la décomposition

$$\mathcal{D} := \bigcup_{(s,t) \in \mathcal{S}} \mathcal{D}_{st}$$

où $\mathcal{D}_{st} := \{[(m, n)] \mid m \in \mathbb{Q}_s, n \in \mathbb{Q}_t\}$ avec $\mathbb{Q}_0 = \{0\}$.

Remarque 1.1. — Si $0 \in \{s, t\}$, alors $\#\mathcal{D}_{st} = 1$. Si $0 \notin \{s, t\}$, l'application $\varphi_{st} : \mathcal{D}_{st} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ donnée par $\varphi_{st} [(p, q)] := |p/q|$ est une bijection.

Nous rappelons la notion de polygone de Newton total d'un polynôme. Soit $p(a, b) = 0$ une équation réduite de C et soit Γ le polygone de Newton total de p : si

$$p(a, b) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2},$$

alors Γ est le bord de l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^2 de

$$\text{Supp}(p) := \{\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2 \mid c_{\alpha} \neq 0\}.$$

Nous orientons Γ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Soit γ_i une face de Γ ; notons A_i l'origine et B_i l'extrémité de γ_i . Nous associons à γ_i la paire

$$q(\gamma_i) := (y_{B_i} - y_{A_i}, x_{A_i} - x_{B_i}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Nous définissons

$$Q_C := \{[q(\gamma_i)] \in \mathcal{D} \mid \gamma_i \text{ arête de } \Gamma\}.$$

L'ensemble Q_C joue le rôle de l'ensemble des pentes du polygone de Newton local. La décomposition précédente induit une décomposition

$$Q_C = \bigcup_{(s,t) \in \mathcal{S}} Q_{st}, \quad \text{où } Q_{st} := Q_C \cap \mathcal{D}_{st}.$$

Nous définissons une décomposition de Γ en sous-graphes

$$\Gamma = \bigcup_{(s,t) \in \mathcal{S}} \Gamma_{st}$$

telle que pour $(s, t) \in \mathcal{S}$, le sous-graphe Γ_{st} est la réunion des arêtes γ_i de Γ telles que $[q(\gamma_i)] \in \mathcal{D}_{st}$.

Les entrelacs locaux sont remplacés par les entrelacs à l'infini des courbes affines $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$. Nous les notons $L_{f,0}^\infty$ et $L_{g,0}^\infty$. Nous considérons le diagramme minimal de Eisenbud-Neumann G de l'entrelacs $L_{f,0}^\infty \cup L_{g,0}^\infty$, voir [5]. Pour chaque sommet v de G , soit ρ_v la composante virtuelle qui lui est associée. Nous attribuons à v la paire

$$c(v) := (\mathcal{L}(L_{f,0}^\infty, \rho_v), \mathcal{L}(L_{g,0}^\infty, \rho_v)),$$

où \mathcal{L} est le nombre d'enlacement dans une grande sphère contenant les entrelacs ; cette sphère est orientée comme le bord de la couronne extérieure.

Nous notons

$$Q_\infty := \{[c(v)] \in \mathcal{D} \mid v \text{ sommet de } G, c(v) \neq (0, 0)\}.$$

Remarque 1.2. — Nous reviendrons plus tard sur cette définition, voir exemple 2.4. Les sommets de rupture du graphe G sont en bijection avec les morceaux seifertiques de la décomposition de Waldhausen minimale du couple $(S^3, L_{f,0}^\infty \cup L_{g,0}^\infty)$, ce qui leur procure un caractère topologique intrinsèque.

Nous avons aussi une décomposition

$$Q_\infty := \bigcup_{(s,t) \in \mathcal{S}} Q_{st}^\infty, \quad \text{où } Q_{st}^\infty := Q_\infty \cap \mathcal{D}_{st}.$$

Le résultat principal de ce travail est :

THÉORÈME 1.3. — Avec les hypothèses précédentes :

- (i) $Q_{st}^\infty = Q_{st}$, si s ou t sont égaux à $+$;
- (ii) $Q_{st}^\infty \subset Q_{st}$, sinon.

Si l'on fait un changement de variables $a \mapsto a - a_0$, $b \mapsto b - b_0$, $a_0, b_0 \in \mathbb{C}$, le polygone de Newton total et les entrelacs changent. Les parties Q_{++} et Q_{++}^∞ restent les mêmes. Les parties Q_{st} et Q_{st}^∞ , avec $- \in \{s, t\}$, sont génériquement vides.

Nous connaissons des propriétés asymptotiques pour la courbe S et notre théorème donne des résultats supplémentaires sur la courbe discriminante. En particulier, un candidat potentiel comme contre-exemple à la conjecture du jacobien ne doit pas faire apparaître d'autres paires que celles fournies par la courbe S . De la démonstration du théorème nous déduisons qu'un mauvais générateur de corps ne peut contribuer à la construction d'un contre-exemple à la conjecture du jacobien, voir corollaire 4.10.

Exemple 1.4. — Illustrons notre théorème sur un exemple. Soient :

$$s = xy + 1, \quad p = xs + 1, \quad u = s^2 + y,$$

$$f = p^2u + ps + 3s, \quad g = ux + 1.$$

On a

$$S = \{a - b^2 = 0\}, \quad \Delta = \{a^2 - 8ab + 4b^2 + 12b^3 = 0\}, \quad C = S \cup \Delta.$$

Le polygone de Newton total de C est dans la figure 1.

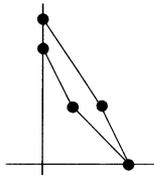


Figure 1. Polygone de Newton total de C

On a donc

$$Q_{++} = \{[(2, 1)], [(3, 2)]\}, \quad Q_{-0} = \{[(-1, 0)]\},$$

$$Q_{--} = \{[(-2, -1)], [(-1, -1)]\}.$$

Les autres Q_{st} sont vides. Le diagramme d'Eisenbud et Neumann de la courbe $\{f = 0\} \cup \{g = 0\}$ est dans la figure 2. On a représenté les flèches de f en blanc et celles de g en noir. On a écrit entre parenthèses les paires $c(v)$ pour chaque sommet v de valence supérieure ou égale à trois.

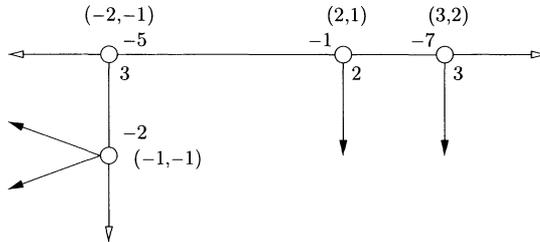


Figure 2. Diagramme d'Eisenbud et Neumann à l'infini

On voit sur cet exemple que $Q_{st}^\infty = Q_{st}$ pour $(s,t) = (+,+)$ et $(s,t) = (-,-)$. Si maintenant nous considérons la transformation $a \mapsto a - a_0$, $b \mapsto b - b_0$ avec (a_0, b_0) générique, le polygone de Newton de C devient celui de la figure 3.

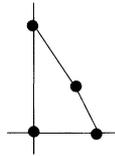


Figure 3. Polygone de Newton générique

Nous avons

$$Q_{++} = \{[(2, 1)], [(3, 2)]\}, \quad Q_{-0} = \{[(-1, 0)]\},$$

$$Q_{0-} = \{[(0, -1)]\}, \quad Q_{--} = \emptyset.$$

Le diagramme d'Eisenbud et Neumann de $\{f = a_0\} \cup \{g = b_0\}$ est dans la figure 4. On a $Q_{++}^\infty = Q_{++}$, $Q_{--}^\infty = Q_{--} = \emptyset$, $Q_{-0}^\infty = \emptyset \subsetneq Q_{-0}$ et $Q_{0-}^\infty = \emptyset \subsetneq Q_{0-}$.

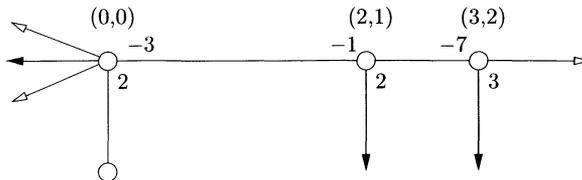


Figure 4. Diagramme d'Eisenbud et Neumann générique

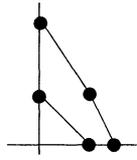


Figure 5. Polygone de Newton pour $(4, -2)$

Enfin si nous considérons la transformation $a \rightarrow a - 4, b \rightarrow b + 2$, le polygone de Newton de C est dans la figure 5 et nous avons

$$Q_{++} = \{(2, 1), (3, 2)\}, \quad Q_{-0} = \{(-1, 0)\},$$

$$Q_{0-} = \{(0, -1)\}, \quad Q_{--} = \{(-1, -1)\}.$$

Le diagramme d'Eisenbud et Neumann de $\{f = 4\} \cup \{g = -2\}$ est dans la figure 6.

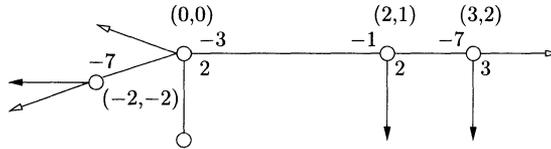


Figure 6. Diagramme d'Eisenbud et Neumann pour $(4, -2)$

On a $Q_{++}^\infty = Q_{++}$ et $Q_{--}^\infty = Q_{--}$.

Si maintenant $(a_0, b_0) \in \Delta \setminus S$ et $(a_0, b_0) \neq (4, -2)$, alors

$$Q_{++} = \{[(2, 1)], [(3, 2)]\}, \quad Q_{-0} = \{[(-1, 0)]\}, \quad Q_{0-} = \{[(0, -1)]\},$$

$$Q_{--} = \{[(-1, -1)]\}, \quad Q_{++}^\infty = Q_{++},$$

$$Q_{--}^\infty = \emptyset \subsetneq Q_{--}, \quad Q_{-0}^\infty = \emptyset \subsetneq Q_{-0}, \quad Q_{0-}^\infty = \emptyset \subsetneq Q_{0-}.$$

Dans le paragraphe 2 nous rappelons des notions topologiques et nous généralisons un résultat de Lê, Maugendre et Weber [9], que nous utilisons ensuite. La partie 3 est consacrée à la démonstration du théorème. Enfin dans la section 4 nous traitons quelques exemples.

Cet article a été terminé alors que le premier auteur était l'invité pour un mois du Laboratoire de Mathématiques pures de l'Université Bordeaux I. Il remercie le Laboratoire et l'Université pour cette invitation.

2. Rappels.

2.1. Variétés et entrelacs graphés.

Dans cette section M est une 3-variété compacte connexe sans bord et orientée. Tout entrelacs considéré dans M sera aussi orienté. Nous rappelons qu'une variété est dite seifertique si elle admet un feuilletage dont les feuilles sont des cercles.

DÉFINITION 2.1. — *La variété M est une variété graphée s'il existe une famille finie de tores $\{T_i\}_{i \in I}$ dans M avec des voisinages $V(T_i)$ de ces tores tels que $\overline{M} \setminus \bigcup_{i \in I} V(T_i)$ soit une réunion disjointe $\bigcup_{j \in J} M_j$ de variétés seifertiques connexes à bord.*

La donnée de la définition s'appelle une *décomposition de Waldhausen* de la variété. Les tores T_i s'appellent les *tores de la décomposition* et les M_j s'appellent les *morceaux seifertiques* de la décomposition. Ces variétés ont été classifiées par Waldhausen, voir [18] et [19]. Il a démontré qu'à quelques exceptions près, une variété graphée ne possède qu'une seule décomposition minimale à isotopie près. Ces exceptions ne nous concernent pas.

DÉFINITION 2.2. — *Le couple (M, L) est un entrelacs graphé si M est une variété graphée, L est un entrelacs de M et il existe une décomposition de Waldhausen de M telle que L soit une réunion de feuilles seifertiques des morceaux de la décomposition. Une telle décomposition est dite une décomposition de Waldhausen de l'entrelacs (M, L) .*

Lorsque L est non vide, la théorie de Waldhausen implique que si (M, L) est un entrelacs graphé, alors, il y a, à isotopie près, une seule décomposition de Waldhausen minimale que nous notons DMW, telle que L soit une réunion de feuilles seifertiques.

Un morceau seifertique est dit *non intrinsèque* s'il est un tore plein dont seule l'âme peut être une composante de l'entrelacs, ou un tore épaissi, ou un espace lenticulaire où seules les âmes des tores pleins peuvent être des composantes de l'entrelacs. Dans les autres cas le morceau est dit *intrinsèque*, et la fibration de Seifert est unique à isotopie près [7]. Dans la suite, sauf mention explicite, un morceau seifertique sera intrinsèque.

Supposons maintenant que M soit une variété graphée et une sphère d'homologie rationnelle de sorte que le nombre d'enlacement \mathcal{L} soit défini dans M [11]. Soient $K, L \subset M$ des multientrelacs de M tels que $(M, K \cup L)$ soit un entrelacs graphé. Soit v une feuille seifertique de

la DMW associée à $(M, K \cup L)$ telle que le couple de nombres rationnels $c(v) := (\mathcal{L}(v, K), \mathcal{L}(v, L))$ soit différent de $(0, 0)$. Remarquons que la classe d'équivalence de ce couple modulo la relation d'équivalence (1.1) ne dépend que du morceau seifertique qui contient v . Nous choisissons une feuille générique v_j pour chaque morceau seifertique. Alors, nous définissons

$$Q_{K,L} := \{[c(v_j)] \mid j \in J, c(v_j) \neq (0, 0)\},$$

qui est un invariant topologique de $(M, (K, L))$.

DÉFINITION 2.3. — Soient M, K, L comme ci-dessus. Nous dirons que $(M, (K, L))$ est positif si $Q_{K,L} \subset \mathcal{D}_{++}$. Dans ce cas il y a une identification naturelle de $Q_{K,L}$ avec

$$\bar{Q}_{K,L} := \left\{ \frac{\mathcal{L}(v_j, K)}{\mathcal{L}(v_j, L)} \mid j \in J, c(v_j) \neq (0, 0) \right\}$$

par φ_{++} , voir remarque 1.1.

Exemple 2.4. — Le couple $(S^3, (L_{f,0}^\infty, L_{g,0}^\infty))$ est tel que $(S^3, L_{f,0}^\infty \cup L_{g,0}^\infty)$ est un entrelacs graphé. Dans ce cas $Q_\infty = Q_{L_{f,0}^\infty, L_{g,0}^\infty}$. En effet, les sommets de rupture du diagramme minimal d'Eisenbud-Neumann (voir l'exemple 2.5 ci-dessous) sont en bijection avec les morceaux seifertiques de la DMW associée à $(L_{f,0}^\infty, L_{g,0}^\infty)$. Les composantes virtuelles des sommets de rupture du diagramme s'identifient à des feuilles seifertiques génériques.

Exemple 2.5. — Soit Y une surface lisse. Soit D un diviseur connexe de Y à croisements normaux. Nous supposons que les composantes irréductibles de D sont compactes et lisses. Notons G le graphe dual de D ; nous supposons aussi qu'il n'y a pas de sommet de G de valence au plus deux dont la composante irréductible associée soit rationnelle et de self-intersection -1 .

Soit M le bord d'un voisinage régulier $T(D)$ suffisamment petit de D . M est une variété graphée orientée comme bord de $T(D)$. Il y a une bijection naturelle des sommets de rupture de G (sommets de valence au moins 3 ou sommets associés à des composantes non rationnelles) et les morceaux seifertiques de la DMW de M .

Si L est une réunion de bords de curvettes de D , alors (M, L) est un entrelacs graphé. Cet entrelacs est codé par un graphe G_L obtenu à partir de G comme suit : une curvette est symbolisée par une flèche s'accrochant au sommet qui représente la composante irréductible de D qui l'intersecte. Les sommets de rupture de G_L sont en bijection avec les

morceaux seifertiques de la décomposition de Waldhausen de (M, L) induite par le diviseur.

LEMME 2.6 (cf. [14]). — *Avec les notations de l'exemple 2.5, M est une sphère d'homologie rationnelle si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

- *Toutes les composantes de D sont rationnelles.*
- *G est un arbre.*
- *La matrice d'intersection de D est non dégénérée.*

Supposons que M soit une sphère d'homologie rationnelle; soit U un voisinage suffisamment petit de D et soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $f|_D \equiv 0$. Notons K le multilink associé à f , i.e., l'intersection de $f^{-1}(0)$ avec M tenant compte des multiplicités. L'entrelacs (M, K) est graphé mais il n'est pas, en général, une réunion de bords de curvettes de D .

Soit $\pi : \widehat{U} \rightarrow U$ une résolution de f , i.e., si $\hat{f} := \pi \circ f$, alors $\hat{f}^*(0)$ est un diviseur à croisements normaux. Soit $\widehat{D} := \pi^{-1}(D)$; alors $T(\widehat{D}) := \pi^{-1}(T(D))$ est un voisinage régulier de \widehat{D} . Le bord de $T(\widehat{D})$ est identifié à M par π et K est identifié au link de \hat{f} . L'entrelacs K est devenu une réunion de bords de curvettes de \widehat{D} ; soit \widehat{G} le graphe qui représente K . Dans ce cas, les sommets de \widehat{G} de valence au moins trois sont en bijection avec les morceaux seifertiques d'une décomposition de Waldhausen de (M, K) , les feuilles seifertiques étant les bords des curvettes des composantes associées. Notons que s'il n'existe pas de sommet de valence au plus deux représentant une courbe rationnelle d'auto-intersection -1 , alors la décomposition est la DMW.

LEMME 2.7. — *Fixons une composante irréductible D_i de \widehat{D} ; soit v le bord d'une curvette V de D_i et soit m la multiplicité de D_i dans $\hat{f}^*(0)$. Alors,*

$$m = \mathcal{L}_M(v, K).$$

Démonstration. — Cette égalité découle de la définition du nombre d'enlacement. En effet, si nous notons $K_t := f^{-1}(t) \cap M$, par transversalité il y a une homotopie de K_0 à K_t , pour t assez petit, qui n'intersecte pas v ; par conséquent, $\mathcal{L}_M(v, K) = \mathcal{L}_M(v, K_t)$. Par définition de la multiplicité, $f^{-1}(t)$ intersecte V en m points. Il est possible de pousser $f^{-1}(t)$ vers une surface de Seifert F de K_t dans M de sorte que $v \cdot F = m$ et nous avons l'égalité. □

DÉFINITION 2.8. — Soit M une variété graphée et soient K, L, H des entrelacs de M tels que $(M, K \cup L \cup H)$ soit un entrelacs graphé. Nous définissons $Q_{K,L}^H$ comme $Q_{K,L}$ en considérant maintenant la DMW associée à $K \cup L \cup H$. Nous dirons que $(M, (K, L), H)$ est positif si $Q_{K,L}^H \subset \mathcal{D}_{++}$ et dans ce cas nous l'identifions à $\bar{Q}_{K,L}^H$ par φ_{++} .

Il est évident que $Q_{K,L} \subset Q_{K,L}^H$ mais en général il n'y a pas d'égalité.

2.2. Cas local généralisé.

Soit (X, p) un germe de surface normale; soit M le link de cette singularité. Nous supposons que M est une sphère d'homologie rationnelle. En particulier, le nombre d'enlacement est bien défini dans M . Soit $\phi = (f, g) : (X, p) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ le germe d'un morphisme analytique complexe fini. Notons que p est un point d'intersection isolé de $F := f^*(0)$ et $G := g^*(0)$. Soient $K_f, K_g \subset M$ les (multi)links de F et G dans X . Nous rappelons que $(M, K_f \cup K_g)$ est un entrelacs graphé et que $F \cdot G := \dim \mathcal{O}_{X,p}/(f, g) = \mathcal{L}(K_f, K_g)$.

Considérons la résolution minimale plongée $\pi : Y \rightarrow X$ de $f \cdot g$. Le diviseur $((f \cdot g) \circ \pi)^*(0)$ est à croisements normaux. Nous notons D le diviseur exceptionnel de π . La variété M s'identifie au bord d'un voisinage tubulaire de D [14]. Comme dans l'exemple 2.5, ce diviseur donne lieu à la DMW de $(M, K_f \cup K_g)$. Puisque M est une sphère d'homologie rationnelle, d'après le lemme 2.6, les morceaux seifertiques de la DMW de $(M, K_f \cup K_g)$ sont en bijection avec les composantes de D ayant valence supérieure ou égale à 3 dans le graphe dual fléché. Une feuille seifertique générique v d'un morceau de cette décomposition de M est le bord d'une curvette de la composante irréductible de D associée au morceau seifertique. Soit m la multiplicité de cette composante dans le diviseur $(f \circ \pi)^*(0)$; alors d'après le lemme 2.7,

$$m = \mathcal{L}(v, K_f).$$

Soit $h : (X, p) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe. Notons K_h le link de h . D'autre part, soit $\Delta := \{\delta = 0\}$ le lieu discriminant de ϕ et soit $\tilde{h} : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ tel que $\tilde{h}^{-1}(0) = \phi(h^{-1}(0))$. Soit \bar{Q} l'ensemble des pentes du polygone de Newton local de $\delta\tilde{h}$. Nous remarquons que $(M, (K_f, K_g), K_h)$ est positif.

Avec les arguments de [9], nous avons :

LEMME 2.9. — $\bar{Q} = \bar{Q}_{K_f, K_g}^{K_h}$.

Démonstration. — Nous notons \overline{Q}_δ et $\overline{Q}_{\tilde{h}}$ les ensembles des pentes des polygones de Newton de δ et \tilde{h} , respectivement. D'après [9], $\overline{Q}_\delta = \overline{Q}_{K_f, K_g} \subset \overline{Q}_{K_f, K_g}^{K_h}$.

Soit $q \in \overline{Q}_{\tilde{h}}$; il est égal à un quotient des nombres d'enlacement du link de $\tilde{h}_i = \phi(h_i)$, où h_i est une branche de h , avec les links des axes. Par la théorie des revêtements, le link de h_i est une feuille d'une décomposition de Waldhausen de $(M, K_f \cup K_g \cup K_h)$ et q est le quotient des nombres d'enlacement de cette feuille avec K_f et K_g .

Par définition de la DMW de $(M, K_f \cup K_g \cup K_h)$, $q \in \overline{Q}_{K_f, K_g}^{K_h}$. Par conséquent, $\overline{Q} \subset \overline{Q}_{K_f, K_g}^{K_h}$.

L'autre inclusion est immédiate par la théorie des revêtements. □

Ce lemme est une généralisation du résultat de H. Maugeudre [12] où X était \mathbb{C}^2 et h était une unité.

Remarque 2.10. — Remarquons que si M est un espace lenticulaire, K_f et K_g sont les âmes de deux tores pleins et K_h est vide, alors $\overline{Q}_{K_f, K_g}^{K_h}$ est vide car l'unique morceau seifertique n'est pas intrinsèque. D'autre part ces hypothèses impliquent que \tilde{h} est une unité et Δ est contenu dans la réunion des axes. Ceci implique que Q est également vide.

3. Démonstration du théorème.

3.1. Résolutions de ϕ .

DÉFINITION 3.1. — Une résolution de $h \in \mathbb{C}[x, y]$ est une suite d'éclatements et contractions $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ au-dessus de la droite à l'infini L_∞ de sorte que h s'étende en une application bien définie $H : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ et $H^{-1}(0) \cup \pi^{-1}(L_\infty)$ soit à croisements normaux dans un voisinage de $\pi^{-1}(L_\infty)$.

Puisque les éclatements se produisent au-dessus de la droite à l'infini, nous pouvons supposer $\mathbb{C}^2 \subset X$ et $h = H|_{\mathbb{C}^2}$. La différence $E := X \setminus \mathbb{C}^2$ est une courbe à croisements normaux dont les composantes irréductibles sont rationnelles et lisses et le graphe dual est un arbre.

NOTATION 3.2. — Si $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ est une résolution d'un polynôme h et $E := X \setminus \mathbb{C}^2$, nous dirons qu'une composante irréductible D de E est

- *h-infinie* si $H(D) = \infty \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;
- *(h, t)-constante* si $H(D) = t \in \mathbb{C}$;
- *h-dicritique* si $H|_D$ est surjective.

DÉFINITION 3.3. — Une résolution de $\phi := (f, g)$, $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$, est une suite d'éclatements et contractions $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ au-dessus de la droite à l'infini L_∞ de telle sorte que f et g s'étendent en des applications bien définies $F, G : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ et que $F^{-1}(0) \cup G^{-1}(0) \cup \pi^{-1}(L_\infty)$ soit à croisements normaux dans un voisinage de $\pi^{-1}(L_\infty)$. Nous notons $\Phi := (F, G) : X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Comme précédemment, $\phi = \Phi|_{\mathbb{C}^2}$, si l'on considère à l'arrivée $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. On a toujours $E := X \setminus \mathbb{C}^2$, une courbe à croisements normaux dont les composantes irréductibles sont rationnelles et lisses et le graphe dual est un arbre.

NOTATION 3.4. — Nous dénotons une décomposition du diviseur E associé à une résolution de $\phi = (f, g)$ comme suit :

- $D_{\infty, \infty}$ est la réunion des composantes irréductibles de E dont l'image par Φ est (∞, ∞) , i.e., elles sont à la fois *f*-infinies et *g*-infinies.
- $D_{\infty, *}$ est la réunion des composantes irréductibles qui sont *f*-infinies et soit *g*-dicritiques, soit *(g, t)*-constantes, pour $t \in \mathbb{C}^*$.
- $D_{*, \infty}$ est définie comme ci-dessus en échangeant les rôles de *f* et *g*.
- $D_{\infty, 0}$ est la réunion des composantes irréductibles qui sont *f*-infinies et *(g, 0)*-constantes. De la même façon nous définissons $D_{0, \infty}$.
- $D_{*, 0}$ est la réunion des composantes irréductibles qui sont *(g, 0)*-constantes et soit *f*-dicritiques, soit *(f, t)*-constantes, pour $t \in \mathbb{C}^*$. De la même façon nous définissons $D_{0, *}$.
- $D_{0, 0}$ est la réunion des composantes irréductibles qui sont *(g, 0)*-constantes et *(f, 0)*-constantes.
- D_S est la réunion des autres composantes irréductibles.

Remarque 3.5. — Nous remarquons que $S = \Phi(D_S \cup D_{*, 0} \cup D_{0, *}) \cap \mathbb{C}^2$. Le diviseur $D_{*, 0}$ (resp. $D_{0, *}$) peut être vide, et s'il ne l'est pas son image est l'axe $b = 0$ (resp. $a = 0$).

Exemple 3.6. — Reprenons l'exemple 1.4. Le graphe dual de la résolution de l'application ϕ est dans la figure 7.

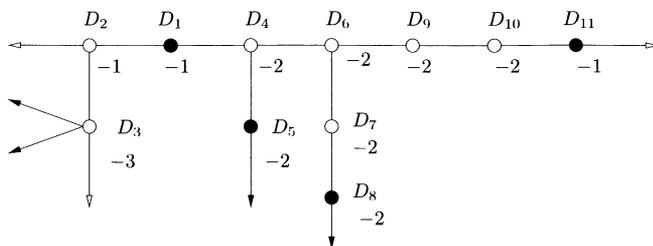


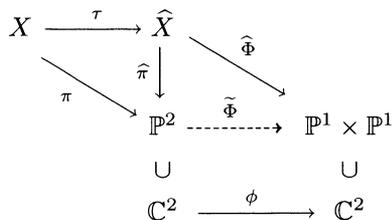
Figure 7. Graphe dual de la résolution

On a

$$D_{\infty, \infty} = D_4 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_9 \cup D_{10}, \quad D_{\infty, * } = D_5 \cup D_8, D_{*, \infty} = D_{11},$$

$$D_{\infty, 0} = D_{0, \infty} = D_{*, 0} = D_{0, * } = \emptyset, \quad D_{0, 0} = D_2 \cup D_3, \quad D_S = D_1.$$

L'application Φ est propre mais elle n'est pas finie. Les éléments $p \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ pour lesquels $\Phi^{-1}(p)$ n'est pas fini ne sont pas dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ à cause de l'hypothèse restrictive sur (f, g) . Nous considérons aussi la surface normale \widehat{X} qui est obtenue par une contraction $\tau : X \rightarrow \widehat{X}$ des composantes connexes des fibres par Φ de façon à ce que Φ soit factorisée par un morphisme fini $\widehat{\Phi} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ et π soit factorisée par $\widehat{\pi} : \widehat{X} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Les singularités de \widehat{X} sont au-dessus de la droite à l'infini et τ est une résolution de \widehat{X} . Nous avons le diagramme commutatif :



où les flèches $\widehat{\pi}$ et π sont rationnelles. Nous avons $\Phi = \widehat{\Phi} \circ \tau$.

La surface normale \widehat{X} , l'application rationnelle $\widehat{\pi}$ et le morphisme $\widehat{\Phi}$ ne dépendent pas de la résolution Φ choisie. L'application τ est une résolution de \widehat{X} . On fixe pour la suite la résolution Φ qui rend τ minimale.

3.2. Stratégie.

Le point clé de la démonstration du théorème 1.3 est le suivant : il s'agit de considérer les quatre *axes de coordonnées* de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, i.e., $a = 0, \infty, b = 0, \infty$. Chaque élément de la décomposition de Γ est associé soit à un axe soit à une *origine* de ce système de coordonnées.

On considère le diviseur $E = X \setminus \mathbb{C}^2$. Le bord d'un voisinage tubulaire de E est une sphère S^3 contenue dans \mathbb{C}^2 . C'est la grande sphère qui contient les entrelacs $L_{f,0}^\infty$ et $L_{g,0}^\infty$. La décomposition de Waldhausen de S^3 construite comme dans l'exemple 2.5, est la DMW associée à l'entrelacs $L_{f,0}^\infty \cup L_{g,0}^\infty$.

Remarque 3.7. — Si E n'est pas minimal pour la résolution de $F^{-1}(0) \cup G^{-1}(0)$, il détermine aussi la DMW car aucun sommet de rupture ne disparaît quand on rend E minimal.

On considère les sous-diviseurs définis dans la notation 3.4. Le bord d'un voisinage tubulaire d'un sous-diviseur est une variété graphée. On obtient S^3 par plombage de ces variétés graphées. Chaque variété graphée est munie d'un entrelacs graphé qui correspond aux composantes de $L_{f,0}^\infty$ et $L_{g,0}^\infty$ qui sont contenues dans cette variété et aux intersections des composantes voisines avec cette variété. Ces dernières composantes sont utilisées dans le plombage. Les variétés et les entrelacs sont :

- $M_{\infty,\infty}$ qui est le bord d'un voisinage tubulaire $N(D_{\infty,\infty})$ de $D_{\infty,\infty}$. Chaque composante irréductible D de $\overline{E \setminus D_{\infty,\infty}}$ donne lieu à une composante connexe de l'entrelacs $K_{\infty,\infty}$ (bord de l'intersection de D avec $N(D_{\infty,\infty})$). La variété $M_{\infty,\infty}$ est connexe.

- De la même façon on construit $M_{0,\infty}$. Cette variété n'est pas nécessairement connexe. L'entrelacs $K_{0,\infty}$ peut contenir des composantes de $L_{f,0}^\infty$. Il en va de même pour $M_{\infty,0}, M_{0,0}, M_{*,\infty}, M_{\infty,*}, M_{0,*}$ et $M_{*,0}$ avec les composantes convenables pour les entrelacs.

- La variété M_S est le bord du voisinage tubulaire de D_S .

Remarque 3.8. — La décomposition de Waldhausen de S^3 associée à l'entrelacs $L_{f,0}^\infty \cup L_{g,0}^\infty$ induit sur chacune de ces variétés une décomposition de Waldhausen. Le point clé est que cette décomposition est minimale par rapport à l'entrelacs correspondant.

D'après cette remarque, chaque morceau seifertique de la DMW de $(S^3, L_{f,0}^\infty \cup L_{g,0}^\infty)$ est un morceau seifertique de la DMW d'un de ces entrelacs.

LEMME 3.9. — Fixons un morceau seifertique et choisissons une feuille seifertique générique v . Considérons le couple $c(v)$. Alors,

- (i) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{++}$ si et seulement si v est dans $M_{\infty,\infty}$.
- (ii) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{-+}$ si et seulement si v est dans $M_{0,\infty}$.
- (iii) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{+-}$ si et seulement si v est dans $M_{\infty,0}$.
- (iv) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{--}$ si et seulement si v est dans $M_{0,0}$.
- (v) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{+0}$ si et seulement si v est dans $M_{\infty,*}$.
- (vi) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{0+}$ si et seulement si v est dans $M_{*,\infty}$.
- (vii) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{0-}$ si et seulement si v est dans $M_{*,0}$.
- (viii) $[c(v)] \in \mathcal{D}_{-0}$ si et seulement si v est dans $M_{0,*}$.
- (ix) $c(v) = (0, 0)$ si et seulement si v est dans M_S .

Démonstration. — Il suffit de regarder le signe de $\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty)$; celui de $\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{g,0}^\infty)$ s'étudie de la même façon. On note D la composante irréductible de E dont v est le bord d'une curvette.

Cas 1. — D est f -infinie.

Soit $t \in \mathbb{C}^*$ une valeur générique de f telle que $|t|$ soit suffisamment petit et $f^{-1}(t) \pitchfork S^3$. Par l'invariance homotopique (loin de v),

$$\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,t}^\infty) = \mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty).$$

L'entrelacs $L_{f,t}^\infty$ est le bord d'une réunion finie de curvettes des dicritiques de f . On choisit s générique avec $|s|$ suffisamment grand pour que $f^{-1}(s)$ soit contenu dans l'intérieur de $N(E)$. On isotope dans $N(E)$ les curvettes contenues dans $\overline{f^{-1}(t)}$ vers des curvettes contenues dans $\overline{f^{-1}(s)}$.

On définit une surface Γ proprement plongée dans $N(E)$ telle que

$$\partial\Gamma = L_{f,t}^\infty :$$

- on prend des petites couronnes dans les curvettes contenues dans $\overline{f^{-1}(t)}$;
- on relie les bords intérieurs de ces couronnes avec des cercles dans $f^{-1}(s)$ au moyen de l'isotopie;
- on recolte avec la surface $\overline{f^{-1}(s)}$ privée des disques ouverts bordés par ces cercles.

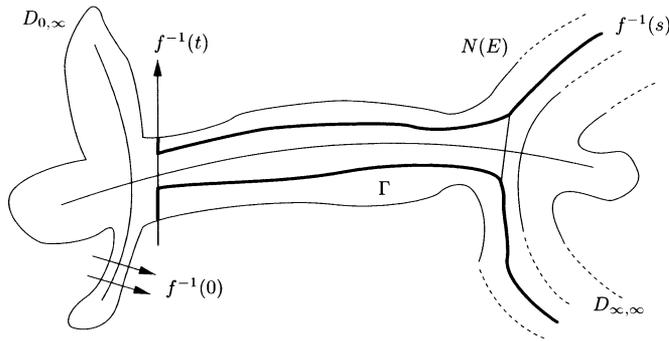


Figure 8. Surface Γ

L'espace $N(E)/E$ obtenu par la contraction de E en un point est homéomorphe à D^4 . Soit V une curvette de bord v . D'après la définition du nombre d'enlacement, et puisque les intersections de V et $f^{-1}(s)$ sont loin de E , alors,

$$\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,t}^\infty) = V \cdot \Gamma = V \cdot f^{-1}(s) > 0.$$

Cas 2. — D est f -dicritique ou (f, t) -constante pour $t \in \mathbb{C}^*$.

Avec les mêmes arguments, nous pouvons construire une surface $\tilde{\Gamma}$ disjointe de V . Par conséquent, $\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty) = 0$.

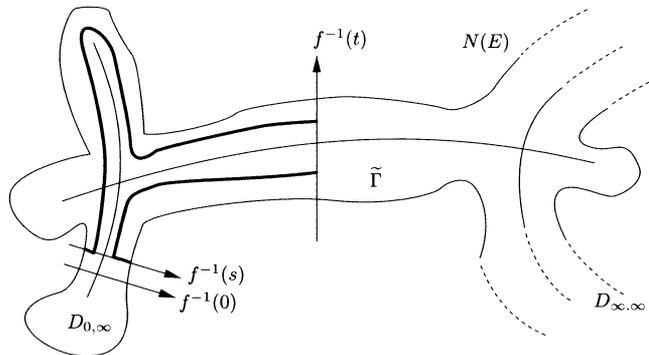


Figure 9. Surface $\tilde{\Gamma}$

Cas 3. — D est $(f, 0)$ -constante.

Soit t une valeur générique pour laquelle $f^{-1}(t) \cap S^3$ est $L_{f,t}^\infty$, i.e., il s'agit de l'entrelacs de $f^{-1}(t)$ à l'infini. D'après le cas 2, nous avons

$$\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,t}^\infty) = 0.$$

L'entrelacs $L_{f,t}^\infty$ est le bord d'une réunion finie de curvettes des dicritiques de f . On choisit s générique avec $|s|$ suffisamment petit; remarquons que $f^{-1}(s) \pitchfork S^3$ mais en général, $L := f^{-1}(s) \cap S^3$ n'est pas l'entrelacs de $f^{-1}(s)$ à l'infini. Néanmoins, il y a une homotopie loin de v de $L_{f,0}^\infty$ vers L et

$$\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty) = \mathcal{L}_{S^3}(v, L).$$

On isotope dans $N(E)$ les curvettes contenues dans $\overline{f^{-1}(t)}$ vers des curvettes contenues dans $f^{-1}(s)$.

On définit une surface $\tilde{\Gamma}$ proprement plongée dans $N(E)$ telle que $\partial\tilde{\Gamma} = L_{f,t}^\infty - L$ comme dans le cas 1.

Soit V une curvette de bord v . On obtient ici :

$$\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,t}^\infty) - \mathcal{L}_{S^3}(v, L) = V \cdot \tilde{\Gamma} = V \cdot f^{-1}(s).$$

D'où $\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty) < 0$. □

Grâce au lemme 3.9, le bi-signe de $c(v)$ détermine la variété qui contient le morceau seifertique de v . Ceci nous permet de nous ramener à une étude cas par cas. Pour démontrer le théorème, nous distinguons trois cas. Le premier, cas (i)–(iv), où le lemme 2.9 joue un rôle essentiel, est étudié dans les paragraphes 3.3, 3.4 et 3.5. Le deuxième, cas (v)–(viii), fait l'objet d'une étude directe dans les paragraphes 3.6 et 3.7. Le troisième cas (ix) ne donne pas d'éléments de Q_∞ .

3.3. Au-dessus de (∞, ∞) .

Il est bien connu [10] que $\Phi^{-1}(\infty, \infty) = D_{\infty, \infty}$ est connexe et, par conséquent, $\widehat{\Phi}^{-1}(\infty, \infty)$ n'a qu'un point que nous noterons p . Considérons le germe de fonction $\widehat{\Phi}_p : (\widehat{X}, p) \rightarrow (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, (\infty, \infty))$; en prenant des coordonnées analytiques $\alpha := a^{-1}$ et $\beta := b^{-1}$, centrées en (∞, ∞) , nous avons une application $\tilde{\Phi}_p : (\widehat{X}, p) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dont les fonctions coordonnées sont F^{-1} et G^{-1} .

Le link de (\widehat{X}, p) est la variété $M_{\infty, \infty}$. On considère $D_{\infty, \infty}$ comme un diviseur bipondéré : à chaque composante irréductible D nous associons un couple (m, n) tel que pour un point générique q de D on choisisse des coordonnées analytiques u, v centrées en q , $u = 0$ étant une équation de D , et telles que $F \sim u^{-m}$ et $G \sim u^{-n}$, où \sim veut dire égalité à unité près.

Nous notons $K_{\infty, \infty}^f$ (resp. $K_{\infty, \infty}^g$) le multientrelacs associé au germe de F^{-1} (resp. G^{-1}) en (∞, ∞) . Par construction, $K_{\infty, \infty}^f \cup K_{\infty, \infty}^g \subset K_{\infty, \infty}$. Nous notons $K_{\infty, \infty}^h$ le complémentaire $K_{\infty, \infty} \setminus (K_{\infty, \infty}^f \cup K_{\infty, \infty}^g)$.

Chaque composante connexe de l'entrelacs $K_{\infty, \infty}$ est contenue dans une composante irréductible du diviseur réduit $E - D_{\infty, \infty}$ qui intersecte $D_{\infty, \infty}$; soient A_1, \dots, A_r ces composantes. Notons K_i la composante connexe de $K_{\infty, \infty}$ associée à A_i ; il s'agit de l'intersection de A_i avec $M_{\infty, \infty}$. L'entrelacs $K_{\infty, \infty}$ est décomposé en les trois entrelacs $K_{\infty, \infty}^f$, $K_{\infty, \infty}^g$ et $K_{\infty, \infty}^h$ comme suit :

- A_i est g -dicritique et f -infinie. Alors, $K_i \subset K_{\infty, \infty}^f$ et son poids est la multiplicité de F^{-1} en A_i .
- A_i est f -dicritique et g -infinie. Alors, $K_i \subset K_{\infty, \infty}^g$ et son poids est la multiplicité de G^{-1} en A_i .
- A_i est f -dicritique et g -dicritique, notée dorénavant (f, g) -dicritique. Alors, $K_i \subset K_{\infty, \infty}^h$.

En particulier, $K_{\infty, \infty}^h$ est le link d'un germe de courbe dans \widehat{X} .

Exemple 3.10. — Si nous reprenons l'exemple 1.4, nous avons la situation à l'infini dans la figure 10.

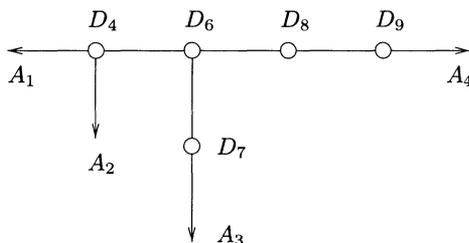


Figure 10. Graphe dual de $D_{\infty, \infty}$

Alors $K_1 \subset K_{\infty, \infty}^h$, $K_2 \cup K_3 \subset K_{\infty, \infty}^f$, $K_4 \subset K_{\infty, \infty}^g$.

LEMME 3.11. — Soit κ une branche de S en (∞, ∞) ; alors, il existe A_i , telle que A_i soit (f, g) -dicritique, vérifiant $\kappa = \Phi(A_i)$. Réciproquement, si A_i est (f, g) -dicritique, alors $\Phi(A_i)$ est une branche de S en (∞, ∞) .

Dans la notation du lemme 2.9 le germe de S en (∞, ∞) est le lieu des zéros de \tilde{h} . Le germe de Δ en (∞, ∞) est le lieu des zéros de δ . Il s'ensuit que $\varphi_{++}(Q_{++})$ est égal à l'ensemble des pentes de $\tilde{h}\delta$, voir remarque 1.1 pour la définition de φ_{++} . Par le lemme 2.9, cet ensemble est égal à

$$\overline{Q}_{K_{\infty, \infty}^f, K_{\infty, \infty}^g}^{K_{\infty, \infty}^h}$$

Remarquons que pour obtenir cet ensemble, nous calculons des nombres d'enlacement dans $M_{\infty, \infty}$.

PROPOSITION 3.12. — Soit A une composante de rupture du graphe dual de $D_{\infty,\infty} \cup A_1 \cup \dots \cup A_r$. Soit $v \subset M_{\infty,\infty}$ le bord d'une curvette de A (i.e., une feuille seifertique générique du morceau défini par A). Alors,

$$\mathcal{L}_{M_{\infty,\infty}}(v, K_{\infty,\infty}^f) = \mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty).$$

Il en est de même pour g .

Démonstration. — On utilise les notations et la démonstration du cas 1 du lemme 3.9. L'égalité

$$\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty) = V \cdot \Gamma = V \cdot f^{-1}(s)$$

donne le résultat car $\mathcal{L}_{M_{\infty,\infty}}(v, K_{\infty,\infty}^f) = V \cdot f^{-1}(s)$ d'après le lemme 2.7. □

Comme conséquence de cette proposition et du lemme 3.9, nous avons l'égalité $\varphi_{++}(Q_{++}^\infty) = \overline{Q}_{K_{\infty,\infty}^f, K_{\infty,\infty}^g}$. Puisque φ_{++} est bijective nous en déduisons $Q_{++} = Q_{++}^\infty$.

3.4. Au-dessus de $(0, \infty)$ et $(\infty, 0)$.

Il n'est plus vrai en général que $\Phi^{-1}(0, \infty)$ est connexe. Ses composantes connexes sont soit des composantes connexes de $D_{0,\infty}$, soit des points isolés dans E . Ces derniers correspondent à des points dans des composantes D f -dicritiques et g -infinies, points en lesquels $F^{-1}(0)$ est transverse à D . Les points isolés ne contribuent pas à Q_{-+}^∞ , et en utilisant des coordonnées locales on vérifie qu'ils ne contribuent pas non plus à Q_{-+} .

Nous fixons une composante connexe D_q de $D_{0,\infty}$. Notons q son image dans \widehat{X} . Considérons le germe de fonction $\widehat{\Phi}_q : (\widehat{X}, q) \rightarrow (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, (0, \infty))$; en prenant des coordonnées analytiques a et $\beta := b^{-1}$, centrées en $(0, \infty)$, nous avons une application $\widetilde{\Phi}_q : (\widehat{X}, q) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dont les fonctions coordonnées sont F et G^{-1} . Le diviseur D_q est bipondéré par les multiplicités de F et G^{-1} .

Soit M_q le bord d'un voisinage tubulaire $N(D_q)$ de D_q . La variété M_q est une composante connexe de $M_{0,\infty}$ qui s'identifie au link de (\widehat{X}, q) .

Soit K_q le sous-entrelacs de $K_{0,\infty}$ contenu dans M_q . Nous notons K_q^f (resp. K_q^g) le multientrelacs associé au germe de F (resp. G^{-1}) en q . Par construction, $K_q^f \cup K_q^g \subset K_q$. Nous notons K_q^h le complémentaire $K_q \setminus (K_q^f \cup K_q^g)$.

Chaque composante connexe de l'entrelacs K_q est contenue dans une composante irréductible du diviseur réduit $E + F^{-1}(0) - D_q$ qui intersecte D_q ; soient B_1, \dots, B_s ces composantes. Notons K_i la composante connexe de K_q associée à B_i ; il s'agit de l'intersection de B_i avec M_q . Les possibilités pour les B_i sont les suivantes :

- B_i est g -dicritique et $(f, 0)$ -constante. Alors, $K_i \subset K_q^f$ et son poids est la multiplicité de F en B_i .
- B_i est une branche à l'infini de $f^{-1}(0)$. Alors, $K_i \subset K_q^f$ et son poids est la multiplicité de f en B_i .
- B_i est f -dicritique et g -infinie. Alors, $K_i \subset K_q^g$ et son poids est la multiplicité de G^{-1} en B_i .

On remarque qu'en fait K_q^h est vide.

PROPOSITION 3.13. — Soit $B \subset D_q$ une composante de rupture du graphe dual de $D_q \cup B_1 \cup \dots \cup B_s$. Soit $v \subset M_q$ le bord d'une curvette de B (i.e., une feuille seifertique générique du morceau défini par B). Alors,

$$\mathcal{L}_{M_q}(v, K_q^f) = -\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{M_q}(v, K_q^g) = \mathcal{L}_{S^3}(v, L_{g,0}^\infty).$$

Démonstration. — L'égalité pour g se démontre de la même façon que dans la preuve de la proposition 3.12.

On utilise les notations et la démonstration du cas 3 du lemme 3.9. L'égalité

$$\mathcal{L}_{S^3}(v, L_{f,0}^\infty) = -V \cdot f^{-1}(s)$$

donne le résultat car d'après le lemme 2.7, $\mathcal{L}_{M_{\infty,\infty}}(v, K_{\infty,\infty}^f) = V \cdot f^{-1}(s)$. □

On conclut comme dans le paragraphe 3.3. On décompose

$$\varphi_{-+}(Q_{-+}^\infty) = \bigcup_q \bar{Q}_q^\infty$$

d'après les pentes du polygône de Newton du discriminant de chaque $\tilde{\Phi}_q$. D'après le lemme 2.9, on obtient $\bar{Q}_q^\infty = \bar{Q}_{K_q^f, K_q^g}^\infty$. L'ensemble Q_{-+} s'écrit aussi comme réunion (non nécessairement disjointe) de sous-ensembles Q_q associés à chaque q ; d'après la dernière proposition et le lemme 3.9, nous avons $\varphi_{-+}(Q_q) = \bar{Q}_{K_q^f, K_q^g}^\infty$. Par conséquent, $Q_{-+} = Q_{-+}^\infty$.

En échangeant les rôles de f et g , nous avons $Q_{+-} = Q_{+-}^\infty$ pour $(\infty, 0)$.

3.5. Au-dessus de $(0, 0)$.

Nous raisonnons comme dans les paragraphes 3.3 et 3.4, et nous obtenons $Q_{--}^\infty \subset Q_{--}$.

Il n'y a pas d'égalité en général car $(0, 0)$ peut avoir des préimages affines qui pourraient fournir de nouvelles paires pour Q_{--} , lesquelles proviendraient de la courbe discriminante. Si le point $(0, 0) \notin C$, nous avons l'égalité car les deux ensembles sont vides. Si $(0, 0) \in S \setminus \Delta$, il y aura aussi égalité et les ensembles ne sont pas vides. Rappelons que la courbe S provient de $\varphi(E)$.

3.6. Au-dessus de $\mathbb{C}^* \times \{\infty\}$ et $\{\infty\} \times \mathbb{C}^*$.

Rappelons que \mathcal{D}_{0+} a exactement un point $[(0, 1)]$. Il suffit d'étudier les différentes possibilités pour Q_{0+} et Q_{0+}^∞ afin de voir si $[(0, 1)]$ leur appartient ou non.

Fixons une composante connexe V de $\Phi^{-1}(\mathbb{C}^* \times \{\infty\})$, qui s'identifie naturellement à $\hat{\Phi}^{-1}(\mathbb{C}^* \times \{\infty\})$. L'adhérence \bar{V} est un sous-diviseur connexe maximal de $D_{*,\infty}$. Le bord M_V d'un voisinage tubulaire $N(\bar{V})$ de \bar{V} est une composante connexe de $M_{*,\infty}$; nous notons $K_V = K_{*,\infty} \cap M_V$. Chaque composante connexe de K_V est l'intersection de M_V avec un voisin de \bar{V} dans E .

Le diviseur \bar{V} contient exactement un f -dicritique D_V . Si M_V possède des morceaux seifertiques intrinsèques, alors D_V en fournit un. Il suffit de l'étudier.

Ce dicritique intersecte exactement une fois $D_{\infty,\infty}$ ce qui donne une composante connexe de K_V qui s'accroche à D_V . Considérons la fonction méromorphe $F|_{D_V}$; soit $r \geq 1$ le nombre des zéros distincts de cette fonction. La valence de D_V dans le graphe associé à l'entrelacs (D_V, K_V) est au moins $r + 1$. Cette valence peut augmenter dans deux cas :

- Il y a une composante connexe de $\bar{V} - D_V$ dont toutes les composantes sont (f, t) -constantes et g -infinies, $t \in \mathbb{C}^*$, et telle qu'elle soit aussi une composante connexe de $E - V$. D'après [10], cette composante connexe est une chaîne linéaire que l'on appelle (f, t) -branche morte.
- Il y a une composante connexe de K_V contenue dans un g -dicritique.

Nous en déduisons que (M_V, K_V) possède des morceaux seifertiques intrinsèques si et seulement si la valence de D_V est supérieure strictement à 2. On distingue quatre cas et l'on étudie aussi la contribution de \bar{V} à $Q_{0,+}$.

Remarquons que $Q_{0,+}$ est non vide si et seulement si C a des branches qui rencontrent $\mathbb{C}^* \times \{\infty\}$. On écrit

$$p(a, b) = \sum_{j=n}^m p_j(a) b^j,$$

avec $n < m$ et $p_n(a)p_m(a) \neq 0$. Les intersections avec $\mathbb{C} \times \{\infty\}$ sont données par $p_m(a) = 0$. Le polygone de Newton de p a une face horizontale supérieure si et seulement si $p_m(a)$ n'est pas un monôme, c'est-à-dire, $p_m(a)$ a des racines non nulles.

Cas 1. — $r > 1$.

Dans ce cas $Q_{0,+}^\infty$ est non vide. La fonction $F|_{D_V}$ a une valeur critique dans \mathbb{C}^* et notons $p \in D_V$ un point critique pour cette valeur. Une branche à l'infini du jacobien passe par p et $\Delta \subset C$ a une branche qui rencontre $\mathbb{C}^* \times \{\infty\}$.

Cas 2. — Il y a une (f, t) -branche morte, $t \in \mathbb{C}^*$.

Comme précédemment, la valence est au moins trois et $Q_{0,+}^\infty$ est non vide. On contracte la branche morte en un point p et on note Y la surface normale obtenue; le point p est singulier. L'application Φ induit une application finie $\Psi : (Y, p) \rightarrow (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, (t, \infty))$. Si le lieu jacobien de Ψ est contenu dans D_V , alors son lieu discriminant est lisse et Y est non singulier. Comme ce n'est pas le cas, il y a du lieu jacobien pour Ψ en dehors de D_V , c'est-à-dire, il y a du lieu jacobien pour Φ dans la partie affine près de la branche morte. Alors, $\Delta \subset C$ a une branche qui rencontre $\mathbb{C}^* \times \{\infty\}$.

Cas 3. — Il y a une composante connexe de K_V contenue dans un g -dicritique.

La valence est au moins trois et $Q_{0,+}^\infty$ est non vide. Le g -dicritique est (f, t) -constant pour une valeur $t \neq 0$. Par conséquent, la droite $a = t$ est contenue dans S et $Q_{0,+}$ est non vide.

Cas 4. — Tous les autres cas.

Nous avons $r = 1$ et la valence est 2. Alors, $Q_{0,+}^\infty$ est vide. Si le lieu jacobien a une branche à l'infini sur D_V , ce sera en un point critique de $F|_{D_V}$ et il ne donne pas de branches pour Δ qui rencontrent $\mathbb{C}^* \times \{\infty\}$. Il est facile de voir que ce cas ne donne pas de branche de S qui rencontre $\mathbb{C}^* \times \{\infty\}$.

Nous avons démontré que $Q_{0,+}^\infty = Q_{0,+}$. Ces arguments marchent aussi pour $\{\infty\} \times \mathbb{C}^*$

3.7. Au-dessus de $\mathbb{C}^* \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathbb{C}^*$.

Ces cas s'étudient comme dans le paragraphe 3.6. Il faut aussi tenir compte des intersections du jacobien avec $f^{-1}(0)$ et $g^{-1}(0)$ comme dans le paragraphe 3.5.

Si $Q_{0,-}^\infty$ est non vide, il y a égalité. Sinon, il y a égalité si et seulement si la courbe discriminante ne rencontre pas $\mathbb{C}^* \times \{0\}$.

On finit cette section avec une conséquence de la démonstration donnée au paragraphe 3.6. Nous disons qu'un f -dicritique D est *mauvais* si $f|_D$ est de degré plus grand que 1 ou D est voisin de composantes (f, t) -constantes dans la résolution minimale de f . Sinon, D est *bon*. On rappelle que f est équisingulier à l'infini si et seulement si tous les f -dicritiques sont bons.

PROPOSITION 3.14. — *S'il y a un f -dicritique mauvais qui est g -infini, alors le lieu jacobien de $\phi = (f, g)$ est non vide.*

Démonstration. — La preuve est faite dans les cas 1 et 2 du paragraphe 3.6. □

4. Exemples.

Nous allons tout d'abord donner quelques exemples qui illustrent le théorème, puis nous étudierons des exemples liés à la conjecture du jacobien.

Rappelons un résultat utile. Étant donné deux polynômes $f, g \in \mathbb{C}[x, y]$ nous notons $(f, g)_{\mathbb{C}^2}$ le nombre d'intersection de $\{f = 0\}$ et $\{g = 0\}$ dans \mathbb{C}^2 . Pour $a \in \mathbb{C}$ nous notons :

$$d(f_a, g) := (f - a, g - v)_{\mathbb{C}^2}, \quad v \text{ générique,}$$

$$\Lambda_g(f_a) := \sum_{v \in \mathbb{C}} (d(f_a, g) - (f - a, g - v)_{\mathbb{C}^2}).$$

Notons $\chi(f_a)$ la caractéristique d'Euler de la fibre $\{f = a\}$.

PROPOSITION 4.1. — *Le jacobien de f et g vérifie pour tout $a \in \mathbb{C}$:*

$$(J(f, g), f - a)_{\mathbb{C}^2} = d(f_a, g) - \Lambda_g(f_a) - \chi(f_a).$$

Cette formule est analogue à la formule obtenue dans [3] pour la polaire. Elle a été obtenue indépendamment par Assi [1], Gwoździewicz et

Płoski [6] et les auteurs (présentée dans un exposé du 26 octobre 1998 à Grenoble). La preuve en est aisée et reprend des idées de Teissier [17] dans le cas local.

4.1. Quelques exemples.

Exemple 4.2. — Nous reprenons les notations de l'exemple 1.4. Nous considérons maintenant l'application $\phi = (f, g)$ où $f = p^2u + ps + 3s$ comme précédemment et $g = uy + 1$. Dans ce cas, nous avons $S = \{b = 1\}$.

Le diagramme d'Eisenbud et Neumann de $\{(f - a)(g - b) = 0\}$ est dans la figure 11.

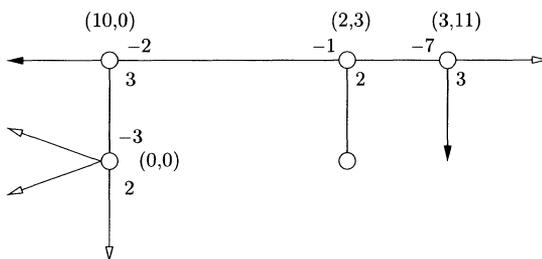


Figure 11. Diagramme d'Eisenbud et Neumann à l'infini

Nous avons $(J(f, g), f - a)_{\mathbb{C}^2} = 6$, $(J(f, g), g - b)_{\mathbb{C}^2} = 13$, et le polygone de Newton à l'infini de la courbe discriminante est dans la figure 12.



Figure 12. Polygone de Newton

Exemple 4.3. — Nous considérons maintenant l'application $\phi = (f, g)$ où $f = p^2u + ps + 3s$ comme précédemment et $g = p^4u^2 - (ps + 1)^2$. On trouve $S = \{1 - 4a - 10a^2 - 4a^3 + a^4 + 2b - 2ba^2 + b^2 = 0\}$. Nous n'avons pu calculer la courbe discriminante.

Le diagramme d'Eisenbud et Neumann de la courbe

$$\{(f - 0)(g - 0) = 0\}$$

est dans la figure 13. Les paires $(1, 1)$ et $(1, -2)$ donnent des pentes de la courbe discriminante.

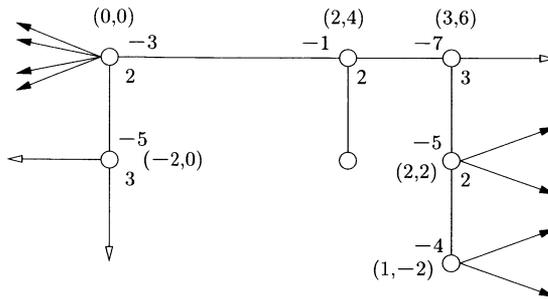


Figure 13. Diagramme d'Eisenbud et Neumann à l'infini

Le diagramme d'Eisenbud et Neumann de la courbe

$$\{(f - a)(g - b) = 0\}$$

pour (a, b) générique, est dans la figure 14.

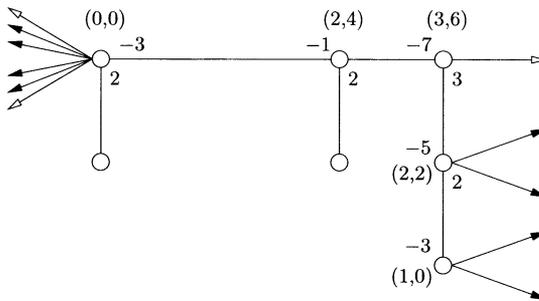


Figure 14. Diagramme d'Eisenbud et Neumann générique

Nous obtenons $(J(f, g), f - a)_{\mathbb{C}^2} = 7$, $(J(f, g), g - b)_{\mathbb{C}^2} = 8$ pour (a, b) génériques. Dans la figure 15 nous avons les polygones de Newton à l'infini de la courbe discriminante, dans un système de coordonnées génériques et dans le système de coordonnées correspondant à $f = 0$, $g = 0$.

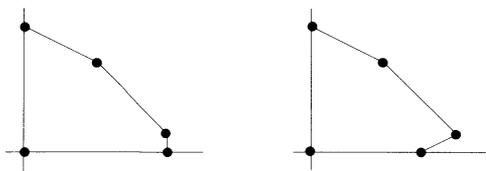


Figure 15. Polygones de Newton générique et spécial

4.2. Exemples de Moh [13].

Pour qu'une application soit un contre-exemple potentiel à la conjecture du jacobien, il est nécessaire que les paires qui apparaissent aux sommets de valence supérieure ou égale à trois du diagramme d'Eisenbud et Neumann à l'infini de $\{(f-t)(g-t')=0\}$, pour t, t' génériques, proviennent des courbes de non-propreté de l'application. Or on sait que les paires qui correspondent aux courbes de non-propreté de l'application, qui ne sont pas des droites parallèles aux axes, sont les paires de multiplicités des dicritiques communs. C'est ce qui se passe pour les cas exceptionnels de Moh [13].

Exemple 4.4 (48,64). — Ici, f et g sont de degrés respectifs 64 et 48. Il y a un dicritique commun sans bambou, dont la multiplicité est 16 sur f et 12 sur g . Donc on a une seule courbe de non-propreté qui a pour paire $(4, 3)$. Toutes les paires qui apparaissent sont bien congruentes à $(4, 3)$.

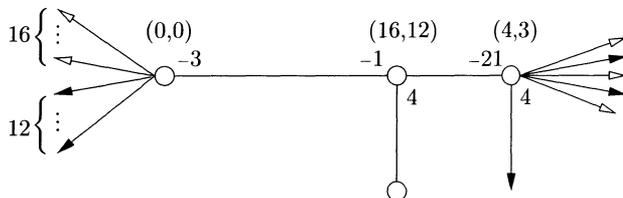


Figure 16. Diagramme d'Eisenbud et Neumann (48, 64)

Exemple 4.5 (66,99). — Ici, f et g sont de degrés respectifs 99 et 66. Il y a un dicritique commun avec bambou, dont la multiplicité est 9 sur f et 6 sur g . Donc on a une seule courbe de non-propreté qui a pour paire $(3, 2)$. Toutes les paires qui apparaissent sont bien congruentes à $(3, 2)$ (figure 17).

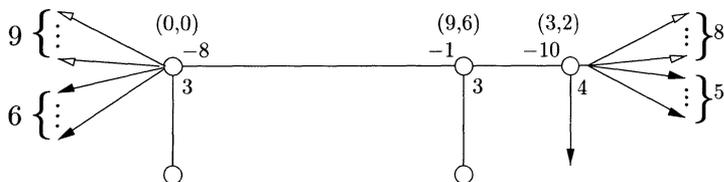


Figure 17. Diagramme d'Eisenbud et Neumann (66, 99)

Exemple (50,75). — Ici, f et g sont de degrés respectifs 75 et 50. Il y a un dicritique commun sans bambou, dont la multiplicité est 15 sur f et 10 sur g . Donc on a une seule courbe de non-propreté qui a pour paire $(3, 2)$. Toutes les paires qui apparaissent sont bien congruentes à $(3, 2)$ (figure 18).

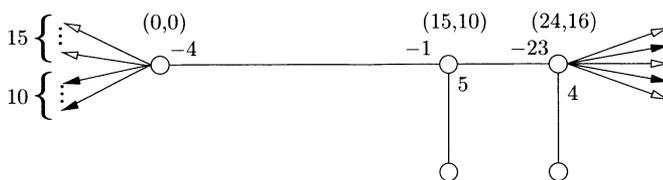


Figure 18. Diagramme d'Eisenbud et Neumann (50, 75)

Exemple (56,84). — Ici, f et g sont de degrés respectifs 84 et 56. Il y a deux dicritiques communs sans bambou, dont la multiplicité est 21 sur f et 14 sur g pour l'un et 3 sur f et 2 sur g pour l'autre. Donc on a deux courbes de non-propreté qui ont toutes les deux pour paires $(3, 2)$. Toutes les paires qui apparaissent sont bien congruentes à $(3, 2)$.

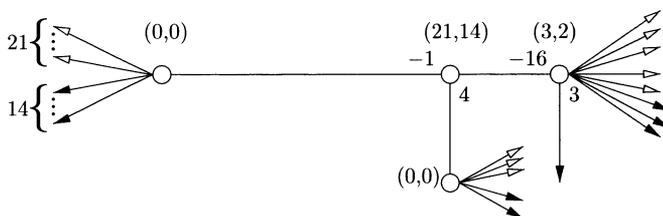


Figure 19. Diagramme d'Eisenbud et Neumann (56, 84)

Remarque 4.8. — On peut déduire du lemme principal de [4], que si le jacobien d'une application polynomiale est une constante non nulle, alors la seule classe de $Q_{+,+}^\infty$ est $[(\deg f, \deg g)]$ et que $Q_{0,+}^\infty$ et $Q_{+,0}^\infty$ sont vides. On observe cette propriété sur les exemples précédents.

4.3. Jacobien et dicritiques.

Remarque 4.9. — Il est bien connu, que l'on peut trouver les valeurs de bifurcation d'un polynôme à deux indéterminées, en étudiant l'intersection d'une polaire générique avec les fibres. Ce n'est plus vrai sans l'hypothèse de genericité. Nous donnons ici un exemple d'application non propre, telle que le nombre d'intersection de la courbe jacobienne avec les fibres de f ou les fibres de g est constant.

Soient

$$f = y^3x^6 + 3x^5y^2 + 6x^4y^2 + 3x^4y + 12x^3y + 2y^2x^3 \\ + x^3 + 6x^2 + 31/4x^2y + 23/4x + 7xy - 35/4 + y$$

et

$$g = x^4y^2 + 2x^3y + x^2 + x^2y + x + 4/3xy - 14/3.$$

L'application (f, g) est une application de degré 4, avec une courbe de non-propreté

$$S = -b^3 + 399/16b + 9/2b^2 - 9ba - 95/4a + a^2.$$

On a pour tout a , $(J, f - a)_{\mathbb{C}^2} = 5$ et pour tout b , $(J, g - b)_{\mathbb{C}^2} = 4$. Nous avons dessiné dans la figure 20 les branches de la courbe jacobienne sur le diagramme de $\{(f - a)(g - b) = 0\}$. Il faut souligner que dans cet exemple les branches de la courbe jacobienne passent par $D_{\infty, \infty}$.

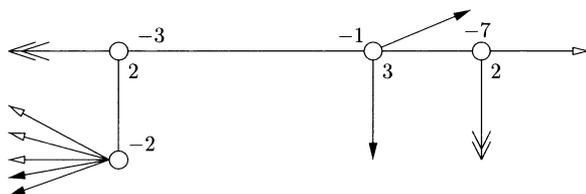


Figure 20. Branches jacobiennes

Un polynôme f est dit *générateur de corps* si sa fibre générique est une courbe rationnelle. Cette dénomination est justifiée car il s'agit des polynômes f pour lesquels il existe une fonction rationnelle h telle que $\mathbb{C}(x, y) = \mathbb{C}(f, h)$. Un tel f est dit *bon générateur de corps* si h peut être choisie dans $\mathbb{C}[x, y]$ et *mauvais générateur de corps* sinon.

COROLLAIRE 4.10. — Si f est un mauvais générateur de corps, alors, $\forall g \in \mathbb{C}[x, y]$, l'application $\phi = (f, g)$ a un lieu jacobien non vide.

Démonstration. — Il est démontré dans [16] (ou [15]) qu'un mauvais générateur de corps n'a que des dicritiques mauvais.

Supposons qu'il existe $g \in \mathbb{C}[x, y]$ tel que l'application $\phi = (f, g)$ a un lieu jacobien vide. D'après la proposition 3.14 tous les f -dicritiques sont soit g -dicritiques soit (g, s') -constants, pour certains s' dépendant du dicritique.

On en déduit d'après une formule de [2] que $(f - t, g - s)_{\mathbb{C}^2} = 0$ et donc les f -dicritiques sont g -dicritiques. Puisque f et g sont primitifs, $g = uf + v$, $u, v \in \mathbb{C}$, et le lieu jacobien est non vide. \square

Remarque 4.11. — La démonstration précédente n'utilise pas le fait que la fibre générique est de genre 0. Elle est valable pour tout polynôme qui n'a que des dicritiques mauvais.

Remarque 4.12. — Le résultat précédent peut aussi se déduire du lemme principal de [4].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ASSI, Sur l'intersection des courbes méromorphes, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 329-7 (1999), 625–628.
- [2] P. CASSOU-NOGUÈS, Diagrams of algebraic curves, preprint, 2000.
- [3] E. ARTAL, P. CASSOU-NOGUÈS, A. DIMCA, Topology of complex polynomials via polar curves, Kodai Math. J., 22-1 (1999), 131–139.
- [4] NGUYEN VAN CHAU, Non-zero constant Jacobian polynomial maps of \mathbb{C}^2 , Ann. Polon. Math., 71-3 (1999), 287–310.
- [5] D. EISENBUD, W.D. NEUMANN, Three-dimensional link theory and invariance of plane curve singularities, Annals of Mathematics Studies, n° 110, Princeton University Press, Princeton NJ, 1985.
- [6] J. GWOŹDZIEWICZ, A. PŁOSKI, Formulae for the singularities at infinity of plane algebraic curves, Univ. Jagel. Acta Math., 39 (2001), 109–133; Effective methods in algebraic and analytic geometry, 2000 (Kraków), MR1 886 934.
- [7] W. JACO, Lectures on three-manifold topology, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1980.
- [8] Z. JELONEK, Testing sets for properness of polynomial mappings, Math. Ann., 315-1 (1999), 1–35.
- [9] D.T. LÊ, H. MAUGENDRE, C. WEBER, Geometry of critical loci, J. London Math. Soc. (2), 63-3 (2001), 533–552.
- [10] D.T. LÊ, C. WEBER, A geometrical approach to the Jacobian conjecture for $n = 2$, Kodai Math. J., 17 (1994), 374–381.
- [11] C. LESCOP, Global surgery formula for the Casson-Walker invariant, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [12] H. MAUGENDRE, Discriminant of a germ $\Phi : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ and Seifert fibred manifolds, J. London Math. Soc. (2), 59-1 (1999), 207–226.
- [13] T.T. MOH, On the Jacobian conjecture and the configurations of roots, J. reine angew. Math., 340 (1983), 140–212.
- [14] W.D. NEUMANN, A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves, Trans. Amer. Math. Soc., 268-2 (1981), 299–344.

- [15] W.D. NEUMANN, P. NORBURY, Rational polynomials of simple type, *Pacific J. Math.*, 204-1 (2002), 177–207.
- [16] P. RUSSELL, Good and bad field generators, *J. Math. Kyoto Univ.*, 17-2 (1977), 319–331.
- [17] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, *Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972)*, *Astérisque*, n° 7-8, Soc. Math. France, Paris, 1973, 285–362.
- [18] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten I, *Invent. Math.*, 3 (1967), 308–333.
- [19] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten II, *Invent. Math.*, 4 (1967), 87–117.

Manuscrit reçu le 31 mai 2001,
accepté le 12 juin 2002.

Enrique ARTAL BARTOLO,
Universidad de Zaragoza
Departamento de Matemáticas
50009 Zaragoza (Espagne)
artal@posta.unizar.es
&
Pierrette CASSOU-NOGUÈS,
Université Bordeaux I
Mathématiques Pures de Bordeaux
350 Cours de la Libération
33405 Talence Cedex (France)
cassou@math.u-bordeaux.fr
&
Hélène MAUGENDRE,
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582 du CNRS
BP 74
38402 Saint-Martin d’Hères (France).
Helene.Maugendre@ujf-grenoble.fr