PAUL-ANDRÉ MEYER

Théorie ergodique et potentiels. Identification de la limite

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 1 (1965), p. 97-102
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_1_97_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 1 (1965), 97-102.

THÉORIE ERGODIQUE ET POTENTIELS. IDENTIFICATION DE LA LIMITE (1)

par Paul André MEYER

Nous conserverons les notations précédentes (voir exposé précédent). En outre, nous désignerons par Φ un élément de L^1_+ tel que $E = \{\Phi > 0\}$, et nous poserons $\Phi . I_A = \Phi_A$ pour toute partie mesurable A de E.

Nous avons vu que le lemme ergodique maximal de Brunel permet d'établir sans difficulté le théorème ergodique de Chacón et Ornstein. Nous allons l'utiliser maintenant pour calculer la limite du rapport $\frac{T_{o,n}g}{T_{o,n}h}$ lorsque $n \to \infty$. Nous verrons ici encore que l'emploi de ce lemme, et d'un peu de théorie du potentiel, permet de mieux comprendre la théorie ergodique et de l'alléger considérablement.

Les résultats qui suivent sont dus à Chacón.

1. Ensembles invariants.

Nous poserons :

$$\{G_T\Phi < \infty\} = D$$

$$\{G_T\Phi = \infty\} = C.$$

Ces deux ensembles sont appelés respectivement *la partie dissipative* et *la partie conservative* de E (relativement à T).

THÉORÈME 2.— *Soit f un élément de L^1_+ ; on a*

$$G_T f < \infty \text{ p.p. sur } D$$

$$G_T f = 0 \text{ ou } \infty \text{ p.p. sur } C.$$

Démonstration. — Le rapport $\frac{T_{o,n}f}{T_{o,n}\Phi}$ a p.p. une limite finie; il en résulte que $G_T f$ est fini p.p. sur $D = \{G_T\Phi < \infty\}$. D'autre part, le

(1) Cet article fait suite au précédent.

rapport $\dfrac{T_{o,n}\Phi}{T_{o,n}f}$ a p.s. une limite finie sur l'ensemble $\{G_T f > 0\}$; $G_T\Phi$ est donc p.s. fini sur l'ensemble $\{G_T f \neq 0, \infty\}$, qui ne peut donc rencontrer C.

Ce théorème montre aussi que les ensembles C et D sont indépendants du choix de Φ (à des ensembles de mesure nulle près).

Nous avons $T(+\infty \,.\, I_C) \leqslant T(G_T\Phi) \leqslant G_T\Phi$, et par conséquent $T(I_C) = 0$ sur $\{G_T\Phi < \infty\} = D$. En transposant, on voit que $S(I_D) = 0$ sur C. Il en résulte que la restriction à C de la fonction Sf ne dépend que de la restriction de f à C : nous pouvons donc envisager la restriction à C du pseudo-noyau S, que nous désignerons par S′ pour éviter des confusions.

THÉORÈME 3. — *Soit h une fonction mesurable définie sur* C *et* S′*-excessive : on a alors* $S'h = h$.

Démonstration. — Il nous suffit de l'établir pour une fonction S′-excessive *bornée h*; d'après le théorème de décomposition de Riesz, il suffit de montrer que tout S′-potentiel borné $G_{S'}g$ est p.p. nul. Or soit g' la fonction définie sur E, égale à g sur C et à 0 sur D. Nous avons :

$$\int_C \Phi_C \,.\, G_{S'}g \, d\mu = \int \Phi_C \,.\, G_S g' \, d\mu = \int G_T(\Phi_C) \,.\, g' \, d\mu.$$

Le potentiel $G_{S'}g$ étant borné, le premier membre est fini. D'autre part, on a $G_T(\Phi_C) \geqslant \Phi_C > 0$ sur C, donc $G_T(\Phi_C) = \infty$ sur C : le dernier membre vaut donc $+\infty$ si l'on n'a pas $g' = 0$ p.p. D'où le résultat.

On a en particulier $S'I_C = I_C$.

Considérons alors l'espace vectoriel $\mathscr{H}$ des fonctions mesurables bornées h définies sur C telles que $S'h = h$: cet espace contient les constantes ; on vérifie immédiatement d'après ce qui précède qu'il coïncide avec l'ensemble des fonctions mesurables bornées h telles que $S'h \leqslant h$ — il est donc stable pour l'opération $\wedge$; enfin, la limite d'une suite monotone bornée d'éléments de $\mathscr{H}$ appartient encore à $\mathscr{H}$. Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des parties mesurables de C dont l'indicatrice appartient à $\mathscr{H}$; un théorème classique affirme que $\mathscr{I}$ est une tribu sur C, et que $\mathscr{H}$ est égal à l'ensemble de toutes les fonctions $\mathscr{I}$-mesurables bornées sur C.

Les éléments de $\mathscr{I}$ sont appelés *ensembles invariants*. Nous avons vu que:

$$A \in \mathscr{I} \Leftrightarrow (A \in C \quad \text{et} \quad S(I_A) = I_A \quad \text{sur} \quad C) \Leftrightarrow (A \subset C \quad \text{et} \quad S(I_A) \leqslant I_A \quad \text{sur} \quad C.)$$

Nous signalerons aussi les caractérisations suivantes, dont nous n'aurons pas besoin:

$$A \in \mathscr{I} \Leftrightarrow A \subset C \quad \text{et} \quad (f = 0 \quad \text{sur}\, E \setminus A \Rightarrow Tf = 0 \quad \text{sur} \quad E \setminus A)$$

$$A \in \mathscr{I} \Leftrightarrow \text{il existe } g \in L^1_+ \text{ telle que } A = \{G_T g = +\infty\}.$$

Soit A une partie mesurable de C. Il existe une plus petite partie invariante de C qui contient A (aux ensembles de mesure nulle près): nous la désignerons par $\bar{A}$. Toute fonction S′-excessive qui majore 1 p.p. sur A, étant $\mathscr{I}$-mesurable, majore 1 sur $\bar{A}$. Il en résulte que le potentiel d'équilibre de A, relativement à S′, est égal à la fonction excessive $I_{\bar{A}}$.

Appliquons alors le procédé récurrent de la première partie pour calculer le potentiel d'équilibre e_A de A relativement à S. Il apparaît clairement sur ce procédé que la restriction de e_A à C est égale au potentiel d'équilibre de A par rapport à S′. Autrement dit:

$$I_C \cdot e_A = I_{\bar{A}}$$

2. Identification de la limite (fonctions nulles sur D).

Soient g et h deux éléments de L^1_+; nous nous proposons de calculer la limite du rapport $D_n(g, h) = \dfrac{T_{o,n}g}{T_{o,n}h}$ (pour simplifier les notations, nous conviendrons de donner la valeur 0 aux rapports de la forme 0/0). Il nous suffira évidemment d'en rechercher la valeur aux points de C, car cette limite est évidemment égale à $\dfrac{G_T g}{G_T h}$ sur D

Nous savons que le rapport $D_n(\Phi_C, h)$ a une limite finie sur l'ensemble $\{G_T h > 0\}$; $D_n(h, \Phi_C)$ a donc une limite non nulle sur cet ensemble, et nous pouvons écrire, aux points de $C \cap \{G_T h > 0\}$:

$$\lim D_n(g, h) = \frac{\lim D_n(g, \Phi_C)}{\lim D_n(h, \Phi_C)}$$

Autrement dit, il nous suffit d'étudier le cas où la fonction h est strictement positive p.p. sur C, nulle hors de C (Φ_C satisfait à cette hypothèse). Nous allons commencer par traiter le cas où g est elle aussi nulle hors de C. Nous désignerons par $E[\ |\mathscr{I}]$ l'opérateur d'espérance conditionnelle, sur C, relativement à la tribu des ensembles invariants.

THÉORÈME 4. — *Supposons que* g *soit nulle hors de* C, *et que l'on ait* $\{h > 0\} = C$. *On a alors* :

$$\lim D_n(g, h) = \frac{E[g|\mathscr{I}]}{E[h|\mathscr{I}]} \text{ p.p.} \quad \text{sur} \quad C.$$

Démonstration. — Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a < b < \infty$; nous allons montrer que l'on a p.p. $a \leqslant \dfrac{E[g|\mathscr{I}]}{E[h|\mathscr{I}]} \leqslant b$ sur l'ensemble $A = \{a \leqslant \lim D_n(g, h) \leqslant b\}$, et cela entraînera le théorème, car on en déduit que toute fonction étagée mesurable qui approche $\lim D_n(g, h)$ à ε près approche aussi $\dfrac{E[g|\mathscr{I}]}{E[h|\mathscr{I}]}$ p.p. à ε près.

Le rapport des espérances conditionnelles étant $\mathscr{I}$-mesurable, nous sommes ramenés à montrer que ce rapport est compris entre a et b sur $\bar{A}$, ou encore que l'on a, pour tout ensemble invariant $B \subset \bar{A}$:

$$\int_B (E[g|\mathscr{I}] - aE[h|\mathscr{I}])\, d\mu \geqslant 0, \qquad \int_B (bE[h|\mathscr{I}] - E[g|\mathscr{I}])\, d\mu \geqslant 0$$

ou encore (d'après la définition des espérances conditionnelles):

$$\int_B (g - ah)\, d\mu \geqslant 0, \qquad \int_B (bh - g)\, d\mu \geqslant 0.$$

Remarquons alors que tout ensemble invariant $K \subset \bar{A}$ rencontre A — car sinon $\bar{A} \setminus K$ serait un ensemble invariant contenant A et plus petit que $\bar{A}$. Il en résulte que $B = \overline{B \cap A}$ — car sinon $B \setminus \overline{B \cap A}$ serait un ensemble invariant contenu dans $\bar{A}$ et disjoint de A. Autrement dit, on a $I_B = I_C \cdot e_{A \cap B}$. Les fonctions g et h étant nulles hors de C, les deux intégrales précédentes valent donc respectivement :

$$\int e_{A\cap B}(g - ah)\, d\mu \qquad \text{et} \qquad \int e_{A\cap B}(bh - g)\, d\mu$$

et ces quantités sont bien positives d'après le lemme de Brunel.

3. Identification de la limite (cas général).

Pour tout ensemble mesurable A, nous désignerons par J_A le pseudo-noyau de multiplication par I_A $(J_A f = f \, . \, I_A)$.

Comme nous l'avons dit dans la première partie, le passage d'une fonction S-excessive f à sa réduite sur A se ramène à la formation de $H_A f$, où H_A est un certain pseudo-noyau sous-markovien, donné par :

$$H_A = J_A + J_{A'} G_S^{A'} S J_A$$

où A′ désigne le complémentaire de A, et $G_S^{A'}$ le potentiel du pseudo-noyau $TJ_{A'}$. On trouvera ce résultat établi dans l'article de Deny cité dans la première partie.

Nous désignerons par B_A (pseudo-noyau de balayage sur A, relatif à T) le pseudo-noyau adjoint de H_A, qui diminue la norme dans l'espace L^1. Il est facile de vérifier, par transposition, que l'on a :

$$B_A = J_A G_T^{A'}$$

où $G_T^{A'}$ désigne le potentiel de $TJ_{A'}$, en particulier, $B_C = J_C G_T^D$.

Soit g un élément de L^1_+, et soit f la fonction $B_C g$: f est nulle hors de C, ainsi que toutes les fonctions $T^k f$ (on a vu en effet, après le théorème 2, que $T(I_C) = 0$ sur D). Soit A une partie de C : nous allons montrer que $Se_A = e_A$. Cette relation est vérifiée sur $E \setminus A$ d'après les propriétés des réduites. D'autre part, la relation $Se_A \leqslant e_A$ sur C entraîne $Se_A = e_A$ sur C, donc sur A. On a évidemment $H_C e_A = e_A$ (une fonction excessive qui majore e_A sur C la majore sur A, donc partout). On a par conséquent :

$$\int e_A \, . \, T^k B_C g \, d\mu = \int S^k e_A \, . \, B_C g \, d\mu = \int e_A \, . \, B_C g \, d\mu = \int H_C e_A \cdot g \, d\mu$$
$$= \int e_A \cdot g \, d\mu = \int S^k e_A \cdot g \, d\mu = \int e_A \, . \, T^k g \, d\mu$$

Le théorème suivant permet de ramener le problème de l'identification de la limite à celui qui a été traité plus haut, car la fonction $f = B_C g$ est nulle hors de C.

THÉORÈME 5. — *Soit g un élément de L^1_+, et soit $f = B_C g$. Le rapport $D_n(f, g)$ tend vers 1 p.p. sur chacun des ensembles* $C \cap \{G_T g > 0\}$ et $\{G_T f > 0\}$.

Démonstration. — Montrons par exemple que l'ensemble:

$$A = \{T^k f > 0\} \cap \{\lim D_n(f, g) > a\}$$

est négligeable, quels que soient l'entier k et le nombre $a > 1$. Cet ensemble étant contenu dans C, nous pouvons remplacer $D_n(f, g)$ par $D_n(T^k f, T^k g)$ et nous avons d'après le lemme de Brunel:

$$\int e_A (T^k f - a T^k g)\, d\mu \geqslant 0$$

en utilisant la relation établie avant l'énoncé, nous en déduisons: $(1 - a)\int e_A . T^k f\, d\mu \geqslant 0$, d'où $\int e_A . T^k f\, d\mu = 0$ et finalement $e_A = 0$; le théorème en résulte immédiatement.

Récapitulation: Soient g et h deux éléments de L^1_+. Le rapport

$\dfrac{T_{o,n} g}{T_{o,n} h}$ converge p.p.

vers $\dfrac{G_T g}{G_T h}$ aux points de $D \cap \{G_T h > 0\}$

vers $\dfrac{E[B_C g | \mathscr{I}]}{E[B_C h | \mathscr{I}]}$ aux points de $C \cap \{G_T h > 0\}$.

Paul André MEYER,
Département de Mathématiques,
Palais de l'Université,
Strasbourg (Bas Rhin).