ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

André VOROS

Travaux de Frédéric Pham (Deuxième partie)

Tome 53, nº 4 (2003), p. 957-975.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_4_957_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
53, 4 (2003), 957–975

LES TRAVAUX DE FRÉDÉRIC PHAM
(Deuxième partie)

par André VOROS

Après l'exposé de B. Malgrange sur l'impact en mathématiques pures des travaux de Frédéric Pham, c'est un grand honneur que d'être appelé à présenter ceux-ci sous l'angle de la physique (théorique). À mon avis, il importe ici de mettre en valeur aussi bien l'influence des travaux de Pham en physique que la fertilisation par la physique de ses idées mathématiques; cette interaction réciproque s'étend alors à tous ses travaux de recherche (hormis peut-être sur les singularités, dans la décennie 1970–80). C'est authentiquement une œuvre de physique mathématique, ou de mathématique physique si l'on veut. J'aimerais ici surtout parvenir à en suggérer la cohérence et l'unité profondes, mais sans espérer refléter la remarquable clarté d'expression dont fait preuve Pham lui-même.

Ces travaux couvrent une très longue période (1963–2000), une grande variété de problèmes (physique des hautes énergies – théorie quantique des champs et de la matrice S – optique géométrique – mécanique quantique et semi-classique – résurgence), et ils maîtrisent de nombreuses techniques (analyse complexe, hyperfonctions, géométrie algébrique, topologie, homologie...). Ils forment une trentaine d'articles dont plusieurs très gros, et deux livres. Je ne saurais donc ni être exhaustif, ni totalement éviter de revenir sur des travaux déjà traités par Malgrange.

Par ailleurs, mes relations personnelles avec Frédéric Pham ont débuté... fort mal! Car, lorsque je suis arrivé au Service de Physique Théorique du CEA-Saclay en 1969, lui venait d'en partir. J'ai donc interagi avec lui bien plus tardivement et ponctuellement qu'il n'aurait été souhaitable : lors de colloques ou rencontres. Les premières occasions sont survenues dans une période d'intense interaction mathématiques–physique qui impliquait notamment l'analyse complexe et la théorie quantique relativiste, et où Nice, Grenoble et Saclay ont pris une grande part. Mes souvenirs les plus marquants en sont, d'un côté la RCP25 à l'IRMA de Strasbourg, à savoir (deux fois par an) les Rencontres entre physiciens théoriciens et mathématiciens, alors animées par R. Gérard, et où Pham a parlé à quatre reprises [14], [19], [20], [29], [38]; puis les colloques autour des hyperfonctions et microfonctions, dont celui organisé par Pham lui-même à Nice en 1973 [18], et celui des Houches en 1979 (organisé par D. Iagolnitzer). J'ai en outre bénéficié de maintes invitations à Nice par Pham et son groupe, toujours très chaleureuses et stimulantes. Néanmoins mon témoignage ne pourra atteindre à une précision de collaborateur ou d'observateur rapproché.

Pour ces deux raisons, ma présentation risque d'être partielle (partiale?), de s'attarder sur les points de vue qui me sont les plus familiers (l'analyse asymptotique et les méthodes semi-classiques), et d'omettre (injustement, et sous ma seule responsabilité) certains autres aspects et noms de personnes. Les détails techniques, eux, seront volontairement omis.

Je répartirai les travaux de Pham "vus de la physique", dans leurs grandes lignes, en trois périodes :

1) 1963–69 : *période "matrice S"* (à Saclay); étude des singularités (de Landau) des amplitudes de diffusion en théorie quantique relativiste, et des ramifications d'intégrales [2]–[7] (d'où ses investigations mathématiques sur les microfonctions [17], [18], les singularités,... dans la décennie 1970–80).

2) 1976–85 : *période "semi-classique"*; caustiques et phase stationnaire [20], [21], méthode du col [26], [28], [30], [31], programme de Balian–Bloch [29], [37].

3) 1985–2000 : *période "résurgente"*; cadre résurgent des méthodes semi-classiques exactes et phénomène de Stokes [33], [35]–[38], [42]–[46], [49]–[51], [54]–[56], (multi-)instantons avec preuve de conjectures de J. Zinn-Justin [35]–[37], [39], [49], [58].

Pour les deux premières périodes, déjà largement couvertes par Malgrange, je compléterai surtout le contexte physique. Seule la dernière période sera vue ici dans son ensemble.

1. La période "matrice S".

[Je remercie beaucoup J. Bros qui a bien voulu m'aider dans la description de cette phase dont je n'ai pas été personnellement témoin.]

Dans les années soixante, la grande préoccupation d'une majorité de physiciens théoriciens était la recherche de théories dynamiques pertinentes pour les particules élémentaires (électron, photon, protons et neutrons, plus toutes celles, nouvelles et de plus en plus instables, que les grands accélérateurs de particules faisaient découvrir). Une telle théorie doit être à la fois quantique et relativiste, et donc admettre la production et l'annihilation de particules en nombre quelconque; d'où une infinité de degrés de liberté qui crée immédiatement des divergences – signe sans doute qu'une théorie pleinement satisfaisante n'a (toujours) pas été trouvée.

Une des approches utilisées, la *théorie quantique des champs*, veut décrire la physique "de l'intérieur", à partir de lois microscopiques. Chaque type de particule y est décrit par un champ quantifié (ex. le photon par le champ électromagnétique); ces différents champs interagissent aux points d'espace-temps coïncidants, et les processus physiques résultent de la resommation (purement formelle!) de tous les ordres en perturbation de ces interactions élémentaires, représentés par les intégrales ou diagrammes de Feynman. Cependant, ces théories sont très difficiles à construire et à appliquer au-delà de calculs perturbatifs d'ordre fini. Même l'électrodynamique quantique, qui est la théorie des champs restreinte aux deux particules les plus élémentaires (électron et photon), a encore aujourd'hui un statut mal défini en dimension d'espace-temps quatre (le cas physique).

Un programme concurrent, celui de la *matrice S*, vise alors à décrire la physique "de l'extérieur", sans préjuger d'équations microscopiques, mais exclusivement à partir des amplitudes de diffusion mesurables à grandes distances inter-particulaires. Ces amplitudes forment la "matrice S", en fait un ensemble infini de noyaux intégraux dans les variables quadrivecteurs impulsion-énergie des particules externes (entrantes ou sortantes, en nombre arbitraire). Il s'agit alors de préciser au maximum la structure de la matrice S uniquement sur la base de grands principes :

– l'unitarité de la matrice S (conservation de la probabilité), qui se traduit par une infinité de relations intégrales non-linéaires reliant les différents noyaux qui la composent;

– l'analyticité de ces noyaux, concept hérité de la théorie des champs, d'une part comme traduction de la causalité (quantique et relativiste), et d'autre part comme propriété générique des contributions perturbatives (les intégrales de Feynman).

C'est ainsi que théorie des champs comme matrice S font largement appel aux fonctions holomorphes (à plusieurs variables) et à leurs singularités (vues sous l'angle des microfonctions). Les deux approches se rejoignent aussi sur certaines conclusions : une amplitude de diffusion doit être la valeur-au-bord-distribution d'une fonction analytique (dans les variables d'impulsion-énergie complexifiées), et dont le lieu singulier doit obligatoirement contenir certaines surfaces spécifiées par des équations explicites : les *singularités de Landau*. Ces dernières, obtenues d'abord en théorie des champs perturbative pour les intégrales de Feynman, sont élevées au rang de conjecture pour la matrice S non-perturbative, où elles s'interprètent comme engendrées par les processus de collisions multiples lorsque toutes les particules intermédiaires (pendant et malgré leur temps de vie fini) y suivent des trajectoires vraiment classiques (non virtuelles). quantiques

Au sein du Service de Physique Théorique de Saclay, à cette époque, un groupe important était engagé dans ces recherches de type "axiomatique" sur les grands principes des théories quantiques relativistes. En 1961, Pham a rejoint ce groupe animé alors par M. Froissart et R. Stora. Il y a collaboré avec D. Bessis (pour son premier article de physique mathématique, "Complex singularities in production amplitudes" [2]). Il a aussi beaucoup interagi avec J. Bros, D. Iagolnitzer et C. Itzykson. C'est à Saclay qu'il a fait son travail de thèse, "Singularités des processus de diffusion multiple" [7]. Le fil conducteur de ces travaux est le calcul systématique et diagrammatique des singularités de Landau, leur description topologique détaillée (comme *contours apparents* de variétés de configurations cinématiques *classiquement permises*), et l'étude de leur cohérence interne : c'est par là que Pham s'est trouvé confronté au calcul des singularités d'intégrales analytiques avec paramètres.

Les travaux de F. Pham autour de sa thèse ont aussi impliqué D. Fotiadi et J. Lascoux; ils ont été en outre profondément influencés par R. Thom et les idées de J. Leray, ainsi que Malgrange l'explique en détail. Ils ont apporté des méthodes d'une portée beaucoup plus générale que celles utilisées jusque-là par les physiciens pour étudier les singularités des intégrales de Feynman. Comme le soulignait déjà Pham dans sa thèse, ce n'était pas seulement des intégrales de fonctions holomorphes, mais des solutions d'équations intégrales qu'il fallait étudier (ainsi que les discontinuités associées) dès qu'on sortait de la théorie des perturbations pour utiliser les équations d'unitarité. Ces méthodes (pleinement développées par Pham dans son ouvrage "Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau" [6]), basées sur les notions de cycles évanescents, de "cobord de Leray", et aboutissant aux formules de type Picard–Lefschetz, allaient pouvoir s'intégrer aux programmes axiomatiques d'étude de la structure analytique et des singularités de seuil pour les noyaux de matrice S, et pour leurs extrapolations "hors couche de masse" en théorie générale des champs (non-perturbative). Un tel programme, développé par J. Bros et al. sur les équations intégrales de Bethe–Salpeter (où les cycles d'intégration sont complexes), s'est ainsi appuyé de façon cruciale sur l'approche homologique de Pham.

Un des articles de cette période mérite selon moi une mention supplémentaire : "Applications of an isotopy theorem" [3] (écrit avec D. Fotiadi, M. Froissart et J. Lascoux). Car il m'apparaît comme un travail capital pour faire la jonction avec les préoccupations semi-classiques et résurgentes ultérieures de Pham : en effet, il décrit la déformation paramétrique des ramifications locales d'une intégrale analytique de type Feynman, mais par un traitement à ce point général qu'il devait s'avérer directement valable dans une tout autre situation : les solutions de l'équation de Schrödinger qui sont décrites par la représentation intégrale (et semi-classique) de Balian–Bloch ! Par ce biais, cet article a plus tard constitué un maillon essentiel dans la transmutation des "formules de raccordement" semi-classiques (et ambiguës) en formules de prolongement analytique complètement rigoureuses et exactes (cf. partie 3). Pham avait également suivi à Saclay le développement par Balian et Bloch de leur formalisme semi-classique ; mais apparemment, ces convergences avec ses propres travaux de cette période ne sont devenues manifestes que dix ans plus tard.

2. La période "semi-classique".

L'analyse semi-classique a très grossièrement pour objet de faire des calculs, dans une théorie ondulatoire, aux très grandes valeurs de la fréquence d'onde ν (ou, en mécanique quantique, de l'inverse de la constante de Planck $\hbar$), et ce dans un sens asymptotique pour $\nu \to \infty$ (développements en séries a priori divergentes).

L'exemple le plus standard est l'asymptotique des intégrales du type $I(\nu) = \int_C \mathrm{e}^{i\nu S(u)} a(u)\, du$ (célèbres méthodes de la phase stationnaire pour S réelle, de Laplace pour S imaginaire pure), où le traitement aboutit à des formules du genre $I(\nu) \sim e^{i\nu S^*} \sum_n a_n \nu^{-\alpha-n}$ (S^* étant une valeur critique de la fonction S) [ou éventuellement une somme finie de tels développements]. On peut traiter de manière analogue les équations d'onde du type Helmholtz ou Schrödinger, $\Delta\psi(\nu, x) + \nu^2 W(x)\psi(\nu, x) = 0$, lorsque des solutions $\psi(\nu, x)$ admettent des représentations intégrales comme ci-dessus, paramétrées par x (et, en général, vraies seulement asymptotiquement pour $\nu \to \infty$; ex. : formule de Huygens–Fresnel). Les approximations résultantes (optique géométrique ou mécanique semi-classique, suivant le contexte) décrivent les *ondes* ainsi que leurs figures de diffraction à partir de l'ossature géométrique des *rayons* ou des *trajectoires classiques*; cette vision (notamment développée par Berry) allait fortement imprégner Pham (cf. par exemple [20], [37], [45], [46]).

On sait (depuis Poincaré) manipuler rigoureusement de tels développements divergents comme *séries asymptotiques*. Toutefois un prix élevé à payer est la perte de contrôle sur d'éventuels termes correctifs *exponentiellement petits* mais qui jouent parfois un rôle déterminant : en physique quantique, dans les résonances, les effets tunnel...; en analyse asymptotique même, dans les phénomènes de Stokes qui expriment les obstructions à la resommabilité de Borel de ces séries; et dans le calcul numérique, où ces termes sont parfois nettement plus significatifs que ceux détectés et contrôlés par l'asymptotique. Ainsi, vers 1977 à Saclay, Balian–Parisi ont mis en évidence (sur la base de travaux de Knoll–Schaeffer en méthode BKW complexe) de tels effets très subtils, qui se sont révélés plus tard comme les obstructions génériques à la resommation de Borel pour les séries semi-classiques.

En 1971, C. Bender et T.T. Wu avaient trouvé un autre effet marquant, relatif à la divergence de la série des perturbations (qui, en théorie quantique des champs, rend la resommation des graphes de Feynman purement formelle, cf. partie 1). Se fixant sur la série perturbative de la plus basse valeur propre $E \sim \sum_0^\infty E_n g^n$ pour l'équation de Schrödinger à 1 dimension $-\psi''(x) + (x^2 + gx^4 - E)\psi(x) = 0$ (oscillateur harmonique avec perturbation quartique gx^4), ces auteurs ont obtenu une croissance en factorielle pour les coefficients : $E_n \propto n!\, C^{-n} n^b$ pour $n \to +\infty$ ... à partir d'un effet tunnel en $e^{-C/g}$: c'est cet exponentiellement petit qui fait que la série diverge pour tout $g \neq 0$. Ce type d'études (le comportement "aux grands ordres" des séries perturbatives quantiques et leur resommation, notamment de Borel) s'est ensuite beaucoup systématisé, notamment à Saclay (curieusement là encore, sans rattachement explicite aux travaux de Balian et Bloch, bien qu'il y soit fait appel à la même transformation de Borel). Un de ces résultats devait particulièrement orienter le travail ultérieur de Pham (cf. partie 3) : en 1984, J. Zinn-Justin est parvenu à conjecturer la structure analytique exacte des *multi-instantons* (les termes exponentiellement petits à tous les ordres) dans l'écart entre les valeurs propres quasi-dégénérées d'un l'oscillateur analogue à "double puits" $-\psi''(x) + (-x^2 + gx^4 - E)\psi(x) = 0$ (voir son texte pour plus de détails).

Les asymptoticiens avaient certes développé diverses astuces pour pouvoir parfois gérer de tels exponentiellement petits de manière acceptable, mais au cas par cas. La question de leur traitement correct et général (lorsque *plusieurs* échelles exponentielles sont en compétition, seule la dominante est asymptotiquement perçue) est restée un talon d'Achille pour l'analyse asymptotique pendant une grande moitié du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle, empoisonnant le sujet par d'incessantes controverses "théologiques".

Ces questions d'erreurs dans les approximations asymptotiques peuvent sembler n'être que bassement utilitaires, ou purement numériques. Pour comprendre comment les travaux de Pham ont pu intervenir pour un traitement rigoureux de ce problème, le mieux est d'abord de paraphraser Pham lui-même, d'après "Résurgence d'un thème de Huygens–Fresnel" [37].

Dans l'approche asymptotique traditionnelle (utilisable pour S réelle), un résultat tel que $I(\nu) \sim \mathrm{e}^{i\nu S^*} \sum_n a_n \nu^{-\alpha-n}$ (S^* valeur critique de la fonction $S(u)$, cf. plus haut) est pris au sens d'égalité mod $O(\nu^{-\infty})$. Une interprétation microlocale (Hörmander,...) se fait par passage à une transformée de Fourier $\hat{I}(s)$: la formule précédente fixe celle-ci en tant que *distribution modulo les fonctions* C^∞ au voisinage de S^*, c'est-à-dire *partie singulière* en S^* d'une distribution (= une microfonction C^∞). C'est donc de nouveau une affaire de singularités! Cette vision géométrique de l'asymptotique C^∞ est ainsi prônée vers 1974, également à Nice, par Chazarain (s'y apparente partiellement la vision des physiciens comme Berry, plus axée sur les singularités constituées par les caustiques).

Il est alors tentant (suivant L. Boutet de Monvel, et Sato–Kawai–Kashiwara) de substituer le cadre analytique au cadre C^∞ : Pham montre ainsi, dans "Caustics and microfunctions" (1977) [20], que dans un cadre analytique réel, $\hat{I}(s)$ peut se calculer en tant qu'*hyperfonction modulo les fonctions holomorphes* au voisinage de S^* (= une microfonction analytique); ceci correspond à un calcul asymptotique plus précis de $I(\nu)$, où l'erreur résiduelle est ramenée de $O(\nu^{-\infty})$ à $O(\mathrm{e}^{-A\nu})$ pour un $A > 0$ (mais qui reste indéterminé). Ainsi, les exponentiellement petits échappent encore à une détermination effective, mais de justesse : dans le langage microlocal, la limitation essentielle reste que les hyperfonctions usuelles, tout comme les distributions, conservent un support purement réel, donc leurs singularités ne peuvent pas migrer dans le complexe.

Curieusement, sur la courte période 1973–74 sont apparues trois avancées indépendantes vers un traitement asymptotique correct des exponentiellement petits à tous les ordres, que le travail de Pham devait beaucoup développer ensuite : le livre de R. B. Dingle sur les développements asymptotiques (prônant leur resommation de Borel généralisée dans les directions complexes) ; les travaux de J. Leray sur le problème de Cauchy ramifié (où est prouvée la propagation des fronts d'onde le long des bicaractéristiques complexes) ; et l'article de R. Balian et C. Bloch sur la résolution de l'équation de Schrödinger au moyen des trajectoires classiques complexes. Ce qui unit ces trois travaux est le cadre *analytique complexe*, notamment la propagation des singularités dans le complexe. En contrepartie, ce doit maintenant être des singularités isolées, et elles ne se traitent encore bien qu'en codimension 1 (singularités par rapport à une seule variable). Toutefois, de nombreux problèmes "naturels" rentrent sans effort dans ce cadre, et s'y décrivent à la fois beaucoup plus complètement et simplement que dans le réel. Dans l'exemple de l'intégrale de type $I(\nu)$ plus haut : pour peu que l'intégrand $\mathrm{e}^{i\nu S(u)}a(u)$ soit (essentiellement) globalement analytique, on peut espérer atteindre des formules de type phase stationnaire mais poussées aux termes exponentiellement petits (méthode "du col" / "saddle-point" ou "steepest-descent" method) ; ce programme est ébauché dans le livre de Dingle, et le problème mathématique global explicité par Malgrange (Les Houches, 1979).

Ayant connaissance de ces derniers travaux, et étant un expert convaincu de l'utilité des hyper- et micro-fonctions, Pham était naturellement porté à s'attaquer à ces problèmes par les méthodes qu'il avait développées pour les singularités de Landau. En quatre publications (1983–85) [26], [28], [30], [31], culminant avec "La descente des cols par les onglets de Lefschetz, avec vues sur Gauss–Manin", il est ainsi parvenu à rendre la méthode du col (au sens ci-dessus) complètement rigoureuse et systématique, ainsi que Malgrange l'explique plus en détail dans son exposé. Pham aboutit à un procédé en principe effectif pour calculer une large classe d'intégrales du type $I(\nu)$ à tous les ordres exponentiellement petits ($\nu \to \infty$). Simplement, il restreint $S(u)$ à être un polynôme assez générique, afin d'exclure d'exceptionnels cas pathologiques. Ensuite, l'essentiel est d'écrire $I(\nu)$ comme une transformée de Fourier–Laplace, $I(\nu) = \int_\Gamma e^{-\nu\tau}\tilde{I}(\tau)\,d\tau$ avec $\tilde{I}(\tau) = \int_C a(u)/[\tau + iS(u)]\,du$. Ces formules rappellent la transformation de Fourier invoquée pour l'analyse microlocale, mais ici (et pareillement, dans la méthode de Balian–Bloch en partie 3) elles sont toutes deux exploitées dans leur acception *exacte*. La première de ces formules ramène le problème à un calcul d'homologie sur la surface de Riemann de $\tilde{I}(\tau)$ (la spécification du chemin Γ, puis sa décomposition en chemins de transformations de Laplace standard "accrochés" aux singularités de $\tilde{I}(\tau)$) ; la seconde exprime $\tilde{I}(\tau)$ comme une intégrale à paramètre, précisément d'un type traité antérieurement par Pham ! Surtout, le formalisme de ce dernier est pleinement *multi-dimensionnel* (pour l'intégrale $\int_C du$), alors qu'auparavant aucun algorithme (ni même de recette) vraiment explicite n'existait en dehors du cas unidimensionnel. Dans ce problème, pourtant de grande importance pour les applications, il a fallu cette analyse mathématique rigoureuse afin d'atteindre des formules concrètes pour les cas d'intégrales multiples, à l'inverse de ce qui est plus souvent observé.

Ces articles font donc partie des travaux fondateurs d'une nouvelle école, l'asymptotique exponentielle (ou l'hyperasymptotique), qui a connu ensuite un grand essor, par exemple autour de Berry (tout comme les approches connexes de type Gevrey, (multi)sommabilité..., développées notamment par Ramis, et que je ne fais ici que mentionner parce que je les connais insuffisamment). Mais ces travaux de Pham ont été davantage couverts par B. Malgrange, et comme ce dernier l'a signalé à la fin de son exposé, l'intérêt de Pham s'est bientôt déporté vers l'analyse semi-classique proprement dite (pour la mécanique quantique) ; je peux donc passer à cette phase spécifique.

3. La période "résurgente".

Les travaux suivants de Pham démarrent en prolongement direct des précédents. Il va toujours s'agir d'étudier, de plus en plus finement, les singularités de fonctions *analytiques ramifiées* résultant d'une *transformation de Borel* sur des séries divergentes : développements perturbatifs ou semi-classiques, et spécifiquement maintenant, solutions semi-classiques d'équations de Schrödinger à une dimension. Toutefois, une démarcation fondamentale se place ici même : la partie précédente relevait d'approches *asymptotiques exponentielles*, incluant des termes exponentiellement petits à un certain ordre (éventuellement arbitraire); et ce qui suit va relever d'une approche "asymptotique exacte" où l'erreur est en permanence strictement nulle, et les formules en principe complètement exactes (quoique souvent implicites). Or les seuls de ces résultats exacts à avoir une forme algébrique explicite sont des identités algébriques reliant les fonctions de discontinuité (ou "variations") des transformées de Borel à leurs différents points de ramification; elles sont dites *équations de résurgence* — ou bien "équations du pont", relations de "bootstrap analytique" (souvent traduisibles en relations fonctionnelles sur les fonctions resommées de Borel de ces séries divergentes; l'exemple de base, bien que dégénéré et exceptionnellement soluble, en est la formule des compléments pour la fonction $\log \Gamma(\nu)$ = la somme de Borel de la série de Stirling à $\nu \to +\infty$). C'est pourquoi nous conviendrons ici que l'asymptotique exacte apparaît avec les relations de résurgence explicites (qui précisément échappent à l'analyse microlocale, même complexe).

Pham s'est donc tourné vers l'analyse semi-classique exacte (ou résurgente), tout en se focalisant sur l'équation de Schrödinger, une source de relations de résurgence plus riches et géométriques que la méthode du col. Cette étape du travail de Pham se situe à l'intersection de deux courants de recherche initialement distincts, et qu'il a grandement aidés à faire confluer.

D'un côté, la théorie complètement générale des *fonctions résurgentes* (à une variable), créée (avec sa terminologie) par J. Écalle pour traiter et surtout classifier des problèmes décrits par des séries factoriellement divergentes dans des situations essentiellement non-linéaires (systèmes dynamiques, etc.). Les transformées de Borel de ces séries se trouvent être des fonctions analytiques à ramification discrète (= "prolongeables sans fin"), et la théorie exprime leurs discontinuités au moyen de formules totalement algébriques et combinatoires (les "dérivations étrangères"). Des identités de convolution ("équations de résurgence") relient algébriquement les discontinuités en différents points (indépendamment du prolongement analytique usuel, qui est un lien transcendant). À noter que les articles de base (Écalle) n'existent qu'en prétirages papier (1981–1985).

De l'autre côté, *l'analyse semi-classique* (à une dimension), où étaient apparus des cas isolés de relations de résurgence concrètes (mais non ainsi nommées). Il s'agit ici de mécanique quantique, où $1/\nu \equiv \hbar$, constante de Planck (nulle pour la mécanique classique), et l'équation (de Schrödinger) est parfaitement linéaire, du type Sturm–Liouville :

$$[d^2/dx^2 + \nu^2 W(x)]\psi(\nu, x) = 0$$

[avec $\psi(\nu, x) \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ pour le problème aux valeurs propres]. Les solutions ont la forme semi-classique dite BKW (d'après Brillouin, Kramers, Wentzel), $\psi(\nu, x) \sim \mathrm{e}^{i\nu \int W^{1/2}dx} \sum_n a_n(x)\nu^{-n}$ ($\nu \to +\infty$), mais où les séries divergent (empiriquement, et sauf cas très spéciaux). L'idée de Balian et Bloch (formulée par eux en dimension quelconque pour x) est alors de rechercher une représentation de Laplace–Borel généralisée : $\psi(\nu, x) = \int_{C(x)} \tilde{\psi}(\tau, x)\mathrm{e}^{-\nu\tau} d\tau$ (avec chemin d'intégration complexe), où $\tilde{\psi}$ serait une fonction d'un type très remarquable : analytique, et ramifiée aux seules valeurs de l'action classique complexe (propriété de propagation des singularités, qui les rend calculables).

La résurgence proprement dite "surgit" si (et quand) on arrive à mieux expliciter les discontinuités de $\tilde{\psi}$. Ainsi, partant du cas complètement calculable $W(x) = ax + b$ (où ψ est une fonction d'Airy), Dingle a proposé dans son livre (1973) un comportement "aux grands ordres" pour les $a_n(x)$ ($n \to +\infty$) qui équivaut à ce que la série de Taylor en τ de la première discontinuité de $\tilde{\psi}$ s'engendre (à tout ordre fini)... à partir de celle de $\tilde{\psi}$ elle-même : un exemple prémonitoire d'équation de résurgence. Puis vers 1980, des relations similaires sont apparues sur les déterminants spectraux pour des $W(x)$ polynomiaux : en effet, le spectre de l'équation de Schrödinger sort d'une analyse globale de celle-ci (phénomènes de Stokes, et "formules de raccordement" / "connection formulae", dans le jargon semi-classique), laquelle se ramène en fait exactement au prolongement analytique de $\tilde{\psi}$ dans la variable x; ayant alors à traiter ce problème, je me suis aperçu — sous la seule réserve que 0 ne soit pas valeur critique de W (donc que tous les zéros de W, dits *points tournants*, soient simples) — qu'il avait déjà été résolu... précisément par les travaux de Pham vus en partie 1 [3]; par suite, l'infinité de transformées de Borel présentes dans le problème se referme en une algèbre de convolution de type fini, d'où résurgence. Enfin, la "conjecture de Zinn-Justin" (1984) sur les multi-instantons (cf. son exposé dans ce volume, et partie 2 ci-dessus) s'est révélée (par le travail ultérieur de Pham et ses élèves) être aussi une formule de résurgence, mais dans la variable g (constante de couplage) et à $\min W = 0$ (donc valeur critique) : ceci rend l'analyse bien plus singulière et ardue (points tournants doubles, par confluences de zéros simples).

Vers 1982, il est apparu que ces relations convolutives (pour le problème de Schrödinger) relevaient de la théorie d'Écalle : cette observation est due à Malgrange, également auteur des premiers exposés assez condensés — et publiés (1982–85) — sur les fonctions résurgentes (et leur lien aux hyperfonctions). C'est ainsi que Pham, déjà très attentif aux singularités de transformées de Borel à la Balian–Bloch de par ses travaux sur la méthode du col (cf. partie 2), a pu prendre connaissance de la théorie d'Écalle, et s'y engager.

Il est frappant que dès 1983, en conclusion de son exposé à la RCP 25, "Calcul microdifférentiel complexe et méthode semi-classique" [29], Pham esquissait déjà toutes les grandes lignes du programme qu'il allait suivre sur plus de quinze ans, à savoir : utiliser la résurgence d'Écalle pour calculer les singularités de $\tilde{\psi}$ dans le cas de points tournants simples, puis de points tournants d'ordre plus élevé en prédisant la nécessité de sortir du cadre "holonome" ; et que dès 1988 il prévoyait de prouver la "conjecture de Zinn-Justin" (ci-dessus) par ce dernier chemin [35].

Un autre trait général à souligner est que Pham a su "faire école" à Nice sur ce programme, attachant une grande importance à la diffusion et l'enseignement de cette théorie initialement assez confidentielle, et attirant, dans ce sujet si ardu de prime abord, des "strates" successives de collaborateurs dans une recherche à progression cohérente et au long cours : B. Candelpergher, J.-C. Nosmas, A. Ould Jidoumou (thèse, 1990), H. Dillinger et É. Delabaere (thèse, 1991), D.T. Trinh (thèse, 2002). Pham a donc eu un grand rôle d'animateur, et il faudrait inclure certaines publications en solo des auteurs ci-dessus pour une analyse plus complète de l'état du programme. (L'implication de Pham comme formateur se manifeste en outre, dans cette période, par son écriture d'une demi-douzaine d'ouvrages d'enseignement ou de vulgarisation sur divers sujets [41], [47], [48], [53], [57], [60], [62], et dans sa coopération scientifique active avec le Viêt-nam.)

Sur la quinzaine de travaux "résurgents" de Pham (et al.), voici maintenant les principaux, répartis par commodité (et quitte à schématiser) d'après leur perspective dominante.

3.1. Travaux d'exposition.

Pham montre constamment le souci de faire œuvre pédagogique sans omettre aucun détail. Or les travaux préexistants de et sur la résurgence, soit visent à une généralité extrême, soit au contraire collent à des applications très spécifiques. Dans les deux cas, il en résulte un traitement plutôt succinct de certains détails et résultats intermédiaires, qui sont fournis avec de simples esquisses de preuves voire conjecturés; tout cela rend ces travaux assez abrupts à aborder. Pham a dû juger que la théorie générale requérait un processus d'explicitation et de simplification, et c'est ce qu'il commence par faire avec patience et exhaustivité pendant plus de cinq années avec ses collaborateurs niçois. Ce programme est en germe dans son exposé Bourbaki de 1985 [33], et il aboutit principalement, avec B. Candelpergher et J.-C. Nosmas, au livre paru en 1993, "Approche de la résurgence" [42]. Mais ce souci d'explication et d'élaboration progressive persiste au-delà. Ainsi, des introductions spécifiques à la résurgence semi-classique figurent en bonne place plutôt dans des articles de recherche de Pham et É. Delabaere, H. Dillinger [44], [51], [56] (et dans la thèse de ces derniers, sous sa direction).

Le livre [42] reste encore unique comme manuel d'initiation à la résurgence. Il est découpé en plusieurs niveaux de lecture.

Un *Prologue* se compose d'une "Visite aux sources" historique (point de vue de Poincaré, sommation de Borel), d'un chapitre "Premiers pas en calcul étranger" également publié à part [43], enfin d'un chapitre "Introduction à la classification des équations différentielles, d'après Écalle". C'est le chapitre central [43] qui me paraît le plus à souligner ici, car en à peine plus de 20 pages (preuves omises), il parvient à extraire la "substantifique moelle" de la résurgence en tant qu'*outil pratique*, à l'exact opposé d'une généralisation systématique également justifiée mais beaucoup plus dispendieuse. En particulier, il met en exergue les fonctions résurgentes "simples" (et bien nommées), qui forment certes un très petit sous-ensemble de toutes les fonctions résurgentes formalisables mais suffisent amplement pour quantité de problèmes (dont toute l'analyse semi-classique avec points tournants simples). De plus, il résume déjà la résolution résurgente par "automorphismes de passage" du phénomène de Stokes, un des problèmes majeurs posés à l'asymptotique traditionnelle.

Une première partie *Préparatifs* est un cours de rappels d'analyse complexe : les fonctions multiformes et leurs surfaces de Riemann (exemple : les intégrales hyperelliptiques $\int W(x)^{1/2}\,dx$, W polynôme, dont les graphes seront en outre les lieux singuliers de fonctions résurgentes en mécanique quantique, les $\tilde{\psi}(\tau, x)$ de Balian–Bloch); puis les transformations de Laplace et les microfonctions, avec une introduction aux faisceaux sur S^1 qui fournit le langage pour relier les fonctions résurgentes aux hyperfonctions d'une variable à la Sato.

La seconde partie *Résurgence* expose plus à fond les éléments de la théorie même d'Écalle : les algèbres de fonctions résurgentes et leurs trois modèles (formel, convolutif et sectoriel); les prises de singularités par les *dérivations étrangères* (= les logarithmes d'*automorphismes de passage*); jusqu'aux *monômes de résurgence*, fonctions résurgentes élémentaires qui sont aux dérivations étrangères (non commutantes) comme les monômes usuels $(x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n})$ aux dérivations ordinaires $(\partial_{x_1}, \cdots, \partial_{x_n})$. La principale nouveauté affichée (déjà dans [35]) est celle [du faisceau sur S^1 d'algèbres de convolution] des *fonctions résurgentes étendues* : ce sont les germes de fonctions holomorphes dans un voisinage sectoriel de l'infini et *prolongeables sans fin*, modulo les fonctions entières; cette notion fournit un cadre rigoureux à la représentation de Balian–Bloch (dont elle s'inspire), et permet en retour une lecture directe des phénomènes de Stokes dans le modèle convolutif. Malgré une certaine complication des structures, prédomine toujours le souci d'expliciter toutes les étapes clairement, avec moult exemples (et ici, les preuves).

Un épilogue *Résurgence des fleuves* (prépublié dans [38]) ramène aux "sources" non-linéaires de la résurgence, et rappelle que les systèmes dynamiques (avec F. et M. Diener) sont aussi présents dans l'effort niçois sur la résurgence. Remarque : le paragraphe final sur l'équation de Riccati concerne en fait tout autant la mécanique quantique linéaire, puisque cette équation équivaut à Schrödinger par le simple changement de fonction inconnue $Y(x) = \psi'/\psi\,(x)$.

3.2. Résurgence semi-classique.

Venons-en à l'analyse résurgente des équations de Schrödinger proprement dite. On peut y distinguer différents angles d'attaque, mais la plupart des articles en abordent plus d'un.

Une première série de travaux de Pham considère la méthode de Balian–Bloch en dimension générale (pour la variable x), dans laquelle des solutions transformées de Laplace $\tilde{\psi}(\tau, x)$ sont spécifiées (formellement) par le biais d'une équation intégrale. Pham propose un cadre rigoureux à cette approche [29], [37], [45], [46] : son principal ingrédient est que ces $\tilde{\psi}(\tau, x)$ doivent être des *fonctions résurgentes étendues* de la variable τ à dépendance *analytique régulière* (en un sens bien précis, cf. en particulier [56] §0.6) par rapport au paramètre x. Cependant, *l'existence* de solutions de ce type demeure une conjecture, incomplètement démontrée même à une dimension (voir ci-dessous). De plus, tout autant que chez Balian–Bloch, l'équation intégrale reste... à intégrer, et ce problème n'est analytiquement pas plus simple que l'équation de Schrödinger de départ : ainsi, il n'y a pas d'algorithme en vue pour espérer obtenir des résultats explicites même partiels, comme des équations de résurgence. La non-intégrabilité en général de la dynamique classique sous-jacente ne pourra pas être éludée (problématique du "chaos quantique"). Les questions ouvertes sont bien décrites dans le §3 de [45], qui reste entièrement d'actualité (cf. aussi la conclusion de [46]). Le cas multi-dimensionnel est donc avant tout, selon moi, un grand programme d'avenir, maintenant traduit par Pham en énoncés mathématiquement solides; toutefois l'essentiel du travail reste à faire, équivalent à celui accompli pour le cas de dimension un, vers lequel je me tourne maintenant.

En une dimension, *le* cas qui a été concrètement traité est l'équation de Schrödinger stationnaire $[d^2/dx^2 + \nu^2 W(x)]\psi(\nu, x) = 0$, pour $W(x)$ *polynôme* sur $\mathbb{R}$. [Physiquement, $W(x) = E - V(x)$ où $V(x)$ est le potentiel d'interaction, et E l'énergie de l'état stationnaire représenté par la "fonction d'onde" $\psi(x)$.] Et d'abord, la situation *générique* où tous les zéros de $W(x)$, encore appelés points tournants, sont *simples* (non critiques), mais où W est par ailleurs *quelconque*, est pour la première fois complètement décrite par Delabaere–Dillinger–Pham, dans un article de 1993 dédié à ce cas [44]. Les auteurs y montrent que la structure résurgente du problème peut se décrire *exhaustivement et intrinsèquement* en termes de la géométrie et de l'homologie (H_1) de la *trajectoire classique complexe* (ici une courbe hyperelliptique : $\{p^2 = W(q)\} \subset \mathbf{C}^2$), au moyen de formules de résurgence qu'ils explicitent. La déformation de la résurgence sous des variations du polynôme se ramène alors à des formules de Picard–Lefschetz. Ce formalisme est intégralement redétaillé dans [56] (chap. 1 et 2), avec les règles de calcul résumées en "pictogrammes" dans [51]. Un bémol : l'affirmation récurrente que les solutions de Balian–Bloch (et les fonctions spectrales "de Jost" qui en dérivent) appartiennent au "bon" espace — des fonctions résurgentes étendues — ne semble en fait toujours pas complètement démontrée, les références fournies n'apportant de preuve que pour le *feuillet principal*; il faut se référer à [56] (commentaire après le théorème 1.2.1, p. 32) pour avoir l'état le plus précis (encore valable) sur cette *conjecture* (mais dont la véracité ne fait de doute pour personne).

La partie à mon avis la plus innovante et avancée de cette partie du programme concerne les extensions de l'analyse résurgente précédente (toujours en une dimension) à différents régimes de polynômes $W(x)$ à *zéros critiques* (= présence de points tournants multiples), avec étude de la transition par confluence de zéros simples, et application à la preuve de conjectures de Zinn-Justin et Bender–Wu. Lorsqu'une déformation de W fait confluer des zéros simples en un zéro multiple, la partie de la résurgence relative au(x) *cycle(s) évanescent(s)* dans $H_1(\{p^2 = W(q)\})$ devient *singulière*, et la limite de confluence l'est également. Cette question devient assez tôt l'objet dominant des travaux de Pham (et al.) en résurgence semi-classique.

En toute généralité, le traitement global exact continue à se décomposer en applications successives de "formules de raccordement (ou de connexion) élémentaires" pour chaque point tournant, mais les formes *exactes* de celles-ci sont beaucoup plus subtiles à appréhender dès qu'il y a confluence, même au degré le plus bas (un zéro quadratique, résultant de deux zéros simples). Pham montre d'abord qu'une "transformation canonique quantifiée" (analogue "à la Sato" d'un Opérateur Intégral de Fourier) permet de ramener l'étude locale près d'un zéro quadratique au modèle universel de Weber (à savoir : $W(x) \equiv \nu^{-1}(2s+1) - x^2$), où $s = s(\nu)$ est l'exposant de monodromie du cycle évanescent [35], [37] (cf. travaux ultérieurs de Ould Jidoumou et Kawai–Takei). Toute la résurgence singulière se concentre alors dans un terme $\nu^{-s-1/2}/\Gamma(-s)$, en facteur dans le multiplicateur de Stokes; s est fonction résurgente de ν, et non constante en général, ce qui fait sortir ces problèmes du cadre des systèmes dits "holonomes" (= maximaux surdéterminés). La théorie du cas quadratique est progressivement développée par Delabaere, Dillinger et Pham [36], [39] dans le cadre d'une preuve de la conjecture de Zinn-Justin (paragraphe suivant). Ainsi, des *changements de variables résurgents* [50] permettent de réduire *exactement* une équation donnée à une forme modèle : d'où une version exacte et rigoureuse des "méthodes uniformes" ou "de comparaison" en asymptotique usuelle, et une description *uniforme* de la transition du générique vers le confluent. Une exposition finale, couvrant le cas d'un polynôme général à points tournants d'ordre $\leqslant 2$, est répartie sur deux gros articles : "Resurgent methods in semi-classical asymptotics" (1999) [56] est plutôt mathématique (s'y trouve complètement établie la formule élémentaire de raccordement pour un point tournant quadratique); "Exact semiclassical expansions for one-dimensional quantum oscillators" (1997) [51] est davantage pratique, illustré par le traitement explicite de nombreux exemples de degré $\leqslant 4$ (notamment de formules de quantification de Bohr–Sommerfeld exactes), avec toute la procédure décomposée en *pictogrammes* pour être "prête à l'emploi". Dans cette dernière démarche, je suis enclin à voir une "résurgence" de la culture de théorie des champs, en effet celle-ci a également été rendue opérationnelle grâce à un codage en graphes (de Feynman)!

Enfin, Pham a étendu au cas d'une confluence d'ordre m quelconque la méthode résurgente précédente de réduction à un modèle universel [49], [58].

3.3. Applications.

S'agissant des analyses résurgentes de l'équation de Schrödinger (ici, en une dimension) par Pham (et al.), leur première application par ordre chronologique et aussi d'importance est la preuve de la *conjecture de Zinn-Justin* déjà mentionnée à plusieurs reprises, cf. aussi le texte de Zinn-Justin dans ce volume. Il s'agit de la forme à tous les ordres exponentiellement petits d'une condition de quantification pour des niveaux quasi-dégénérés, et sa preuve par Pham et al. [35], [36], [39], [51], [56] utilise essentiellement leur analyse BKW exacte de la confluence quadratique pour $W(x)$ polynôme quartique pair (mais cette méthode se généralise : cf. Delabaere pour un polynôme trigonométrique).

Une deuxième application fait l'objet de l'article "Unfolding the quartic oscillator" (1997), par Delabaere et Pham [50]. Il s'agit d'une description analytique exacte de l'oscillateur quartique général ($W(x) = E - x^4 - \alpha x^2 - \beta x$), et notamment de la structure analytique des niveaux d'énergie (les valeurs propres en E) par rapport aux coefficients (α, β). La procédure utilisée est de cartographier (la majeure partie de) l'espace des paramètres par des changements de variables résurgents qui ramènent la condition de quantification à une forme modèle exacte dans chaque carte. Dans le cas pair ($\beta = 0$), les auteurs établissent rigoureusement les célèbres conjectures de Bender et Wu (1969) et les résultats numériques de Shanley sur la ramification du spectre par rapport à α, par le biais d'une condition spectrale à énergie critique instable. Près de l'énergie minimum, ils décrivent en outre les déformations à β petit de la condition de quantification de Zinn-Justin ci-dessus.

Une autre application concerne l'analyse spectrale d'opérateurs non auto-adjoints mais "PT-symétriques" (une propriété qui rend leur spectre invariant par conjugaison complexe). Avec comme exemple l'équation $-\psi''(x) + (ix^3 + \mu x^2)\psi(x) = E\psi(x)$ (μ est réel, mais pas le polynôme entier W!), D. Bessis et J. Zinn-Justin ont conjecturé que certains de ces spectres sont *purement réels*, ce qui a suscité un récent engouement pour ces systèmes. Par leurs méthodes ci-dessus, Delabaere et Pham ont partiellement prouvé ces conjectures [54]–[55] (dans l'exemple précédent, c'est à grand $|\mu|$; ce travail a été ensuite systématisé par Trinh dans sa thèse (2002), co-dirigée par Pham).

En conclusion de cette partie, l'ensemble de ces travaux de Pham et al. aboutit à un corpus unique en son genre des méthodes résurgentes pour l'équation de Schrödinger (à une dimension et à coefficient W polynomial) : global, ordonné et détaillé, tout en étant simplifié au maximum pour les applications. Le formalisme résultant, rigoureux et cohérent, englobe de nombreux traitements antérieurs et prouve certaines des conjectures les plus anciennes. D'autres travaux récents (ex. Dorey et al.) laissent en outre entrevoir de riches perspectives de généralisations et d'applications futures.

4. En guise de conclusion.

Pour que cette présentation soit tout sauf définitive, je souhaite longue vie et prospérité à l'activité scientifique à venir de Frédéric Pham.

Comme contribution importante que beaucoup d'entre nous aimerions voir, Pham a promis de s'atteler à la preuve de la conjecture fondamentale de résurgence des solutions de l'équation de Schrödinger, qui conditionne un grand nombre des résultats cités. Son travail déjà réalisé suggère trois voies d'approche : à une dimension, achever la preuve esquissée par Écalle puis développée par Delabaere et Dillinger dans leur thèse; en dimension quelconque, utiliser les formules de Balian–Bloch; ou encore, préciser un autre argument dû à Shatalov et Sternin. Le problème est clairement difficile, et nous souhaitons que Pham veuille bien y œuvrer encore!

Créer une théorie des fonctions résurgentes en plusieurs variables serait aussi un grand chantier à ouvrir.

Mais j'aimerais terminer sur un “retour aux sources”. Le premier domaine où Pham s'est illustré, la théorie axiomatique de la matrice S (cf. partie 1), a largement suspendu son élan plusieurs années avant que le langage de la résurgence n'apparaisse. Or il y a des similitudes troublantes entre les deux philosophies. La fonction de Jost, qui est résurgente pour l'opérateur de Schrödinger, est bien une "matrice S du pauvre", à cinématique ultra-simplifiée; et certaines de ses équations de résurgence expriment des contraintes d'unitarité. La conjecture (ci-dessus), de sa résurgence hors de singularités portées par la dynamique classique, me fait penser aux postulats "d'analyticité maximale" de la matrice S hors des singularités de Landau (elles-mêmes interprétables classiquement). En formalisant la résurgence de l'équation de Schrödinger, Pham n'a-t-il pas poursuivi son premier programme, celui de la matrice S, pour qu'il se réalise au moins dans un cas limite? Inversement, les relations non-linéaires de "bootstrap", que les théoriciens de la matrice S recherchaient pour préciser ou contraindre cette dernière, n'existeraient-elles pas comme *équations de résurgence* (éventuellement à plusieurs variables)? Les succès récents en résurgence quantique à une dimension, auxquels Pham et son école ont grandement contribué, plaideraient donc pour une relance de la théorie générale de la matrice S, *résurgente* cette fois.

En conclusion, Frédéric Pham a su occuper une place unique à l'intersection des mathématiques pures et de la physique théorique. C'est un des rares chercheurs qui ait pu signer une œuvre considérable dans les deux domaines, et aussi qui sache en permanence faire passer et se correspondre fructueusement les idées d'un bord à l'autre. La limpidité et l'économie avec laquelle il exprime, en les géométrisant, les idées les plus élaborées, sont impressionnantes et donnent une lisibilité et un cachet particulier à ses présentations. Je peux en outre témoigner de sa personnalité rayonnante, exigeante sur la qualité tout en montrant une grande simplicité, toujours pédagogique, généreuse et à l'écoute des autres. C'est pour tout cela que nos deux communautés lui sont profondément redevables, et son influence déjà bien établie est destinée à croître encore à travers tous les beaux problèmes qu'il a aidés à faire émerger pour la recherche future.

André VOROS,
CEA, Service de Physique Théorique de Saclay
CNRS URA 2306
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex (France)
voros@spht.saclay.cea.fr
et
Institut de Mathématiques
de Jussieu–Chevaleret
CNRS UMR 7586, Université Paris 7.