



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Zoghman MEBKHOUT

**Exposants de la monodromie  $p$ -adique et structure de Frobenius pour des équations différentielles**

Tome 53, n° 4 (2003), p. 1141-1183.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2003\\_\\_53\\_4\\_1141\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_4_1141_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# EXPOSANTS DE LA MONODROMIE $p$ -ADIQUE ET STRUCTURE DE FROBENIUS POUR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Zoghman MEBKHOUT

---

## Table des matières.

1. Introduction
2. Les nombres de Betti des variétés algébriques affines
  - 2.1. Les nombres de Betti des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique nulle
  - 2.2. Les nombres de Betti des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique positive
3. Le théorème de la monodromie  $p$ -adique
  - 3.1. Le théorème de la monodromie complexe
  - 3.2. Le théorème de la monodromie  $\ell$ -adique
  - 3.3. Le théorème de la monodromie  $p$ -adique
4. Le prolongement analytique et les exposants de la monodromie  $p$ -adique
  - 4.1. Cas de rang 1
  - 4.2. Cas de rang  $\geq 2$
5. Le théorème de décomposition et le polygone de Newton  $p$ -adique
6. Le théorème de l'indice
  - 6.1. Le théorème de l'indice local
  - 6.2. Le théorème de l'indice global
7. Le théorème de décomposition en modules de rang un et le principe de transfert
  - 7.1. Décomposition en modules complètement irréductibles
  - 7.2. Décomposition en modules de rang un dans le cas de rang premier à  $p$
  - 7.3. Décomposition en modules de rang un dans le cas général
8. Exposants de la monodromie  $p$ -adique et structures de Frobenius
  - 8.1. Structures de Frobenius
  - 8.2. Caractérisation de l'existence d'une structure de Frobenius à l'aide de la rationalité des exposants  $p$ -adiques

---

*Mots-clés* : Cohomologie  $p$ -adique – Équations différentielles  $p$ -adiques – Monodromies – Représentations galoisiennes  $p$ -adiques – Exposants  $p$ -adiques – Polygone de Newton  $p$ -adique – Structures de Frobenius.

*Classification math.* : 12H25 – 11F80 – 14F30.

## 1. Introduction.

Dans cet exposé nous présentons au lecteur la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques et ses applications concernant le théorème de finitude des nombres de Betti  $p$ -adiques des variétés affines non singulières sur un corps fini et le théorème de la monodromie pour les représentations galoisiennes  $p$ -adiques locales.

Motivée par le problème de la finitude des nombres de Betti  $p$ -adiques des variétés affines non singulières sur un corps fini et plus généralement par la définition des coefficients  $p$ -adiques et leur propriétés de finitude, la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques a été développée à partir des travaux de Dwork-Robba par l'auteur de cet exposé en collaboration avec Gilles Christol entre octobre 1989 et octobre 1994 dans le but de démontrer le théorème de l'indice. La théorie présente de nombreuses difficultés aussi bien de nature conceptuelle que de nature technique qui restent encore inaccessibles en dimensions supérieures.

Les premiers résultats de cette théorie ont été présentés au Colloque Bernard Malgrange qui a eu lieu en juin 1993 à l'Institut Fourier [CM1]. Dans cet article on est parvenu à formuler deux questions fondamentales, d'une part la définition des exposants de la monodromie  $p$ -adique et le théorème de la monodromie ([CM1], §§2, 3) et d'autre part la définition des pentes  $p$ -adiques et le théorème de décomposition ([CM1], 3.1.1). On a introduit la condition cruciale portant sur les différences des exposants ([CM1], 2.2.4) qui a conduit à la définition a priori de l'exposant d'un module ayant la propriété de Robba sur une couronne.

Le premier problème a été résolu dans l'article [CM2] soumis en février 1995 et le second problème a été résolu dans l'article [CM3] soumis en décembre 1995.

Les définitions des exposants  $p$ -adiques et du polygone de Newton  $p$ -adique d'un module différentiel soluble sont à la base de tous les progrès de la théorie des équations différentielles. L'article [CM4] contient de nombreuses applications et la conjecture 3.0.12 donnant la structure des modules complètement irréductibles qui conduit à la structure des modules différentiels  $p$ -adiques simples.

Comme le lecteur pourra le constater la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques a atteint aujourd'hui un stade de maturité qui en fait un outil des plus puissants en arithmétique et cet exposé s'en veut une illustration.

Dans cet ordre d'idée nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la démonstration du théorème de la monodromie  $p$ -adique des représentations galoisiennes est le premier exemple, à notre connaissance, où le calcul différentiel a pris sur une question concernant les groupes de Galois locaux de corps de nombres, alors que jusqu'à présent il avait surtout pris sur des questions concernant les groupes de Galois locaux de corps de fonctions, ce qui devrait introduire la théorie des équations différentielles dans la théorie des nombres.

Cet exposé peut servir au lecteur d'introduction à la théorie de la cohomologie de de Rham  $p$ -adique et à la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques et facilitera l'accès aux articles en forme mais difficiles. Toutes les démonstrations des résultats de cet exposé sont publiées à l'exception de celle, qui dépasse largement le cadre de cet exposé, du théorème 8.2.1 qui caractérise l'existence d'une structure de Frobenius sur un module différentiel soluble à l'aide de la rationalité des exposants  $p$ -adiques de modules qui lui sont naturellement associés, théorème conjecturé et qui avait pour point de départ le théorème d'extension locale dans l'article [CM4].

Voici le contenu de cet article qui correspond à l'exposé oral dans ce colloque. Le paragraphe 2 décrit la situation de la fonction Zêta des variétés affines non singulières sur un corps fini en tenant compte du récent article de A. Arabia [A]. Le paragraphe 3 décrit le théorème de la monodromie dans ses différents contextes. Le paragraphe 4 décrit le problème du prolongement analytique et des exposants de la monodromie  $p$ -adique. Le paragraphe 5 décrit le théorème de décomposition selon les pentes  $p$ -adiques et le polygone de Newton  $p$ -adique d'une équation différentielle. Le paragraphe 6 décrit le théorème de l'indice local et global. Le paragraphe 7 décrit le théorème de décomposition en modules de rang 1 et son rapport avec le principe de transfert. Enfin le dernier paragraphe caractérise l'existence d'une structure de Frobenius sur un module différentiel soluble à l'aide de la rationalité des exposants de la monodromie  $p$ -adique de modules différentiels qui lui sont naturellement associés.

Le conférencier est venu expliquer en 1977 au centre de Mathématique du Château de Parc Valrose à Nice le théorème de dualité pour les  $\mathcal{D}_X$ -modules cohérents et donner des exemples de faisceaux sur  $\mathbb{C}$  constructibles qui proviennent de complexes holonomes. Ces résultats ont abouti à l'équivalence de catégories triangulées entre la catégorie des complexes holonomes réguliers et la catégorie des complexes constructibles. La no-

tion de régularité à plusieurs variables est celle issue du théorème de comparaison qui est adaptée aux propriétés fonctorielles et a donné naissance au théorème de positivité de l'irrégularité en dimension supérieure qui s'est révélé être le résultat central de la théorie. Chacun sait l'importance qu'ont eue ces résultats.

À l'occasion de ce Colloque en l'honneur de Frédéric Pham nous voudrions remercier les membres de l'équipe singularités et équations différentielles de l'Université de Nice des échanges fructueux et amicaux que nous avons entretenus depuis cette époque. Nous espérons que cela a contribué à la promotion des mathématiques.

Nous remercions le referee pour ses remarques qui nous ont permis d'améliorer la rédaction de cet exposé.

## 2. Les nombres de Betti des variétés algébriques affines.

### 2.1. Les nombres de Betti des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique nulle.

Soient  $k \subset \mathbb{C}$  un sous-corps du corps des nombres complexes,  $X/k$  une variété affine non singulière sur  $k$  et  $H_{dR}^i(X/k)$  le  $i$ -ème espace de cohomologie de de Rham des  $i$ -formes régulières fermées modulo les  $i$ -formes régulières exactes. On note  $B_{dR,i}(X)$  sa dimension comme espace vectoriel sur  $k$ . Les nombres  $B_{dR,i}(X)$  sont invariants par extension des scalaires. On peut considérer les points complexes  $X(\mathbb{C})$  qui forment une variété analytique non singulière et  $H^i(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$  le  $i$ -ème espace de cohomologie rationnelle. On note  $B_{B,i}(X)$  sa dimension comme espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ . On a alors le théorème de comparaison démontré par A. Grothendieck en 1963 [G1] :

THÉORÈME 2.1.1. — *Il existe un morphisme canonique de comparaison :*

$$\mathbb{C} \otimes_k H_{dR}^i(X/k) \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} H^i(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$$

*qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{C}$  pour tout  $i \geq 0$ .*

La démonstration ne suppose pas a priori que les dimensions soient finies, mais la finitude de l'un des nombres  $B_{dR,i}(X)$ ,  $B_{B,i}(X)$  entraîne la finitude de l'autre et leur égalité. Si on est topologue on peut démontrer la finitude des nombres  $B_{B,i}(X)$  à l'aide d'une triangulation de la variété

$X(\mathbb{C})$  et si on est algébriste on préfère démontrer la finitude des nombres  $B_{dR,i}(X)$ . En fait, il existe plusieurs démonstrations très intéressantes de la finitude des nombres  $B_{dR,i}(X)$  et on a alors :

COROLLAIRE 2.1.2. — *Les nombres finis  $B_{dR,i}(X)$ ,  $B_{B,i}(X)$  sont égaux :*

$$B_{dR,i}(X) = B_{B,i}(X)$$

pour tout  $i \geq 0$ .

La difficulté dans le théorème de comparaison est que la variété affine non singulière à distance finie  $X$  admet en général naturellement des singularités à l'infini. Grothendieck invoque le théorème d'Hironaka pour remplacer la compactification naturelle par une compactification non singulière dont le diviseur à l'infini est à croisements normaux.

En 1986 nous avons introduit [M1] une nouvelle approche plus précise du théorème de comparaison indépendante du théorème général de la résolution des singularités à partir du théorème de positivité de l'irrégularité et de la représentation de monodromie d'une équation différentielle. On raisonne par récurrence sur la dimension et on fibre à l'aide d'une famille de courbe. On est ramené à démontrer le théorème de comparaison pour une connexion méromorphe génériquement régulière le long d'un germe de courbe plane. Cela ne nécessite que le théorème de résolution plongée pour un germe de courbe plane. Cette démonstration a remis en cause le dogme selon lequel la forme forte de résolution des singularités est au "fond du problème" dans l'étude de la cohomologie des variétés algébriques.

Cette méthode a suggéré des formes faibles de résolution des singularités qui se sont avérées très utiles. Elle a joué un rôle très important dans l'étude de la cohomologie des schémas, ce qui a permis de débloquer de nombreuses situations. En particulier elle nous a permis de passer du corps des nombres complexes aux corps finis. Cependant il subsiste de nombreux problèmes qui nécessitent des formes de résolution des singularités qui ne sont pas encore disponibles.

La situation des nombres de Betti est donc très satisfaisante en caractéristique nulle aussi bien du point de vue des résultats que des démonstrations, il n'y a qu'un seul nombre de Betti en chaque degré. Il n'en est plus de même à l'heure actuelle en caractéristique positive où la situation est plus riche et donc plus compliquée.

## 2.2. Les nombres de Betti des variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique positive.

Soit  $p > 0$  un nombre premier et soit  $X/\mathbb{F}_q$  une variété algébrique définie sur le corps fini à  $q$  éléments de caractéristique  $p$ . Si l'on note  $N_h := N_h(X)$  le nombre des points à valeurs dans l'extension de degré  $h$  de  $\mathbb{F}_q$ , la fonction Zêta de  $X$  est la série formelle définie par

$$Z(X, t) := \exp\left(\sum_{h \geq 1} N_h \frac{t^h}{h}\right)$$

en la variable  $t$ . En 1959 B. Dwork [D] a démontré :

**THÉORÈME 2.2.1.** — *La fonction  $Z(X, t)$  est une fraction rationnelle à coefficients rationnels, autrement dit un élément du corps  $\mathbb{Q}(t)$ .*

Bien que Dwork introduise les méthodes  $p$ -adiques à cette occasion, sa démonstration n'est pas cohomologique et n'a pas de prise sur les zéros et les pôles de la fraction rationnelle  $Z(X, t)$ .

Ceci a conduit Paul Monsky et George Washnitzer [MW] à construire la cohomologie de de Rham  $p$ -adique pour les variétés affines non singulières sur un corps de caractéristique  $p$  qui a inspiré la théorie cristalline de Grothendieck.

Les fondements de cette définition posent des problèmes non triviaux qui n'ont été résolus de façon satisfaisante avec la généralité qui convient que tout récemment par A. Arabia [A].

Une  $R$ -algèbre commutative  $A$  est lisse sur un anneau commutatif unitaire  $R$  si le morphisme structural  $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } R$  est lisse au sens de Grothendieck, c'est une condition locale à la source. La classe des morphismes lisses est stable par composition et par changement de base. La question la plus importante est le relèvement des algèbres lisses en caractéristique  $p$  en algèbres très lisses en caractéristique nulle. Cette question n'a été résolue par Monsky-Washnitzer [MW] que dans le cas des intersections complètes. Le cas général se fait en deux étapes.

**THÉORÈME 2.2.2.** — *Soit  $R$  un anneau commutatif unitaire et  $I$  un idéal de  $R$ , alors toute algèbre commutative lisse sur l'anneau quotient  $R/I$  admet un relèvement lisse sur l'anneau  $R$ .*

Ce théorème a d'abord été montré par R. Elkik dans le cas d'un couple  $(R, I)$  hensélien. Mais cette restriction, qui masquait le caractère purement

algébrique de ce théorème et compliquait la démonstration, a été levée par A. Arabia [A], qui a en outre considérablement simplifié la démonstration. Arabia reprend l'idée de R. Elkik de se ramener aux relèvements des modules projectifs et démontre un théorème de relèvement des modules projectifs dans le contexte général [A].

Il n'y a pas unicité du relèvement algébrique, mais Grothendieck avait montré auparavant que si l'idéal  $I$  est nilpotent, le relèvement lisse existe et est unique à isomorphisme non canonique près. Ceci implique déjà l'existence d'un relèvement  $I$ -adique  $\hat{A}$  complet formellement lisse qui est alors unique à isomorphisme non canonique près. Une  $R$ -algèbre est formellement lisse si ses réductions modulo les puissances  $I^n$  sont lisses sur  $R/I^n$ . Le théorème précédent montre qu'un relèvement  $\hat{A}$  complet formellement lisse provient d'un relèvement algébrique lisse.

Un candidat naturel pour une théorie de de Rham est de prendre le complexe de de Rham des formes différentielles séparées du complété  $I$ -adique d'un relèvement lisse. Mais le lemme de Poincaré n'a pas lieu : les espaces de cohomologie de l'espace affine sur un corps fini ne sont pas nuls en degrés positifs.

L'idée de base de Monsky-Washnitzer [MW], qui était déjà sous-jacente à la démonstration de Dwork de la rationalité de la fonction Zêta, est de prendre le complété faible  $A^\dagger$  pour la topologie  $I$ -adique d'une  $R$ -algèbre  $A$  ainsi définie :

**DÉFINITION 2.2.3.** — Soit  $A$  une  $R$ -algèbre et  $I$  un idéal de  $R$ , alors le complété faible pour la topologie  $I$ -adique est la sous-algèbre  $A^\dagger$  de l'algèbre  $\hat{A}$  des éléments admettant une représentation comme somme infinie :

$$z := \sum_{j \geq 0} p_j(x_1, \dots, x_n)$$

où  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $A$  ne dépendant que de  $z$  et où les  $p_j$  sont des polynômes appartenant à l'idéal  $I^j$  dont le degré est un  $O(j)$ .

**Exemple 2.2.4.** — Si  $(R, I)$  est le couple  $(\mathcal{O}_K, \mathfrak{m})$  formé de l'anneau des entiers d'un corps à valuation discrète complet et de son idéal maximal, le complété  $\mathfrak{m}$ -adique de l'anneau des polynômes à  $n$ -variables  $\mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_n]$  est l'anneau  $\mathcal{O}_K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  des séries formelles de rayon de convergence égal à 1 alors que le complété  $\dagger$ -adique pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique est l'anneau  $\mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_n]^\dagger$  formé des séries de rayon de convergence strictement plus grand que 1. Ce sont des anneaux noethériens.

Les algèbres quotients de  $\mathcal{O}_K[x_1, \dots, x_n]^\dagger$  sont topologiquement de type fini et sont des anneaux de Zariski. Ce sont elles qui interviennent dans la construction de la cohomologie de de Rham  $p$ -adique.

Comme Monsky et Washnitzer l'ont mis en évidence [MW] les propriétés des morphismes des algèbres complètes pour la topologie  $I$ -adique ne se généralisent pas de façon évidente au cas des morphismes des algèbres faiblement complètes pour la topologie  $I$ -adique. Pour surmonter cette difficulté ils ont alors introduit la classe des algèbres très lisses [MW].

DÉFINITION 2.2.5. — *On dit qu'une  $R$ -algèbre  $A$  est très lisse si sa réduction  $\bar{A}$  modulo  $I$  est  $R/I$ -lisse et si un diagramme du type*

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & \bar{A} & \rightarrow & \bar{B} \\ & & \downarrow & + & & \searrow & \downarrow \\ & & C & & & & \bar{C} \end{array}$$

*se complète en un morphisme d'algèbres  $A \rightarrow B$  rendant le premier diagramme commutatif et induisant par réduction modulo  $I$  le second diagramme.*

Cependant Monsky et Washnitzer ont laissé ouverte la question de l'existence d'un relèvement très lisse d'une algèbre lisse. En fait on a :

THÉORÈME 2.2.6. — *Si l'anneau  $R$  est noethérien le complété faible  $A^\dagger$  pour la topologie  $I$ -adique d'une  $R$ -algèbre lisse  $A$  est très lisse. De plus l'algèbre  $A^\dagger$  ne dépend, à isomorphisme non canonique près, que de sa réduction modulo  $I$ .*

On peut montrer ce théorème en utilisant le théorème d'approximation de M. Artin à partir du cas formel, mais Arabia le déduit simplement de l'existence des relèvements des morphismes d'algèbres lisses pour la topologie étale, qui peut se résumer en disant qu'une  $R$ -algèbre lisse  $A$  est très lisse quitte à remplacer  $B$  par un voisinage étale de  $I$  dans  $B$  [A].

En particulier l'hypothèse de Monsky-Washnitzer [MW] de l'existence d'un relèvement très lisse n'est pas restrictive comme ils l'avaient déjà pressenti et leurs raisonnements originaux, relèvement des homotopies qui implique la fonctorialité de la cohomologie, permettent de construire la cohomologie de de Rham  $p$ -adique pour les variétés affines non singulières sur un corps de caractéristique  $p$  :

DÉFINITION 2.2.7. — *Soit  $\mathcal{O}_K$  un anneau de valuation discrète d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ , de corps résiduel  $k$  et de corps de fraction  $K$  de*

caractéristique nulle,  $X/k$  est variété affine non singulière sur  $k$  et  $A^\dagger$  un relèvement très lisse de l'algèbre affine de  $X$ .

On définit la cohomologie de de Rham  $m$ -adique  $H_{dR}^\bullet(X/K)$  à coefficients dans le corps  $K$  comme la cohomologie du complexe de de Rham des formes différentielles séparées de l'algèbre  $A^\dagger \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ .

On obtient un foncteur contravariant de la catégorie des variétés affines non singulières sur  $k$  dans la catégorie des  $K$ -algèbres graduées.

**DÉFINITION 2.2.8.** — On définit les nombres de Betti  $p$ -adiques  $B(X)_{p,\bullet}$  d'une variété affine  $X$  non singulière sur un corps  $k$  de caractéristique  $p > 0$  comme les dimensions sur  $K$  des espaces  $H_{dR}^\bullet(X/K)$ .

Les nombres  $B(X)_{p,i}$  sont nuls pour  $i > \dim X$ . Monsky a montré que  $B(X)_{p,0}$  et  $B(X)_{p,1}$  sont finis mais la question fondamentale de la finitude des nombres  $B(X)_{p,i}$  pour  $i \geq 2$ , qui est restée ouverte pendant presque trente ans, n'a été résolue qu'en 1994 [M2] :

**THÉORÈME 2.2.9.** — Pour toute variété affine non singulière  $X$  sur  $k$  supposé de caractéristique  $p > 0$  les nombres  $B(X)_{p,\bullet}$  sont finis et sont invariants par extension du corps de base.

Supposons que  $k$  est un corps fini à  $q$  éléments. Le morphisme de Frobenius  $F$  absolu, qui est l'identité sur l'espace topologique et l'élévation à la puissance  $q$  sur le faisceau structural, induit par functorialité des endomorphismes  $F_*$  sur les espaces de cohomologie de de Rham  $p$ -adiques  $H_{dR}^\bullet(X/K)$ . Monsky-Washnitzer [MW] ont montré que les endomorphismes  $F_*$  sont bijectifs. Supposons que  $X$  est purement de dimension  $n$  et notons  $\Psi_*$  l'automorphisme  $q^n F_*^{-1}$ . En vertu du théorème de finitude le nombre de Lefschetz  $L(X)$ , somme alternée des traces de  $\Psi_*$  sur les espaces  $H_{dR}^\bullet(X/K)$ , est un élément de  $K$  bien défini. Notons  $N(X)$  le nombre de points fermés de  $X$  rationnels sur  $k$ . Alors P. Monsky [Mo] a démontré la formule des traces :

**THÉORÈME 2.2.10.** — On a l'égalité  $L(X) = N(X)$ .

Bien sûr Monsky ne disposait pas du théorème de finitude et définissait le nombre de Lefschetz  $L(X)$  comme trace d'un opérateur nucléaire. On trouve alors formellement la factorisation de la fonction  $Z(X, t)$ .

THÉORÈME 2.2.11. — Soit  $X$  une variété algébrique affine non singulière sur un corps fini à  $q$  éléments et équidimensionnelle de dimension  $n$ , alors la fonction Zêta de  $X$  admet la factorisation  $p$ -adique

$$Z(X, t) = \prod_{i \geq 0} P_{p,i}(X)^{(-1)^{i+1}}$$

où  $P_{p,i}(X)$  est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $\Psi_*$  opérant sur l'espace de de Rham  $p$ -adique  $H_{dR}^i(X/K)$ .

En particulier la fonction Zêta  $Z(X, t)$  est rationnelle. Cette démonstration de la rationalité de la fonction de la fonction  $Z(X, t)$  coûte plus chère que la démonstration originale de Dwork, mais elle donne des résultats plus précis, la factorisation par des polynômes qui a alors prise sur les zéros et les pôles.

La démonstration du théorème de finitude des nombres de Betti  $p$ -adique consiste à se ramener à l'existence de l'indice pour une classe de modules différentiels algébrique  $M_{f,n,m}$  sur la droite projective opérant sur des espaces de fonctions analytiques  $p$ -adiques [M2]. Cette démonstration est similaire à la démonstration du théorème de comparaison [M1], qui d'ailleurs a suggéré la possibilité de la réduction à la dimension 1 dans la démonstration du théorème 2.2.9 après que plusieurs autres tentatives aient échoué.

Pour compléter ces résultats il reste à résoudre un problème qui semble très profond et aussi très intéressant.

Pour tout nombre premier  $\ell$  distinct de  $p$ , Grothendieck a défini les groupes de cohomologie  $\ell$ -adiques  $H_{\text{ét}}^\bullet(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$  pour toute variété algébrique  $X$  sur un corps  $k$  de caractéristique  $p \geq 0$  où  $\bar{X}$  est la variété déduite par extension des scalaires de  $k$  à une clôture algébrique  $\bar{k}$  de  $k$ . Les groupes  $H_{\text{ét}}^\bullet(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$  fournissent des représentations galoisiennes particulièrement intéressantes du groupe de Galois  $G_k := \text{Gal}(k^s/k)$  d'une clôture séparable  $k^s$  de  $k$ . Ce sont des  $\mathbb{Q}_\ell$ -espaces de dimension finie. Notons  $B_{\ell,i}(X)$  ces dimensions qui a priori dépendent de  $\ell$ .

Si  $X/k$  est une variété affine non singulière sur un corps fini purement de dimension  $n$ , on dispose des polynômes caractéristiques  $\ell$ -adiques  $P_{\ell,i}(X)$  de l'endomorphisme  $q^n F_*^{-1}$  agissant sur la cohomologie  $\ell$ -adique qui donne naissance, en vertu de la formule des traces de Grothendieck, à la factorisation  $\ell$ -adique de la fonction Zêta, et du polynôme caractéristique  $p$ -adique  $P_{p,i}(X)$  de l'endomorphisme  $q^n F_*^{-1}$  agissant sur la cohomologie  $p$ -adique. On peut montrer facilement que les polynômes  $P_{\ell,i}(X)$  et  $P_{p,i}(X)$

sont à coefficients dans le corps  $\overline{\mathbb{Q}}$  de sorte qu'on peut les comparer. Une question évidente mais hautement non triviale est de montrer l'égalité

$$P_{\ell,i}(X) = P_{p,i}(X).$$

En particulier les nombres de Betti  $\ell$ -adiques  $B_{\ell,i}(X)$  seraient égaux au nombre de Betti  $p$ -adique  $B_{p,i}(X)$  et indépendants de  $\ell$ . Bien sûr l'égalité précédente a lieu pour une courbe, mais déjà pour une surface la question semble très intéressante.

Rappelons que la question plus faible de l'égalité  $P_{\ell,i}(X) = P_{\ell',i}(X)$  pour deux nombres premiers distincts  $\ell, \ell'$  premiers à  $p$  est encore ouverte à notre connaissance.

Rappelons aussi que le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la cohomologie  $\ell$ -adique d'une variété projective non singulière sur un corps fini est indépendant de  $\ell$  en vertu du théorème de pureté de Deligne qui permet de lire les valeurs propres sur la fonction Zêta. Comme l'ont remarqué Katz et Messing comme conséquence formelle du théorème de pureté  $\ell$ -adique de Deligne, ce polynôme est aussi égal au polynôme caractéristique de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur toute cohomologie d'une variété projective non singulière sur un corps fini ayant les propriétés formelles d'une cohomologie de Weil, comme par exemple la cohomologie cristalline. On trouve que les valeurs propres de l'endomorphisme de Frobenius opérant sur la cohomologie cristalline d'une variété projective et lisse sur un corps fini sont des nombres purs avec le poids requis, mais c'est là une démonstration par voie  $\ell$ -adique et non par voie  $p$ -adique.

### 3. Le théorème de la monodromie $p$ -adique.

Avant d'aborder le théorème de la monodromie  $p$ -adique, nous rappelons brièvement les théorèmes de la monodromie complexe et  $\ell$ -adique qui ont joué un rôle très important dans les années 1970. C'est par exemple le point de départ de B. Malgrange de la rationalité des zéros du polynôme de Bernstein-Sato d'une singularité d'hypersurface complexe qui a abouti à la théorie des cycles évanescents algébriques en caractéristique nulle et au théorème de comparaison avec la théorie des cycles évanescents topologiques.

### 3.1. Le théorème de la monodromie complexe.

Soit un morphisme propre et lisse  $f : X \rightarrow S$  de variétés algébriques complexes non singulières dont la base est une courbe affine. Les images directes  $R^i f_* \Omega_{X/S}^\bullet$  du complexe de de Rham relatif sont des fibrés vectoriels munis d'une connexion dite de Gauss-Manin.

**THÉORÈME 3.1.1.** — *Les singularités à l'infini des fibrés  $R^i f_* \Omega_{X/S}^\bullet$  sont régulières et les représentations de monodromie locales autour des points à l'infini sont quasi-unipotentes, d'indice de nilpotence  $\leq i + 1$ .*

Il existe plusieurs démonstrations de la régularité des connexions de Gauss-Manin. Rappelons qu'une représentation  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$  est dite quasi-unipotente si un sous-groupe d'indice fini  $N\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$  opère de façon unipotente. Rappelons aussi qu'un endomorphisme  $U$  d'un espace vectoriel est dit unipotent d'indice borné par  $i + 1$  si  $(\mathrm{Id} - U)^{i+1} = 0$ . La quasi-unipotence de la connexion de Gauss-Manin généralisant les formules de Picard-Lefschetz est apparue dans la correspondance Grothendieck-Serre en 1964 [GS]. Il existe de nombreuses démonstrations de la quasi-unipotence. La première démonstration est conséquence facile du théorème d'Hironaka. La très belle démonstration arithmétique de N. Katz [K] consiste à démontrer la nilpotence de la connexion de Gauss-Manin en caractéristique  $p > 0$  et à utiliser le théorème de Turrittin de décomposition des connexions formelles en caractéristique nulle.

### 3.2. Le théorème de la monodromie $\ell$ -adique.

Le théorème de la monodromie a été transposé par Grothendieck [GS], [SGA7I] dans la situation arithmétique. Soit un morphisme de schémas de type fini séparé  $f : X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathcal{O}_K$  où  $\mathcal{O}_K$  est un anneau de valuation discrète de corps de fractions  $K$ . On peut considérer la cohomologie étale  $\ell$ -adique  $H_{\text{ét}}^\bullet(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$  de la fibre générique géométrique qui est une représentation du groupe de Galois  $G_K := \mathrm{Gal}(K^s/K)$  d'une clôture séparable du corps  $K$ .

**THÉORÈME 3.2.1.** — *Si  $\ell$  est distinct de la caractéristique du corps résiduel les représentations galoisiennes*

$$\rho : G_K \rightarrow H_{\text{ét}}^\bullet(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)$$

*sont quasi-unipotentes.*

Le groupe de Galois  $G_K$  est un groupe profini et le groupe d'inertie  $I$  est défini par la suite exacte :

$$1 \rightarrow I \rightarrow G_K \rightarrow G_k \rightarrow 1$$

où  $G_k$  est le groupe de Galois du corps résiduel. Par analogie avec le cas complexe on dit qu'une représentation galoisienne de  $G_K$  est quasi-unipotente si un sous-groupe d'indice fini du groupe d'inertie opère de façon unipotente. Si on disposait de la résolution des singularités dans la situation arithmétique, mais on n'en dispose pas, on pourrait reproduire la démonstration complexe. Mais heureusement Grothendieck a réussi à montrer le théorème de la monodromie  $\ell$ -adique géométrique comme cas particulier du théorème général de la quasi-unipotence de toutes les représentations  $\ell$ -adiques :

**THÉORÈME 3.2.2.** — *Supposons qu'aucune extension finie du corps résiduel ne contient toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de  $\ell$ , alors toute représentation  $\ell$ -adique, pour  $\ell$  distinct de la caractéristique résiduelle, est quasi-unipotente.*

La condition sur le corps résiduel est satisfaite dans le cas d'un corps fini. Le théorème précédent est la principale raison du succès de la théorie  $\ell$ -adique qui n'a pas eu à affronter le délicat problème de la résolution des singularités en caractéristique  $p > 0$ . Pour une démonstration voir ([ST], appendice).

### 3.3. Le théorème de la monodromie $p$ -adique.

Ces dernières années on a rencontré surtout des représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois  $G_K$  d'une extension finie  $K$  du corps des nombres  $p$ -adiques  $\mathbb{Q}_p$ . Il y a de nombreuses conjectures très importantes concernant les groupes de Galois de corps de nombres qui font intervenir des représentations  $p$ -adiques d'un type particulier. Leur étude est beaucoup plus subtile que celles des représentations  $\ell$ -adique parce qu'une représentation  $p$ -adique n'est pas en général quasi-unipotente. J.-M. Fontaine a défini une hiérarchie dans la catégorie  $\underline{\text{Rep}}(G_K)$  des représentations  $p$ -adiques et mis en évidence un analogue  $p$ -adique du théorème de la monodromie  $\ell$ -adique. Pour l'énoncer il faut définir le corps des périodes  $p$ -adiques  $B_{dR}$  [F1] et son sous-anneau  $B_{st}$  [F3].

Soient un corps  $K$  contenant  $\mathbb{Q}_p$  complet pour une valuation discrète de corps résiduel  $k$  parfait,  $C$  le complété d'une clôture algébrique de  $K$

et  $\mathcal{O}_C$  l'anneau de ses entiers. Soit l'ensemble  $\tilde{E}^+$  des suites  $(x = x^{(0)}, \dots)$  d'éléments de l'anneaux  $\mathcal{O}_C$  satisfaisant les relations  $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ . On munit l'ensemble  $\tilde{E}^+$  du produit  $(xy = x^{(0)}y^{(0)}, \dots)$  et de la somme  $(x + y = z^{(0)}, \dots)$  avec  $z^{(m)} := \lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(m+n)} + y^{(m+n)})^{p^n}$  qui devient ainsi un anneau de caractéristique  $p$  parfait. Son corps des fractions  $\tilde{E}$  est algébriquement clos. On note  $W(\tilde{E}^+)$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\tilde{E}^+$ . L'application qui à un vecteur de Witt  $(x_0, x_1, \dots)$  associe la limite quand  $n \rightarrow \infty$  de  $x_0^{(n)p^n} + px_1^{(n)p^{n-1}} + \dots + p^n x_n^{(n)}$  est un homomorphisme surjectif d'anneaux dans  $\mathcal{O}_C$  :

$$W(\tilde{E}^+) \rightarrow \mathcal{O}_C.$$

Son noyau est un idéal principal. Il en est de même de l'homomorphisme

$$\theta : W(\tilde{E}^+) \otimes_{W(k)} K \rightarrow C.$$

On définit l'anneau  $B_{dR}^+$  par :

$$B_{dR}^+ := \varprojlim_{\leftarrow} W(\tilde{E}^+) \otimes_{W(k)} K / (\ker(\theta))^n.$$

Le corps des fractions de l'anneau  $B_{dR}^+$  est par définition le corps  $B_{dR}$  des périodes  $p$ -adiques. C'est une  $K$ -algèbre munie d'une action continue du groupe de Galois  $G_K$ . C'est aussi un corps à valuation discrète d'anneau des entiers  $B_{dR}^+$  et de corps résiduel  $C$ .

On dispose d'un homomorphisme injectif multiplicatif naturel de  $\mathbb{Z}_p(1)$  dans  $\tilde{E}^+$ . Si  $x$  est un élément de  $\tilde{E}^+$  on note  $[x] := (x, 0, \dots)$  son représentant de Teichmüller dans  $W(\tilde{E}^+)$ . Si  $x$  est un élément de  $\mathbb{Z}_p(1)$  la série :

$$\log([x]) := \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} ([x] - 1)^n / n$$

converge vers un élément de  $B_{dR}^+$  et on obtient un plongement additif  $G_K$ -équivariant de  $\mathbb{Z}_p(1)$  dans  $B_{dR}^+$ . Pour un générateur  $x$  de  $\mathbb{Z}_p(1)$ ,  $\log([x])$  est une uniformisante  $t$  de  $B_{dR}^+$  et est l'analogue  $p$ -adique de  $2\pi\sqrt{-1}$ . Le corps  $B_{dR}$  est isomorphe au corps des séries formelles  $C((t))$  mais il n'existe pas d'isomorphisme équivariant pour l'action du groupe  $G_K$ , ce qui rend inutile cet isomorphisme.

DÉFINITION 3.3.1. — *On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  de rang  $m$  est de de Rham si elle est trivialisable sur le corps des périodes  $p$ -adiques  $B_{dR}$  comme module galoisien sur le groupe  $G_K$ , autrement dit s'il existe un isomorphisme :*

$$B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \simeq (B_{dR})^m,$$

où le groupe  $G_K$  opère diagonalement sur le membre de gauche et de façon naturelle sur le membre de droite.

On note  $\text{Rep}_{dR}(G_K)$  la catégorie des représentations de de Rham. La matrice dans une base de  $V$  d'un isomorphisme est la matrice des périodes.

Nous allons définir la catégorie  $\overline{\text{Rep}}_{pst}(G_K)$  des représentations  $p$ -adiques potentiellement semi-stables. Pour cela il faut introduire l'anneau  $B_{\text{cris}}$  et l'anneau  $B_{st}$  qui est un anneau de polynôme sur l'anneau  $B_{\text{cris}}$ . Soit  $\xi$  un générateur de l'idéal noyau de l'homomorphisme  $\theta$ . On considère la  $W(\tilde{E}^+)$ -algèbre  $W(\tilde{E}^+)[1/p]$  et sa sous  $W(\tilde{E}^+)$ -algèbre  $W(\tilde{E}^+)^{pd}$  engendrée les puissances divisées  $(\xi)^n/n!$  et son complété  $p$ -adique  $A_{\text{cris}}$ . L'algèbre  $A_{\text{cris}}$  qui est solution d'un problème universel [F3] ne dépend pas du générateur  $\xi$ . Si  $x$  est un élément de  $\mathbb{Z}_p(1)$ ,  $\log([x])$  est un élément de  $A_{\text{cris}}$  et on obtient un plongement additif  $G_K$ -équivariant de  $\mathbb{Z}_p(1)$  dans  $A_{\text{cris}}$ . On note  $t$  l'image d'un générateur de  $\mathbb{Z}_p(1)$ . On pose :

$$B_{\text{cris}}^+ := A_{\text{cris}}[1/p], B_{\text{cris}} := B_{\text{cris}}^+[1/t].$$

Le morphisme de Frobenius  $\varphi$  s'étend à  $A_{\text{cris}}$  et l'on pose  $\varphi(t) := pt$  qui permet d'étendre l'action du Frobenius à l'anneau  $B_{\text{cris}}$ . Soit  $(x = x^{(0)}, \dots)$  un élément de  $\tilde{E}^+$  tel que  $x^{(0)}$  est une uniformisante de  $\mathcal{O}_K$ . Alors  $[x]/x^{(0)}$  appartient à  $1 + \text{Ker}(\theta)$  de sorte que  $u := \log([x]/x^{(0)})$  est un élément du corps  $B_{dR}$ . L'élément  $u$  ne dépend que de l'uniformisante  $x^{(0)}$  et est transcendant sur  $B_{\text{cris}}$  [F3] de sorte que le sous-anneau  $B_{st} := B_{\text{cris}}[u]$  de  $B_{dR}$  est un anneau de polynômes sur  $B_{\text{cris}}$ . L'anneau  $B_{st}$  est stable par l'action de  $G_K$ . On prolonge l'action du Frobenius à  $B_{st}$  en posant  $\varphi(u) := pu$ . On définit un opérateur de monodromie  $N$  sur  $B_{st}$  comme l'unique  $B_{\text{cris}}$ -dérivation telle que  $N(u) := 1$ .

**DÉFINITION 3.3.2.** — *On dit qu'une représentation  $p$ -adique  $V$  de rang  $m$  est semi-stable si elle est trivialisable sur l'anneau  $B_{st}$  comme module galoisien sur le groupe  $G_K$ , autrement dit s'il existe un isomorphisme :*

$$B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \simeq (B_{st})^m,$$

où le groupe  $G_K$  opère diagonalement sur le membre de gauche et de façon naturelle sur le membre de droite. On dit qu'une représentation  $p$ -adique est potentiellement semi-stable si elle devient semi-stable après extension finie du corps de base  $K$ .

On note  $\overline{\text{Rep}}_{pst}(G_K)$  la catégorie des représentations potentiellement semi-stables. On alors les inclusions

$$\underline{\text{Rep}}_{st}(G_K) \subset \overline{\text{Rep}}_{pst}(G_K) \subset \underline{\text{Rep}}_{dR}(G_K) \subset \underline{\text{Rep}}(G_K).$$

L'inclusion de droite est stricte. Le théorème de la monodromie  $p$ -adique conjecturé par Fontaine [F2] est le suivant :

**THÉOREME 3.3.4.** — *Soit une extension  $\mathbb{Q}_p \rightarrow K$  à valuation discrète et à corps résiduel parfait alors l'inclusion*

$$\underline{\text{Rep}}_{pst}(G_K) \subset \underline{\text{Rep}}_{dR}(G_K)$$

*de la catégorie des représentations potentiellement semi-stables dans la catégorie des représentations de de Rham est une égalité.*

En réalisant le foncteur mystérieux de Grothendieck [G2] le théorème de comparaison [T] montre que la cohomologie étale  $p$ -adique d'une variété propre et lisse sur  $K$  est de de Rham.

**THÉOREME 3.3.5.** — *Soit  $X$  une variété algébrique propre et lisse sur  $K$ , alors il existe un isomorphisme fonctoriel en  $X$  (de comparaison) de modules galoisiens :*

$$B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} H_{\text{ét}}^{\bullet}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p) \simeq B_{dR} \otimes_K H_{dR}^{\bullet}(X/K),$$

*le groupe  $G_K$  opère diagonalement sur le membre de gauche et seulement sur  $B_{dR}$  sur le membre de droite.*

En conjuguant les deux théorèmes précédents on trouve une démonstration de la potentielle semi-stabilité de la cohomologie étale  $p$ -adique d'une variété propre et lisse sur  $K$ .

La théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules classifiant [F2] les représentations  $p$ -adiques ramène [ChCo], [B] le théorème 3.3.3 au théorème 7.3.2 de décomposition d'un module différentiel en modules différentiels de rang 1.

Pour compléter ce qui précède rappelons qu'une représentation  $p$ -adique du groupe de Galois global  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  est dite motivique si elle est non ramifiée, c'est-à-dire l'action du groupe d'inertie est triviale, en dehors d'un nombre fini de places et potentiellement semi-stable en  $p$ . En vertu du théorème de la monodromie, il suffit qu'elle soit de de Rham en  $p$ , ce qui est en principe plus facile à vérifier et ne fait pas intervenir une extension finie.

Une conjecture de Fontaine-Mazur prédit qu'une représentation  $p$ -adique de  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$  est motivique si et seulement si elle apparaît comme sous-quotient de la cohomologie étale  $p$ -adique d'une variété projective et lisse sur  $\mathbb{Q}$ . Autrement dit une représentation galoisienne globale  $p$ -adique est motivique si et seulement elle est d'origine géométrique sur  $\mathbb{Q}$  ce qui

justifie la terminologie. Dans un sens cela résulte du fait que la cohomologie étale  $p$ -adique d'une variété propre et lisse sur une extension finie  $K$  de  $\mathbb{Q}_p$  est potentiellement semi-stable.

La théorie des équations différentielles  $p$ -adiques est l'outil fondamental pour résoudre les problèmes précédents.

#### 4. Le prolongement analytique et les exposants de la monodromie $p$ -adique.

Avec le recul de quelques années on se propose d'expliquer au lecteur la problématique du prolongement analytique et des exposants en arithmétique. Les résultats de ce chapitre sont montrés dans l'article [CM2].

Dans de nombreuses questions de finitude, on rencontre le problème de l'existence de l'indice pour un opérateur différentiel, à coefficients dans l'algèbre des polynômes à coefficients dans le corps des nombres algébriques  $\overline{\mathbb{Q}}$ , opérant dans un espace de fonctions analytiques  $p$ -adiques dans un disque.

Soient

$$P\left(x, \frac{d}{dx}\right) = a_m(x) \frac{d^m}{dx^m} + \dots + a_0(x) \in \overline{\mathbb{Q}}\left[x, \frac{d}{dx}\right]$$

un tel opérateur différentiel d'ordre  $m$ ,  $p$  un nombre premier et  $K$  un corps  $p$ -adique c'est-à-dire un corps valué complet contenant le corps des nombres  $p$ -adiques  $\mathbb{Q}_p$ . Pour un nombre réel  $r > 0$ , on note  $\mathcal{A}_K(r)$  l'anneau des séries à coefficients dans  $K$  qui convergent dans le disque ouvert de rayon  $r$ . Si les coefficients de l'opérateur  $P$  appartiennent à  $K$  alors il opère sur  $\mathcal{A}_K(r)$ . La question fondamentale est de savoir si le conoyau de cette action est de dimension finie sur  $K$  et de calculer éventuellement l'indice à l'aide d'invariants de  $P$ .

La question est résolue depuis longtemps pour  $r$  assez petit ou pour  $r$  assez grand dépendant de l'opérateur [Cl]. Pour  $r$  assez petit l'indice local est égal à l'indice formel. Dans la note précédente Dwork et Clark ont mis en évidence que pour un corps de base général l'obstruction à l'existence de l'indice local ne dépend que des exposants formels, et dans le cas du corps de base  $\overline{\mathbb{Q}}$ , les exposants sont algébriques et cette obstruction n'a pas lieu.

Mais le cas crucial  $r = 1$  est encore ouvert. Les disques de rayon 1 sont les relèvements en caractéristique nulle des points en caractéristique  $p > 0$

ce qui explique leur importance en géométrie algébrique de caractéristique positive. Aujourd'hui on sait définir pour un corps de base général une obstruction à l'existence de l'indice mais on ne sait pas montrer que cette obstruction n'a pas lieu dans le cas général même dans le cas du corps de base  $\overline{\mathbb{Q}}$ . Cette obstruction porte sur les exposants de la monodromie  $p$ -adique, mais encore faut-il savoir ce que cela veut dire.

Philippe Robba a résolu [R4] le cas d'ordre  $m = 1$  ce qui a permis de faire démarrer la théorie.

On note  $| \cdot |$ ,  $| \cdot |$  la valeur absolue dans un corps  $p$ -adique.

#### 4.1. Cas de rang 1.

Pour un opérateur différentiel, l'existence de l'indice à valeur dans l'anneau des fonctions analytiques dans le disque ouvert de rayon 1 ne dépend que de sa monodromie dans la couronne  $C(|1 - \epsilon, 1|)$  des points  $x$  tels que  $1 - \epsilon < |x| < 1$ . La monodromie est liée au prolongement analytique des solutions locales exactement comme dans la théorie complexe. Mais dans la théorie  $p$ -adique le prolongement analytique n'a pas toujours lieu et Robba a mis en évidence une condition nécessaire pour l'existence du prolongement analytique.

Soit  $C(|1 - \epsilon, 1|)$  la couronne du plan  $p$ -adique formée des points du complété de la clôture algébrique  $\overline{K}$  tels que  $1 - \epsilon < |x| < 1$ . Pour tout point  $x$  du plan  $p$ -adique notons  $\mathcal{A}_x$  l'espace des fonctions analytiques au voisinage de  $x$ . Si le point  $x$  n'est pas singulier pour  $P$ , en particulier s'il appartient à la couronne  $C(|1 - \epsilon, 1|)$  pour  $\epsilon$  assez petit, en vertu du théorème de Cauchy-Lutz, la dimension de l'espace des solutions  $\text{Ker}(P, \mathcal{A}_x)$  est égale à l'ordre de  $P$ . Une solution locale a toujours un rayon de convergence non trivial, mais à la différence du cas complexe ce rayon peut être très petit.

**DÉFINITION 4.1.1.** — *On dit que  $P$  a la propriété de Robba sur la couronne  $C(|1 - \epsilon, 1|)$ , si toute solution locale en un point  $x$  de la couronne admet un rayon de convergence au moins égal à  $|x|$ .*

Robba [R4] a démontré le théorème :

**THÉORÈME 4.1.2.** — *Supposons l'ordre de  $P$  est égal à 1, alors  $P$  admet la propriété de Robba sur la couronne  $C(|1 - \epsilon, 1|)$  si et seulement si  $P$  admet une solution non triviale de la forme  $x^\alpha f(x)$  où  $f$  est une série de*

*Laurent à coefficients dans le corps de base  $K$  qui converge dans la couronne  $C(]1 - \epsilon, 1[)$  et  $\alpha$  est un entier  $p$ -adique de  $\mathbb{Z}_p$  dont la classe modulo  $\mathbb{Z}$  est égale au résidu de la fraction rationnelle  $-a_0/a_1$ .*

Supposons que  $P$  admette une singularité en un point  $x_0$  du disque ouvert  $D(0, 1^-)$  et n'admet pas de singularités dans la couronne  $|x_0| < |x| < 1$ . Alors pour un point  $x$  de la couronne  $|x_0| < |x| < 1$  le disque  $D(x, |x|^-)$  centré en  $x$  et de rayon  $|x|$  est le plus grand disque qui ne rencontre pas la première singularité. La condition de Robba signifie que les solutions locales se prolongent jusqu'à rencontrer la première singularité. Dans le cas d'ordre 1, le théorème de Robba dit que la solution locale en un point de la couronne a un prolongement multiforme dans la couronne si et seulement si les solutions locales en tous les points de la couronne se prolongent jusqu'à la première singularité. L'opérateur admet une monodromie d'exposant  $\alpha$  exactement comme dans la théorie classique bien que le plan  $p$ -adique soit totalement discontinu! Le théorème précédent, dont la démonstration est simple du point de vue technique, est un résultat de structure tout à fait remarquable.

Le théorème de Robba montre que l'obstruction à l'existence de l'indice pour un opérateur d'ordre 1 ayant la propriété de Robba ne dépend que de l'exposant de la monodromie. Par ailleurs Robba a aussi montré qu'un opérateur d'ordre 1 n'ayant pas la propriété de Robba admet toujours un indice [R4].

#### 4.2. Cas de rang $\geq 2$ .

La condition de Robba garde un sens pour tous les polynômes différentiels, mais nous allons voir qu'elle n'est pas suffisante pour l'existence d'un prolongement multiforme des solutions locales.

Le prolongement analytique sur la couronne ne dépend que de la structure de l'opérateur sur la couronne. Aussi on peut considérer des modules différentiels sur l'anneau des fonctions analytiques  $\mathcal{A}_K(]1 - \epsilon, 1[)$  sur la couronne à coefficients dans le corps  $K$ .

Soit  $\alpha$  un entier  $p$ -adique de  $\mathbb{Z}_p$ . L'opérateur d'ordre un  $x \frac{d}{dx} - \alpha$  a la propriété de Robba sur la couronne  $C(]1 - \epsilon, 1[)$ . En effet comme  $\alpha$  est un entier  $p$ -adique chaque détermination de  $x^\alpha$  en un point non nul  $x$  converge dans le disque ouvert  $D(x, |x|^-)$ . Notons  $x^\alpha$  le module différentiel de rang 1 associé sur l'anneau  $\mathcal{A}_K(]1 - \epsilon, 1[)$ .

Considérons maintenant deux entiers  $p$ -adiques  $\alpha$  et  $\beta$  et une extension de  $x^\beta$  par  $x^\alpha$

$$0 \rightarrow x^\alpha \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow x^\beta \rightarrow 0.$$

Le module différentiel  $\mathcal{M}$  a automatiquement la propriété de Robba sur la couronne  $C(]1 - \epsilon, 1[)$ . En effet comme  $x^\beta$  est trivialisable sur l'anneau des fonctions analytiques sur le disque  $D(x, |x|^-)$  la méthode de la variation de la constante montre que  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}^1(x^\beta, \mathcal{A}_x(|x|))$  est nul et l'espace  $\text{Hom}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_x(|x|))$  est de dimension 2 où  $\mathcal{A}_x(|x|)$  désigne l'espace des fonctions analytiques dans le disque ouvert centré en  $x$  et de rayon  $|x|$ .

Même lorsque la différence  $\alpha - \beta$  n'est pas un entier de  $\mathbb{Z}$ , il se peut que l'espace vectoriel  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}^1(x^\beta, x^\alpha)$  ne soit pas nul et donc qu'il existe une extension non triviale  $\mathcal{M}$  dans ce cas contrairement au cas analytique complexe.

La suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}(x^\beta, x^\alpha) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, x^\alpha) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}(x^\alpha, x^\alpha) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}^1(x^\beta, x^\alpha) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}^1(\mathcal{M}, x^\alpha) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}(x^\alpha, x^\alpha) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

montre que le morphisme de transition est non nul et l'espace

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, x^\alpha)$$

qui coïncide avec l'espace  $\text{Hom}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}(x^\beta, x^\alpha)$  est nul.

Ceci entraîne que seulement un espace de dimension 1 de solutions locales ont un prolongement (multiforme) à la couronne mais pas les autres. La condition de Robba est insuffisante pour garantir le prolongement multiforme de toutes les solutions locales.

Pour  $\alpha - \beta$  non entier l'espace  $\text{Ext}_{\mathcal{A}_K(]1-\epsilon, 1[) [\frac{d}{dx}]}^1(x^\beta, x^\alpha)$  est non nul exactement quand la différence  $\alpha - \beta$  est un nombre de Liouville, auquel cas il est même de dimension infini.

DÉFINITION 4.2.1. — On dit qu'un nombre  $\alpha$  de  $\mathbb{Z}_p$  a la propriété (NL) si les séries

$$\sum_{i \geq 0, i \neq \alpha} \frac{x^i}{i - \alpha}, \quad \sum_{i \geq 0, i \neq -\alpha} \frac{x^i}{i + \alpha}$$

ont un rayon de convergence égal à 1.

Il existe des nombres, dits de Liouville, qui n'ont pas la propriété (NL). Des exemples de nombres de Liouville sont construits explicitement par Robba dans [R1]. On ne peut donc pas espérer généraliser le théorème de Robba sans restriction. Il faut procéder de manière complètement différente.

On voit dans la situation précédente que pour avoir le prolongement analytique pour toutes les solutions locales il faut imposer une condition sur les *différences* entre les exposants comme nous l'avons mis en évidence dans ([CM1], 2.2.4) grâce au raisonnement précédent. Mais encore faut-il savoir définir les exposants a priori.

Pour simplifier nous faisons l'hypothèse que le corps de base  $K$  est un sous-corps complet du complété de la clôture algébrique d'un corps à valuation discrète par exemple  $\mathbb{C}_p$  ou un de ses sous-corps complets. C'est dans ce contexte que les constructions originales ont été faites dans l'article [CM2].

Pour un intervalle ouvert  $I$  on note  $\text{MLC}(\mathcal{A}_K(I))$  la catégorie des modules libres de type fini sur l'anneau  $\mathcal{A}_K(I)$ , des fonctions analytiques à coefficients dans  $K$  sur la couronne  $C(I)$  munis d'une connexion.

Pour tout entier  $m$  on va définir l'ensemble  $\mathfrak{E}_m$  des exposants de rang  $m$  comme un quotient de  $(\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^m$  par une relation d'équivalence. L'exposant d'un module différentiel de rang  $m$  ayant la propriété de Robba sera défini comme un élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}_m$ .

Pour tout entier  $p$ -adique  $\alpha$  et tout entier naturel  $h$ , on note  $\alpha^{(h)}$  l'unique représentant entier appartenant à  $[\frac{1-p^h}{2}, \frac{1+p^h}{2}[$  de la classe de  $\alpha$  modulo  $p^h$ , et  $\alpha^{(h)} := (\alpha_1^h, \dots, \alpha_m^h)$  pour un  $m$ -uplet  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ . On note  $\|\cdot\|_\infty$  la valeur absolue usuelle. On a la définition ([CM2], 4.4.1) :

**DÉFINITION 4.2.2.** — Soit  $\alpha$  et  $\alpha'$  deux  $m$ -uplets d'entiers  $p$ -adiques, on dit qu'ils sont équivalents pour la relation d'équivalence  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$  s'il existe une suite de permutations  $(\sigma_h)_{h \in \mathbb{N}}$  de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$  telle que  $\|\alpha^{(h)} - \sigma_h(\alpha')^{(h)}\|_\infty := \max_i |\alpha_i^{(h)} - \alpha'_{\sigma(i)}^{(h)}|_\infty$  soit un  $O(h)$ .

Dans le cas  $m = 1$  deux entiers  $p$ -adiques sont équivalents si et seulement s'ils diffèrent d'un entier. La relation  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$  est asymptotique et passe au quotient par  $\mathbb{Z}$ , nous noterons encore  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$  la relation induite sur  $(\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^m$ . On a la définition ([CM2], 4.4.8) :

DÉFINITION 4.2.3. — L'ensemble  $\mathfrak{E}_m$  des exposants de rang  $m$  est l'ensemble quotient

$$(\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^m / \overset{\mathfrak{E}}{\sim}.$$

On a le théorème ([CM2], 4.4.7) :

THÉORÈME 4.2.4. — Soit  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  un  $m$ -uplet d'entiers  $p$ -adiques tel que les différences  $\alpha_i - \alpha_j$  ont la propriété (NL), alors pour tout  $m$ -uplet  $\alpha' := (\alpha'_1, \dots, \alpha'_m)$  d'entiers  $p$ -adiques  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$ -équivalent à  $\alpha$  il existe une permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$  telle que  $\alpha_i - \alpha'_{\sigma(i)} \in \mathbb{Z}$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

L'intérêt du théorème précédent est de montrer que la classe d'équivalence d'un  $m$ -uplet dont les différences ont la propriété (NL) se réduit à cet élément modulo une permutation. Ceci permet de définir l'ensemble de base

DÉFINITION 4.2.5. — On définit  $\mathfrak{E}_m^{\text{NL}}$  comme le sous-ensemble de l'ensemble  $\mathfrak{E}_m$  des exposants dont les différences ont la propriété (NL).

Un élément de l'ensemble  $\mathfrak{E}_m^{\text{NL}}$  se relève de façon unique par  $m$  éléments de  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$  non ordonnés et comptés avec leur multiplicité qui sont les exposants  $p$ -adiques. On a la proposition ([CM2], 5.4.2) :

PROPOSITION 4.2.6. — Soient deux entiers  $n, r$  tels que  $m = n + r$  alors il existe une application somme surjective  $\mathfrak{E}_n \times \mathfrak{E}_r \rightarrow \mathfrak{E}_m$ .

Cette application somme est loin d'être injective.

Le premier point clef est la définition de l'exposant pour un module différentiel ayant la propriété de Robba.

THÉORÈME 4.2.7. — Soit  $I$  un intervalle ouvert de nombres réels positifs et  $\mathcal{M}$  un module différentiel de rang  $m$  de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{A}_K(I))$  ayant la propriété de Robba. On attache à  $\mathcal{M}$  son exposant  $\text{Exp}(\mathcal{M})$  qui est un élément bien défini de l'ensemble  $\mathfrak{E}_m$ . L'application exposant a les propriétés suivantes :

1) L'application exposant est additive dans une suite exacte de modules différentiels ayant la propriété de Robba, l'exposant du terme médian est la somme des exposants des termes extrêmes au sens de la proposition 4.2.6.

2) *L'exposant du dual d'un module est l'opposé de l'exposant du module.*

3) *La somme des éléments d'un représentant de l'exposant est indépendante du représentant modulo de  $\mathbb{Z}$  et est égale à l'exposant du module déterminant.*

La construction originale de l'exposant est faite dans [CM2] dans le cas de  $K = \mathbb{C}_p$  et un argument galoisien montre qu'elle se descend à tout sous-corps complet  $K$  de  $\mathbb{C}_p$  ([CM3], 7.1.2). Pour la construction précédente seule l'hypothèse sur  $\mathbb{C}_p$  d'être le complété d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète intervient. L'hypothèse de valuation discrète est nécessaire pour pouvoir appliquer la décomposition de Birkhoff du paragraphe 2 de [CM2].

Le prolongement analytique des solutions locales n'a lieu que dans le cas d'un exposant ayant des différences ayant la propriété (NL) comme le montre l'exemple d'une extension de modules de rang 1 vue ci-dessus.

Notons  $\text{Rob}(\mathcal{A}_K(I), \text{DNL})$  la catégorie des modules différentiels ayant la propriété de Robba sur la couronne  $C(I)$  et dont l'exposant a des différences ayant la propriété (NL). Un objet de la catégorie  $\text{Rob}(\mathcal{A}_K(I), \text{DNL})$  de rang  $m$  admet donc  $m$  exposants  $p$ -adiques qui sont des éléments de  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$ , non ordonnés et comptés avec leur multiplicité.

**THÉORÈME 4.2.8.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{Rob}(\mathcal{A}_K(I), \text{DNL})$  de rang  $m$  d'exposants  $p$ -adiques  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Alors il admet une matrice fondamentale de solutions de la forme  $\sum_k c_{\alpha_i, k}(x) x^{\alpha_i} (\log(x))^k$ , où, les  $c_{\alpha_i, k}$  sont des fonctions uniformes sur la couronne  $C(I)$  à coefficients dans le corps de base  $K$ . Ces solutions fournissent le prolongement analytique multiforme des solutions locales en tout point de la couronne. En particulier les objets simples de la catégorie  $\text{Rob}(\mathcal{A}_K(I), \text{DNL})$  sont de rang 1 dont les classes d'isomorphie sont classifiées par leur exposant.*

La démonstration originale de ce théorème de la monodromie  $p$ -adique est faite dans l'article [CM2].

Ce théorème donne naissance au théorème d'existence de Riemann  $p$ -adique à savoir que, sur une courbe projective non singulière sur  $K$ , les fibrés analytiques à connexion définis sur des complémentaires d'un nombre fini de disques et ayant la propriété de Robba au bord de chaque disque avec des exposants ayant la propriété (DNL) proviennent de façon essentiellement unique de fibrés algébriques à connexion n'ayant que des singularités

régulières admettant ces mêmes exposants  $p$ -adiques comme exposants algébriques ([CM2], §6). La globalisation de la catégorie  $\text{Rob}(\mathcal{A}_K(I), \text{DNL})$  sur une courbe fournit l'analogue  $p$ -adique des systèmes locaux complexes.

*Exemple 4.2.9.* — Si l'on considère une extension non triviale  $\mathcal{M}$  de  $x^\beta$  par  $x^\alpha$ , alors l'exposant de  $\mathcal{M}$  est la classe de  $(\alpha, \beta)$ . Celle-ci est infinie si la différence  $\alpha - \beta$  est un nombre de Liouville mais se réduit à l'élément non ordonné  $\{\alpha, \beta\}$  si  $\alpha - \beta$  a la propriété (NL). Dans le premier cas le prolongement analytique n'a lieu que pour une solution locale et dans le deuxième cas le prolongement a lieu pour les solutions locales.

*Remarque 4.2.10.* — L'exemple d'une extension non triviale de  $x^\beta$  par  $x^\alpha$  produit un module réductible. Mais on peut construire des exemples de modules différentiels de rang deux ayant la propriété de Robba sur une couronne et qui sont absolument irréductibles, ce qui complique davantage la théorie  $p$ -adique générale.

## 5. Le théorème de décomposition et le polygone de Newton $p$ -adique.

Les résultats de ce chapitre sont démontrés dans [CM3].

Malgré l'importance des résultats précédents qui permettent de disposer en arithmétique d'un prolongement analytique pour les solutions locales des équations différentielles, et c'est là un progrès tout à fait majeur, ils restent encore insuffisants pour résoudre, par exemple, les problèmes concernant les nombres de Betti  $p$ -adiques.

En général un opérateur différentiel ne possède pas la propriété de Robba. Mais il admet toujours un plus grand quotient en un certain sens qui a cette propriété dont l'exposant fournit l'obstruction à l'existence de l'indice. Ceci résulte du théorème de décomposition selon les pentes  $p$ -adiques.

L'anneau naturel pour un tel théorème est l'anneau  $\mathcal{R}_K(1)$  des séries de Laurent à coefficients dans  $K$  qui convergent dans une couronne  $C(]1 - \epsilon, 1[)$  pour un nombre réel  $\epsilon > 0$  non précisé. En effet l'exemple 6.1.16 de l'article [CM3] montre qu'on ne peut pas décomposer en général un opérateur à coefficients dans le corps des fonctions rationnelles en opérateurs à coefficients dans le corps des fonctions bornées au bord. Une

première difficulté est que l'anneau  $\mathcal{R}_K(1)$  n'est pas noethérien. Cependant comme conséquence d'un théorème de M. Lazard on a le résultat suivant :

**THÉORÈME 5.0.11.** — *Supposons le corps  $K$  maximalelement complet, alors les anneaux  $\mathcal{A}_K(I)$ ,  $\mathcal{R}_K(1)$  sont de Bezout : leurs idéaux de type fini sont principaux.*

Un corps ultramétrique est dit maximalelement complet si une intersection de disques emboîtés non vides est non vide. Un corps à valuation discrète est maximalelement complet mais, par exemple, le corps  $\mathbb{C}_p$  n'est pas maximalelement complet. Cette propriété suffit à montrer que les catégories  $\text{MLC}(\mathcal{A}_K(I))$ ,  $\text{MLC}(\mathcal{R}_K(1))$  sont abéliennes :

**THÉORÈME 5.0.12.** — *Si le corps  $K$  est maximalelement complet, les catégories  $\text{MLC}(\mathcal{A}_K(I))$  et  $\text{MLC}(\mathcal{R}_K(1))$  sont abéliennes.*

On pourra alors considérer les filtrations d'un module différentiel.

L'invariant le plus important d'un module différentiel du point de vue  $p$ -adique est sa fonction rayon de convergence. On note  $|\cdot|_\rho$  la norme en  $\rho$  sur l'espace  $\mathcal{A}_K(I)$  qui attribue à  $x$  la norme  $\rho$  et qui prolonge la valeur absolue sur le corps de base  $K$ .

**DÉFINITION 5.0.13.** — *La fonction rayon de convergence  $\rho \mapsto R(\mathcal{M}, \rho)$  d'un module  $\mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{A}_K(I))$  est la fonction est définie sur l'intervalle  $I$  par*

$$R(\mathcal{M}, \rho) := \min(\rho, \liminf_{k \rightarrow \infty} (|G_k|_\rho)^{-1/k})$$

où  $G_k$  est la matrice de l'opérateur  $\Delta^k := \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}$  dans une base.

La fonction rayon de convergence ne dépend pas de la base choisie : c'est le rayon de convergence des solutions locales dans le disque générique  $D(t_\rho, \rho^-)$ . C'est une fonction à valeurs réelles positives, logarithmiquement concave par construction. Elle admet des limites quand  $\rho$  tend vers les extrémités de l'intervalle  $I$ . En particulier la fonction  $R(\mathcal{M}, \rho)$  pour un module  $\mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_K(1))$  est définie pour  $\rho \in ]1 - \epsilon, 1[$  et admet une limite  $R(\mathcal{M}, 1^-) := \lim_{\rho \rightarrow 1^-} R(\mathcal{M}, \rho)$ . De plus la fonction  $R(\mathcal{M}, \rho)$  est logarithmiquement dérivable à gauche de valeur éventuellement infini, quand  $\rho \rightarrow 1^-$ . Par construction  $R(\mathcal{M}, 1^-)$  est  $\leq 1$ .

**DÉFINITION 5.0.14.** — *On dit que  $\mathcal{M}$  est soluble en 1 si  $R(\mathcal{M}, 1^-) = 1$ .*

On note  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$  la catégorie des modules solubles. C'est une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_K(1))$  stable par extension, par dualité et par produit tensoriel. De plus ses objets sont de longueur finie. Après une éventuelle extension finie du corps de base, chacun de ceux-ci s'obtient par extensions successives à partir d'objets absolument irréductibles, c'est-à-dire qui restent irréductibles après extension finie du corps de base.

**THÉORÈME 5.0.15.** — *Pour tout corps  $p$ -adique  $K$ , la fonction rayon de convergence  $R(\mathcal{M}, \rho)$  d'un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module soluble est de la forme  $\rho^{\beta+1}$  pour tout  $\rho$  assez voisin de 1 et pour un nombre rationnel  $\beta \geq 0$ .*

**DÉFINITION 5.0.16.** — *La plus grande pente  $p$ -adique  $\text{pt}(\mathcal{M})$  d'un module soluble  $\mathcal{M}$  est le nombre rationnel  $\beta$  défini dans le théorème précédent.*

*On dit qu'un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module soluble est purement de pente  $\beta \geq 0$  si ses solutions locales au point générique  $t_\rho$  ont toutes un même rayon de convergence égal à  $\rho^{\beta+1}$  pour  $\rho$  assez proche de 1.*

**Exemple 5.0.17.** — Un module soluble est purement de pente nulle si et seulement s'il a la propriété de Robba au bord de la couronne  $C(]1-\epsilon, 1[)$  pour un  $\epsilon > 0$  assez petit.

**THÉORÈME 5.0.18.** — *Supposons le corps de base  $K$  maximallement complet et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module soluble, alors il admet dans la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$  une filtration, décroissante fonctorielle exacte et stricte,  $\mathcal{M}_{>\gamma}$  indexée par les nombres réels  $\gamma \geq 0$  dont les modules gradués  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  sont purement de pente  $\gamma$  et on a la décomposition canonique en somme directe :*

$$\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\gamma \geq 0} Gr^\gamma(\mathcal{M}).$$

Le théorème de décomposition permet de définir le polygone de Newton  $p$ -adique. Les pentes d'un module soluble  $\mathcal{M}$  sont les nombres réels  $\gamma$  pour lesquels  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  est non nul. Un module soluble  $\mathcal{M}$  n'a qu'un nombre fini de pentes. En vertu du théorème de la plus grande pente les pentes d'un module soluble sont des nombres rationnels.

**DÉFINITION 5.0.19.** — *On définit le polygone de Newton  $p$ -adique Newton( $\mathcal{M}, p$ ) de  $\mathcal{M}$  par*

$$((m_0, 0); (m_{\beta_1}, \beta_1 m_{\beta_1}), \dots; (m_{\text{pt}(\mathcal{M})}, \text{pt}(\mathcal{M}) m_{\text{pt}(\mathcal{M})})).$$

L'entier  $m_\beta$  est la multiplicité de la pente  $\beta$ , c'est-à-dire le rang du  $\mathcal{R}_K(1)$ -module  $Gr^\beta(\mathcal{M})$ .

Tous les résultats précédents sont démontrés dans l'article [CM3] en faisant l'hypothèse de locale compacité sur le corps de base dans le théorème de décomposition. Cette hypothèse intervient dans le lemme de compacité ([CM3], 6.1.2). La démonstration de ce théorème a suggéré une généralisation de ce lemme dans le cas maximale complet ce qui est établi dans l'article [CM4] étendant ainsi le théorème de décomposition au cas d'un corps maximale complet.

La démonstration du théorème de décomposition selon les pentes  $p$ -adiques repose sur des majorations et minorations explicites très fines de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques intéressantes en elles-mêmes ([CM3], §5) et qui ont d'ailleurs d'autres applications.

## 6. Le théorème de l'indice.

Les résultats de ce chapitre sont démontrés dans les articles [CM3], [CM4]. Les résultats précédents permettent de définir une obstruction à l'existence de l'indice pour un opérateur différentiel.

### 6.1. Le théorème de l'indice local.

Les pentes du polygone Newton( $\mathcal{M}, p$ ) sont les pentes des modules gradués  $Gr^\beta(\mathcal{M})$ . Ce sont donc des nombres rationnels positifs. Nous allons interpréter le produit  $\beta m_\beta$  comme un indice. Notons  $\gamma_+$ , resp.  $\gamma^+$ , l'injection de  $\mathcal{A}_K(r)$  dans  $\mathcal{R}_K(r)$ , resp. la projection de  $\mathcal{R}_K(r)$  sur  $\mathcal{A}_K(r)$ .

**DÉFINITION 6.1.1.** — Si  $u$  est un endomorphisme  $K$ -linéaire de  $(\mathcal{R}_K(r))^m$  on appelle indice généralisé de  $u$  à valeurs dans  $\mathcal{A}_K(r)$  l'indice de l'endomorphisme  $\gamma^+ \circ u \circ \gamma_+$  de  $(\mathcal{A}_K(r))^m$  :

$$\tilde{\chi}(u, \mathcal{A}_K(r)) := \chi(\gamma^+ \circ u \circ \gamma_+, (\mathcal{A}_K(r))^m).$$

Si  $G(x)$  est la matrice dans une base de l'action de  $x \frac{d}{dx}$  sur un  $\mathcal{R}_K(r)$ -module  $\mathcal{M}$  libre de rang  $m$  à connexion on définit l'indice généralisé  $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(r))$  de  $\mathcal{M}$  à valeurs dans  $\mathcal{A}_K(r)$  comme l'indice généralisé de l'endomorphisme  $x \frac{d}{dx} - G(x)$ .

PROPOSITION 6.1.2. — *Si le corps de base est maximale-ment complet l'indice généralisé ne dépend pas de la base choisie et est additif dans une suite exacte.*

La démonstration de la proposition repose sur le théorème de perturbation compacte ([CM3], §8).

THÉORÈME 6.1.3. — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module de rang  $m$  soluble purement de pente  $\beta > 0$ , alors le produit  $m\beta$  est égal à l'indice généralisé  $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(1))$  et l'indice  $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}_K(1))$  est nul.*

COROLLAIRE 6.1.4. — *Supposons le corps de base maximale-ment complet et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module différentiel soluble, alors son polygone de Newton  $\text{Newton}(\mathcal{M}, p)$  est à coordonnées entières, en particulier sa hauteur*

$$\text{Irr}(\mathcal{M}, p) := \sum_{\gamma > 0} \gamma m_\gamma$$

*est un entier positif ou nul qui est nul si et seulement si le module est purement de pente nulle.*

Le cas d'un module purement de pente nulle est très délicat. Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module différentiel soluble purement de pente nulle de rang  $m$ , alors son exposant  $\text{Exp}(\mathcal{M})$  est un élément bien défini de l'ensemble  $\mathfrak{E}_m$  et si cet exposant a la propriété des différences (DNL), ses exposants sont des éléments bien définis de  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$  non ordonnés et comptés avec leur multiplicité.

THÉORÈME 6.1.5. — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module différentiel soluble purement de pente nulle ayant la propriété (DNL) et dont les exposants eux-mêmes ont la propriété (NL), alors l'indice  $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}_K(1))$  existe et est nul.*

C'est une conséquence du théorème de la monodromie  $p$ -adique 4.2.8. En conjuguant les deux théorèmes précédents on trouve le théorème de l'indice local :

THÉORÈME 6.1.6. — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module de rang  $m$  soluble dont la partie de pente nulle a la propriété (DNL) et dont les exposants ont la propriétés (NL), alors l'indice généralisé  $\tilde{\chi}(\mathcal{M}, \mathcal{A}_K(1))$  existe et est égal à la hauteur  $\text{Irr}(\mathcal{M}, p)$  de son polygone de Newton  $p$ -adique.*

## 6.2. Le théorème de l'indice global.

On peut alors appliquer les résultats précédents au cas d'un opérateur  $P(x, \frac{d}{dx}) \in \overline{\mathbb{Q}}[x, \frac{d}{dx}]$  soluble en 1. Soit  $P$  un tel opérateur qui est soluble en 1, c'est-à-dire que ses solutions locales en tout point du plan sur le cercle unité convergent dans le disque unité ouvert centré en ce point. En fait la fonction  $R(P, \rho)$  est définie pour tout  $\rho \geq 0$  parce que la norme  $\|\cdot\|_\rho$  est définie sur le corps  $K(x)$ . La solubilité en 1 équivaut à l'égalité  $R(P, 1) = 1$ . Mais la fonction  $R(P, \rho)$  est continue pour tout  $\rho \geq 0$  en vertu du théorème de continuité de la fonction rayon de convergence [C-D]. Ceci entraîne que le module différentiel associé sur l'anneau  $\mathcal{R}_K(1)$  est soluble en 1 au sens de la définition précédente. En vertu du théorème de décomposition il se décompose sur l'anneau  $\mathcal{R}_K(1)$  en somme directe de modules admettant une seule pente.

**DÉFINITION 6.2.1.** — On définit l'exposant de  $P$  comme l'exposant de sa partie de pente nulle. On dit que  $P$  a la propriété **(DNL)** si son exposant à la propriété **(DNL)**. On dit que  $P$  a la propriété **(NL)** si son exposant a la propriété **(DNL)** et si ses exposants ont la propriétés **(NL)**.

**THÉORÈME 6.2.2.** — Soit  $P(x, \frac{d}{dx}) \in \overline{\mathbb{Q}}[x, \frac{d}{dx}]$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients algébriques soluble en 1 ayant la propriété **(NL)**. Alors pour tout corps  $p$ -adique  $K$  contenant les coefficients de  $P$  l'indice  $\chi(P, \mathcal{A}_K(1))$  existe et est égal à

$$\chi(P, \mathcal{A}_K(1)) = \text{Irr}(P, p) + m - \text{ord}_{D(0,1^-)}(a_m)$$

où  $\text{ord}_{D(0,1^-)}(a_m)$  est le degré du diviseur contenu dans le disque ouvert  $D(0, 1^-)$  de son coefficient principal.

L'indice, sous la condition **(NL)**, est donc indépendant du corps de base.

Pour pouvoir appliquer ce théorème il faudrait savoir si un tel opérateur à la propriété **(NL)**. Nous avons proposé ([CM1], 3.3.4) la conjecture :

**CONJECTURE 6.2.3.** — Un opérateur  $P(x, \frac{d}{dx}) \in \overline{\mathbb{Q}}[x, \frac{d}{dx}]$  soluble en 1 admet la propriété **(NL)**.

Une façon de démontrer cette conjecture est de montrer que les exposants sont des nombres algébriques. La difficulté est que les exposants

sont définis par voie transcendante et on ne voit pas comment procéder, il manque sans doute une nouvelle idée.

Dans la situation d'un opérateur à coefficients dans le corps des séries formelles  $k((x))$  à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, la nullité de la hauteur du polygone de Newton, défini à l'aide des valuations  $x$ -adiques des coefficients, caractérise une singularité régulière en vertu du théorème de Fuchs. La formule de l'indice précédente est l'analogue  $p$ -adique de la formule de Malgrange donnant l'indice formel.

*Remarque 6.2.4.* — Dans le théorème de l'indice nous avons fait l'hypothèse que l'opérateur  $P$  est à coefficients algébriques. Ceci n'est bien sûr pas nécessaire, mais en général un opérateur à coefficients dans un corps  $p$ -adique n'a pas la propriété (NL). D'autre part nous avons fait l'hypothèse de solubilité en 1. Ceci non plus n'est pas nécessaire et on peut définir pour un opérateur  $P$  quelconque sa partie de pente nulle dont l'exposant fournit l'obstruction à l'existence de l'indice ([CM3], §7) et on peut faire la conjecture précédente dans ce contexte.

Le théorème précédent concerne l'indice d'un opérateur à coefficients polynomiaux. Le cas d'un fibré  $p$ -adique est plus délicat et nécessite un théorème de prolongement qui a un grand intérêt en lui-même et dont la démonstration est fort intéressante [CM4].

**THÉORÈME 6.2.5.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module libre de rang fini  $m$  à connexion soluble en 1 ayant la propriété (DNL) et tel que  $\text{End}_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M}_{>0})$  a la propriété (NL). Quitte à faire une extension finie du corps de base  $K$ ,  $\mathcal{M}$  admet un réseau sur  $\mathcal{A}_K(1)$  qui est un  $\mathcal{A}_K(1)$ -module libre de rang  $m$  muni d'une connexion ayant zéro comme seul point singulier et qui le prolonge.*

La condition (NL) pour le module des endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M})$ , introduite à l'occasion du théorème précédent, a abouti au théorème 8.2.1 et s'est avérée très importante pour la structure des modules simples de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$ .

Nous allons globaliser le théorème précédent. Soient  $X$  une courbe connexe et lisse sur l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$  de  $K$ ,  $X_k$  sa fibre spéciale et  $U$  un ouvert affine de complémentaire  $Z$ . Nous supposons pour simplifier dans ce paragraphe que le corps  $K$  est à valuation discrète. On note  $\mathcal{X}^\dagger = (X_k, \mathcal{O}_{\mathcal{X}^\dagger})$  le schéma  $\dagger$ -adique de Meredith [Mr] associé à la courbe  $X$ . Rappelons [Mr] que c'est un espace annelé dont l'espace topologique

est la fibre spéciale  $X_k$  munie de la topologie de Zariski et dont le faisceau structural est le complété de Monsky-Washnitzer du faisceau structural  $\mathcal{O}_X$  qui est alors un faisceau de  $\mathcal{O}_K$ -algèbres à support dans la fibre spéciale  $X_k$ . Sur  $U_k$  nous considérons la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$  des  $\mathcal{O}_{U^\dagger/K}$ -modules localement libres de rang fini à connexion et sa sous-catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$  des modules solubles dans les classes singulières  $Z_k$  où  $\mathcal{O}_{U^\dagger/K} := \mathcal{O}_{U^\dagger} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$ . Les catégories précédentes sont des catégories de  $\mathcal{D}_{U^\dagger/K}$ -modules à gauche où  $\mathcal{D}_{U^\dagger/K}$  est le faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini construit sur  $\mathcal{O}_{U^\dagger/K}$ .

Pour tout point fermé  $k$ -rationnel  $x \in Z_k$ , nous notons  $\mathcal{M}_x^\dagger$  le  $\mathcal{R}_{Kx}(1)$ -module qu'on peut naturellement associer à un objet  $\mathcal{M}^\dagger$  de la catégorie  $\text{MCS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ ,  $\text{Exp}_x(\mathcal{M}^\dagger)$  son exposant et  $\text{Irr}_x(\mathcal{M}^\dagger, p)$  la hauteur du polygone de Newton  $p$ -adique en  $x$ .

De même sur  $U$  nous considérons la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{O}_{U/K})$  des  $\mathcal{O}_{U/K}$ -modules localement libres de rang fini à connexion. On a un foncteur

$$\dagger : \text{MLC}(\mathcal{O}_{U/K}) \rightarrow \text{MLC}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$$

qui à  $\mathcal{M}$  associe  $\mathcal{M}^\dagger := \mathcal{O}_{U^\dagger/K} \otimes_{\varepsilon^{-1}\mathcal{O}_{U/K}} \varepsilon^{-1}\mathcal{M}$  où  $\varepsilon$  est le morphisme naturel d'espaces annelés  $(X_k, \mathcal{O}_{X^\dagger/K}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_{X/K})$ . Notons  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{U/K})$  la sous-catégorie des modules dont l'image par le foncteur  $\dagger$  est dans la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$ . Par construction on a un foncteur

$$\dagger : \text{MLS}(\mathcal{O}_{U/K}) \rightarrow \text{MLS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K}).$$

**THÉORÈME 6.2.6.** — *Supposons la courbe  $X$  propre, les points de  $Z_k$  rationnels sur  $k$  et soit  $\mathcal{M}^\dagger$  un objet de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{U^\dagger/K})$  de rang  $m$  tel que  $\mathcal{M}_x^\dagger$  a la propriété (DNL) et  $\text{End}_{\mathcal{R}_{Kx}(1)}(\mathcal{M}_{x>0}^\dagger)$  a la propriété (NL) en tout point  $x$  de  $Z_k$ . Alors, quitte à faire une extension finie du corps de base  $K$ ,  $\mathcal{M}^\dagger$  est dans l'image essentielle du foncteur  $\dagger$ .*

*Si l'on suppose en plus que les exposants de  $\mathcal{M}^\dagger$  en chaque point singulier ont la propriété (NL) alors les  $K$ -espaces de cohomologie de de Rham  $p$ -adiques*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}_{U^\dagger/K}}(U_k; \mathcal{O}_{U^\dagger/K}, \mathcal{M}^\dagger), \quad \text{Ext}_{\mathcal{D}_{U^\dagger/K}}^1(U_k; \mathcal{O}_{U^\dagger/K}, \mathcal{M}^\dagger)$$

*sont de dimension finie et on a la formule d'Euler-Poincaré  $p$ -adique*

$$\chi(U_k, DR(\mathcal{M}^\dagger)) = m\chi(U_k) - \sum_{x \in Z_k} \text{Irr}_x(\mathcal{M}^\dagger, p).$$

Naturellement le cas difficile est celui de  $\text{Ext}^1$ . La démonstration [CM4] consiste à utiliser le théorème de prolongement local précédent pour

se ramener au cas algébrique. La formule d'Euler-Poincaré dans le cas algébrique est déjà montrée dans l'article [CM1] à l'aide du théorème de semi-continuité et sous l'hypothèse de l'existence des indices locaux.

## 7. Le théorème de décomposition en modules de rang 1 et le principe de transfert.

Afin d'éviter toute confusion, autant que possible, nous rappelons pour le lecteur le processus qui a conduit au théorème de décomposition en modules de rang 1. Dans son article [R4] Robba a fait une étude très fine des opérateurs d'ordre un et espérait montrer le théorème de l'indice pour un opérateur d'ordre quelconque à l'aide d'un théorème de décomposition en opérateurs d'ordre 1. De façon plus précise il espérait que le théorème de transfert a lieu pour un opérateur de  $\overline{\mathbb{Q}}[x, \frac{d}{dx}]$  soluble en 1, c'est-à-dire que la décomposition formelle de Turrittin après ramification converge dans le disque unité généralisant le théorème de transfert de Christol dans le cas d'une unique singularité régulière à l'origine dans le disque unité ([R4], 8.5). Si c'était le cas le théorème de l'indice serait une conséquence triviale et toute la théorie des équations différentielles  $p$ -adique serait ainsi triviale. En 1989 nous avons construit un contre-exemple au principe de transfert pour opérateur d'ordre deux qui provient de la géométrie. La méthode du principe de transfert s'est révélée sans issue pour le théorème de l'indice. Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents la décomposition en modules de rang 1 n'est pas nécessaire pour la démonstration du théorème de l'indice, plus exactement seule la décomposition de la partie de pente nulle en modules de rang 1 est indispensable. Cependant l'analogie  $p$ -adique du théorème de Turrittin se posait naturellement ([CM3], introduction) mais ne présentait pas un caractère urgent. Dans l'article [CM4] nous avons montré une forme de décomposition à savoir que sous la condition (NL) pour le module des endomorphismes un module se décompose en modules complètement irréductibles après éventuelle ramification d'indice premier avec  $p$  et nous avons fait la conjecture 3.0.12 qui donne la structure des modules complètement irréductibles à savoir que leur rang est une puissance de  $p$ . Le cas particulier de cette conjecture démontrée dans [M4] pour un module de rang premier à  $p$  est parallèle au théorème de décomposition de Turrittin en caractéristique nulle mais en est distinct. On peut en effet construire des exemples de module de rang premier à  $p$  dont la décomposition formelle est distincte de la décomposition  $p$ -adique.

La différence entre la théorie  $p$ -adique et la théorie en caractéristique nulle réside dans la structure des modules d'ordre 1. Le théorème 7.3.1 montre que les modules  $p$ -adiques de rang 1 sont trivialisés par des  $p$ -extensions convenables, ce qui n'est pas le cas en caractéristique nulle. À partir de là le théorème de décomposition en modules de rang 1 dans le cas de rang premier à  $p$  entraîne le théorème de décomposition dans le cas de rang divisible par  $p$  [M4].

Le théorème de décomposition en modules de rang 1 est indépendant de la théorie des représentations  $p$ -adiques et son application au théorème de la monodromie  $p$ -adique a été une heureuse coïncidence [M3].

Le Théorème de la monodromie 4.2.8 donne la décomposition en modules de rang 1 pour les modules de pentes nulle sous la condition (DNL) pour l'exposant. Les théorèmes 7.2.1, 7.3.2 donnent la décomposition en modules de rang 1 pour les modules purement de pentes strictement positives sous la condition (NL) pour le module des endomorphismes. Le théorème 7.2.1 résout la conjecture 3.0.12 de l'article [CM4] dans le cas d'un rang premier à  $p$ . Le théorème 7.3.2 est une conséquence du théorème 7.2.1 et du théorème 7.3.1.

Nous supposons pour simplifier dans ce chapitre que le corps de base  $K$  est à valuation discrète, bien que cette hypothèse n'est pas essentielle dans de nombreux résultats.

### 7.1. Décomposition en modules complètement irréductibles.

Rappelons que si  $\mathcal{M}$  est un module soluble son module des endomorphismes  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M})$  est encore soluble.

DÉFINITION 7.1.1. — *On dit qu'un module  $\mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$  a la propriété (NLE) si le module  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M})$  a la propriété (NL).*

Rappelons qu'un module est absolument irréductible s'il reste irréductible après toute extension finie du corps de base. La notion de module complètement irréductible est plus restrictive :

DÉFINITION 7.1.2. — *On dit qu'un module soluble est complètement irréductible si le rang de la partie de pente nulle de son module des endomorphismes est égal à 1.*

Un module complètement irréductible est absolument irréductible, mais il existe des modules absolument irréductibles qui ne sont pas complètement irréductibles. Pour analyser cette situation nous avons démontré dans ([CM4], 3.0.6, 3.0.9, 3.0.10) :

**THÉORÈME 7.1.3.**

1) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module soluble absolument irréductible de rang  $m$  ayant la propriété (NLE). Alors le rang de la partie de pente nulle  $\text{End}_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M})^{\leq 0}$  est un entier  $d$  divisant le rang  $m$  de  $\mathcal{M}$ , est premier avec  $p$  et les exposants de  $\text{End}_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M})^{\leq 0}$  sont les nombres rationnels  $(0, \frac{1}{d}, \dots, \frac{d-1}{d})$  qui forme un groupe.

2) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module soluble absolument irréductible de rang  $m$  ayant la propriété (NLE). Alors quitte à faire une extension finie du corps de base la ramification d'indice  $d, x = y^d$  décompose  $\mathcal{M}(\sqrt[d]{x})$  :

$$\mathcal{M}(\sqrt[d]{x}) \simeq \oplus_{i=0, \dots, d-1} \mathcal{M}_i$$

en module de rang  $m/d$  complètement irréductibles et  $\mathcal{R}_K(1)[x \frac{d}{dx}] \rightarrow \mathcal{R}_K(1)[y \frac{d}{d}]$  la restriction des scalaires induit un isomorphisme de  $\mathcal{M}$  avec l'image directe de  $\mathcal{M}_i$  pour tout  $i = 0, \dots, d-1$ .

3) Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module soluble de rang  $m$  ayant la propriété (NLE). Alors quitte à faire une extension finie du corps de base suivi d'une ramification d'indice  $e$  premier avec  $p$ , les constituants irréductibles de l'image inverse  $\mathcal{M}(\sqrt[e]{x})$  sont complètement irréductibles.

Le point clef du théorème précédent est l'existence d'un automorphisme  $F$  de  $\mathcal{M}$  tel que  $\nabla_x \frac{d}{dx} F = \frac{1}{d} F$ ,  $F^m = x I_m$  où  $I_m$  est la matrice identique de rang  $m$ . Cet automorphisme induit la décomposition après ramification d'indice  $d$ .

Nous avons fait la conjecture ([CM4], 3.0.12) selon laquelle l'entier  $d$  qui intervient dans la première partie du théorème 7.1.3 est le plus grand diviseur du rang  $m$  premier à  $p$ , ce qui est équivalent en vertu de la partie 2 du théorème 7.1.3 au fait que le rang d'un module complètement irréductible est une puissance positive ou nulle de  $p$ .

**7.2. Décomposition en modules de rang 1  
dans le cas de rang premier à  $p$ .**

Dans l'article [M4] nous avons résolu cette conjecture dans le cas de rang  $m$  premier à  $p$ . Nous notons  $\mathcal{R}_{K,x}$  pour  $\mathcal{R}_K(1)$  pour pouvoir considérer les extensions  $\mathcal{R}_{K,x} \rightarrow \mathcal{R}_{K',y}$ .

**THÉORÈME 7.2.1.** — Soit  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{K,x})$  et dont les constituants absolument irréductibles sont de rang premier à  $p$  et dont le module des endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M})$  a la propriété (NL).

1) Si  $d$  est le ppcm des rangs des constituants absolument irréductibles de  $\mathcal{M}$ , il existe une extension finie  $K'$  de  $K$  telle que les constituants irréductibles de  $\mathcal{R}_{K',x^{1/d}} \otimes_{\mathcal{R}_{K,x}} \mathcal{M}$ , dans la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{K',x^{1/d}})$  sont de rang 1.

2) De plus si on suppose que  $p$  est distinct de 2, le module  $\mathcal{M}$  admet un réseau qui est un  $\mathcal{A}_{K',x}$ -module libre de rang  $m$  muni d'une connexion ayant zéro comme seul point singulier, qui le prolonge et dont la décomposition formelle coïncide avec la décomposition  $p$ -adique, en particulier son polygone de Newton formel coïncide avec le polygone de Newton  $p$ -adique de  $\mathcal{M}$ . En fait le réseau est défini sur  $K'(x)$  et n'a qu'une singularité à l'origine et une singularité régulière à l'infini.

Pour un module rationnel sur  $K(x)$  à connexion soluble en 1, en général le principe de transfert n'a pas lieu, mais ce que dit la partie 2 du théorème précédent, si le module associé sur l'anneau  $\mathcal{R}_{K,x}$  satisfait aux hypothèses de ce théorème, c'est qu'il existe un module rationnel sur  $K'(x)$  à connexion qui lui est isomorphe comme module différentiel sur l'anneau  $\mathcal{R}_{K',x}$  mais qui satisfait au principe de transfert.

Pour démontrer la conjecture ([CM4], 3.0.12) dans le cas général, une étude plus fine est nécessaire et qui est faite dans l'article [M5].

### 7.3. Décomposition en modules de rang 1 dans le cas général.

Pour décomposer les modules dont le rang est divisible par  $p$  les ramifications sont insuffisantes. Il faut considérer les extensions galoisiennes cycliques d'ordre  $p$  du corps  $k((x))$  des séries formelles à coefficients dans le corps résiduel. En vertu du théorème d'Artin-Schreier une telle extension est définie par un polynôme irréductible de la forme  $z^p - z = g(x)$ . L'anneau  $\mathcal{R}_K(1)$  contient l'anneau  $\mathcal{E}_K^\dagger$  des séries de Laurent dont les coefficients sont uniformément bornés. C'est même un corps à valuation discrète, donnée par la borne inférieure des valuations des coefficients, qui est de plus hensélien et de corps résiduel  $k((x))$ . En vertu du lemme de Hensel toute extension  $k((x)) \rightarrow k((y))$  galoisienne cyclique d'ordre  $p$  se relève en une unique extension galoisienne cyclique d'ordre  $p$  de même groupe de Galois, à isomorphisme unique près,  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K,y}^\dagger$  non ramifiée qui induit

une extension  $\mathcal{R}_{K,x} \rightarrow \mathcal{R}_{K,y}$ . Nous appellerons extension d'Artin-Schreier suivant un usage courant une extension construite de cette façon.

Le théorème 7.2.1 peut être considéré comme l'analogue  $p$ -adique pour les modules de rang premier à  $p$  du théorème de Turrittin donnant la structure des opérateurs différentiels à coefficients dans le corps des séries formelles en caractéristique nulle. De façon remarquable il suffit à montrer la décomposition en module de rang 1 d'un module de rang divisible par  $p$  qui nécessite des extensions d'Artin-Schreier qui transforment un module de rang 1 soluble de pente strictement positive en module soluble de pente nulle. C'est ce phénomène pour les modules solubles de rang 1 qui singularise la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques par rapport à la théorie des équations différentielles sur un corps de caractéristique nulle.

**THÉORÈME 7.3.1.** — *Soit un  $\mathcal{R}_{K,x}$ -module différentiel  $\mathcal{N}$  de rang 1 soluble, alors il existe une extension  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K,y}^\dagger$  composée d'une suite d'extensions d'Artin-Schreier telle que l'image inverse  $f^*\mathcal{N}$  est soluble et de pente nulle.*

L'exemple type est le module défini par  $\exp(\pi x)$  où  $\pi$  est solution de l'équation  $\pi^{p-1} + p = 0$  qui est de pente 1 mais le changement de variables  $1/y^p - 1/y = 1/x$  le transforme en module défini par  $\exp \pi(1/y^p - 1/y)$  qui est de pente nulle parce que la fonction  $\exp \pi(1/y^p - 1/y)$  converge dans une couronne  $C[1 - \epsilon, 1]$ . L'équation précédente définit une extension galoisienne cycle d'ordre  $p$ .

Le cas général est beaucoup plus compliqué. Un module de rang 1 soluble est défini par  $x^\alpha \exp \pi \omega(1/x)$  où  $\omega(1/x)$  est un polynôme [R4]. Un module soluble défini par  $\exp \pi \omega(1/x)$  admet une structure de Frobenius [CC], voir la définition précise dans le chapitre suivant. Sous la condition de l'existence d'une structure de Frobenius R. Crew a envisagé la généralisation précédente à la fin des années 1980 mais cet auteur n'a jamais publié une démonstration convaincante. En fait N. Tsuzuki a généralisé le théorème précédent au cas d'un  $\mathcal{E}_K^\dagger$ -module différentiel muni d'une structure de Frobenius admettant une seule pente de Frobenius [Ts].

**THÉORÈME 7.3.2.** — *Soit  $TU(\mathcal{R}_{K,x})$  une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{K,x})$  dont les objets ont un module des endomorphismes ayant la propriété (NL), qui est stable par sous-quotient, extension, produit tensoriel interne, dualité et image inverse par extension finie du corps de base, ramification d'indice premier à  $p$  et extension d'Artin-Schreier.*

Alors pour tout objet  $\mathcal{M}$  de la catégorie  $TU(\mathcal{R}_{K,x})$  il existe une extension  $f : \mathcal{R}_{K,x} \rightarrow \mathcal{R}_{K',y}$  composée d'un nombre fini d'extensions finies du corps de base, de ramifications d'indice premier à  $p$  et d'extensions d'Artin-Schreier telle que les constituants irréductibles de l'image inverse sont de rang 1.

Le processus de décomposition dans le théorème précédent fournit des extensions minimales qui peuvent être rendues explicites dans des exemples de bas rang. Le lecteur trouvera dans l'article [M4] l'étude de l'exemple  $M_{x,1,3}$  qui fournit un contre-exemple au principe de transfert et qui illustre les théorèmes 7.2.1 et 7.3.2.

## 8. Exposants de la monodromie $p$ -adique et structures de Frobenius.

La seule situation, pour l'essentiel, où l'on sait montrer qu'un opérateur est soluble et admet la propriété (NL) est celle de l'existence d'une structure de Frobenius. C'est le cas des équations provenant de la géométrie.

### 8.1. Structures de Frobenius.

Les résultats de ce paragraphe sont montrés dans [CM2], [CM3], [CM4].

Soient un entier  $h \geq 1$ ,  $q := p^h$  et  $\varphi_h(x)$  une fonction de  $\mathcal{R}_K(1)$  telle que la limite  $\lim_{\rho \rightarrow 1} |\varphi_h(x) - x^q|_\rho < 1$ . On suppose qu'il existe un morphisme de Frobenius  $\sigma$  du corps  $K$ , c'est-à-dire un morphisme tel que  $|\sigma(a) - a^p| < 1$ . On construit un morphisme de Frobenius d'anneaux en posant :

$$\begin{aligned} \phi_h : \mathcal{R}_K(1) &\rightarrow \mathcal{R}_K(1) \\ \phi_h\left(\sum_i a_i x^i\right) &:= \sum_i \sigma^h(a_i) (\varphi_h(x))^i. \end{aligned}$$

PROPOSITION 8.1.1. — *Supposons le corps de base  $K$  maximale-ment complet. Alors le foncteur image inverse  $\phi_h^*$  induit une équivalence de catégories de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$  dans elle-même. De plus, pour*

deux morphismes de Frobenius  $\phi_{1h}, \phi_{2h}$  d'ordre  $h$ , les modules  $\phi_{1h}^* \mathcal{M}$  et  $\phi_{2h}^* \mathcal{M}$  sont isomorphes pour tout module soluble  $\mathcal{M}$ .

On ne restreint donc pas la généralité en prenant  $\varphi_h(x) := x^{p^h}$ .

DÉFINITION 8.1.2. — *On dit qu'un module  $\mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_K(1))$  est muni d'une structure de Frobenius s'il est isomorphe à son image inverse pour un morphisme de Frobenius  $\phi_h$  d'ordre  $h$ , pour  $h$  non précisé.*

Un module  $\mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_K(1))$  muni d'une structure de Frobenius est soluble ([CM3], 6.3.12). En vertu de ce qui précède l'existence d'une structure de Frobenius pour un module ne dépend pas du morphisme de Frobenius  $\phi$  choisi. On note  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbf{F})$  la sous-catégorie pleine de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$  des modules ayant une structure de Frobenius.

PROPOSITION 8.1.3. — *Supposons le corps de base maximale complet. Alors la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbf{F})$  est stable par les foncteurs  $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{>\gamma}$  et donc par les foncteurs  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Gr}^\gamma(\mathcal{M})$  pour tout réel  $\gamma \geq 0$ .*

En fait une structure de Frobenius sur un module  $\mathcal{M}$  induit canoniquement une structure de Frobenius sur les modules  $\mathcal{M}_{>\gamma}$ . On a la proposition suivante ([CM2], 5.5.3) :

PROPOSITION 8.1.4. — *Les exposants d'un module purement de pente nulle d'ordre  $m$  muni d'une structure de Frobenius d'ordre  $h$  sont des éléments de  $\frac{1}{q^m-1}\mathbb{Z}$ .*

En particulier les conditions du théorème de l'indice 6.1.3 sont satisfaites et on peut donc l'appliquer.

COROLLAIRE 8.1.5. — *Si le corps de base  $k$  est un corps fini la fonction  $L$   $p$ -adique  $L(\mathcal{M}^\dagger, t)$  d'un fibré  $p$ -adique  $\mathcal{M}^\dagger$  muni d'une structure de Frobenius globale sur une courbe non singulière est une fraction rationnelle.*

La fonction  $L$  est définie comme d'habitude comme produit eulérien des facteurs locaux de l'endomorphisme de Frobenius aux points fermés. En effet les exposants locaux sont rationnels et le théorème 6.2.6 montre que la cohomologie de de Rham  $p$ -adique de  $\mathcal{M}^\dagger$  est de dimension finie. La formule des traces, élémentaire dans ce cas, montre que la fonction  $L(\mathcal{M}^\dagger, t)$  est une fraction rationnelle de  $K(t)$ .

*Exemple 8.1.6.* — Soit  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  un polynôme à coefficients dans l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$  du corps  $\mathbb{C}_p$  et  $m$  un entier positif. On définit le module exponentiel  $M_{f,n,m}$  comme le quotient de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[x_1, \dots, x_n, \Gamma, \Gamma^{-1}]$  par les images des opérateurs différentiels

$$\partial_{x_i} + \pi(\partial_{x_i}(f) + m\Gamma x_i^{m-1})$$

pour  $i = 1, \dots, n$ . Si  $m$  est strictement plus grand que le degré total de  $f$  le module  $M_{f,n,m}$  est libre de rang  $(m-1)^n$  sur l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[\Gamma, \Gamma^{-1}, m^{-1}]$  et est muni d'une connexion. L'infini est une singularité régulière et zéro est une singularité irrégulière. Si de plus  $\text{Teich}(\bar{f})$  est le relèvement de Teichmüller d'un polynôme  $\bar{f}$  à coefficients dans le corps résiduel le module différentiel  $M_{\text{Teich}(\bar{f}),n,m}$  est défini sur une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$ .

On a le théorème ([M2], 4.1.1) :

**THÉORÈME 8.1.7.** — *Sous les hypothèses précédentes et si on suppose que  $m$  est premier avec  $p$ , alors le module différentiel  $M_{\text{Teich}(\bar{f}),n,m}$  est muni d'une structure de Frobenius sur l'algèbre  $(K[\Gamma, \Gamma^{-1}])^\dagger$ .*

Le théorème précédent nécessite un théorème de comparaison pour les opérateurs d'ordre infini.

Comme conséquence de tout ce qui précède les équations exponentielles  $M_{\text{Teich}(\bar{f}),n,m}$  admettent un indice dans l'espace des fonctions analytiques dans le disque unité. C'est sous cette forme que le théorème de l'indice 6.2.2 intervient dans la démonstration du théorème 2.2.9 de finitude des nombres de Betti  $p$ -adiques des variétés affines non singulières sur un corps fini [M2]. D'autre part les fonctions  $L$  des fibrés  $p$ -adique associés aux modules  $M_{\text{Teich}(\bar{f}),n,m}$  sur la droite affine épointée sont toutes rationnelles.

La méthode de l'article [M2] montre que la cohomologie de de Rham d'un fibré muni d'une structure de Frobenius sur un espace affine est encore de dimension finie. Mais elle ne s'applique pas directement au cas d'un fibré muni d'une structure de Frobenius sur une variété affine non singulière. Mais une autre méthode que nous n'avons pas encore rédigée permet de traiter cette dernière situation.

Une structure de Frobenius sur un module n'induit pas canoniquement une structure de Frobenius sur un sous-quotient. Cependant un sous-quotient d'un module muni d'une structure de Frobenius est potentiellement muni d'une structure de Frobenius, mais ceci est une conséquence du théorème de l'indice et n'a rien de formel. On suppose que la structure

de Frobenius sur le corps  $K$  se prolonge à toute extension finie. On note  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), p\mathbf{F})$  la catégorie des modules différentiels munis d'une structure de Frobenius après éventuelle extension finie du corps de base non précisée.

**THÉORÈME 8.1.8.** — *La sous-catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), p\mathbf{F})$  de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$  est stable par sous-quotients et extensions.*

En particulier la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), p\mathbf{F})$  est abélienne et a les propriétés d'une catégorie  $TU(\mathcal{R}_{K,x})$  du théorème 7.3.2. D'où :

**THÉORÈME 8.1.9.** — *Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_K(1)$ -module différentiel muni d'une structure de Frobenius, alors il existe une extension  $f$  composée d'un nombre fini d'extensions du corps de base, de ramifications d'indice premier à  $p$  et d'extensions du type Artin-Schreier telle que les constituants irréductibles de l'image inverse  $f^*\mathcal{M}$  soient isomorphes au module trivial  $\mathcal{R}_K(1)$ .*

Le théorème 7.3.1 fait passer du théorème 7.3.2 au théorème précédent. Autrement dit un module muni d'une structure de Frobenius devient unipotent après extension du type précédent. C'est sous cette forme que le théorème 7.3.2 de décomposition en modules de rang 1 entraîne le théorème de la monodromie  $p$ -adique 3.3.3 pour les représentations galoisiennes  $p$ -adiques [M3].

## **8.2. Caractérisation de l'existence d'une structure de Frobenius à l'aide de la rationalité des exposants $p$ -adiques.**

On a vu que l'existence d'une structure de Frobenius sur un module différentiel ne dépend pas du morphisme de Frobenius sur l'anneau  $\mathcal{R}_K(1)$ . Cela pose le problème de savoir si des conditions portant uniquement sur la connexion entraînent l'existence d'une structure de Frobenius. Le théorème suivant conjecturé dans l'article [CM4] apporte une réponse satisfaisante à cette question.

Notons  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbb{Q})$  la sous-catégorie pleine de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1))$  des modules  $\mathcal{M}$  solubles ayant les propriétés suivantes :

- 1) les exposants de  $\mathcal{M}$  sont des nombres rationnels de  $\mathbb{Q}$ ,
- 2) les exposants du module des endomorphismes  $\text{End}_{\mathcal{R}_K(1)}(\mathcal{M})$  sont des nombres rationnels de  $\mathbb{Q}$ ,

3) les résidus déterminantiels des constituants absolument irréductibles de  $\mathcal{M}$  définis après extension finie du corps de base sont des nombres rationnels de  $\mathbb{Q}$ .

La catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbb{Q})$  est définie uniquement à partir de la connexion et la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathfrak{p}\mathbf{F})$  est une sous-catégorie pleine de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbb{Q})$ .

Le théorème suivant, conjecturé dans l'article [CM4], avait pour point de départ le théorème de prolongement 6.2.5 où intervient la condition sur le module des endomorphismes :

THÉORÈME 8.2.1. — *L'inclusion*

$$\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathfrak{p}\mathbf{F}) \subset \text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbb{Q})$$

*est une égalité.*

La condition 2) portant sur le module des endomorphismes est la plus importante. On a d'abord pensé que cette condition est automatique pour les modules absolument irréductibles de pente strictement positive, c'est parfois le cas comme par exemple le cas d'un module de rang premier  $m$  distinct de  $p$ . Mais on peut construire des exemples de modules absolument irréductibles dont le module des endomorphismes n'a pas la propriété (NL). C'est là la difficulté principale de la théorie  $p$ -adique des équations différentielles.

L'existence d'une structure de Frobenius sur un module de rang 1 est démontrée dans [CC]. Le cas d'un module absolument irréductible de rang premier à  $p$  sous la condition précédente portant sur la propriété (NL) pour le module des endomorphismes est démontré dans [M4]. En fait dans le cas d'un module absolument irréductible de rang premier à  $p$  et de résidu déterminantiel rationnel, la condition (NLE) est *équivalente* à l'existence d'une structure de Frobenius sur le module. Le cas général est beaucoup plus délicat et nécessite une étude fine du comportement par  $p$ -extensions séparables faite dans [M5] et qui dépasse largement le cadre de cet exposé.

COROLLAIRE 8.2.2. — *La catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbb{Q})$  est stable par produit tensoriel.*

En effet la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathfrak{p}\mathbf{F})$  est stable par produit tensoriel de façon évidente alors que la stabilité par produit tensoriel de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_K(1), \mathbb{Q})$  n'a rien d'évident directement parce qu'on ne contrôle pas en général les exposants par produit tensoriel!

La théorie des équations différentielles  $p$ -adiques a bien d'autres applications qui n'ont pas encore été rédigées pour diverses raisons. Par exemple le principe de la démonstration de la pureté des zéros et des pôles des fonctions  $L$  des équations exponentielles  $M_{\text{Teich}(\bar{f}),n,m}$  nous est connu depuis longtemps [M2]. Nous proposons de rédiger cette démonstration dans un prochain article qui entraîne la pureté des zéros des polynômes  $P_{p,i}(X)$  de l'endomorphisme  $\Psi$  opérant sur la cohomologie de de Rham  $p$ -adique d'une variété affine non singulière sur un corps fini. Par contre l'extension à plusieurs variables de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques reste encore inaccessible pour nous.

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] A. ARABIA, Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes, *Com. Math. Helv.*, 76 (2001), 607–639.
- [B] L. BERGER, Représentations  $p$ -adiques et équations différentielles + Représentations de de Rham et monodromie  $p$ -adique, Thèse de l'Université de Paris 6 2001, + preprint mai 2001, 11 pages.
- [ChCo] F. CHERBONNIER, P. COLMEZ, Représentations  $p$ -adiques surconvergentes, *Inventiones Math.*, 133 (1998), 581–611.
- [CC] B. CHIARELLOTTO, G. CHRISTOL, Overconvergent isocrystals and F-isocrystals, *Comp. Math.*, 100 (1996), 77–99.
- [CD] G. CHRISTOL, B. DWORK, Modules différentiels sur des couronnes, *Ann. Inst. Fourier*, 44-3 (1994), 663–701.
- [CM1] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques I, *Ann. Inst. Fourier*, 43-5 (1993), 1545–1574.
- [CM2] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques II, *Annals of Math.*, 146 (1997), 345–410.
- [CM3] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques III, *Annals of Math.*, 151 (2000), 385–457.
- [CM4] G. CHRISTOL, Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques IV, *Inventiones Math.*, 143 (2001), 629–672.
- [Cl] D. CLARK, A note on  $p$ -adic convergence of solution of differential equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 17 (1966), 262–265.
- [D] B. DWORK, On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, *Amer. J. Math.*, 82 (1960), 631–648.
- [F1] J.-M. FONTAINE, Sur certaines types de représentations  $p$ -adiques du groupe de Galois d'un corps local, Construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Annals of Math.*, 115 (1982), 529–577.
- [F2] J.-M. FONTAINE, Représentations  $p$ -adiques des corps locaux, *Grothendieck Festschrift II*, *Progress in Math.*, 87 (1991), 249–309.
- [F3] J.-M. FONTAINE, Représentations  $p$ -adiques semi-stables, *Astérisque*, 223 (1994), 113–187.

- [G1] A. GROTHENDIECK, On the De Rham Cohomology of Algebraic varieties, Publ. Math. IHES, 29 (1966), 93–103.
- [SGA7I] A. GROTHENDIECK, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967-68, Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique, Lecture Notes in Math. 288 (1972).
- [G2] A. GROTHENDIECK, Groupes de Barsotti-Tate et cristaux, Actes du Congrès Intern. Math. Nice 1970, Gauthier-Villar, Tome I, Paris 1971, 431–436.
- [GS] A. GROTHENDIECK, J. P. SERRE, Correspondance Grothendieck-Serre, Documents Mathématiques, Société Mathématique de France (2001).
- [K] N. KATZ, Nilpotent connexions and the Monodromy theorem: Application of a result of Turrittin, Publ. IHES, 39 (1971), 175–232.
- [M1] Z. MEBKHOUT, Le Théorème de comparaison entre cohomologies de de Rham d'une variété algébrique complexe et le Théorème d'existence de Riemann, Publ. IHES, 69 (1989), 47–89.
- [M2] Z. MEBKHOUT, Sur le théorème de finitude de la cohomologie  $p$ -adique d'une variété affine non singulière, Amer. J. Math., 119 (1997), 1027–1081.
- [M3] Z. MEBKHOUT,  $dR \implies pst$ , Lettre à J.-M. Fontaine datée du 28 mai 2001.
- [M4] Z. MEBKHOUT, Analogie  $p$ -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie  $p$ -adique, Inventiones Math., 148 (2002), 319–351.
- [M5] Z. MEBKHOUT, Exposants de la monodromie  $p$ -adique et structures de Frobenius, à paraître.
- [Mr] D. MEREDITH, Weak Formal Schemes, Nagoya Math. J., 45 (1972), 1–38.
- [MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER, Formal cohomology I, Annals of Math., 88 (1968), 181–217.
- [Mo] P. MONSKY, Formal cohomology III, Annals of Math., 93 (1971), 315–343.
- [R1] Ph. ROBBA, On the index of differential operators I, Annals of Math., 101 (1975), 280–316.
- [R4] Ph. ROBBA, Indice d'un opérateur différentiel  $p$ -adique IV. Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque, Ann. Inst. Fourier, 35-2 (1985), 13–55.
- [ST] J.-P. SERRE, J. TATE, Good reduction of abelian varieties, Annals of Math., 88 (1968), 492–517.
- [T] T. TSUJI,  $p$ -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, Inventiones Math., 137 (1999), 233–411.
- [Ts] N. TSUZUKI, Finite local monodromy of overconvergent unit-root  $F$ -isocrystals on a curve, Amer. J. Math., 120 (1998), 1165–1190.

Zoghman MEBKHOUT,  
Université de Paris 7  
UFR de Mathématiques  
175 rue de Chevaleret  
75013 Paris (France).  
mebkhout@math.jussieu.fr