



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Nuria CORRAL

Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers

Tome 53, n° 3 (2003), p. 787-814.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_3_787_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

SUR LA TOPOLOGIE DES COURBES POLAIRES DE CERTAINS FEUILLETAGES SINGULIERS

par Nuria CORRAL (*)

1. Introduction.

La notion de courbe polaire et même de feuilletage polaire trouve sa place naturelle dans la théorie de feuilletages sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. C'est le contact entre un feuilletage et les différents feuilletages linéaires. Cet article est consacré à l'étude des propriétés topologiques (ou d'équisingularité) minimales de la courbe polaire générique en termes de la réduction des singularités (type de réduction) du feuilletage. Nous donnons enfin une extension (annoncée en [9]) du théorème de décomposition de la polaire générique aux cas des feuilletages. C'est un résultat dû à Merle [18] lorsqu'il s'agit de la polaire d'une branche plane et à Kuo-Lu [14] et García Barroso [12] pour une courbe à plusieurs branches. Il y a aussi des résultats partiels pour le cas des feuilletages [19].

Nous caractérisons la classe de feuilletages pour laquelle le théorème de décomposition est vrai : ce sont les feuilletages courbes généralisées à modèle logarithmique non résonnant. Le modèle logarithmique est une manière de représenter globalement la partie linéaire de l'holonomie du feuilletage. Nous montrons dans le théorème 4.3 l'existence de modèle logarithmique pour toute courbe généralisée non dicritique.

L'énoncé du théorème de décomposition en termes du diagramme d'Eggers est classique et donne des propriétés partielles du type topologique

(*) Travail partiellement soutenu par le réseau TMR *Singularités d'équations différentielles et feuilletages* et pour la DGES, FPU.

Mots-clés : Feuilletage singulier – Polaire – Modèle logarithmique – Séparatrice – Polygone de Newton.

Classification math. : 32S65.

de la polaire générique qui sont « maximales » dans le type d'équisingularité de la courbe de départ pour le cas des courbes [6], [7].

Nous commençons la preuve lorsque toutes les séparatrices sont non singulières. Les calculs en termes du polygone de Newton montrent que la non résonance du modèle logarithmique implique le bon comportement de l'ordre de la polaire selon les points infiniment voisins des séparatrices (théorème 6.1). Le théorème dans le cas général s'en déduit par ramification de toute la situation.

On termine l'article en montrant que les courbes généralisées à modèle logarithmique non résonnant ont la propriété d'éloignement des séparatrices, ce qui complète des résultats de Rouillé [19]. On obtient ainsi un lien entre le type de singularité des séparatrices et les composantes dicritiques du feuilletage polaire, complémentaire de la description donnée par le théorème de décomposition.

Remerciements. — Je remercie F. Cano et P. Fortuny pour leurs suggestions.

2. La courbe polaire générique.

Soit \mathcal{F} un germe du feuilletage singulier sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ défini par $\omega = 0$. Étant donnée une 1-forme non singulière ω_1 , la *courbe polaire* Γ_{ω_1} de \mathcal{F} par rapport à ω_1 est la courbe définie par

$$\omega \wedge \omega_1 = 0.$$

Ainsi, les courbes polaires d'un feuilletage \mathcal{F} sont des éléments du système linéaire défini par l'idéal $I_{\mathcal{F}}$ engendré par les coefficients de la 1-forme ω . Plus précisément, si \mathcal{M} est l'idéal maximal de $\mathbb{C}\{x, y\}$ et $\nu = \nu(\mathcal{F})$ la multiplicité de \mathcal{F} , alors toutes les courbes définies par des éléments de $I_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{M}^{\nu+1}$ sont des courbes polaires de \mathcal{F} et il existe un ouvert de Zariski de $I_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{M}^{\nu+1}$ tel que toutes les courbes définies par des éléments de cet ouvert sont équisingulières.

Si $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$, considérons les courbes $\Gamma_{[a:b]}$ définies par

$$\Gamma_{[a:b]}(\mathcal{F}; x, y) = \{aA(x, y) + bB(x, y) = 0\}$$

où $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Ces courbes sont des éléments du pinceau $d(A/B) = 0$, qu'on appellera le « feuilletage polaire » $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} dans les coordonnées x, y . Un élément générique de ce pinceau est équisingulier à un élément générique

du système linéaire défini par l'idéal $I_{\mathcal{F}}$ (voir [5]). Donc, pour étudier les propriétés topologiques des courbes polaires génériques du feuilletage \mathcal{F} , il suffit d'étudier les courbes $\Gamma_{[a:b]}$ avec $[a : b] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Plus précisément, il existe un ouvert dense de Zariski \mathcal{U} de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tel que si $[a : b] \in \mathcal{U}$, les courbes $\Gamma_{[a:b]}$ sont réduites et équisingulières. Une courbe $\Gamma_{[a:b]}$ avec $[a : b] \in \mathcal{U}$ est appelée *courbe polaire générique* du feuilletage. Notons que la multiplicité à l'origine $m(\Gamma_{[a:b]})$ d'une courbe polaire générique $\Gamma_{[a:b]}$ coïncide avec la multiplicité ν du feuilletage \mathcal{F} .

La définition de courbe polaire d'un feuilletage \mathcal{F} ne dépend pas du générateur ω choisi. De plus, le type d'équisingularité de la polaire générique ne dépend pas du système de coordonnées choisi. En effet, si $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est un changement de coordonnées, la courbe polaire de $F^*\mathcal{F}$ selon $[a : b]$ est un élément du système linéaire défini par l'idéal $F^*I_{\mathcal{F}} = (A \circ F, B \circ F)$ et la courbe $F^{-1}(\Gamma_{[a:b]})$ est donnée par $aA \circ F + bB \circ F = 0$ qui est une courbe du pinceau défini par $A \circ F$ et $B \circ F$.

3. Feuilletages courbes généralisées.

Les feuilletages « courbes généralisées » ont un comportement proche de celui de leurs séparatrices. Notamment en ce qui concerne le polygone de Newton. Ils ont été introduits en [3] où l'on démontre notamment que la multiplicité $\nu(\mathcal{F})$ et le nombre de Milnor $\mu(\mathcal{F})$ d'une courbe généralisée sont déterminés par ceux de la courbe des séparatrices. Nous recueillons ici des propriétés générales de ce type de feuilletages utiles pour la suite.

DÉFINITION 3.1 (cf. [3]). — *Un feuilletage \mathcal{F} est dit courbe généralisée non dicritique si après réduction des singularités il n'y a ni composante dicritique ni nœud-col.*

Soient $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ un germe de fonction analytique à l'origine et $f = \sum_{i,j} f_{ij} x^i y^j$ son développement en série de puissances. On note $\Delta(f) = \Delta(f; x, y)$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ donné par

$$\Delta(f) = \{(i, j); f_{ij} \neq 0\}.$$

Le *polygone de Newton* $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(f; x, y)$ est l'enveloppe convexe de $\Delta(f) + (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$. Étant donnée $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$, on note

$$\Delta(\omega) = \Delta(xA) \cup \Delta(yB),$$

et le *polygone de Newton* $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \mathcal{N}(\omega)$ est l'enveloppe convexe de $\Delta(\omega) + (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ (voir [4]). Plus précisément, en écrivant $\omega = \sum_{i,j} \omega_{ij}$ où

$$\omega_{ij} = A_{ij}x^{i-1}y^j dx + B_{ij}x^i y^{j-1} dy,$$

on a $\Delta(\omega) = \{(i, j) ; \omega_{ij} \neq 0\}$. On dit que $(i, j) \in \Delta(\omega)$ est une *contribution* de B si $(i, j) \in \Delta(yB)$.

Remarque. — Si $x = 0$ n'est pas une séparatrice, il existe un sommet du type $(0, k)$ sur le polygone de Newton $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ qui est nécessairement une contribution de B .

PROPOSITION 3.2 (cf. [3], [19]). — Soient \mathcal{F} un feuilletage courbe généralisée et $(f = 0)$ une équation réduite de ses séparatrices. Alors, \mathcal{F} et $(f = 0)$ ont la même réduction de singularités et $\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \mathcal{N}(f)$.

DÉFINITION 3.3 (voir [2]). — Soit $S = (y = 0)$ une séparatrice non singulière de \mathcal{F} . L'indice de Camacho-Sad $I(\mathcal{F}, S, 0)$ à l'origine de \mathcal{F} relatif à S est défini par

$$I(\mathcal{F}, S, 0) = \text{résidu à l'origine de } -\frac{a(x, 0)}{b(x, 0)}$$

où on a écrit un générateur ω de \mathcal{F} sous la forme

$$\omega = y \left(a(x, y) dx + b(x, y) \frac{dy}{y} \right).$$

Le résultat suivant nous donne un lien clé entre le polygone de Newton et l'indice de Camacho-Sad.

PROPOSITION 3.4. — Soient \mathcal{F} une courbe généralisée non dicritique donnée par $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$ et L un côté de $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ de pente $-1/p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$. Si l'extrémité supérieure de L n'est pas contribution de B , alors la valeur -1 apparaît comme indice de Camacho-Sad dans un coin de la réduction de singularités de \mathcal{F} .

Preuve. — Soit L un côté de $\mathcal{N}(\omega)$ dont la droite d'appui est $i + pj = k$ avec $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ et notons (ℓ_1, h_1) et (ℓ_2, h_2) les sommets supérieur et inférieur de $L \cap \mathcal{N}(\omega)$. On peut écrire ω comme $\omega = \omega_L + \omega_R$ avec $\omega_L = \sum_{j=h_2}^{h_1} \omega_{k-pj, j}$ et $\omega_R = \sum_{i+pj > k} \omega_{ij}$. Considérons la suite d'éclatements de points

$$N_0 = (\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} N_1 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_p} N_p$$

où π_1 est l'éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 , chaque π_{i+1} est l'éclatement de l'origine de la première carte de N_i et $E_{i+1} = \pi_{i+1}^{-1}(0)$. Soit \mathcal{F}' le transformé strict de \mathcal{F} par $\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_p$. On va calculer $I(\mathcal{F}', E_p, Q)$, où $Q = E_p \cap E_{p-1}$. Si l'on choisit des coordonnées (x', y') centrées en Q et telles que $E_p = (y' = 0)$, un générateur ω' de \mathcal{F}' s'écrit $\omega' = \omega'_L + y'\omega'_R$ avec

$$\omega'_L = y' \sum_{j=h_2}^{h_1} \left\{ (A_{k-pj,j} + (p-1)B_{k-pj,j})x'^{h_1-j-1} + (A_{k-pj,j} + pB_{k-pj,j})x'^{h_1-j} \frac{dy'}{y'} \right\}.$$

Le calcul de l'indice nous donne

$$I(\mathcal{F}', E_p, Q) = -\frac{A_{\ell_1 h_1} + (p-1)B_{\ell_1 h_1}}{A_{\ell_1 h_1} + pB_{\ell_1 h_1}}$$

et comme par hypothèse $B_{\ell_1 h_1} = 0$, alors $I(\mathcal{F}', E_p, Q) = -1$. \square

PROPOSITION 3.5. — Soient \mathcal{F} un feuilletage donné par $A dx + B dy = 0$ et L un côté de $\mathcal{N}(\mathcal{F}; x, y)$ de pente $-1/\alpha$, $\alpha \geq 1$. Si $i + \alpha j = k$ est l'équation de la droite d'appui de L , alors $\mathcal{N}(\Gamma_{[a;b]}) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\}$. Plus précisément, si $\alpha > 1$ on a

$$\Delta(B) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\} \quad \text{et} \quad \Delta(A) \subset \{i + \alpha j > k - \alpha\}.$$

Preuve. — Soit $(i, j) \in \Delta(\Gamma_{[a;b]})$. Si $(i, j) \in \Delta(\Gamma_{[a;b]}) \cap \Delta(A)$, alors $(i+1, j) \in \Delta(\omega)$. Ainsi, $i+1 + \alpha j \geq k$ et on a :

- $\Delta(A) \subset \{i + \alpha j > k - \alpha\}$ si $\alpha > 1$,
- $\Delta(A) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\}$ si $\alpha = 1$.

Si $(i, j) \in \Delta(\Gamma_{[a;b]}) \cap \Delta(B)$, alors $(i, j+1)$ appartient à $\Delta(\omega)$. Ainsi, $i + \alpha(j+1) \geq k$, donc $i + \alpha j \geq k - \alpha$ et on a $\Delta(B) \subset \{i + \alpha j \geq k - \alpha\}$. \square

La forme initiale $\text{In}_{(1,p)}(f; x, y)$ de contact p d'une fonction $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ relativement aux coordonnées x, y est donnée par

$$\text{In}_{(1,p)}(f; x, y) = \text{In}_L(f; x, y) = \sum_{(i,j) \in L} f_{ij} x^i y^j$$

où L est la première droite de pente $-1/p$ qui coupe le polygone $\mathcal{N}(f; x, y)$ et $f = \sum_{i,j} f_{ij} x^i y^j$. Lorsque $p = 1$, on retrouve la forme initiale de f , qui donne le cône tangent de $f = 0$. Si $p > 1$, quitte à diviser par une puissance de x , on retrouve le cône tangent des composantes de $f = 0$ qui passent par le $(p-1)$ -ième point infiniment voisin de l'axe $y = 0$ et n'ont pas de tangente verticale. On détermine donc la « position » de ces branches au bout de p éclatements dans la direction de l'axe $y = 0$.

Remarque. — Avec les notations de la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} \text{In}_{(1,1)}(aA + bB; x, y) &= a \sum_{i+j=k} A_{ij} x^{i-1} y^j + b \sum_{i+j=k} B_{ij} x^i y^{j-1}, \\ \text{In}_{(1,p)}(aA + bB; x, y) &= b \sum_{i+pj=k} B_{ij} x^i y^{j-1} \quad \text{si } p > 1, \end{aligned}$$

(lorsque B donne contribution à L). En particulier, si $p > 1$, la position des branches de $\Gamma_{[a:b]}$ à distance finie sur le p -ième diviseur exceptionnel selon l'axe $y = 0$ ne dépend pas de la direction de polarisation $[a : b] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Nous donnons maintenant deux généralisations au cas des courbes généralisées de résultats connus pour les courbes à plusieurs branches.

LEMME 3.6 (cf. [19]). — Soient ω_1 et ω_2 deux 1-formes courbe généralisée non dicritiques avec les mêmes séparatrices. Pour toute courbe $\gamma(t)$ qui n'est pas une séparatrice on a

$$\text{ord}_t(\gamma^* \omega_1) = \text{ord}_t(\gamma^* \omega_2).$$

Notons que $[a : b]$ est dans le cône tangent de \mathcal{F} si et seulement si il est dans le cône tangent de $\Gamma_{[a:b]}$. Donc, lorsque \mathcal{F} est non dicritique, la direction $[a : b]$ n'est pas dans le cône tangent de $\Gamma_{[a:b]}$ pour des $[a : b]$ dans un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

PROPOSITION 3.7. — Soient \mathcal{F} un feuilletage courbe généralisée non dicritique, $\Gamma_{[a:b]}$ une courbe polaire générique telle que $[a : b]$ ne soit pas dans le cône tangent de \mathcal{F} et $C \equiv (f = 0)$ la courbe formée par les séparatrices de \mathcal{F} . Alors,

$$(\Gamma_{[a:b]}, C)_0 = \mu(\mathcal{F}) + \nu(\mathcal{F}).$$

Preuve. — Supposons $a \neq 0$, sinon $b \neq 0$ et on raisonne symétriquement. Soient $\Gamma_{[a:b]} = \bigcup_q \Gamma_q$ la décomposition de $\Gamma_{[a:b]}$ en composantes irréductibles et $\gamma_q(t) = (x_q(t), y_q(t))$ une paramétrisation de Γ_q . On a

$$\begin{aligned} (\Gamma_{[a:b]}, C)_0 &= \sum_q \text{ord}_t(f(\gamma_q(t))) = \sum_q [\text{ord}_t(\gamma_q^* df) + 1] \\ &= \sum_q [\text{ord}_t(\gamma_q^* \omega) + 1] \\ &= \sum_q [\text{ord}_t(A(\gamma_q(t))\dot{x}_q(t) + B(\gamma_q(t))\dot{y}_q(t)) + 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_q \left[\text{ord}_t \left\{ B(\gamma_q(t)) \left(-\frac{b}{a} \dot{x}_q(t) + \dot{y}_q(t) \right) \right\} + 1 \right] \\
&= \sum_q \text{ord}_t(B(\gamma_q(t))) + \sum_q \text{ord}_t \left(-\frac{b}{a} x_q(t) + y_q(t) \right) \\
&= (B, aA + bB)_0 + (\Gamma_{[a:b]}, -bx + ay)_0 \\
&= (A, B)_0 + (\Gamma_{[a:b]}, -bx + ay)_0 = \mu(\mathcal{F}) + \nu(\mathcal{F}).
\end{aligned}$$

(Notons que par le lemme 3.6, on a $\text{ord}_t(\gamma_q^* df) = \text{ord}_t(\gamma_q^* \omega)$.) \square

Remarque. — Comme \mathcal{F} est courbe généralisée, le résultat précédent nous donne

$$(\Gamma_{[a:b]}, C)_0 = \mu(f) + m(f) - 1$$

qui est la même formule que celle pour les courbes planes (voir [23]).

PROPOSITION 3.8. — *Soient \mathcal{F} une courbe généralisée non dicritique définie par $\omega = 0$ et $f = 0$ une équation réduite de ses séparatrices. Considérons le feuilletage \mathcal{G} défini par $\eta = \omega + f \cdot \alpha$ avec $\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$. Alors, les courbes polaires génériques de \mathcal{F} et \mathcal{G} sont équisingulières.*

Preuve. — Notons que \mathcal{G} est aussi courbe généralisée avec les mêmes séparatrices que \mathcal{F} . La courbe polaire générique de \mathcal{F} est un élément du pinceau de courbes défini par $I_{\mathcal{F}} = (A, B)$, où $\omega = A dx + B dy$, et la courbe polaire générique de \mathcal{G} est un élément du pinceau de courbes défini par $I_{\mathcal{G}} = (A + f\alpha_1, B + f\alpha_2)$. Donc, il suffit de montrer que la clôture intégrale $\bar{I}_{\mathcal{F}}$ et $\bar{I}_{\mathcal{G}}$ des idéaux $I_{\mathcal{F}}$ et $I_{\mathcal{G}}$ coïncide (voir [5]). Considérons l'idéal $I = (A, B, f)$. On a $I_{\mathcal{F}} \subset I$, alors $\bar{I}_{\mathcal{F}} \subset \bar{I}$. Pour montrer l'égalité, il suffit de voir que $f \in \bar{I}_{\mathcal{F}}$. En utilisant le critère valuatif de dépendance intégrale (voir [23]), on doit vérifier que

$$\text{ord}_t(f(\gamma(t))) \geq \inf \{ \text{ord}_t(A(\gamma(t))), \text{ord}_t(B(\gamma(t))) \}$$

pour tout $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$. Si $\gamma(t)$ n'est pas une séparatrice de ω , on a

$$\begin{aligned}
\text{ord}_t(f(\gamma(t))) &= \text{ord}_t \left(\frac{d}{dt} (f(\gamma(t))) \right) + 1 \\
&= \text{ord}_t(\gamma^*(df)) + 1 = \text{ord}_t(\gamma^*(\omega)) + 1 \\
&= \text{ord}_t(A(\gamma(t))\gamma'_1(t) + B(\gamma(t))\gamma'_2(t)) + 1 \\
&\geq \inf \{ \text{ord}_t(A(\gamma(t))\gamma'_1(t)), \text{ord}_t(B(\gamma(t))\gamma'_2(t)) \} + 1 \\
&\geq \inf \{ \text{ord}_t(A(\gamma(t))), \text{ord}_t(B(\gamma(t))) \}.
\end{aligned}$$

Si $\gamma(t)$ est paramétrisation d'une séparatrice, $\text{ord}_t(f(\gamma(t))) = \infty$.

On a $\bar{I}_{\mathcal{F}} = \bar{I}$. De la même manière, on montre que $\bar{I}_G = \bar{J}$ avec $J = (A + f\alpha_1, B + f\alpha_2, f)$ et comme $I = J$, on obtient l'égalité $\bar{I}_{\mathcal{F}} = \bar{I}_G$. \square

Remarque. — Cette proposition généralise le résultat bien connu [5] qui affirme que le type d'équisingularité de la polaire générique d'une courbe à plusieurs branches ne dépend pas de l'équation réduite choisie de la courbe. En effet, il suffit de signaler que $d(uf) = u \cdot df + f \cdot du$.

4. Modèles logarithmiques.

Étant donnée une courbe généralisée, nous allons lui associer son *modèle logarithmique* qui représente globalement la « partie linéaire » de l'holonomie.

DÉFINITION 4.1. — *Un feuilletage est logarithmique s'il est donné par*

$$\omega_{\lambda, f} = f_1 \cdots f_r \sum_{i=1}^r \lambda_i \frac{df_i}{f_i} = 0$$

avec $f = f_1 \cdots f_r$ la décomposition en composantes irréductibles de $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ et $\lambda_i \in \mathbb{C}$. On le notera $\mathcal{L}_{\lambda}(f)$. On dit qu'il est résonnant s'il existe une relation $\sum_{i=1}^r n_i \lambda_i = 0$ avec n_i entiers non négatifs non tous nuls.

Un feuilletage logarithmique non résonnant est non dicritique, mais il peut être résonnant et non dicritique comme le montre l'exemple donné par la fonction multivaluée $y(y - x^2)^{-1/6+i}(y - x^3)^{-1/6-i}$. Un feuilletage logarithmique (non dicritique) est toujours de type courbe généralisée.

DÉFINITION 4.2. — *Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage non dicritique sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. On dit que \mathcal{L} est un modèle logarithmique du feuilletage \mathcal{F} si \mathcal{L} est logarithmique, non dicritique, avec les mêmes séparatrices, la même réduction des singularités et les mêmes indices de Camacho-Sad que \mathcal{F} .*

THÉORÈME 4.3. — *Tout feuilletage courbe généralisée non dicritique \mathcal{F} a un modèle logarithmique.*

Preuve. — On le fait par induction sur le nombre minimal d'éclatements $n(\mathcal{F})$ nécessaires pour désingulariser \mathcal{F} . Si $n(\mathcal{F}) = 0$, le feuilletage \mathcal{F}

est donné par

$$\omega = xy \left\{ (\lambda + a(x, y)) \frac{dx}{x} - (\mu + b(x, y)) \frac{dy}{y} \right\}, \quad a(0) = b(0) = 0,$$

avec $\lambda\mu \neq 0$, $\lambda/\mu \notin \mathbb{Q}_+$ et $x^\lambda y^{-\mu}$ donne un modèle logarithmique.

Supposons $n(\mathcal{F}) \geq 1$ et soit $f = \prod_{i=1}^r f_i = 0$ une équation des séparatrices. Soient $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ l'éclatement de l'origine, $E \subset M$ le diviseur exceptionnel, Q_1, \dots, Q_m les points singuliers du transformé $\pi^*\mathcal{F}$ de \mathcal{F} et notons par \mathcal{F}^i le germe en Q_i de $\pi^*\mathcal{F}$. Les séparatrices de \mathcal{F}^i sont données par $x^\nu \prod_{j \in A_i} f'_j = 0$, où f'_j est le transformé strict de f_j , le nombre ν est la multiplicité à l'origine de \mathcal{F} et $x = 0$ est une équation de E . Par l'hypothèse de récurrence, il existe $\{\lambda_j^i\}_{j \in A_i}$ et un modèle logarithmique \mathcal{L}^i pour chaque \mathcal{F}^i donné par $x^\nu \prod_{j \in A_i} f_j^{\lambda_j^i}$. Soit \mathcal{L} donné par $\prod_{i=1}^m \prod_{j \in A_i} f_j^{\lambda_j^i}$. Il suffit de vérifier que les \mathcal{L}^i sont les transformés stricts de \mathcal{L} par π au point Q_i . Ceci est donné par l'égalité

$$\nu = \sum_{i=1}^m \sum_{j \in A_i} \lambda_j^i m(f_j)$$

où $m(f_j)$ est la multiplicité à l'origine de f_j . Montrons-la. Notons $\mathcal{I}_Q(\mathcal{F}, S)$ l'indice au point Q relatif à une séparatrice S , pas nécessairement lisse, introduit par A. Lins Neto [16], et qui coïncide avec $I(\mathcal{F}, S, Q)$ pour S lisse. D'après [16], on a

$$\mathcal{I}_{Q_i}(\mathcal{L}^i, E) = - \sum_{j \in A_i} \frac{\lambda_j^i}{\nu} (f'_j, x)_{Q_i},$$

où $(f'_j, x)_{Q_i}$ est la multiplicité d'intersection de f'_j et x au point Q_i . Donc,

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{I}(\mathcal{L}^i, E, Q_i) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j \in A_i} \frac{\lambda_j^i}{\nu} m(f_j)$$

et comme $\sum_{i=1}^m \mathcal{I}(\mathcal{L}^i, E, Q_i) = -1$, on en déduit l'égalité voulue. \square

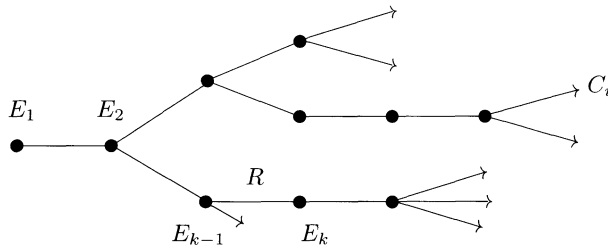
PROPOSITION 4.4. — *Soit \mathcal{L} logarithmique non résonnant avec toutes ses séparatrices non singulières. Alors, la valeur -1 n'apparaît comme indice de Camacho-Sad en aucun coin de la réduction de singularités de \mathcal{L} .*

Preuve. — Soient $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la réduction de singularités de $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\lambda(f)$, le diviseur exceptionnel $D = \pi^{-1}(0)$ et \mathcal{L}' le transformé strict

de \mathcal{L} . Notons $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$ les séparatrices avec $C_i = (f_i = 0)$ et soient $P_i = D \cap C'_i$ où C'_i est le transformé strict de C_i .

Notons G le graphe dual de D . Comme toutes les séparatrices sont non singulières, le graphe G s'identifie avec l'arbre de points infiniment voisins de π . Les sommets de G sont les composantes irréductibles de D , les arêtes sont les coins de la réduction de singularités et les flèches sont les branches C_i (ou les points P_i). Le premier diviseur E_1 permet d'orienter G . On dira qu'un diviseur E est un « bouton » s'il est maximal pour cet ordre et on notera $\ell(E)$ la distance maximale entre E et un bouton au-dessus de E . Étant donné une branche C_j de C (flèche du graphe dual) et un diviseur E , on note $\varepsilon_E^j = 1$ lorsque la géodésique entre C_j et E_1 contient le sommet E et $\varepsilon_E^j = 0$ sinon. Notons que si $P_i \in E$, le feuilletage \mathcal{L}' est défini en P_i par la fonction multivaluée $x^\nu y^{\lambda_i}$ où $x = 0$ est une équation locale de E et $\nu = \sum_{j=1}^r \lambda_j \sum_{E' \leq E} \varepsilon_{E'}^j$.

Soit R un coin (arête de G) et notons $E_1, E_2, \dots, E_{k-1}, E_k$ la suite maximale de diviseurs $E_1 < E_2 < \dots < E_k$ telle que R est l'arête entre E_{k-1} et E_k . Notons pour simplifier $\varepsilon_i^j = \varepsilon_{E_i}^j$.



Soit $E = E_k$. Nous allons démontrer la formule suivante :

$$(1) \quad I(\mathcal{L}', E_{k-1}, R) = -1 - \frac{\sum_{j=1}^r \varepsilon_k^j \lambda_j}{\sum_{j=1}^r \lambda_j (1 + \varepsilon_2^j + \dots + \varepsilon_{k-1}^j)}$$

par induction sur $\ell(E)$ et comme \mathcal{L} est non résonnant, on déduit que $-1 \neq I(\mathcal{L}', E_{k-1}, R)$ et aussi $-1 \neq I(\mathcal{L}', E, R) = 1/I(\mathcal{L}', E_{k-1}, R)$.

Supposons $\ell(E) = 0$. Il existe au moins deux points $P_i \in E$ et le feuilletage \mathcal{L}' est défini en P_i par $x^\nu y^{\lambda_i}$ avec $\nu = \sum_{j=1}^r \lambda_j (1 + \varepsilon_2^j + \dots + \varepsilon_k^j)$. Ainsi, le calcul de l'indice de Camacho-Sad nous donne

$$I(\mathcal{L}', E, P_i) = \frac{-\lambda_i}{\sum_{j=1}^r \lambda_j (1 + \varepsilon_2^j + \dots + \varepsilon_k^j)}.$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^r \varepsilon_k^i I(\mathcal{L}', E, P_i) + I(\mathcal{L}', E, R) = -1$$

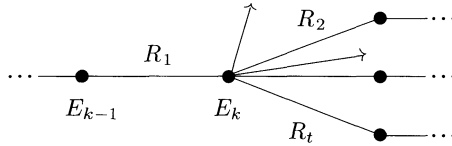
donc,

$$I(\mathcal{L}', E, R) = -1 + \frac{\sum_{i=1}^r \varepsilon_k^i \lambda_i}{\sum_{j=1}^r \lambda_j (1 + \varepsilon_2^j + \dots + \varepsilon_k^j)}$$

et on termine car $I(\mathcal{L}', E_{k-1}, R) = 1/I(\mathcal{L}', E, R)$.

Supposons $\ell(E) \geq 1$ et soit R_1, \dots, R_t l'ensemble de coins de E avec $R_1 = E_{k-1} \cap E$. Alors, $E \cdot E = -t$ et

$$I(\mathcal{L}', E, R_1) + \sum_{P_i \in E} I(\mathcal{L}', E, P_i) + \sum_{\ell=2}^t I(\mathcal{L}', E, R_\ell) = -t.$$

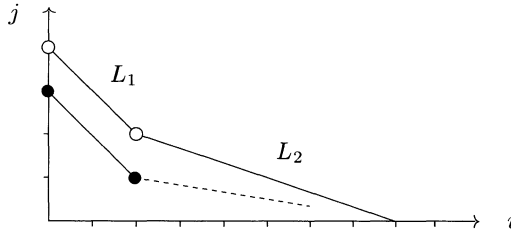


Par l'hypothèse de récurrence la formule (1) est vraie pour R_2, \dots, R_t , alors

$$I(\mathcal{L}', E, R_1) = -1 + \frac{\sum_{j=1}^r \varepsilon_k^j \lambda_j}{\sum_{j=1}^r \lambda_j (1 + \varepsilon_2^j + \dots + \varepsilon_k^j)}$$

et on en déduit la formule (1) pour le cas général. □

Remarque. — Soit \mathcal{F} une courbe généralisée dont toutes les séparatrices sont non singulières et non tangentes à $x = 0$ donnée par $\omega = A dx + B dy$. Supposons que le modèle logarithmique \mathcal{L} de \mathcal{F} soit non résonnant. Alors l'extrémité supérieure de tout côté L de $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ est une contribution de B . En effet, comme $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ coïncide avec le polygone de Newton des séparatrices, chaque côté a une pente $-1/p$, $p \in \mathbb{N}$. Si $p = 1$, c'est le premier côté et on a la contribution de B car $x = 0$ n'est pas une séparatrice. Si $p \geq 2$ on applique la proposition 3.4, car -1 n'apparaît comme indice de Camacho-Sad en aucun coin de la désingularisation de \mathcal{F} puisqu'il en est de même pour \mathcal{L} . Par conséquent, le polygone de Newton $\mathcal{N}(\Gamma_{[a:b]})$ de la polaire générique de \mathcal{F} a le rapport suivant avec $\mathcal{N}(\mathcal{F})$: si $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ a s côtés L_j de pentes $-1/p_j$, $j = 1, \dots, s$ avec $p_1 < p_2 < \dots < p_s$, alors les $s - 1$ premiers côtés de $\mathcal{N}(\Gamma_{[a:b]})$ sont les déplacés verticaux d'une unité de L_1, \dots, L_{s-1} .



Lorsque $s = 1$, le premier sommet de $\mathcal{N}(\Gamma_{[a;b]})$ est $(0, k - 1)$ où $(0, k)$ est le premier sommet de $\mathcal{N}(\mathcal{F})$ (en fait ici $k = \nu(\mathcal{F}) + 1$).

5. Énoncé du théorème de décomposition.

Nous donnons ici un résultat qui étend aussi bien le théorème de Merle [18] pour une branche plane que le « théorème de décomposition » [14], [12] pour une courbe plane à plusieurs branches, ainsi que certains résultats sur les feuilletages [19]. Plus précisément, nous considérons des feuilletages courbes généralisées \mathcal{F} dont le modèle logarithmique est non résonnant. L'énoncé du théorème de décomposition nous décrit un comportement « minimal » du type d'équisingularité de la polaire générique en termes du type topologique (équisingularité) de la courbe C des séparatrices de \mathcal{F} .

Nous donnerons l'énoncé en termes du diagramme d'Eggers $T(C)$ de C (voir [11], [12]). C'est l'une des manières possibles de représenter toute l'information topologique (équisingularité) d'une courbe plane. Rappelons sa construction.

Soient $\{C_i\}_{i=1}^r$ les composantes irréductibles de C . On va construire le diagramme d'Eggers $T(C)$ en recollant des chaînes élémentaires K_i chacune associée à une branche C_i . Pour chaque branche C_i , on note $\beta_0^i, \dots, \beta_{g_i}^i$ ses exposants caractéristiques, n^i la multiplicité de C_i à l'origine et $\{(m_k^i, n_k^i)\}_{k=1}^{g_i}$ ses paires de Puiseux. Étant données deux branches, C_i et C_j , on définit la coïncidence $\mathcal{C}(C_i, C_j)$ de C_i et C_j comme

$$\alpha_{ij} = \mathcal{C}(C_i, C_j) = \sup\{\text{ord}_x(y_\ell^i(x) - y_s^j(x)) : 1 \leq \ell \leq n^i, 1 \leq s \leq n^j\}$$

où $\{y_\ell^i(x)\}_{\ell=1}^{n^i}$ et $\{y_s^j(x)\}_{s=1}^{n^j}$ sont les paramétrisations de Puiseux de C_i et C_j , respectivement. On associe à chaque branche C_i l'ensemble $S_i = S_i^1 \cup S_i^2$ où

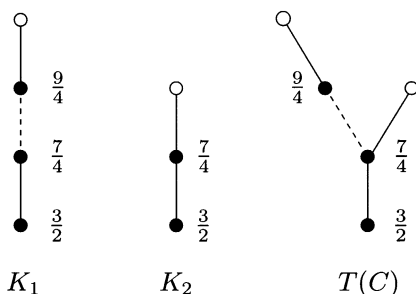
$$S_i^1 = \left\{ \frac{\beta_\ell^i}{n^i} \right\}_{\ell=1}^{g_i}, \quad S_i^2 = \{\alpha_{ij}\}_{i \neq j}.$$

Les sommets d'une chaîne élémentaire K_i sont un point blanc et des points noirs en correspondance bijective avec S_i par la *valuation* v qui les ordonne, le point blanc étant le dernier. Les arêtes sont discontinues ou continues, selon que le point de départ est ou pas dans $S_i^2 \setminus S_i^1$. Les points noirs de K_i et K_j de valuation inférieure ou égale à α_{ij} donnent naissance à un sous-graphe commun K_{ij} . On obtient $T(C)$ par recollement des K_i en identifiant les K_{ij} . Le *point base* de $T(C)$ est le point de plus petite valuation.

Exemple. — Soit C la courbe donnée par $f = f_1 \cdot f_2 = 0$ avec $f_1 = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^6 - x^9$ et $f_2 = (y^2 - x^3)^2 - 4yx^5 - x^7$. Alors $f_1 = 0$ est donnée par $y_1 = x^{3/2} + x^{9/4}$ et $f_2 = 0$ par $y_2 = x^{3/2} + x^{7/4}$. On a

$$S_1 = S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{7}{4} \right\}, \quad S_2 = S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{7}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{7}{4} \right\}.$$

Les chaînes élémentaires et le diagramme d'Eggers sont :



À chaque sommet noir Q de $T(C)$, on associe le nombre $d_1(Q)$ d'arêtes discontinues qui sortent de Q et le nombre $d_2(Q)$ d'arêtes continues qui sortent de Q . Le nombre \underline{n}_Q sera la multiplicité d'une branche générique qui a les $k(Q)$ premières paires de Puiseux en commun avec les C_i , pour $Q \in K_i$, où $k(Q)$ est le nombre d'arêtes continues entre Q et le point base. C'est-à-dire, $\underline{n}_Q = n_1^i \cdots n_{k(Q)}^i$. Si $\underline{n}_Q v(Q) = m_Q/n_Q$ (irréductible) on sait que lorsque $d_2(Q) \neq 0$, on a la paire de Puiseux $(m_Q, n_Q) = (m_{k(Q)+1}^i, n_{k(Q)+1}^i)$ pour chaque C_i telle qu'il sorte une arête continue de $Q \in K_i$.

THÉORÈME 5.1 (décomposition de la polaire). — Soit \mathcal{F} un feuilletage courbe généralisée non dicritique dont le modèle logarithmique \mathcal{L} est non résonnant. Soient C le germe de courbe donné par les séparatrices de \mathcal{F} et $T(C)$ le diagramme d'Eggers de C . Notons N l'ensemble des sommets noirs de $T(C)$. Il existe un ouvert dense de Zariski $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}_C^1$ tel que pour tout

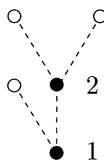
$[a : b] \in \mathcal{U}$ le germe $\Gamma_{[a:b]}$ se décompose comme union de courbes planes $\Gamma_{[a:b]} = \bigcup_{Q \in N} \Gamma^Q$, chaque Γ^Q étant une union finie de courbes irréductibles, telle que pour tout $Q \in N$ on ait :

- 1) $m(\Gamma^Q) = \underline{n}_Q(d_1(Q) - 1 + n_Q d_2(Q))$;
- 2) si γ est une branche de Γ^Q et $Q \in K_i$, on a $\mathcal{C}(C_i, \gamma) = v(Q)$;
- 3) si $Q \in K_i \setminus K_j$ et γ est une branche de Γ^Q , on a $\mathcal{C}(C_j, \gamma) = \mathcal{C}(C_j, C_i)$.

Le théorème de décomposition n'est pas vrai pour un feuilletage courbe généralisée quelconque. Le feuilletage \mathcal{F} défini par

$$\omega = (y^2 + x^2y + x^4) dx + (y^2 + x^3) dy$$

est une courbe généralisée non dicritique. Le diagramme d'Eggers de ses séparatrices est



Mais, la courbe polaire générique a une seule branche de multiplicité deux. Donc, elle ne vérifie pas les conclusions du théorème.

6. Le cas des séparatrices non singulières.

Nous démontrons le théorème de décomposition par une réduction au cas où toutes les séparatrices de \mathcal{F} sont non singulières, grâce à une ramification bien choisie. Détaillons d'abord le cas des séparatrices non singulières.

THÉORÈME 6.1. — Soit \mathcal{F} un germe de feuilletage sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ de type courbe généralisée, dont le modèle logarithmique est non résonnant. Supposons que toutes les branches de la courbe C des séparatrices soient non singulières. Il existe un ouvert dense de Zariski $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ tel que pour tout $[a : b] \in \mathcal{U}$ on ait la propriété suivante : pour toute suite finie d'éclatements locaux $\pi : (N, P) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ telle que P soit dans le transformé strict C' de C , on a

$$m_P(\Gamma'_{[a:b]}) = m_P(C') - 1$$

où $\Gamma'_{[a:b]}$ est le transformé strict de la polaire $\Gamma_{[a:b]}$ par π et de plus $\Gamma'_{[a:b]}$ est transverse au diviseur exceptionnel $E = \pi^{-1}(0)$ en P .

Preuve. — Considérons la suite d'éclatements de points

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} (N_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_{p-1}} (N_{p-1}, P_{p-1}) \xleftarrow{\pi_p} (N_p, P_p) = (N, P)$$

où π_1 est l'éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 , π_{i+1} est l'éclatement de P_i et $\pi = \pi_1 \circ \cdots \circ \pi_p$. Choisissons d'abord des coordonnées x, y telles que C ne soit pas tangente à $x = 0$. Il existe un changement de coordonnées $(x, y) = (\bar{x}, \bar{y} + \varepsilon(\bar{x}))$ avec $\varepsilon(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p$, tel que si (x_i, y_i) sont des coordonnées centrées en P_i , l'éclatement π_i est donné par $x_1 = \bar{x}$, $y_1 = \bar{x}\bar{y}$ et π_j est donné par $x_j = x_{j-1}$, $y_j = x_{j-1}y_{j-1}$, pour $j = 2, \dots, p$. Le générateur ω de \mathcal{F} s'écrit

$$\omega = \tilde{A}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} + \tilde{B}(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}$$

où $\tilde{A} = A + \varepsilon'(x)B$ et $\tilde{B} = B$. Notons $\Gamma = \Gamma_{[a:b]}(\mathcal{F}; x, y)$ et $\tilde{\Gamma} = \Gamma_{[a:b]}(\mathcal{F}; \bar{x}, \bar{y})$. Pour un choix générique de $[a : b]$ on a que

$$\nabla^* = \mathcal{N}(\Gamma; \bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{N}(\tilde{\Gamma}; \bar{x}, \bar{y})$$

car A, B et \tilde{A}, \tilde{B} engendrent le même idéal.

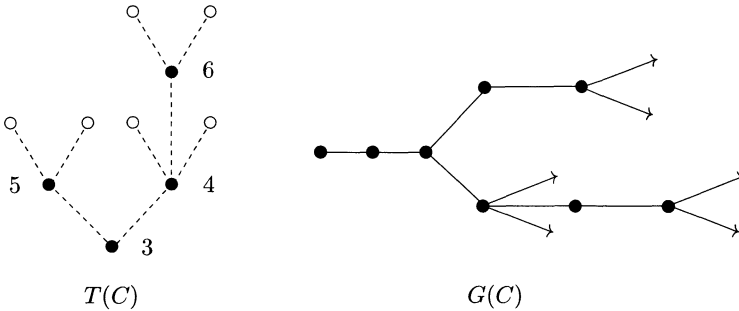
Soit $\nabla = \mathcal{N}(\mathcal{F}; \bar{x}, \bar{y}) = \mathcal{N}(C; \bar{x}, \bar{y})$. Tous les côtés de ∇ ont une pente du type $-1/q$ pour $q \in \mathbb{N}$, car les composantes de C sont non singulières et non tangentes à $\bar{x} = 0$. On en déduit que si (i_0, j_0) est l'extrémité supérieure du premier côté de ∇ de pente $\geq -1/(p+1)$, alors $m_P(C') = j_0$.

Comme le modèle logarithmique de \mathcal{F} est non résonnant, on sait que $\nabla^* \cap \{j \geq j_0 - 1\}$ est le déplacé d'une unité verticale de $\nabla \cap \{j \geq j_0\}$. De plus, en vertu de la proposition 3.5, le polygone $\nabla^* \cap \{j \leq j_0 - 1\}$ a tous ses côtés de pente $\geq -1/(p+1)$. On en déduit que $(i_0, j_0 - 1)$ est un sommet de ∇^* dont le côté précédent a une pente $\leq -1/p$ et le côté suivant a une pente $\geq -1/(p+1)$. Ceci implique que $m_P(\Gamma') = j_0 - 1$. En effet, le premier sommet de $\mathcal{N}(\Gamma'; x_p, y_p)$ est $(0, j_0 - 1)$ et la première pente est ≥ -1 , ce qui donne aussi la transversalité voulue. \square

Remarque. — L'énoncé précédent n'est plus valable si les séparatrices sont singulières. Par exemple si $\omega = d(y^2 - x^3)$ et $\pi : (N, P) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est l'éclatement de l'origine de \mathbb{C}^2 , on a $m_P(C') = 1$ et $m_P(\Gamma'_{[a:b]}) = 1$.

Lorsque toutes les branches d'une courbe C sont non singulières, le diagramme d'Eggers $T(C)$ s'obtient à partir du graphe dual $G(C)$ de la résolution de C en éliminant tous les points de $G(C)$ qui ne sont pas de

bifurcation. Ainsi, chaque sommet noir Q de $T(C)$ est associé à un diviseur qu'on note E^Q . La valuation $v(Q)$ est le nombre d'éclatements nécessaires pour obtenir E^Q . Exemple :



COROLLAIRE 6.2. — *Sous les hypothèses du théorème, il existe un ouvert dense de Zariski $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ tel que pour tout $[a : b] \in \mathcal{U}$, le germe $\Gamma_{[a:b]}$ se décompose comme une union de courbes planes $\Gamma_{[a:b]} = \cup_{Q \in N} \Gamma^Q$ telle que*

- 1) $m(\Gamma^Q) = d_1(Q) - 1$;
- 2) si γ est une branche de Γ^Q et $Q \in K_i$, on a $\mathcal{C}(C_i, \gamma) = v(Q)$;
- 3) si $Q \in K_i \setminus K_j$ et γ est une branche de Γ^Q , on a $\mathcal{C}(C_j, \gamma) = \mathcal{C}(C_j, C_i)$.

Notation. — Soient Γ une courbe sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ et

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} (N_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_k} (N_k, P_k)$$

une suite d'éclatements locaux de centres P_{i-1} , $i = 1, \dots, k$. On dit que P_k est un *point infiniment voisin* de Γ et on note $P_k \in \Gamma$ si P_k est dans le transformé strict de Γ . On notera aussi $P_j > P_s$ si $s < j$. Lorsqu'il n'y aura pas de confusion, on notera $m_{P_i}(\Gamma)$ la multiplicité du transformé strict de Γ en P_i .

Preuve du corollaire. — Soit Q un sommet noir de $T(C)$ avec $v(Q) = p$. Considérons la suite d'éclatements de points

$$(\mathbb{C}^2, 0) \xleftarrow{\pi_1} (N_1, P_1) \xleftarrow{\pi_2} \cdots \xleftarrow{\pi_p} N_p$$

telle que $\pi_p^{-1}(P_{p-1}) = E^Q$. Signalons que $m_{P_{p-1}}(C) = \#I_Q$, où $I_Q = \{i ; Q \in K_i\}$. Définissons Γ^Q comme la réunion des branches γ de $\Gamma_{[a:b]}$ telles que $P_{p-1} \in \gamma$ et de plus $P \notin \gamma$ pour tout $P \in E^Q$ tel que $P \in C$. Les propriétés 2) et 3) de l'énoncé sont visibles. Nous allons calculer la multiplicité $m(\Gamma^Q)$.

Supposons que Q soit un sommet maximal de $T(C)$ (c'est-à-dire, E^Q sera un bouton de $G(C)$). Notons que $d_1(Q) = \sharp I_Q$ et Γ^Q est précisément l'ensemble des branches γ de $\Gamma_{[a;b]}$ telles que $P_{p-1} \in \gamma$, car aucune branche de $\Gamma_{[a;b]}$ ne passe par un point $P \in E^Q$ avec $P \in C$, puisque $m_P(C) = 1$. Le théorème donne

$$m(\Gamma^Q) = m_{P_{p-1}}(\Gamma_{[a;b]}) = m_{P_{p-1}}(C) - 1 = d_1(Q) - 1.$$

Si Q n'est pas maximal, soient Q_1, \dots, Q_m les sommets noirs de $T(C)$ tels que $Q_\ell > Q$. On a

$$m + \sharp I_Q = d_1(Q) + d_1(Q_1) + \dots + d_1(Q_m),$$

$$m(\Gamma^Q) = m_{P_{p-1}}(\Gamma_{[a;b]}) - m\left(\bigcup_{\ell=1}^m \Gamma^{Q_\ell}\right).$$

Si le résultat est vrai pour Q_1, \dots, Q_m , la multiplicité de $\bigcup_{\ell=1}^m \Gamma^{Q_\ell}$ est $d_1(Q_1) + \dots + d_1(Q_m) - m$, et d'après le théorème, on a $m_{P_{p-1}}(\Gamma_{[a;b]}) = m_{P_{p-1}}(C) - 1$. On en déduit le résultat. \square

Remarque. — En inversant les arguments de cette preuve on peut montrer qu'en fait l'énoncé du corollaire et celui du théorème sont équivalents. Le théorème 6.1 est donc la version pour le cas de séparatrices non singulières du théorème de décomposition.

7. L'effet d'une ramification.

Considérons une ramification $\rho : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ donnée en coordonnées par $\rho(u, v) = (u^n, v)$. Nous utiliserons la ramification pour nous ramener au cas des séparatrices non singulières. Regardons maintenant comment la ramification agit sur quelques-uns des outils qu'on va utiliser.

Le diagramme d'Eggers. — Soit C un germe de courbe défini par $f(x, y) = 0$ et notons \bar{C} le germe de courbe donné par $f(u^n, v) = 0$. Supposons que toutes les composantes irréductibles de \bar{C} soient non singulières (c'est le cas pour $n \equiv 0 \pmod{n^1, \dots, n^r}$). Nous allons construire $T(\bar{C})$ à partir de $T(C)$. Rappelons que toutes les arêtes de $T(\bar{C})$ sont discontinues. Notons \bar{v} la valuation de $T(\bar{C})$. Reprenons les notations précédentes. Si K_i est la chaîne élémentaire associée à C_i , notons \bar{K}_i le sous-graphe de $T(\bar{C})$ qu'on obtient à partir de K_i par ramification.

Détaillons la construction de \bar{K}_i . Soit Q le point base de $T(C)$ et Q' le point suivant dans K_i . Si $v(Q) = \beta_1^i/n^i \in S_i^1$, le sommet Q donne un sommet \bar{Q} dans \bar{K}_i de valuation $\bar{v}(\bar{Q}) = nv(Q)$, d'où partent n_1^i arêtes discontinues, qui relient le sommet \bar{Q} avec les sommets $\bar{Q}'_1, \dots, \bar{Q}'_{n_1^i}$ de valuation $\bar{v}(\bar{Q}'_\ell) = nv(Q')$. On dit que les sommets \bar{Q}'_ℓ sont associés au sommet Q' . Si $v(Q) \in S_i^2 \setminus S_i^1$, alors il a associé le sommet \bar{Q} de \bar{K}_i avec $\bar{v}(\bar{Q}) = nv(Q)$ d'où part une seule arête discontinue qui relie Q avec le sommet \bar{Q}' associé à Q' de valuation $\bar{v}(\bar{Q}') = nv(Q')$. Prenons maintenant un sommet Q de K_i quelconque, et supposons qu'on ait déjà construit la partie de \bar{K}_i qui correspond aux sommets de K_i avec valuation $\leq v(Q)$. Si $k = k(Q)$ est le nombre d'arêtes continues entre Q et le point base, alors Q a associé $n_Q = n_1^i \cdots n_k^i$ points $\{\bar{Q}_\ell\}_{\ell=1}^{n_1^i \cdots n_k^i}$ de \bar{K}_i de valuation $nv(Q)$ (voir aussi la définition de n_Q au §5). Soit Q' le sommet suivant à Q dans K_i . La construction de \bar{K}_i continue de la façon suivante :

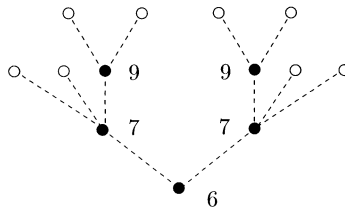
- Si $v(Q) = \beta_{k+1}^i/n^i \in S_i^1$, alors n_{k+1}^i arêtes discontinues partent de chaque sommet \bar{Q}_ℓ , $\ell \in \{1, \dots, n_1^i \cdots n_k^i\}$. Ces arêtes relient \bar{Q}_ℓ avec un sommet de valuation $nv(Q')$.
- Si $v(Q) \in S_i^2 \setminus S_i^1$, alors une seule arête discontinue part de chaque sommet \bar{Q}_ℓ , $\ell \in \{1, \dots, n_1^i \cdots n_k^i\}$. Cette arête relie Q_ℓ avec un sommet de valuation $nv(Q')$.

Quand Q' est un sommet blanc, les sommets associés à Q' dans \bar{K}_i sont aussi blancs et n'ont pas de valuation. Enfin $T(\bar{C})$ s'obtient par recollement des \bar{K}_i de manière évidente.

LEMME 7.1. — Soient Q un sommet noir de $T(C)$ et \bar{Q} un sommet noir de $T(\bar{C})$ associé à Q . Alors $d_1(\bar{Q}) = d_1(Q) + d_2(Q)n_Q$.

Preuve. — Il y a $d_1(Q)$ arêtes discontinues qui ne bifurquent pas. De plus, chacune des $d_2(Q)$ arêtes continues est remplacée par $n_Q = n_{k+1}^i$ arêtes discontinues. □

Exemple. — Considérons l'exemple donné au paragraphe 5 et la ramification $\rho(u, v) = (u^4, v)$. Le diagramme d'Eggers de \bar{C} est



Remarque. — La propriété suivante se déduit de la construction de $T(\bar{C})$ à partir de $T(C)$. Étant données une branche γ de C et une branche σ de $\bar{\gamma} = \rho^{-1}\gamma$ (en fait σ donne une paramétrisation de Puiseux de γ), tout sommet noir de la chaîne élémentaire de σ est associé à un sommet noir de la chaîne de γ dans $T(C)$ et inversement, les sommets associés à un sommet noir Q de $T(C)$ sont des sommets qui se correspondent aux paramétrisations des branches qui « passent » par Q .

Modèles logarithmiques. — Les résultats suivants montrent le bon comportement des modèles logarithmiques non résonnants après ramification.

LEMME 7.2. — Soient $h : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un morphisme de rang générique maximal et \mathcal{L} un feuilletage logarithmique non résonnant. Alors $h^*\mathcal{L}$ est un feuilletage logarithmique non résonnant.

Preuve (voir aussi [19] pour le cas d'une ramification). — Supposons \mathcal{L} donné par $\omega_{\lambda, f}$ et $f = f_1 \cdots f_r$. Comme h est de rang générique maximal on sait que $f_i \circ h$ n'est pas identiquement nul. Écrivons

$$f_i \circ h = h_{i,1}^{k_{i,1}} \cdots h_{i,s_i}^{k_{i,s_i}}.$$

Alors $h^*\mathcal{L}$ est donné par la fonction multivaluée $\prod_{\ell=1}^t h_{\ell}^{\mu_{\ell}}$ où chaque h_{ℓ} est un des $h_{i,j}$ et μ_{ℓ} est une combinaison à coefficients entiers des λ_i . La non résonance des μ_{ℓ} se déduit de celle des λ_i . \square

LEMME 7.3. — Soient $h : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un morphisme de rang générique maximal et \mathcal{F} une courbe généralisée sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. Supposons que l'origine soit ou bien un point non singulier ou bien une singularité simple de \mathcal{F} et considérons un modèle logarithmique \mathcal{L} de \mathcal{F} . Alors $h^*\mathcal{L}$ est un modèle logarithmique de $h^*\mathcal{F}$. (En particulier, $h^*\mathcal{F}$ est une courbe généralisée et $h^*\mathcal{L}$ est non résonnant.)

Preuve. — Supposons $h = (f, g)$, écrit en coordonnées x, y telles que \mathcal{F} soit donné par la 1-forme méromorphe

$$\left\{ \lambda + \Psi(x, y) \right\} \frac{dx}{x} + \left\{ \mu + \Phi(x, y) \right\} \frac{dy}{y}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ sont non résonnants au sens que si $p\lambda + q\mu = 0$ pour $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ alors $p = q = 0$, et $\Psi(0) = \Phi(0) = 0$. De plus, on peut choisir les

coordonnées pour que \mathcal{L} soit donné par $x^\lambda y^\mu$. Alors $h^*\mathcal{F}$ est donné par

$$\left\{ \lambda + \Psi(f, g) \right\} \frac{df}{f} + \left\{ \mu + \Phi(f, g) \right\} \frac{dg}{g}$$

et il s'agit de montrer que $\lambda df/f + \mu dg/g$ en donne un modèle logarithmique.

Soit $F = 0$ une équation réduite de $fg = 0$ et notons $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la réduction des singularités de $F = 0$. Il suffit de montrer que les transformés stricts de $h^*\mathcal{L}$ et $h^*\mathcal{F}$ ont sur M les séparatrices données par $F \circ \pi = 0$ et que toutes ses singularités sont simples avec mêmes indices. Soit $P \in \pi^{-1}(0)$ un point non infiniment voisin des branches de $F = 0$. Alors, $F \circ \pi = x^p$, localement en P , ce qui implique que $f \circ \pi = x^{p_1} \cdot u_1$, $g \circ \pi = x^{p_2} \cdot u_2$, pour des unités u_1, u_2 , avec $p_1 + p_2 \geq p$. Le feuilletage $\pi^*(h^*\mathcal{F})$ est donné en P par

$$x \left\{ (\lambda p_1 + \mu p_2 + p_1 \Psi(f \circ \pi, g \circ \pi) + p_2 \Phi(f \circ \pi, g \circ \pi)) \frac{dx}{x} + \eta \right\}$$

où η est holomorphe. Comme $\lambda p_1 + \mu p_2 \neq 0$, c'est un point non singulier. Même calcul pour $\pi^*(h^*\mathcal{L})$. Soit $P \in \pi^{-1}(0)$ tel que $F \circ \pi = x^p y^q$ en coordonnées locales. Alors, $f \circ \pi = x^{p_1} y^{q_1} u_1$, $g \circ \pi = x^{p_2} y^{q_2} u_2$ avec $p_1 + p_2 \geq p$ et $q_1 + q_2 \geq q$. Comme avant on montre que $xy = 0$ sont des séparatrices de $\pi^*(h^*\mathcal{F})$ et $\pi^*(h^*\mathcal{L})$, et leurs parties linéaires sont données par

$$xy \left\{ (\lambda p_1 + \mu p_2) \frac{dx}{x} + (\lambda q_1 + \mu q_2) \frac{dy}{y} \right\}$$

ce qui termine la preuve, car $\lambda p_1 + \mu p_2$ et $\lambda q_1 + \mu q_2$ sont non résonnants.

Le cas où l'origine n'est pas un point singulier est évident. \square

LEMME 7.4. — Soient $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ une suite finie d'éclatements de points, un feuilletage \mathcal{F} et un feuilletage logarithmique non résonnant \mathcal{L} sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. Supposons que $\pi^*\mathcal{L}$ soit un modèle logarithmique de $\pi^*\mathcal{F}$ en tous les points de $\pi^{-1}(0)$. Alors \mathcal{L} est un modèle logarithmique de \mathcal{F} .

Preuve. — Quitte à éclater des points de M , on peut supposer que π donne une réduction de singularités (non minimale) de \mathcal{F} et de \mathcal{L} . On en déduit immédiatement l'égalité des séparatrices et le fait que \mathcal{F} est une courbe généralisée non dicritique. De plus, l'égalité des indices (sous les hypothèses précédentes) pour la réduction commune des singularités est équivalente à l'égalité des indices à quelques éclatements supplémentaires près. \square

PROPOSITION 7.5. — Soit $h : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ un morphisme algébrique de rang générique maximal. Supposons que \mathcal{L} soit un modèle logarithmique non résonnant d'un feuilletage \mathcal{F} sur $(\mathbb{C}^2, 0)$. Alors $h^*\mathcal{L}$ est un modèle logarithmique non résonnant de $h^*\mathcal{F}$.

Preuve. — Soit $\pi : M \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ la réduction des singularités de \mathcal{F} (et de \mathcal{L}). Par élimination des indéterminations (voir [1], théorème II.7, par exemple) de l'application rationnelle $\pi^{-1} \circ h : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow M$, il existe une suite finie d'éclatements de points $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ et un morphisme rationnel $\tilde{h} : \tilde{M} \rightarrow M$ qui font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, 0) & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{M} \\ h \downarrow & & \downarrow \tilde{h} \\ (\mathbb{C}^2, 0) & \xleftarrow{\pi} & M \end{array}$$

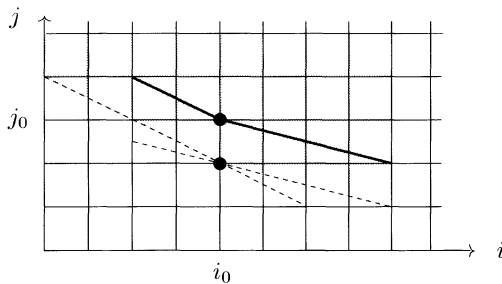
On sait que $\tilde{h}^*(\pi^*\mathcal{L})$ est un modèle logarithmique de $\tilde{h}^*(\pi^*\mathcal{F})$ en vue du lemme 7.3. On a $\tilde{h}^*(\pi^*\mathcal{L}) = \tilde{\pi}^*(h^*\mathcal{L})$ et $\tilde{h}^*(\pi^*\mathcal{F}) = \tilde{\pi}^*(h^*\mathcal{F})$ et comme $h^*\mathcal{L}$ est logarithmique non résonnant par le lemme 7.2, on conclut en appliquant le lemme 7.4. □

Remarque. — Les résultats précédents sont valables lorsque h est une ramification $\rho(u, v) = (u^n, v)$. C'est le cas qui nous intéresse.

La polaire. — Supposons que \mathcal{F} soit une courbe généralisée non dicritique avec modèle logarithmique non résonnant \mathcal{L} . Soit C la courbe des séparatrices et supposons que $x = 0$ n'est pas tangent à C et que $\rho(u, v) = (u^n, v)$ est telle que $\rho^{-1}C$ a toutes ses branches non singulières. Soit $\Gamma = \Gamma_{[a;b]}(\mathcal{F}; x, y)$ une polaire générique de \mathcal{F} . En général $\rho^{-1}\Gamma$ et $\Gamma_{[a;b]}(\rho^*\mathcal{F})$ ne sont pas équisingulières, comme le montre l'exemple donné par $d(y^3 - x^{11}) = 0$ et $\rho(u, v) = (u^3, v)$, où chacune des courbes $\rho^{-1}\Gamma$ et $\Gamma_{[a;b]}(\rho^*\mathcal{F})$ a deux branches non singulières, avec coïncidences 15 dans l'un des cas et 16 dans l'autre. Néanmoins $\rho^{-1}\Gamma$ va satisfaire l'énoncé du théorème 6.1 et donc le corollaire 6.2, comme on le montre ensuite.

PROPOSITION 7.6. — Si $\pi : (N, P) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ est une suite de p éclatements locaux telle que $P \in \rho^{-1}C$ (c'est-à-dire, le point P est dans le transformé strict de $\rho^{-1}C$ par π), alors on a $m_P(\rho^{-1}\Gamma) = m_P(\rho^{-1}C) - 1$. De plus, $\rho^{-1}\Gamma$ est transverse à $\pi^{-1}(0)$ en P .

Preuve. — Soit \mathcal{F} donné par $\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy = 0$. Notons $\tilde{A} = nu^{n-1}\bar{A}$, $\bar{A}(u, v) = A(u^n, v)$ et $\tilde{B} = \bar{B}(u, v) = B(u^n, v)$. Comme la



première pente de $\mathcal{N}(\rho^{-1}C; u, v)$ est $\geq -1/n$ (rappelons que C n'est pas tangente à l'axe $x = 0$), il existe des coordonnées $\bar{u} = u, \bar{v} = v - \varepsilon(u)$, avec

$$\varepsilon(u) = a_q u^q + \dots + a_p u^p, \quad q \geq n$$

telles que des coordonnées u', v' en P sont données par $\bar{u} = u', \bar{v} = u'^p v'$. Soit $\nabla = \mathcal{N}(\rho^{-1}C; \bar{u}, \bar{v}) = \mathcal{N}(\rho^* \mathcal{F}; \bar{u}, \bar{v})$ et choisissons (i_0, j_0) l'extrémité supérieure du premier côté de ∇ de pente $\geq -1/(p+1)$. On sait que le côté précédent a une pente $\leq -1/p$ et que $m_P(\rho^{-1}C) = j_0 \geq 1$. En particulier

$$\nabla \subset L_\nu^+(i_0, j_0), \quad \text{si } p \leq \nu \leq p+1$$

où $L_\nu^+(i_0, j_0) = \{(i, j); i + \nu j \geq i_0 + \nu j_0\}$. Avec le même argument que dans le théorème 6.1, il suffit de montrer que si $\nabla^{**} = \mathcal{N}(\rho^{-1}\Gamma; \bar{u}, \bar{v})$ alors $(i_0, j_0 - 1)$ est un sommet de ∇^{**} et $\nabla^{**} \subset L_\nu^+(i_0, j_0 - 1)$ pour $p \leq \nu \leq p+1$. Notons

$$\rho^* \omega = (\tilde{A} + \varepsilon'(\bar{u})\tilde{B}) d\bar{u} + \tilde{B} d\bar{v} = A^* d\bar{u} + \tilde{B} d\bar{v}$$

(ici $\varepsilon'(\bar{u}) = qa_q \bar{u}^{q-1} + \dots + pa_p \bar{u}^{p-1}$). On a $\nabla = \mathcal{N}(\bar{u}A^*, \tilde{B}; \bar{u}, \bar{v})$ et $\nabla^* = \mathcal{N}(\Gamma_{[a:b]}(\rho^* \mathcal{F}); \bar{u}, \bar{v}) = \mathcal{N}(A^*, \tilde{B}; \bar{u}, \bar{v})$. De plus, comme $\rho^* \mathcal{F}$ est à modèle logarithmique non résonnant $\rho^* \mathcal{L}$, en appliquant les arguments du théorème 6.1 on a que $(i_0, j_0 - 1)$ est un sommet commun à ∇^* et à $\mathcal{N}(\tilde{B}; \bar{u}, \bar{v})$ et $\nabla^* \subset L_\nu^+(i_0, j_0 - 1)$ pour $p \leq \nu \leq p+1$. Comme $(i_0, j_0 - 1)$ est un sommet de $\mathcal{N}(\tilde{B}; \bar{u}, \bar{v}) \subset \nabla^*$ et $\nabla^{**} = \mathcal{N}(\bar{A}, \tilde{B}; \bar{u}, \bar{v})$, il suffit de montrer que $\mathcal{N}(\bar{A}; \bar{u}, \bar{v}) \subset L_\nu^+(i_0, j_0 - 1)$, pour $p \leq \nu \leq p+1$. Soit (i, j) un point de $\mathcal{N}(\bar{A}; \bar{u}, \bar{v})$. Comme $\bar{A} = (A^* - \varepsilon'(\bar{u})\tilde{B})/n\bar{u}^{n-1}$, on a deux possibilités :

- 1) $(i + n - 1, j) \in \mathcal{N}(A^*; \bar{u}, \bar{v})$;
- 2) $(i + n - 1 - k, j) \in \mathcal{N}(\tilde{B}; \bar{u}, \bar{v})$, avec $k \geq q - 1 \geq n - 1$.

Dans le premier cas, on a $(i + n, j) \in \nabla$ et donc $(i + n, j) \in L_\nu^+(i_0, j_0)$; comme $\nu \geq p \geq n$, on en déduit que $(i, j) \in L_\nu^+(i_0, j_0 - 1)$. Dans le second cas on a $(i + n - 1 - k, j + 1) \in \nabla \subset L_\nu^+(i_0, j_0)$, comme $k + 1 \geq n$, on en déduit que $(i, j) \in L_\nu^+(i_0, j_0 - 1)$. □

8. Fin de la preuve.

Choisissons des coordonnées x, y pour que $x = 0$ ne soit pas tangent à la courbe C des séparatrices de \mathcal{F} . Soit $\Gamma = \Gamma_{[a:b]}(\mathcal{F}; x, y)$ une courbe polaire générique. On sait que Γ n'est pas tangent non plus à l'axe $x = 0$. Considérons une ramification $\rho : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ donnée par $x = u^n, y = v$ telle que $\rho^{-1}C$ ait toutes ses branches non singulières. La proposition 7.6 fournit une décomposition

$$\rho^{-1}\Gamma = \bigcup_{\bar{Q} \in \bar{N}} \bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$$

en utilisant les mêmes arguments que dans le corollaire du théorème 6.1. Les paquets $\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$ sont non vides et correspondent chacun à un sommet noir $\bar{Q} \in \bar{N}$ du diagramme $T(\bar{C})$, où $\bar{C} = \rho^{-1}C$, et on a les propriétés suivantes :

1) $m_0(\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}) = d_1(\bar{Q}) - 1$.

2) Si \bar{Q} est dans la chaîne élémentaire $K(\sigma)$ d'une branche σ de \bar{C} et α est une branche de $\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$, alors $\mathcal{C}(\alpha, \sigma) = \bar{v}(\bar{Q})$.

3) Si $\bar{Q} \in K(\sigma) \setminus K(\sigma')$ pour deux branches σ et σ' de \bar{C} et α est une branche de $\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$, alors $\mathcal{C}(\alpha, \sigma') = \mathcal{C}(\sigma, \sigma')$.

Étant donné un sommet noir $Q \in N$ du diagramme $T(C)$, nous définissons le paquet Γ^Q comme la réunion des branches γ de Γ telles que toute branche σ de $\rho^{-1}\gamma$ est dans un $\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$ où \bar{Q} est associé à Q . Notons que

$$\rho^{-1}\Gamma^Q = \bigcup_{\bar{Q} \text{ associé à } Q} \bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$$

(voir la remarque qui suit le lemme 7.1). Nous allons voir que les paquets Γ^Q satisfont les conclusions du théorème de décomposition. Calculons d'abord la multiplicité $m_0(\Gamma^Q)$. Comme $x = 0$ n'est pas tangent à Γ , alors $m_0(\Gamma^Q) = m_0(\rho^{-1}\Gamma^Q)$. Ainsi,

$$m_0(\Gamma^Q) = m_0(\rho^{-1}\Gamma^Q) = \sum_{\bar{Q} \text{ associé à } Q} m_0(\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}) = \sum_{\bar{Q} \text{ associé à } Q} (d_1(\bar{Q}) - 1).$$

Le lemme 7.1 nous dit que $d_1(\bar{Q}) = d_1(Q) + n_Q d_2(Q)$, pour tout \bar{Q} associé à Q et de plus il y a exactement \underline{n}_Q sommets associés \bar{Q} . Donc,

$$m_0(\Gamma^Q) = \underline{n}_Q (d_1(Q) + n_Q d_2(Q) - 1).$$

Soient C_i une branche de C telle que $Q \in K_i$ et γ une branche de Γ^Q . Nous allons calculer la coïncidence $\mathcal{C}(\gamma, C_i)$. Après ramification, on a

$$\mathcal{C}(\gamma, C_i) = \frac{1}{n} \sup_{\alpha, \sigma} \mathcal{C}(\alpha, \sigma)$$

où α varie sur les branches de $\rho^{-1}\gamma$ et σ le fait sur les branches de $\rho^{-1}C_i$. Considérons une branche fixe α de $\rho^{-1}\gamma$. Il existe un sommet $\bar{Q} \in \bar{N}$ associé à Q tel que $\alpha \subset \bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$ et une branche σ de $\rho^{-1}C_i$ telle que $\bar{Q} \in K(\sigma)$ (car $Q \in K_i$ et \bar{Q} est associé à Q). On a $\mathcal{C}(\alpha, \sigma) = \bar{v}(\bar{Q}) = nv(Q)$. D'autre part, si σ' est une branche de $\rho^{-1}C_i$ telle que $\bar{Q} \notin K(\sigma')$ on a

$$\mathcal{C}(\alpha, \sigma') = \mathcal{C}(\sigma, \sigma') \leq \bar{v}(\bar{Q}) = nv(Q).$$

On en déduit que $\mathcal{C}(\gamma, C_i) = v(Q)$. Supposons maintenant que $Q \in K_i \setminus K_j$ et γ est une branche de Γ^Q . Comme avant, on a que

$$\mathcal{C}(\gamma, C_j) = \frac{1}{n} \sup_{\alpha, \beta} \mathcal{C}(\alpha, \beta), \quad \mathcal{C}(C_i, C_j) = \frac{1}{n} \sup_{\sigma, \beta} \mathcal{C}(\sigma, \beta)$$

où α, β, σ varient respectivement sur les branches de $\rho^{-1}\gamma, \rho^{-1}C_j$ et $\rho^{-1}C_i$. Considérons α une branche de $\rho^{-1}\gamma$ et β une branche de $\rho^{-1}C_j$. Il existe un sommet $\bar{Q} \in \bar{N}$ associé à Q tel que $\alpha \subset \bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$ et $\bar{Q} \notin K(\beta)$. Prenons σ une branche de $\rho^{-1}C_i$ telle que $\bar{Q} \in K(\alpha)$, alors

$$\mathcal{C}(\alpha, \beta) = \mathcal{C}(\sigma, \beta)$$

d'après la propriété 3 des paquets $\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$. Considérons maintenant une branche σ de $\rho^{-1}C_i$ et β une branche de $\rho^{-1}C_j$. Alors, il existe \bar{Q} associé à Q tel que $\bar{Q} \in K(\sigma)$ et $\bar{Q} \notin K(\beta)$. Prenons α une branche de $\bar{\Gamma}^{\bar{Q}}$, alors

$$\mathcal{C}(\sigma, \beta) = \mathcal{C}(\alpha, \beta).$$

On en déduit que $\mathcal{C}(\gamma, C_j) = \mathcal{C}(C_i, C_j)$.

9. Éloignement des séparatrices.

La propriété d'éloignement des séparatrices, décrite par P. Rouillé, est connue pour les courbes généralisées avec une seule séparatrice et les feuilletages logarithmiques non résonnants [19]. Elle donne un lien entre le type

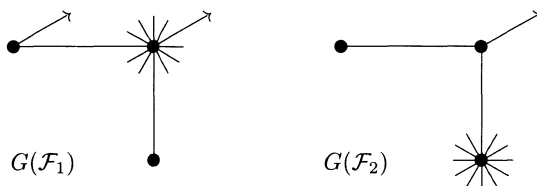
de singularité des séparatrices et les composantes dicritiques du feuilletage polaire $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} . Précisons-le. Il existe une suite minimale d'éclatements

$$\Pi : M \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

telle que les singularités du transformé strict de \mathcal{F} soient simples et le transformé strict de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ n'ait pas de point dicritique. En particulier, les composantes dicritiques de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ sont représentées dans le graphe dual $G(\Pi)$ de Π . On sait que Π désingularise les polaires génériques et que le transformé strict de chaque polaire générique passe par toutes les composantes dicritiques et seulement par elles (peut-être de manière multiple). Étant donné un sommet Q de $G(\Pi)$ la géodésique de Q est le chemin le plus court joignant Q et le sommet base B de $G(\Pi)$ qui représente le premier diviseur exceptionnel. La propriété d'éloignement des séparatrices s'énonce alors comme suit :

« Aucune géodésique d'un sommet Q de $G(\Pi)$ correspondante à une séparatrice de \mathcal{F} ne contient une composante dicritique de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$, sauf éventuellement le sommet base B . »

Exemple. — Le feuilletage \mathcal{F}_1 défini par $\omega_1 = (y^2 + x^2y + x^3) dx + y^2 dy$ dont $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_1}$ est donné par $\eta_1 = (2y^2 + 3xy) dx + (-xy - 2x^2) dy$, n'a pas la propriété d'éloignement des séparatrices. Par contre \mathcal{F}_2 , défini par $d(y^2 - x^3)$, l'a.



Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 9.1. — *Tout feuilletage courbe généralisée dont le modèle logarithmique est non résonnant a la propriété d'éloignement des séparatrices.*

Soient \mathcal{F} un feuilletage courbe généralisée à modèle logarithmique non résonnant et C la courbe des séparatrices de \mathcal{F} . Choisissons des coordonnées x, y telles que $x = 0$ ne soit pas tangent à C et considérons une ramification $\rho(u, v) = (u^n, v)$ telle que $\rho^{-1}C$ ait toutes ses composantes irréductibles non singulières. On a le résultat suivant :

LEMME 9.2. — Soit $\pi : (N, P) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ une suite de $p \geq n$ éclatements locaux telle que $P \in \rho^{-1}C$. Alors, l'éclatement $\pi_1 : \tilde{N} \rightarrow (N, P)$ de P est non dicritique pour le feuilletage $\pi^*(\rho^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$.

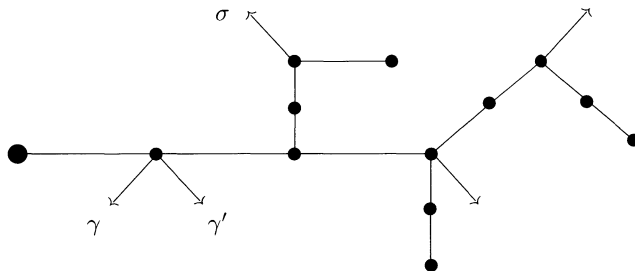
Preuve. — Prenons les notations et arguments de la preuve de la proposition 7.6. On sait que $L = (i + (p + 1)j = i_0 + (p + 1)(j_0 - 1))$ est la première droite de pente $-1/(p + 1)$ qui coupe ∇^{**} . On en déduit que

$$\text{In}_{(1,p+1)}(a\bar{A} + b\bar{B}; \bar{u}, \bar{v}) = \left(\frac{aa_n}{n} + b \right) \text{In}_{(1,p+1)}(\bar{B}; \bar{u}, \bar{v})$$

(rappelons que $a_n = 0$ si $q > n$), et cela implique le résultat car la position des branches de $\rho^{-1}\Gamma_{[a:b]}$ sur le diviseur $\pi_1^{-1}(P)$ est déterminée par ce polynôme $\text{In}_{(1,p+1)}(a\bar{A} + b\bar{B}; \bar{u}, \bar{v})$ qui ne dépend pas de $[a : b]$. \square

Remarque. — Soient G le graphe dual d'une suite d'éclatements de points et σ une branche non singulière transverse à un diviseur E_σ en un point qui ne soit pas un coin (c'est-à-dire, σ est une *curvette* [15]). Considérons γ, γ' deux curvettes transverses à un diviseur $E_\gamma = E_{\gamma'}$ en deux points différents. Si E_γ est dans la géodésique de E_σ , avant éclatement on a

$$\mathcal{C}(\gamma, \gamma') = \mathcal{C}(\sigma, \gamma) = \mathcal{C}(\sigma, \gamma').$$



Preuve du théorème. — Supposons qu'il existe une branche C_i de C telle que la géodésique de C_i dans $G(\Pi)$ contienne une composante dicritique de $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$ qui ne soit pas la première composante du diviseur exceptionnel. Alors il existe un ouvert non vide $V \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ et une branche $\gamma_{[a:b]}$ de $\Gamma_{[a:b]} = \Gamma_{[a:b]}(\mathcal{F}; x, y)$ pour tout $[a : b] \in V$ tels que pour tout couple $\gamma = \gamma_{[a:b]}$, $\gamma' = \gamma_{[a':b']}$ différents on a

- 1) $\gamma \cup C_i$ et $\gamma' \cup C_i$ sont équisingulières (et désingularisées par Π),
- 2) γ et γ' sont équisingulières,
- 3) $\mathcal{C}(\gamma, \gamma') = \mathcal{C}(\gamma, C_i) = \mathcal{C}(\gamma', C_i)$.

En effet, dans l'espace total M de Π , les branches γ, γ' jouent le même rôle que dans la remarque précédente, car elles sont attachées à la composante dicritique dans la géodésique de C_i .

Considérons une ramification $\rho : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ telle que $\rho^{-1}C$ ait toutes ses branches non singulières. Soit σ une branche fixe de $\rho^{-1}C_i$. Étant donné que le calcul de la coïncidence peut se faire en faisant varier les paramétrisations d'une seule des courbes (voir [12]) on a

$$n\mathcal{C}(\gamma, C_i) = n\mathcal{C}(\gamma', C_i) = \mathcal{C}(\alpha, \sigma) = \mathcal{C}(\alpha', \sigma) = p$$

pour deux branches α, α' de $\rho^{-1}\gamma, \rho^{-1}\gamma'$ respectivement. On en déduit que $\mathcal{C}(\alpha, \alpha') \geq p$ et comme $\mathcal{C}(\gamma, \gamma') = p/n$, nécessairement $\mathcal{C}(\alpha, \alpha') = p$. D'autre part, notons que $p > n$, car si $\mathcal{C}(\gamma, \gamma') = 1$ ceci implique que la composante dicritique est la première composante du diviseur exceptionnel. Soit $\pi : (N, P) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ une suite de $(p-1)$ -éclatements locaux telle que $P \in \sigma$. Alors, α et α' ont des tangentes différentes en P . Vu que α et α' varient sur un ensemble infini et qu'elles sont des courbes intégrales de $\rho^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{F}}$, ceci implique que l'éclatement de centre P de $\pi^*(\rho^{-1}\mathcal{P}_{\mathcal{F}})$ est dicritique. On trouve ainsi une contradiction au lemme précédent. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE, Complex Algebraic Surfaces, London Math. Soc. Stud. Texts 34, Cambridge University Press, 1996.
- [2] C. CAMACHO, P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. of Math., 115 (1982), 579-595.
- [3] C. CAMACHO, A. LINS NETO, P. SAD, Topological invariants and equidesingularisation for holomorphic vector fields, J. Diff. Geom., 20 (1984), 143-174.
- [4] J. CANO, An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solution of Pfaffian form, Ann. Inst. Fourier, 43-1 (1993), 125-142.
- [5] E. CASAS-ALVERO, Singularities of plane curves, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 276, Cambridge University Press, 2000.
- [6] E. CASAS-ALVERO, Infinitely near imposed singularities of polar curves, Math. Ann., 287 (1990), 429-454.
- [7] E. CASAS-ALVERO, Singularities of polar curves, Comp. Math., 89 (1993), 339-359.
- [8] D. CERVEAU, J.-F. MATTEI, Formes intégrables holomorphes singulières, Astérisque 97, Soc. Math. France, 1982.
- [9] N. CORRAL, Courbes polaires d'un feuilletage singulier, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, 331-1 (2000), 51-54.
- [10] F. DELGADO DE LA MATA, A factorization theorem for the polar of a curve with two branches, Comp. Math., 92 (1994), 327-375.

- [11] H. EGGERS, Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten, *Bonner Math. Schriften* 147, 1983.
- [12] E. GARCÍA BARROSO, Invariants des singularités de courbes planes et courbure des fibres de Milnor, Thèse, École Normale Supérieure, LMENS-96-35, 1996.
- [13] E. GARCÍA BARROSO, Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite, *Proc. London Math. Soc.*, 81-3 (2000), 1–28.
- [14] T.C. KUO, Y.C. LU, On analytic function germs of two complex variables, *Topology*, 16 (1977), 299–310.
- [15] LÊ DŨNG TRANG, F. MICHEL, C. WEBER, Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes, *Comp. Math.*, 72 (1989), 87–113.
- [16] A. LINS NETO, Algebraic solution of polynomial differential equation and foliations in dimension two, 192–232, *Holomorphic Dynamics, Proceedings México, Lecture Notes in Math.* 1345, 1986.
- [17] J.-F. MATTEI, R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 13 (1980), 469–523.
- [18] M. MERLE, Invariants polaires des courbes planes, *Invent. Math.*, 41 (1977), 103–111.
- [19] P. ROUILLÉ, Courbes polaires et courbure, Thèse, Université de Bourgogne, Dijon, 1996.
- [20] P. ROUILLÉ, Sur les polaires des certaines 1-formes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I, Math.*, 326-6 (1998), 677–680.
- [21] P. ROUILLÉ, Théorème de Merle : cas des 1-formes de type courbes généralisées, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 30-3 (1999), 293–314.
- [22] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation $A dY = B dX$, *Amer. J. Math.*, 90 (1968), 248–269.
- [23] B. TEISSIER, Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, 285–362, *Singularités à Cargèse, Astérisque* 7-8, Soc. Math. France, 1973.
- [24] B. TEISSIER, Variétés polaires 1, *Invent. Math.*, 40 (1977), 267–292.
- [25] O. ZARISKI, Le problème des modules pour les branches planes, *Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique*, 1973; rééd., Hermann, 1986.

Manuscrit reçu le 21 janvier 2002,
accepté le 12 novembre 2002.

Nuria CORRAL,
Facultad de Ciencias
Departamento de Álgebra
Geometría y Topología
47005 Valladolid (España).
nuria@wamba.cpd.uva.es