



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Thierry BARBOT

Feuilletages transversalement projectifs sur les variétés de Seifert

Tome 53, n° 5 (2003), p. 1551-1613.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_5_1551_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT PROJECTIFS SUR LES VARIÉTÉS DE SEIFERT

par Thierry BARBOT

1. Introduction.

Nous nous intéressons aux feuilletages de dimension 1 sur les variétés fermées de dimension 3, munis d'une $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{RP}^2)$ -structure transverse. Rappelons que ceci signifie qu'on peut munir toutes les sections locales du feuilletage considéré d'une structure projective réelle, de sorte que l'application d'holonomie le long du feuilletage entre deux telles sections s'exprime dans les coordonnées projectives des sections comme étant la restriction d'une transformation projective. Dans ce sujet, les feuilletages-vedettes sont manifestement :

- les suspensions de transformations projectives d'une surface projective réelle ;
- les fibrations projectives : ce sont les feuilletages dont les feuilles sont les fibres d'une fibration de Seifert au-dessus d'une orbifold munie d'une structure projective réelle ;
- les feuilletages sous-tendus par les flots géodésiques des surfaces riemanniennes à courbure négative constante ;
- les feuilletages horocycliques associés aux feuilletages géodésiques ci-dessus.

Remarquons que tous ces exemples (à part les suspensions) vivent sur des variétés de Seifert dont les groupes fondamentaux, dans les deux derniers cas, ne sont pas résolubles. La structure projective transverse pour

les deux derniers exemples n'est sans doute pas évidente. Nous en rappelons la construction à la section 2 ; nous y montrons même que ce sont des cas particuliers au sein de deux familles remarquables, que nous appelons ici *feuilletages géodésiques convexes*, et *feuilletages horocycliques projectifs*.

Le cas des suspensions est aujourd'hui bien compris, les structures projectives réelles sur les surfaces fermées étant classifiées (cf. [16]). Par contre, nous sommes encore loin de prétendre à une complète compréhension de tous les feuilletages transversalement projectifs en dimension 3. Gardons cependant notre optimisme en observant que l'analogie de ce programme a été atteint dans les cas des feuilletages transversalement riemanniens [14], des feuilletages transversalement holomorphes [10], [24], ou encore des feuilletages munis d'une $(\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \mathbb{R}^2)$ -structure [30].

Dans [30], S. Matsumoto classe également les feuilletages de dimension 1 munis d'une structure transverse affine unimodulaire satisfaisant la *propriété de relèvement des chemins* (« homotopy lifting property » de [30]). Cette hypothèse signifie que l'espace des feuilles du relevé du feuilletage dans le revêtement universel de la variété ambiante est séparé au sens de Hausdorff. Elle n'est pas satisfaite par tous les feuilletages transversalement projectifs (considérer par exemple le feuilletage induit par la famille des droites verticales de \mathbb{R}^3 dans la variété de Hopf quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par une homothétie). Elle est cependant vérifiée par tous les exemples évoqués ci-dessus. Le but de cet article est de montrer le fait inverse lorsqu'on se restreint aux variétés de Seifert :

THÉORÈME PRINCIPAL. — *Soit M une variété de Seifert dont l'orbifold sous-jacente est de caractéristique d'Euler négative. Soit Φ un feuilletage sur M , muni d'une $(\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}), \mathbb{RP}^2)$ -structure transverse, et satisfaisant la propriété de relèvement des chemins. Alors, à revêtements finis près, Φ est conjugué à une fibration projective, à un feuilletage géodésique convexe, ou à un feuilletage horocyclique projectif, la conjugaison respectant les structures projectives transverses.*

Supposer que la caractéristique d'Euler de l'orbifold sous-jacente est strictement négative n'est pas dramatique. Ceci revient à supposer que le groupe fondamental de la variété ambiante n'est pas (virtuellement) résoluble. Les techniques permettant de comprendre les flots transversalement projectifs satisfaisant la propriété de relèvement des chemins dans le cas où le groupe fondamental est résoluble sont aujourd'hui devenues folkloriques (voir par exemple [6], [18], [2]), même si ce programme n'a pas aujourd'hui

été mené à son terme. Dans cet article, nous introduisons des méthodes nouvelles.

Notons aussi que la conclusion du théorème principal peut aussi s'énoncer de la manière suivante : tout feuilletage vérifiant les hypothèses du théorème est soit une fibration projective, soit le feuilletage radial d'une structure affine radiale sur la variété ambiante M (cf. [2]), soit un feuilletage tautologique d'une structure de variété drapeau sur M (cf. [3], ou la section 2.2 à suivre). C'est sous cette forme qu'il est susceptible d'être généralisé à tous les feuilletages transversalement projectifs sur les variétés fermées de dimension 3, y compris peut-être ceux qui ne satisfont pas la propriété de relèvement des chemins. Pour que cet énoncé soit correct, il faut cependant adjoindre une autre famille importante de feuilletages transversalement affines, les *feuilletages de Hopf*. Nous entendons par là tout feuilletage finiment revêtu par le résultat du quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par une transformation affine contractante A , le feuilletage en question étant le passage au quotient du feuilletage par droites parallèles à une direction propre de A . Observons que les feuilletages provenant de structures affines radiales ou de structures drapeaux sur la variété ambiante, ou qui sont des feuilletages de Hopf forment un ouvert de l'espace des feuilletages transversalement projectifs : cette observation provient du théorème de réalisabilité essentiellement unique de toute déformation du morphisme d'holonomie (cf. [26]). Ce fait renforce la vraisemblance de l'énoncé général que nous suggérons. De manière plus précise, si cet énoncé s'avère erroné, ceci signifie l'existence de feuilletages transversalement projectifs radicalement nouveaux dont nous ne soupçonnons pas encore l'existence. Indiquons aussi que d'après la classification des variétés affines radiales [17], les feuilletages radiaux sont précisément les suspensions d'automorphismes projectifs de surfaces fermées.

Nous décrivons maintenant l'organisation de cet article : la section 2 décrit les feuilletages modèles, i.e., les fibrations projectives, les feuilletages géodésiques convexes et les feuilletages horocycliques projectifs. À la section 3, nous introduisons les notations, et établissons quelques résultats techniques qui seront utilisés par la suite. Nous nous donnons d'ores et déjà un feuilletage transversalement projectif (M, Φ) satisfaisant les hypothèses du théorème principal, le reste de l'article visant à montrer qu'il en vérifie les conclusions. Nous appelons Q_Φ l'espace des feuilles du relevé de Φ dans le revêtement universel \widetilde{M} de M . Par hypothèse, Q_Φ est Hausdorff; on en déduit aisément qu'il est homéomorphe à \mathbb{R}^2 . L'action de Γ , groupe fondamental de M , i.e., groupe des automorphismes de

revêtement de \widetilde{M} , passe au quotient en une action du même groupe sur Q_Φ . La structure projective transverse à Φ induit une structure projective Γ -invariante sur Q_Φ . Dans cette même section, nous montrons que Φ est isomorphe à un des feuilletages modèles dès que l'action de Γ sur Q_Φ est projectivement conjuguée à l'action analogue construite à partir d'un des feuilletages modèles (proposition 3.5). L'énoncé du théorème principal étant à revêtements finis près, on peut supposer que Φ est orientable et transversalement orientable, ou encore que M soit une variété de Seifert sans fibre singulière, i.e., un fibré en cercles. On note h un des deux éléments de Γ qui engendrent le centre de Γ , i.e. représentés par un lacet homotope aux fibres du fibré en cercles M .

À la section 4, nous montrons qu'à indice fini près, l'action par holonomie de h sur le plan projectif est triviale (corollaire 4.3). Ce résultat est analogue au résultat principal de [20] dans notre contexte, mais la preuve est de nature entièrement différente. Elle utilise notamment la notion de feuilletages en cylindres (cf. [28]).

À partir de la section 5, nous supposons que Φ n'est pas une fibration projective. Nous y montrons que le noyau du morphisme d'holonomie est engendré par h (proposition 5.1). On y montre également que le quotient de l'action de ce noyau sur Q_Φ est un anneau, que nous notons A_Φ . L'action de Γ passe donc au quotient en une action d'un groupe de surface $\bar{\Gamma}$ sur A_Φ . L'idée de considérer un tel anneau quotient, dans un autre contexte, apparaît déjà dans [20] et dans [13]. Ces deux articles ont fortement influencés le présent travail.

À la section 6, nous montrons que le groupe d'holonomie contient un élément loxodromique, i.e., un élément de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}) \approx \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ dont les trois valeurs propres sont réelles et de valeurs absolues deux à deux différentes. Cette preuve est essentiellement fondée sur un théorème de Y. Benoist selon lequel il suffit de montrer que l'adhérence Zariski du groupe d'holonomie contient un tel élément loxodromique. Nous notons γ_0 un élément de Γ d'holonomie loxodromique.

L'étape suivante consiste à comprendre la dynamique sur l'anneau A_Φ de l'élément loxodromique γ_0 . C'est l'objet de la section 7. Une manière simple de construire une grande variété d'anneaux projectifs munis d'une transformation projective d'holonomie $\rho(\gamma_0)$ est la suivante : l'action sur le plan projectif de $\rho(\gamma_0)$ admet trois points fixes, un de type attractif, un autre de type répulsif, le dernier étant de type selle. Les droites projectives passant par deux de ces points fixes sont elles aussi globalement

$\rho(\gamma_0)$ -invariantes; elles sont au nombre de trois. Elles découpent le plan projectif en quatre triangles $\rho(\gamma_0)$ -invariants (on suppose ici que les valeurs propres de $\rho(\gamma_0)$ ont toutes le même signe). Nous considérons ces triangles comme les pièces d'un puzzle, pièces munies chacune d'une dynamique (la restriction de $\rho(\gamma_0)$ au triangle). On peut recoller ces $\rho(\gamma_0)$ -triangles le long de leurs bords, en convenant de ne recoller deux tels triangles que le long des arêtes correspondant à une arête commune aux deux triangles dans \mathbb{RP}^2 . Partant d'un triangle T_1 , on lui adjoint un triangle T_2 (il y a trois possibilités). Par la suite, lorsqu'on a construit une chaîne T_1, \dots, T_i , on ajoute un triangle T_{i+1} en prenant soin de ne pas le recoller le long de l'arête commune à T_i et T_{i-1} : on a pour cela deux choix possibles. À certains moments, on peut recoller le triangle T_n au triangle initial T_1 le long d'une arête qui ne correspond pas à l'arête commune à T_1 et T_2 , ni à l'arête commune à T_n et T_{n-1} . On obtient ainsi une guirlande de n triangles naturellement munie d'une transformation projective d'holonomie $\rho(\gamma_0)$. Si une des arêtes de recollement d'un triangle T_i correspond à une arête joignant le point fixe attractif au point fixe répulsif, nous sommes tenus de garder le triangle T_i complet (cf. lemme 7.14). Par contre, si ce n'est pas le cas, on peut tronquer le triangle et ne garder qu'un secteur $\rho(\gamma_0)$ -invariant bordé dans T_i par les deux arêtes de recollement et une orbite du flot dont $\rho(\gamma_0)$ est le temps 1. Convenons d'appeler dans cette introduction *guirlande de $\rho(\gamma_0)$ -secteurs* un anneau (sans bord) union d'un nombre fini de $\rho(\gamma_0)$ -triangles dont certains peuvent être tronqués. Dans la figure 1, nous avons dessiné une guirlande de 12 secteurs, et, pour visualiser la dynamique, nous avons représenté dans chaque secteur deux orbites du flot dont $\rho(\gamma_0)$ est le temps 1. Le triangle apparaissant au centre ne provient que de la projection de la guirlande sur la page : il n'appartient pas à la guirlande.

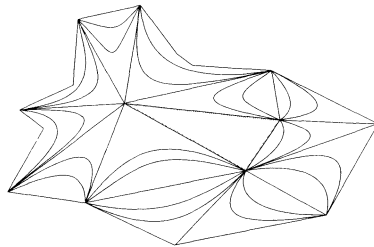


Figure 1. Une guirlande de $\rho(\gamma_0)$ -secteurs

La proposition 7.1 peut s'énoncer sous la forme suivante : *il existe un entier k non-nul et un sous-anneau essentiel $A(\gamma_0)$ qui est γ_0 -invariant et qui est une $\rho(\gamma_0^k)$ -guirlande*. Il est à noter que cet anneau $A(\gamma_0)$ n'est

pas $\bar{\Gamma}$ -invariant, bien au contraire : c'est en étudiant les intersections de cet anneau avec ses $\bar{\Gamma}$ -itérés que l'on parvient à l'identifier de manière plus fine, et par là même, à obtenir la preuve du théorème principal. C'est ce programme qui est mis en œuvre dans les sections suivantes.

Dans la section 8, nous montrons que si le groupe d'holonomie, ou un de ses sous-groupes d'indice fini, préserve un point ou une droite projective de \mathbb{RP}^2 , alors la guirlande $A(\gamma_0)$ est obtenue en recollant systématiquement des secteurs le long d'arêtes qui admettent toutes comme extrémité un représentant du γ_0 -point fixe de type selle. Il s'ensuit que (M, Φ) est revêtement fini d'un feuilletage horocyclique projectif (proposition 8.5). À la section 9, nous traitons le cas fortement irréductible, i.e., celui où justement aucun sous-groupe du groupe d'holonomie ne préserve un point ou une droite. On y montre que, dans la guirlande $A(\gamma_0)$, tout paquet de trois arêtes de recollement successives contient une et une seule arête reliant le point fixe répulsif au point fixe attractif. On en déduit que le groupe d'holonomie satisfait le critère de Y. Benoist assurant qu'il préserve un convexe saillant du plan projectif (corollaire 9.7). On en déduit alors sans peine que (M, Φ) est un revêtement fini d'un feuilletage géodésique convexe, ce qui clôt la preuve du théorème principal.

Ce texte doit beaucoup à de nombreuses discussions avec D. Gaboriau. Je l'en remercie chaleureusement. Je remercie aussi A. Zeghib pour son oreille attentive et ses précieuses remarques. Maintes idées présentes dans ce texte ont été inspirées par [20] et [13].

2. Description des exemples.

2.1. Fibrations projectives.

Soit Φ un feuilletage dont toutes les feuilles sont fermées. D'après un théorème de D.B.A. Epstein [19], les feuilles de Φ sont les fibres d'une fibration au-dessus d'une orbifold. En particulier, Φ a la propriété de relèvement des chemins. Toute structure projective réelle sur l'orbifold sous-jacente induit naturellement une structure projective réelle transverse à Φ . Nous appelons *fibration projective* tout feuilletage à feuilles fermées, équipé d'une structure transverse projective réelle provenant de l'orbifold sous-jacente. Dans le cas qui nous intéresse tout particulièrement dans cet article, celui où l'orbifold est de caractéristique d'Euler strictement négative, on remarque les faits suivants :

- l'orbifold admet toujours une infinité de structures projectives ;

le feuilletage admet donc une infinité de structures transverses projectives réelles ([25]),

- les fibrations (projectives) sur la variété donnée sont isotopes entre elles (voir [34] ou théorème VI.17 de [29]).

2.2. Feuilletages tautologiques des variétés drapeaux.

Notons X la variété des drapeaux, i.e. l'ensemble des paires (x, d) , où x est un point du plan projectif \mathbb{RP}^2 , et d une droite projective de \mathbb{RP}^2 contenant x . Il peut aussi être décrit comme étant l'espace homogène quotient de $SL(3, \mathbb{R})$ par le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures.

Notons G le groupe $SL(3, \mathbb{R}) \approx PGL(3, \mathbb{R})$: c'est le groupe naturel des automorphismes de X . Nous appelons *variété drapeau* toute variété fermée de dimension trois munie d'une (G, X) -structure.

Sur X , il existe deux feuilletages G -invariants, dits *feuilletages tautologiques* : le premier est celui dont les feuilles sont les fibres de la fibration de X sur \mathbb{RP}^2 qui à une paire (x, d) associe x . Le second feuilletage tautologique a pour feuilles les fibres de la fibration de X sur l'espace projectif dual des droites projectives de \mathbb{RP}^2 , qui à (x, d) associe d . Ces feuilletages induisent deux feuilletages sur chaque variété drapeau, appelés également premier et second feuilletage tautologique. Ils sont naturellement munis d'une structure transverse projective réelle.

Notons \mathbb{RP}_*^2 l'espace projectif dual de \mathbb{RP}^2 . Il s'agit de l'espace des formes linéaires non-nuls de \mathbb{R}^3 modulo constantes multiplicatives, i.e. de l'espace des droites projectives de \mathbb{RP}^2 . Tout choix d'une forme bilinéaire définie positive sur \mathbb{R}^3 induit une identification entre \mathbb{RP}^2 et \mathbb{RP}_*^2 . Par ailleurs, chaque paire (x, d) de X peut être interprétée comme un drapeau dual (d^*, x^*) : le point d^* de \mathbb{RP}_*^2 est la droite projective \mathbb{RP}^2 et x^* est la droite projective dans \mathbb{RP}_*^2 constituée des droites projectives de \mathbb{RP}^2 qui contiennent x . Cette dualité associe à toute variété drapeau une autre variété drapeau duale, modulo le choix d'une identification entre \mathbb{RP}^2 et \mathbb{RP}_*^2 . Cette dualité ne dépend pas à isomorphisme près de l'identification choisie entre \mathbb{RP}^2 et \mathbb{RP}_*^2 . Elle échange les premiers et deuxièmes feuilletages tautologiques.

Dans les paragraphes suivants, nous faisons une liste de variétés drapeaux dont un des feuilletages tautologiques satisfait la propriété de relèvement des chemins.

2.2.1. *Feuilletages géodésiques des surfaces projectives réelles.* — Soit Σ une orbifold de caractéristique d'Euler strictement négative, munie d'une structure projective. Soit M le projectifié de l'espace tangent à Σ . La structure projective de Σ induit naturellement une structure de variété drapeau sur M . Le premier feuilletage tautologique de cette (G, X) -structure n'est autre que la fibration projective sur Σ . Nous appelons *feuilletage géodésique* le deuxième feuilletage tautologique.

Le cas qui nous intéresse ici est celui où Σ est *convexe*, i.e., quotient d'un convexe ouvert saillant C du plan projectif par un groupe discret d'automorphismes projectifs $\bar{\Gamma}$ (le mot saillant signifie que l'adhérence du convexe ne contient pas de droite projective; pour toutes nos affirmations à propos des surfaces projectives convexes, nous renvoyons le lecteur à [16]). Il est convenu dans cette situation de dire que $\bar{\Gamma}$ *divise* C . Nous appelons les feuilletages géodésiques de ces surfaces *feuilletages géodésiques convexes*. Dans ce cas, M est le quotient par $\bar{\Gamma}$ de l'ouvert U de la variété drapeau X formée des paires (x, d) où x appartient à C et d une droite projective contenant x quelconque. La métrique de Hilbert sur C induit naturellement une métrique finslerienne sur l'orbifold Σ dont les géodésiques locales sont les géodésiques projectives locales, i.e. des portions de droites projectives. Dans le cas où le convexe saillant est une ellipse, la métrique finslerienne est la métrique de Poincaré sur le modèle de Klein du disque de Poincaré : elle est à courbure constante. Le flot géodésique au sens usuel associé à l'orbifold hyperbolique Σ n'est autre qu'une paramétrisation d'un revêtement double du feuilletage géodésique convexe sur M défini ci-dessus.

Cette description des feuilletages géodésiques convexes met en lumière leurs liens avec les flots géodésiques au sens usuel. Néanmoins, le point de vue dual nous sera plus utile ici. C'est ce que nous faisons ci-dessous.

Chaque feuille du feuilletage géodésique de C est une composante connexe de l'intersection entre C et une droite projective, i.e., un élément de \mathbb{RP}_*^2 . Comme C est convexe, ces intersections sont connexes. On peut donc naturellement identifier l'espace des feuilles du feuilletage géodésique de C avec l'ouvert \mathcal{M} de \mathbb{RP}_*^2 constitué des droites projectives qui rencontrent C . Cet ouvert se décrit utilement de la manière suivante : soit C^* l'ouvert convexe dual de C : il s'agit de l'ensemble des éléments de \mathbb{RP}^2 qui en tant que droites projectives de \mathbb{RP}^2 évitent l'adhérence de C . C'est un ouvert convexe saillant de \mathbb{RP}_*^2 . L'ouvert \mathcal{M} n'est autre que le complémentaire dans $\mathbb{RP}_*^2 \approx \mathbb{RP}^2$ de l'adhérence de C^* . C'est un ruban de Möbius. On déduit de cette discussion (avec quelques détails laissés au

lecteur) la définition duale des feuilletages géodésiques convexes :

Soit C un ouvert convexe saillant de \mathbb{RP}^2 divisible par un groupe discret de transformations projectives $\bar{\Gamma}$. Soit \mathcal{M} le ruban de Möbius, complémentaire de l'adhérence de C dans \mathbb{RP}^2 . Soit V l'ouvert de X formé des paires (x, d) , où x appartient à \mathcal{M} , et d une droite projective contenant x et entièrement contenue dans \mathcal{M} . Le quotient de V par l'action naturelle de $\bar{\Gamma}$ est une variété drapeau compacte. On appelle feuilletages géodésiques convexes les premiers feuilletages tautologiques de ces variétés drapeaux.

Ainsi, l'espace des feuilles du feuilletage géodésique convexe relevé dans le revêtement universel de M s'identifie naturellement au revêtement cyclique infini du ruban de Möbius complémentaire du convexe C dans le plan projectif. Remarquons que ceci montre que les feuilletages géodésiques convexes vérifient la propriété de relèvement des homotopies. La réciproque, à savoir qu'une surface projective réelle dont le feuilletage géodésique vérifie la propriété de relèvement des homotopies est nécessairement convexe, découle du théorème de classification des surfaces projectives réelles. Plus précisément, ceci provient de la présence de « π -annuli» dans le cas non-convexe (cf. [15]). Cette réciproque est aussi un corollaire du présent article.

Notons ∂C le bord du convexe. C'est une courbe de Jordan de classe C^1 . Par tout point x de \mathcal{M} passe exactement deux tangentes à ∂C , et chacune de ces tangentes est univoquement définie par son unique point de tangence avec ∂C (car C est strictement convexe). Inversement, pour toute paire de points distincts (θ_1, θ_2) de ∂C les tangentes à ∂C aux points θ_1 et θ_2 s'intersectent en un et un seul point de \mathcal{M} . On en déduit que l'espace des feuilles \mathcal{M} , munie de l'action naturelle par le groupe $\bar{\Gamma}$, est conjugué au produit $\partial C \times \partial C$ privé de la diagonale et muni de l'action diagonale de $\bar{\Gamma}$.

Signalons que les feuilletages géodésiques associés aux diverses structures projectives réelles convexes sur une orbifold donnée Σ sont tous topologiquement conjugués entre eux. Nous donnons ici l'esquisse de la preuve : le groupe $\bar{\Gamma}$ est hyperbolique au sens de Gromov, et son bord s'identifie à ∂C (ce dernier point est le plus délicat à vérifier, cf. [9]). L'action de $\bar{\Gamma}$ sur ∂C ne dépend donc pas, à conjugaison topologique près (et même quasi-conforme), de la structure projective choisie sur Σ , i.e. du convexe C . Notre affirmation est alors un corollaire du lemme 3.5 à venir, et de l'identification faite ci-dessus entre l'espace des feuilles du feuilletage géodésique de C et le produit $\partial C \times \partial C$ privé de la diagonale.

2.2.2. Feuilletages horocycliques projectifs. — Soit $\bar{\Gamma}$ un sous-groupe discret cocompact de $SL(2, \mathbb{R})$, et x_0 un point de \mathbb{RP}^2 . Une représentation ρ

de $\bar{\Gamma}$ dans $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ est dite *hyperbolique* en x_0 si elle envoie tout élément d'ordre infini γ de Γ sur un élément dont x_0 est un point fixe de type selle. Nous résumons dans l'énoncé ci-dessous l'essentiel des résultats de [3] :

THÉORÈME 2.1. — *Soit $\rho : \bar{\Gamma} \rightarrow \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ une représentation hyperbolique en x_0 . L'adhérence dans \mathbb{RP}^2 de l'union des points fixes attractifs d'éléments de $\rho(\bar{\Gamma})$ est une courbe de Jordan $\Lambda(\rho)$ qui ne contient pas x_0 . Soit $\Omega(\rho)$ le complémentaire de $x_0 \cup \Lambda(\rho)$: c'est un anneau topologique sur lequel l'action de $\rho(\bar{\Gamma})$ est minimale. Soit $X(\rho) \subset X$ l'ensemble des drapeaux (x, d) où x appartient à $\Omega(\rho)$ et où la droite d ne contient pas x_0 . L'action de $\rho(\bar{\Gamma})$ sur $X(\rho)$ est libre et propre; le quotient de cette action est une variété drapeau compacte. \square*

Nous appelons *feuilletages horocycliques projectifs* les premiers feuilletages tautologiques des variétés drapeaux associés aux représentations hyperboliques en x_0 . Cette terminologie est justifiée par le fait suivant : soit $G_0 \approx \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lorsque ρ est un morphisme hyperbolique qui prend ses valeurs dans G_0 , le feuilletage horocyclique projectif associé est un revêtement double du feuilletage horocyclique au sens usuel sur le fibré unitaire tangent d'une surface riemannienne à courbure négative constante. Plus généralement, lorsque ρ préserve une droite projective disjointe de x_0 , le feuilletage horocyclique projectif est un revêtement double du feuilletage horocyclique associé à un *flot d'Anosov exotique* dans la terminologie de [23] ou *flot d'Anosov Desarguien* dans la terminologie de [4]. Observons que du point de vue dynamique, ces exemples sont les seuls : tout feuilletage horocyclique projectif est topologiquement conjugué au feuilletage horocyclique associé à un flot d'Anosov Desarguien (cf. Theorem A de [3]).

3. Préliminaires.

3.1. Notations.

Soit M une variété de Seifert dont le groupe fondamental est non virtuellement résoluble. Nous notons Γ ce groupe fondamental. M est alors

finiment revêtue par un fibré en cercles sur une surface Σ de caractéristique d'Euler négative. Nous pouvons en convaincre le lecteur par les arguments suivants : les orbifolds obtenues en quotientant la sphère ronde, le plan euclidien ou le demi-plan de Poincaré par des groupes d'isométries agissant proprement discontinûment (mais non nécessairement librement) sont dites *bonnes*, toutes les autres sont dites *mauvaises*. Les mauvaises orbifolds compactes pouvant apparaître comme base d'une fibration de Seifert sont rares (cf. [32]) : ce sont «les gouttes d'eau», «les gouttes d'eau doubles», (ainsi que leurs quotients par des automorphismes renversant l'orientation). Les groupes fondamentaux des fibrés de Seifert correspondants sont alors virtuellement résolubles (et même virtuellement abéliens). Donc, Γ étant supposé non virtuellement résoluble, l'orbifold sur laquelle fibre M est bonne. On en déduit que M est finiment revêtue par un fibré en cercles sur une surface Σ . Toujours par non-résolubilité de Γ , cette surface est de caractéristique d'Euler négative. Notre but étant la preuve du théorème principal, on peut donc considérer que M est précisément un fibré en cercles au-dessus de Σ , et que cette fibration est à fibres orientables. En particulier, nous supposons que M est orientable.

Soit H le centre de Γ : il est engendré par l'élément de Γ représenté par les fibres de $M \rightarrow \Sigma$. Nous choisissons un générateur de H et le notons h . Le groupe fondamental de Σ est noté $\bar{\Gamma}$: il est isomorphe au quotient de Γ par H .

Soit $p : \tilde{M} \rightarrow M$ le revêtement universel de M . Nous identifions Γ au groupe des automorphismes de revêtement de p . Nous utiliserons fréquemment la terminologie suivante : pour tout sous-ensemble S de M connexe par arcs, nous appelons *relevé de S* toute composante connexe de $p^{-1}(S)$ dans \tilde{M} . Nous noterons $\pi_1(S)$ l'image du groupe fondamental de S dans Γ par l'application induite par l'inclusion. Pour chaque relevé \tilde{S} de S , $\pi_1(S)$ s'identifie au sous-groupe de Γ , vu comme groupe des automorphismes de revêtement, dont chaque élément envoie \tilde{S} sur lui-même. Le quotient de \tilde{S} par l'action de $\pi_1(S)$ s'identifie alors à S . Le groupe $\pi_1(S)$ n'est défini qu'à conjugaison près dans Γ , cependant, nous le citerons toujours comme étant *le* groupe fondamental de S .

Soit Φ un feuilletage transversalement projectif réel sur M . Nous notons $\tilde{\Phi}$ son relevé dans le revêtement universel \tilde{M} . À un revêtement double près, ces deux feuilletages sont orientables : nous les paramétrons au besoin en des flots Φ^t et $\tilde{\Phi}^t$, le second étant relevé du premier. Comme Φ est transversalement projectif, il existe une application $\mathcal{D}_M : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$

(dite *application développante*) et un morphisme $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ (dit *morphisme d'holonomie*) tels que \mathcal{D}_M soit constante le long des feuilles de $\tilde{\Phi}$, et tels que

$$\forall x \in \tilde{M}, \forall \gamma \in \Gamma, \quad \mathcal{D}_M(\gamma x) = \rho(\gamma)\mathcal{D}_M(x).$$

Bien sûr, l'action de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ considérée ici est son action projective usuelle. Il sera commode d'introduire \mathbf{S}^2 , le revêtement universel de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, munie de l'action de $\mathrm{P}^+\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ ($\mathrm{P}^+\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ est le quotient de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ par les homothéties de rapport positif). Nous disposons alors d'une application $\mathcal{D}_M^s : \tilde{M} \rightarrow \mathbf{S}^2$ et d'un morphisme $\rho^s : \Gamma \rightarrow \mathrm{P}^+\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ dont les propriétés sont similaires à celles du couple (\mathcal{D}_M, ρ) ; de plus, \mathcal{D}_M n'est autre que la composition de \mathcal{D}_M^s par le revêtement double du plan projectif par la sphère, et ρ la composition de ρ^s avec la projection de $\mathrm{P}^+\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ dans $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$.

Nous notons Q_Φ le quotient de \tilde{M} par la relation «être sur la même feuille de $\tilde{\Phi}$ ». Nous le munissons de la topologie quotient. Nous notons $\pi : \tilde{M} \rightarrow Q_\Phi$ l'application passage au quotient. L'action de Γ sur \tilde{M} passe au quotient en une action sur Q_Φ . L'application développante induit deux homéomorphismes locaux $\mathcal{D} : Q_\Phi \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ et $\mathcal{D}^s : Q_\Phi \rightarrow \mathbf{S}^2$, qui sont bien sûr Γ -équivariants.

Nous supposons en outre que Φ admet la *propriété de relèvement des chemins* (cf. [30]). Dans notre situation, ceci signifie que Q_Φ est une 2-variété séparée, et que la projection π est une fibration localement triviale. En particulier, Q_Φ doit être simplement connexe, et comme $\tilde{M} \simeq \mathbb{R}^3$ ne fibre pas sur la sphère, Q_Φ est homéomorphe au plan.

Pour tout homéomorphisme local $f : N \rightarrow N'$ (par exemple, \mathcal{D} ou \mathcal{D}^s), nous appelons *assiette* de f un ouvert de N sur lequel f est injective. Nous disposons des lemmes suivants (cf. [2]) : un sous-ensemble Y de N' est *localement connexe dans N'* si tout point de N' adhérent à Y admet une base de voisinages ouverts dont l'intersection avec Y est connexe.

LEMME DES ASSIETTES EMBOÎTÉES. — *Soient U et V deux assiettes de f . On suppose que l'intersection entre U et V est non vide, que U est connexe et que l'image par f de V contient celle de U . Alors, U est contenue dans V .* \square

LEMME DE FERMETURE DES ASSIETTES. — *Soit U une assiette de f telle que son image $f(U)$ est localement connexe dans N' . Alors, la restriction de f à l'adhérence de U est injective.* \square

LEMME DE REMPLISSAGE DES DISQUES. — Soit B un compact de N homéomorphe à une boule fermée de même dimension que N . On suppose que $f(\partial B)$ borde dans X une boule fermée B' (mais on ne suppose pas que la restriction de f à ∂B soit injective). On suppose de plus que les points de B proches de ∂B ont leur image par f dans B' . Alors, la restriction de f à B est un homéomorphisme d'image B' . \square

Nous aurons besoin des conventions suivantes : un *plan affine* est le complémentaire dans \mathbb{RP}^2 d'une droite projective. Un *demi-plan affine* est une intersection de deux plans affines. Une partie de \mathbb{RP}^2 est dite *affine* si elle est contenue dans un plan affine. Elle est dite *convexe* si elle est convexe au sens usuel dans un plan affine la contenant, et *convexe saillante* si elle est convexe et que son adhérence ne contient pas de droite projective. Une *droite* est une droite projective de \mathbb{RP}^2 privée d'un point. Une composante connexe d'une droite projective privée de deux points est dite *segment* ou *demi-droite*. Un *triangle convexe* est une composante connexe de \mathbb{RP}^2 privé de trois droites projectives non concourantes. Nous étendons toutes ces notions à Q_Φ via \mathcal{D} : par exemple, une partie de Q_Φ est une droite si la restriction de \mathcal{D} à cette partie est injective, et si son image par \mathcal{D} est une droite de \mathbb{RP}^2 . Nous ajoutons le préfixe γ - si l'objet de Q_Φ considéré est γ -invariant, où γ est un élément de Γ . Nous étendons aussi ces notions à S^2 via son revêtement double sur \mathbb{RP}^2 .

Enfin, une *ligne* de Q_Φ est une composante connexe de la préimage par \mathcal{D} d'une droite projective : il convient d'observer que la restriction de \mathcal{D} à une ligne n'est pas nécessairement injective, ni même un revêtement sur son image.

3.2. Points fixes dans l'espace des orbites.

LEMME 3.1. — Soit γ un élément de Γ dont l'action sur Q_Φ admet un point fixe. Si $\rho(\gamma)$ est d'ordre fini, alors Φ est une fibration projective.

Preuve. — Quitte à prendre une puissance finie de γ , on peut supposer que $\rho(\gamma)$ est trivial. L'ensemble des points fixes de γ dans Q_Φ est fermé. Par ailleurs, il découle aisément du lemme des assiettes emboîtées que cet ensemble est fermé. Puisqu'il est supposé non-vide et que Q_Φ est connexe, l'action de γ sur Q_Φ est triviale. En d'autres termes, toutes les feuilles de Φ sont fermées, ce qui, par notre définition, signifie bien que Φ est une fibration projective. \square

LEMME 3.2. — *Aucun élément de Γ n'admet un point fixe attractif ou répulsif dans Q_Φ .*

Preuve. — Ce lemme est l'analogie de la proposition 4.1 (deuxième cas) de [2]. Dans cet article, le fait que le flot transversalement projectif considéré soit un « flot radial » n'intervenait dans la preuve de la proposition 4.1 que pour traiter le cas où $\rho(\gamma_0)$ admettait une ligne de points fixes. Remarquons quand même que ce lemme n'est pas valable pour n'importe quel flot transversalement projectif : l'hypothèse de relèvement des chemins est cruciale. \square

3.3. Sections totales.

LEMME 3.3. — *On suppose que Φ admet une section totale, i.e. une surface compacte immergée dans M transverse à Φ^t et rencontrant l'orbite positive de tout point. Alors, Φ est une fibration projective.*

Preuve. — Par des techniques de couper-coller (voir par exemple [21]), on peut remplacer la section totale par une autre section totale S qui soit plongée et non plus seulement immergée. Comme le groupe fondamental de M n'est pas résoluble, S est de genre supérieur ou égal à deux. Étant transverse au feuilletage, S hérite d'une structure projective réelle préservée par l'application de premier retour le long du flot Φ^t . Or, le groupe des automorphismes de cette structure projective sur S est fini (cf. lemme 3.5 de [2]). L'application de premier retour est donc d'ordre fini, ce qui signifie que les orbites de Φ^t sont toutes périodiques. On conclut grâce à [19]. \square

COROLLAIRE 3.4. — *Si Γ contient un sous-groupe libre abélien de rang deux qui agit librement et proprement discontinûment sur Q_Φ , alors Φ est une fibration projective.*

Preuve. — Notons H_0 le sous-groupe libre abélien de rang deux de Γ agissant librement et proprement discontinûment sur Q_Φ . Nous notons T le quotient de cette action, et \widehat{M} le quotient de \widehat{M} par H_0 . Nous notons aussi $\widehat{\Phi}$ le projeté dans \widehat{M} de $\widetilde{\Phi}$. La projection π induit une fibration en droites de \widehat{M} sur le tore T dont les fibres sont les feuilles de $\widehat{\Phi}$. Cette fibration admet une section : en d'autres termes, il existe un tore \widehat{T} plongé dans \widehat{M} qui rencontre chaque feuille de $\widehat{\Phi}$. On en déduit que la projection de \widehat{T} dans M est une surface immergée qui est une section totale de Φ^t . On conclut grâce au lemme 3.3. \square

3.4. Relèvement de conjugaisons topologiques.

Pour comparer le feuilletage transversalement projectif Φ avec un des feuilletages modèles connus, notre stratégie consistera à identifier l'action de Γ sur Q_Φ , plus précisément, de voir qu'elle est conjuguée à une action de Γ sur l'espace des feuilles Q_{Φ_0} d'un des feuilletages modèles Φ_0 sur la même variété M . Une fois parvenus à ce stade, nous aurons alors besoin pour conclure de relever cette conjugaison en une conjugaison topologique entre les Φ et Φ_0 . C'est précisément ce que permet de faire la proposition suivante :

PROPOSITION 3.5. — *Soient Φ_1 et Φ_2 deux feuilletages transversalement projectifs sur des variétés M_1 et M_2 . On suppose qu'ils ont l'un comme l'autre la propriété de relèvement des chemins, et que ni les feuilles de Φ_1 , ni les feuilles de Φ_2 , ne sont les fibres d'une fibration en cercles. Pour chaque indice $i = 1, 2$, nous notons Γ_i le groupe fondamental de M_i et Q_i l'espace des feuilles du relevé $\tilde{\Phi}_i$ de Φ_i dans le revêtement universel \tilde{M}_i de M_i . On suppose qu'il existe un isomorphisme $\Psi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ et un homéomorphisme $f : Q_1 \rightarrow Q_2$ vérifiant $f \circ \gamma = \Psi(\gamma) \circ f$ pour tout élément γ de Γ_1 . Alors, il existe un homéomorphisme qui envoie Φ_1 sur Φ_2 , et qui se relève en une conjugaison $\tilde{F} : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ entre $\tilde{\Phi}_1$ et $\tilde{\Phi}_2$, pour lequel le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M}_1 & \xrightarrow{\tilde{F}} & \tilde{M}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q_1 & \xrightarrow{f} & Q_2. \end{array}$$

Preuve. — D'après les hypothèses, f réalise une équivalence entre les groupoïdes d'holonomie transverses entre les feuilletages. De plus, d'après le lemme 3.1, les feuilles de ces feuilletages sont à revêtement d'holonomie contractile. Les variétés feuilletées (M_1, Φ_1) et (M_2, Φ_2) sont donc leurs propres espaces classifiants. D'après [27], il existe donc deux équivalences d'homotopie $F_1 : M_1 \rightarrow M_2$ et $F_2 : M_2 \rightarrow M_1$ qui envoient les feuilles de Φ_1 dans celles de Φ_2 pour la première, et celles de Φ_2 dans celles de Φ_1 pour la seconde. De plus, elles relèvent respectivement f et f^{-1} . On peut donc appliquer la proposition 5.1 de [31] (particulièrement simplifiée dans notre cas, cf. remark 5.2 de [31]), ce qui démontre la proposition. \square

Remarque 3.6. — Dans le cas où les feuilletages sont transversalement projectifs, chaque espace de feuilles Q_i est naturellement muni d'une

structure projective Γ_i -invariante. Lorsque f préserve ces structures projectives (i.e. envoie celle de Q_1 sur celle de Q_2), la commutativité du diagramme signifie que F réalise un isomorphisme entre les feuilletages en tant que feuilletages transversalement projectifs.

3.5. Relèvements d'actions.

LEMME 3.7. — *Soit A un sous-groupe de Lie connexe et simplement connexe du centralisateur de $\rho(\Gamma)$ dans $SL(3, \mathbb{R})$. Alors, il existe une action de A sur Q_Φ qui relève celle sur \mathbb{RP}^2 , i.e. pour laquelle l'application \mathcal{D} est équivariante.*

Preuve. — L'algèbre de Lie de A définit une famille de champs de vecteurs sur \mathbb{RP}^2 . Soit X un de ces champs de vecteurs, et notons \bar{X} le tiré en arrière de X par \mathcal{D} : il s'agit de montrer que \bar{X} s'intègre en un flot complet sur Q_Φ . Remarquons que comme chaque élément de A commute avec $\rho(\Gamma)$, l'action de γ sur Q_Φ préserve \bar{X} . Choisissons un champ de plans P transverse à Φ et notons \tilde{P} son relevé dans \tilde{M} . Considérons l'unique champ de vecteurs dans \tilde{M} tangent à \tilde{P} et qui se projette par π sur \bar{X} : ce champ de vecteurs est Γ -invariant. Il passe donc au quotient en un champ de vecteurs sur M . Le lemme découle alors de la compacité de M . \square

Dans le lemme précédent, si un élément γ de Γ est tel que son image par ρ appartient à A , il agit de deux manières sur Q_Φ : l'une en tant que passage au quotient d'un automorphisme de revêtement, l'autre via $\rho(\gamma) \in A$. Il n'est pas clair (et même faux en général) que ces deux actions coïncident. Le lemme suivant précise un cas de figure où ceci se produit :

LEMME 3.8. — *On se place sous les hypothèses du lemme précédent. Soit γ un élément de Γ dont l'image $\rho(\gamma)$ est un élément a de A . On suppose que γ préserve globalement une orbite de A dans Q_Φ , et que l'image par \mathcal{D} de cette orbite est simplement connexe. Alors, l'action de γ sur Q_Φ coïncide avec celle de a .*

Preuve. — Notons f la transformation de Q_Φ induite par $\rho(\gamma) \in A$ et U l'orbite de A dans Q_Φ . Puisque \mathcal{D} est A -équivariante, sa restriction à U est un revêtement. Puisque $\mathcal{D}(U)$ est simplement connexe, la restriction de \mathcal{D} à U est en fait injective. L'hypothèse signifie donc que $f \circ \gamma^{-1}$ fixe

un point de U . Par ailleurs, \mathcal{D} est constante sur les orbites de $f \circ \gamma^{-1}$. On conclut alors le lemme grâce à l'argument utilisé pour le lemme 3.1. \square

4. Holonomie des fibres.

Rappelons que nous avons noté h un générateur du centre H de Γ . Nous notons id la matrice identité de $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ et σ_0 la matrice d'ordre 2 suivante :

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

PROPOSITION 4.1. — *L'holonomie $\rho(h)$ est soit id , soit σ_0 .*

Preuve. — Nous raisonnons par l'absurde, en supposant que $\rho(h)$ n'est ni id , ni σ_0 . Remarquons tout d'abord que ceci implique que Φ n'est pas une fibration projective. Quitte à composer ρ par un automorphisme intérieur de $\text{SL}(3, \mathbb{R})$, on peut supposer qu'il existe une puissance h^k de h dont l'image par ρ est l'une des matrices suivantes :

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \text{ avec } 1 < \lambda,$$

$$3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \text{ avec } 0 < \lambda < \mu < \nu,$$

$$4) \begin{pmatrix} \lambda \cos \theta & \lambda \sin \theta & 0 \\ \lambda \sin \theta & -\lambda \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \text{ où } \theta \text{ n'est pas un multiple de } \pi \\ \text{et } \lambda \geq 1,$$

$$5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$6) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \text{ avec } 1 < \lambda.$$

Nous allons traiter individuellement chacun de ces cas. Nous utiliserons le lemme relativement technique suivant :

LEMME 4.2. — Soit \widehat{U} une assiette de \mathcal{D}^s dans Q_Φ . On suppose que son image U vérifie les propriétés suivantes :

1) l'intersection entre ∂U et l'image de \mathcal{D}^s est une sous-variété de dimension 1 plongée dans $\mathcal{D}^s(Q_\Phi)$;

2) pour tout élément γ de Γ , l'image de U par $\rho^s(\gamma)$ est soit disjointe de U , soit confondue avec U ;

3) le groupe $\rho^s(\Gamma_0)$ formé des éléments de $\rho^s(\Gamma)$ envoyant U sur lui-même est résoluble ;

4) U est simplement connexe.

Alors, la préimage par π de l'adhérence de \widehat{U} dans Q_Φ se projette par p dans M en une sous-variété homéomorphe au produit du tore par l'intervalle, ou au fibré non trivial en segments sur la bouteille de Klein, ou à un tore solide. De plus, le dernier cas ne se produit que si l'adhérence de \widehat{U} est un disque topologique fermé. Enfin, dans les deux premiers cas, $\rho^s(\Gamma_0)$ n'a pas de point fixe dans $\mathcal{D}^s(\partial\widehat{U})$.

Preuve de 4.2. — Notons \widetilde{C} la préimage de l'adhérence de \widehat{U} par π , et $C = p(\widetilde{C})$. Comme \widehat{U} est une assiette, la restriction de \mathcal{D}^s à l'adhérence de \widehat{U} est injective. Notons Γ_0 le sous-groupe de Γ formé des éléments qui préservent U . D'après l'hypothèse 2, C est le quotient de \widetilde{C} par l'action de Γ_0 , et sa frontière est l'image par p de la frontière de \widetilde{C} . On en déduit grâce à l'hypothèse 1 que C est une sous-variété à bord, dont le bord est tangent au feuilletage régulier Φ : c'est une union finie de tores ou de bouteilles de Klein. De plus, comme U est une assiette, il découle du lemme 3.1 que la restriction de ρ à Γ_0 est injective ; d'après les hypothèses 3) et 4), le groupe fondamental de C est résoluble. Les seules topologies possibles de C sont donc bien celles données dans l'énoncé (rappelons que M est supposée orientable ; et aussi que Γ n'est pas résoluble : C ne peut donc pas être M tout entier. Observer aussi que $\widetilde{C} \approx \mathbb{R}^3$ est le revêtement universel de C).

Lorsque C est un tore solide, une des composantes connexes de ∂C est compressible, ce qui n'est possible que si une composante connexe de $\partial\widehat{U}$ est une courbe fermée simple.

Enfin, si C n'est pas un tore solide, Γ_0 n'est pas cyclique et ne peut donc être contenu dans le groupe fondamental d'une feuille fermée de Φ .

Or, comme la restriction de \mathcal{D}^s à l'adhérence de \widehat{U} est injective, tout $\rho^s(\Gamma_0)$ -point fixe dans $\mathcal{D}^s(\partial\widehat{U})$ est image d'un Γ_0 -point fixe dans $\partial\widehat{U}$, dont la préimage par π projetée par p est une feuille fermée de Φ dont le groupe fondamental contient Γ_0 . Cette contradiction achève la preuve. \square

4.1. Premier cas.

Soit A le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est un groupe abélien d'indice fini dans le centralisateur de $\rho(h)^k$ dans $SL(3, \mathbb{R})$. Quitte à prendre un revêtement d'indice fini, on peut donc supposer qu'il contient $\rho(\Gamma)$. Étant abélien, il centralise l'action de $\rho(\Gamma)$. D'après le lemme 3.7, l'action de A sur \mathbf{S}^2 se relève en une action de A sur Q_Φ pour laquelle \mathcal{D}^s est équivariante.

Considérons une orbite ouverte de cette action : notons la \widehat{U} . Son image par \mathcal{D}^s est une orbite ouverte de A dans \mathbf{S}^2 , i.e., l'hémisphère U_0 complémentaire du grand cercle d_0 induit par l'hyperplan $\{z = 0\}$ de \mathbb{R}^3 . Comme l'action de A_0 sur U_0 est simplement transitive, on en déduit que \widehat{U} est une assiette de \mathcal{D}^s .

Les hypothèses du lemme 4.2 sont toutes vérifiées : donc, la projection C dans M de la préimage par π de l'adhérence de \widehat{U} est une des trois variétés à bord permises par le lemme. Supposons qu'il s'agit d'un tore solide : $\partial\widehat{U}$ doit alors être une courbe de Jordan, d'image le grand cercle d_0 tout entier. Soit \widehat{U}' la A -orbite dans Q_Φ adjacente à \widehat{U} , i.e., dont la frontière rencontre \widehat{U} mais d'image l'hémisphère U'_0 bordée par d_0 différente de U_0 . On déduit de l'injectivité de \mathcal{D}^s sur les adhérences de \widehat{U} et de \widehat{U}' que $\partial\widehat{U}'$ doit aussi être une courbe de Jordan d'image d_0 . Ceci implique que Q_Φ est une sphère : contradiction.

Donc, C n'est pas un tore solide. D'après la dernière affirmation du lemme 4.2, chaque composante de bord de $\partial\widehat{U}$ est exactement une orbite de dimension 1 de A . Ceci est valable pour toutes les orbites ouvertes de l'action de A : on en déduit que M s'obtient en recollant le long de leurs bords des copies de produits du tore par l'intervalle $[-1, 1]$ ou du fibré en segments non-trivial sur la bouteille de Klein. Or, ceci implique que son groupe fondamental Γ doit être résoluble : contradiction. Ceci achève le premier cas.

4.2. Deuxième cas.

Il se traite de manière analogue au premier cas en considérant comme groupe A le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & t & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}.$$

Comme dans le cas précédent, on peut supposer que A contient $\rho(\Gamma)$ et que son action sur \mathbf{S}^2 se relève en une action sur Q_Φ . De plus, ses orbites ouvertes sont les hémisphères $\{\pm y > 0\}$, sur lesquelles il agit simplement transitivement. On en déduit donc comme dans le premier cas grâce au lemme 4.2 que ces orbites ouvertes correspondent à des sous-variétés à bord dans M homéomorphes au tore solide, au produit du tore par l'intervalle $[-1, 1]$ ou au fibré en segments non-trivial sur la bouteille de Klein. Là encore, si une des ses composantes est un tore solide, la composante adjacente doit aussi être un tore solide, ce qui amène à une contradiction.

Le lemme 4.2 montre aussi que chaque composante de $\partial\widehat{U}$ ne contient pas de points fixes pour l'action de A , i.e., est une orbite de A de dimension 1. Cette affirmation implique alors que M s'obtient en recollant les sous-variétés à bord correspondant aux orbites ouvertes de A , contredisant la non solvabilité de Γ .

4.3. Troisième cas.

Dans ce cas, la composante neutre du centralisateur de $\rho(h^k)$ est le groupe A formé des matrices diagonales à coefficients positifs. Là encore, on peut supposer qu'il contient $\rho(\Gamma)$, et son action sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ se relève sur Q_Φ . On raisonne exactement comme lors des deux cas précédents : la seule différence est dans l'argument pour exclure le cas où l'adhérence de \widehat{U} est un disque fermé (i.e., le cas où C est un tore solide). Ce cas s'élimine aisément grâce aux lemmes 3.1 et 3.2, puisque tout triangle invariant par une matrice diagonale non triviale admet toujours un sommet qui est point fixe attractif ou répulsif de cette matrice.

4.4. Quatrième cas.

A désigne maintenant le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos \theta & \lambda \sin \theta & 0 \\ \lambda \sin \theta & -\lambda \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}.$$

C'est, à indice fini près, le centralisateur de $\rho(h^k)$; on peut donc supposer qu'il contient $\rho(\Gamma)$. Remarquons que dans le cas présent, A n'est pas simplement connexe. Notons \tilde{A} le revêtement universel de A . L'action de A sur \mathbf{S}^2 se relève ici en une action de \tilde{A} sur Q_Φ .

Supposons qu'il existe un élément x_0 de Q_Φ dont l'image par \mathcal{D}^s soit le point fixe $(0, 0, 1)$ de A . En saturant un petit voisinage de x_0 par l'action de \tilde{A} , on obtient une assiette \hat{U} de \mathcal{D}^s dont l'image par \mathcal{D}^s est l'hémisphère $\{z > 0\}$. D'après le lemme 4.2, cette assiette correspond à une sous-variété à bord. Remarquons que le stabilisateur Γ_0 de \hat{U} fixe le point x_0 , il est donc au plus cyclique, ce qui montre que la sous-variété à bord en question est un tore solide. La restriction de \mathcal{D}^s à l'adhérence de \hat{U} est un homéomorphisme d'image l'hémisphère fermé $\{z \geq 0\}$. Il existe un voisinage de cette adhérence qui est une assiette de \mathcal{D}^s . En saturant ce petit voisinage par l'action de \tilde{A} , on obtient une assiette \widehat{W} dont l'image par \mathcal{D}^s est la sphère \mathbf{S}^2 privée du point $(0, 0, -1)$. Comme Q_Φ n'est pas une sphère, le lemme de fermeture des assiettes implique que l'ouvert \widehat{W} est fermé dans Q_Φ , i.e., est Q_Φ tout entier. Donc, $(0, 0, 1)$ est l'unique antécédent de $(0, 0, 1)$ par \mathcal{D}^s . À ce titre, il est Γ -invariant : contradiction.

Donc, $(0, 0, \pm 1)$ n'a pas d'antécédent par \mathcal{D}^s : on en déduit que la frontière de toute orbite ouverte de \tilde{A} dans Q_Φ est union de composantes connexes de préimages par \mathcal{D}^s de $\{z = 0\}$. Soit \hat{U} une telle orbite ouverte : une adaptation adéquate des arguments du lemme 4.2 montre que l'adhérence de la préimage par π de \hat{U} est le relevé dans \widetilde{M} d'une variété à bord plongée dans M . Par ailleurs, soit Γ_0 le sous-groupe de Γ formé des éléments qui préservent \hat{U} . Comme A n'est pas simplement connexe, il n'est pas nécessairement vrai que la restriction de \mathcal{D}^s à \hat{U} est injective. C'est en tout cas un revêtement cyclique (fini ou infini) au-dessus de $\{\pm z > 0\} \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$. On en déduit, grâce au lemme 3.1, que le noyau de la restriction de ρ à Γ_0 est soit trivial, soit un groupe cyclique. En particulier, Γ_0 est résoluble. Or, tout sous-groupe résoluble de Γ est soit trivial, soit cyclique infini, soit libre abélien de rang deux.

On en déduit que les variétés à bord considérées ci-dessus sont soit des tores solides, soit des produits du tore avec l'intervalle, soit des fibrés en segments sur la bouteille de Klein. Ceci aboutit comme dans les cas précédents à une contradiction.

4.5. Cinquième cas.

Ce cas et le suivant sont les seuls pour lesquels la composante neutre

du centralisateur de $\rho(h^k)$ n'est pas abélienne, ce qui rend l'analyse plus difficile. À indice fini près, le centralisateur de $\rho(h)$ est le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a^{-2} & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Nous notons A ce groupe; nous pouvons supposer qu'il contient $\rho(\Gamma)$. Nous y distinguons le sous-groupe à un paramètre suivant :

$$g^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sous-groupe commute avec chaque élément de $\rho(\Gamma)$. Il se relève donc en un flot \bar{g}^t sur Q_Φ .

Supposons que le flot \bar{g}^t admet une singularité x_0 qui se projette sur $[1; 0; 0]$. On note ℓ la composante connexe de la préimage par \mathcal{D}^s de $\{z = 0\}$ contenant x_0 . Comme $\{z = 0\}$ est $\rho(\Gamma)$ invariant, $\pi^{-1}(\ell)$ est le relevé dans \widetilde{M} d'un tore T plongé dans M . En saturant par \bar{g}^t une petite assiette contenant x_0 , on obtient un ouvert \widehat{U} qui est une assiette de \mathcal{D}^s et dont l'image par ce même \mathcal{D}^s est l'union des deux hémisphères $\{z > 0\}$ et $\{z < 0\}$ avec un intervalle ouvert de ℓ contenant x_0 . Comme ℓ est contenu dans la frontière d'une assiette de \mathcal{D}^s , le lemme de fermeture des assiettes entraîne que la restriction de \mathcal{D}^s à ℓ est injective. Comme x_0 ne peut pas être fixé par un sous-groupe libre abélien de rang deux de Γ , le tore T doit être compressible. Ceci implique que $\mathcal{D}^s(\ell)$ est le grand cercle $\{z = 0\}$ tout entier. On aboutit à une contradiction par le fait que Q_Φ ne contient pas de sphère. Ceci montre que le A -point fixe $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à l'image de \mathcal{D}^s .

Notons d_1 la droite $\{z = 0\}$, et supposons que sa préimage par \mathcal{D} n'est pas vide; on note ℓ_1 une composante connexe de sa préimage. L'image de ℓ_1 par \mathcal{D} est contenue dans la droite affine $d_1 \setminus \{[1; 0; 0]\}$; comme ℓ_1 est de dimension un et que \mathcal{D} est ouverte, sa restriction à ℓ_1 est injective. Par ailleurs, comme d_1 est $\rho(\Gamma)$ -invariante, ℓ_1 correspond à une surface plongée dans M et tangente au flot. Ceci signifie qu'il existe un sous-groupe libre abélien de rang deux H_0 de Γ qui préserve ℓ_1 . Ce groupe H_0 doit contenir h , donc, comme \mathcal{D} est injective sur ℓ_1 , h^k agit trivialement sur ℓ_1 , et, d'après le lemme 3.8, l'action de h^k sur Q_Φ coïncide avec celle de \bar{g}^1 .

La droite affine $d_1 \setminus \{[1; 0; 0]\}$ n'est qu'une feuille particulière du feuilletage de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ dont les feuilles sont les droites projectives

contenant $[1; 0; 0]$, privées de ce point. Les autres feuilles de ce feuilletage sont les orbites unidimensionnelles de g^t . Soit \mathcal{G} le tiré en arrière de ce feuilletage par \mathcal{D} : ces feuilles sont soit des orbites de \bar{g}^t , soit des composantes connexes de $\mathcal{D}^{-1}(d_1)$. D'après ce qui précède, elles sont toutes h -invariantes. Soit \mathcal{F} la projection dans M de $\pi^*\mathcal{G}$: c'est un feuilletage de codimension un dont toutes les feuilles se relèvent dans \widetilde{M} en des plongements du plan : elles sont donc incompressibles. Quitte à prendre un revêtement double, on peut supposer que les feuilles de \mathcal{F} sont toutes orientables. Soit F une des feuilles de \mathcal{F} . Comme les actions de h^k et de \bar{g}^1 coïncident, le groupe fondamental de F contient h^k . Il contient donc un sous-groupe cyclique infini distingué, ce qui montre que F est soit homéomorphe au cylindre, soit homéomorphe au tore. C'est donc un feuilletage en cylindres dans la terminologie de [28]. D'après le corollaire 3 de [28], le groupe fondamental de M est résoluble : contradiction.

Il nous reste à traiter le cas où d_1 ne rencontre pas l'image de \mathcal{D} . Dans ce cas, l'action de \bar{g}^t sur Q_Φ est propre, puisque tel est le cas pour l'action de g^t sur $\mathbb{RP}^2 \setminus d_1$. L'espace des orbites \mathcal{L} de \bar{g}^t est donc une 1-variété Hausdorff. L'application \mathcal{D} induit un homéomorphisme local de \mathcal{L} dans l'espace des orbites de la restriction de g^t à $\mathbb{RP}^2 \setminus d_1$, qui en l'occurrence est homéomorphe à \mathbb{R} . On en déduit que cette application est injective, et, par suite, que \mathcal{D} est un homéomorphisme sur son image. On en déduit que le noyau de ρ est contenu dans H , ce qui est absurde puisque $\rho(\Gamma) \subset A$ est résoluble et que Γ ne l'est pas.

4.6. Sixième cas.

L'étude de ce sixième cas est la plus délicate de toutes. Nous introduisons le groupe à un paramètre suivant :

$$g^t = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Il commute avec chaque élément de $\rho(\Gamma)$: il induit donc un flot \bar{g}^t sur Q_Φ , ainsi qu'un flot φ^t sur M (moyennant un choix de champ de plans transverses à Φ , cf. la preuve de 3.7). Supposons que le point fixe attractif $(0; 0; 1)$ soit dans l'image de \mathcal{D}^s : ceci signifie qu'il existe un point fixe attractif x_0 de \bar{g}^t . Le \bar{g}^t -saturé d'un petit voisinage de x_0 est une assiette de \mathcal{D}^s dont l'image par \mathcal{D}^s est l'hémisphère $\{z > 0\}$. On aboutit à une contradiction en suivant les arguments du quatrième cas.

Donc, les points fixes de \bar{g}^t ne sont pas isolés. Supposons qu'il en existe : comme la droite de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ fixée point par point par g^t est $\rho(\Gamma)$ -invariante, l'union des points fixes de φ^t est une union finie de surfaces plongées dans M et tangentes à Φ . Soit T l'une d'entre elles, et soit W le saturé par φ^t d'un petit voisinage tubulaire régulier de T . Soit ℓ la projection dans Q_Φ d'un relevé de T : c'est une ligne. Si T est compressible, ℓ est une courbe de Jordan dans Q_Φ et doit donc border un disque D . D'après le lemme de remplissage des disques, $\mathcal{D}^s(D)$ est un plan affine ; il doit en particulier contenir un point fixe attractif de g^t . Ceci contredit ce que nous avons montré auparavant. Donc, T est incompressible : il existe donc un sous-groupe libre abélien de rang deux H_0 , contenant H , et qui préserve ℓ . Si h admet un point fixe dans ℓ , il existe un réel T pour lequel les actions sur Q_Φ de h^k et de \bar{g}^T coïncident. On en déduit comme dans le cas précédent que les droites projectives contenant $[0; 0; 1]$ définissent un feuilletage régulier de M en cylindres, ce qui mène donc à une contradiction. L'action de h sur ℓ est donc libre ; comme l'action de $\rho(h)$ sur $\mathcal{D}^s(\ell)$ est triviale, il s'ensuit que la restriction de \mathcal{D}^s à ℓ est un revêtement cyclique au-dessus de $\{z = 0\}$. Considérons maintenant l'image par π de la composante connexe du relevé de W qui contient $\pi^{-1}(\ell)$. Nous le notons Ω . C'est un voisinage ouvert de ℓ qui est le saturé par \bar{g}^t de tout voisinage suffisamment petit de ℓ . On en déduit que la restriction de \mathcal{D} à Ω est un revêtement cyclique au-dessus de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ privé de $[0; 0; 1]$. De plus, tout point dans l'adhérence de Ω devrait être une singularité isolée de \bar{g}^t : Ω est donc fermé dans Q_Φ , ce qui implique qu'il est Q_Φ tout entier. Au bout du compte, nous avons obtenu que tout point fixe de \bar{g}^t appartient à ℓ . Donc, ℓ est Γ -invariant. Ceci est absurde puisque cela implique que H_0 devrait être distingué dans Γ .

Ce qui précède montre que l'image de \mathcal{D}^s évite les points fixes de g^t . En d'autres termes, le feuilletage Φ est en réalité transversalement affine, son application développante \mathcal{D}_a prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. Nous notons $\rho_a : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ l'application d'holonomie de cette structure affine transverse. Nous savons de plus que $\rho_a(h)$ est une homothétie non-triviale, et que le flot radial g^t de $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ se relève en un flot \bar{g}^t sur Q_Φ . Notons $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ le revêtement universel de $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, et $\widetilde{\mathrm{GL}}(2, \mathbb{R})$ le revêtement universel de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$: l'action de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ se relève en une action de $\widetilde{\mathrm{GL}}(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$. La structure affine transverse de Φ peut être considérée comme une $(\widetilde{\mathrm{GL}}(2, \mathbb{R}), \mathbb{R}^2 \setminus 0)$ structure transverse, ce qui signifie que l'application développante se relève en un homéomorphisme local $\widetilde{\mathcal{D}}_a : Q_\Phi \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus 0$ et le morphisme ρ_a en un morphisme d'holonomie $\tilde{\rho}_a : \Gamma \rightarrow \widetilde{\mathrm{GL}}(2, \mathbb{R})$.

Comme l'action de g^t sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ est libre et propre, il en est de même pour celle de \bar{g}^t sur Q_Φ . On en déduit que l'espace des orbites \mathcal{L} de \bar{g}^t est une 1-variété Hausdorff et donc difféomorphe à \mathbb{R} . Considérons le feuilletage \mathcal{F} dont les feuilles sont les itérés par φ^t des feuilles de Φ : les arguments précédents montre que, comme \mathcal{F} ne peut pas être un feuilletage en cylindres, h n'a pas de point fixe dans \mathcal{L} et, par suite, que \tilde{D}_a est un homéomorphisme sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.

Notons e la classe d'Euler de la fibration de M sur Σ . Comme h^e est un produit de commutateurs d'éléments de Γ , et comme $\rho_a(h)$ n'est pas de déterminant 1, le nombre e doit être nul. Ainsi, la fibration de M est triviale : Γ contient donc un groupe de surface $\bar{\Gamma}_1$ sur lequel la projection de Γ sur son quotient $\bar{\Gamma}$ est injective.

Notons $\bar{\rho}_a$ la composition de ρ_a avec la projection de $GL(2, \mathbb{R})$ sur $SL(2, \mathbb{R})$. La restriction de $\bar{\rho}_a$ à $\bar{\Gamma}_1$ se relève en un morphisme de $\bar{\Gamma}_1$ dans le revêtement universel $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$ (ce relèvement est la restriction à $\bar{\Gamma}_1$ de la composition de $\tilde{\rho}_a$ avec la projection de $\widetilde{GL}(2, \mathbb{R})$ sur $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$). Ceci signifie que la classe d'Euler de $\bar{\rho}_a$ est nulle. En particulier, $\bar{\rho}_a(\bar{\Gamma}_1)$ n'est pas un sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$. Soit G_0 la composante neutre de l'adhérence de $\bar{\rho}_a(\bar{\Gamma}_1)$ dans $SL(2, \mathbb{R})$. D'après ce qui précède, G_0 n'est pas trivial. Comme $\bar{\Gamma}_1$ ne contient pas de sous-groupe résoluble distingué non trivial, G_0 n'est pas résoluble. Il s'ensuit que G_0 est $SL(2, \mathbb{R})$ tout entier, i.e., $\rho_a(\bar{\Gamma})$ est dense dans $SL(2, \mathbb{R})$. Le groupe dérivé $\rho_a([\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_1])$ est donc lui aussi dense dans $SL(2, \mathbb{R})$. En particulier, il contient un élément elliptique. On en déduit, quitte à conjuguer ρ_a dans $GL(2, \mathbb{R})$, que $[\bar{\Gamma}_1, \bar{\Gamma}_1]$ contient un élément γ_1 tel que $\rho_a(\gamma_1)$ soit une rotation de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

où θ est un élément de $]0, 2\pi[$. Soit H_1 le sous-groupe de Γ engendré par h et γ_0 . Comme $\rho_a(h)$ est une homothétie non-triviale et $\rho_a(\gamma_0)$ une rotation non-triviale, on voit aisément que l'action de $\tilde{\rho}_a(H_1)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ est libre et proprement discontinue. L'action de H_1 sur Q_Φ est donc elle aussi libre et proprement discontinue. D'après le corollaire 3.4, Φ est une fibration projective. Mais nous avons initialement observé que ceci n'était pas possible. \square

Remarquons que le cas $\rho(h) = \sigma_0$ se produit ; par exemple, pour les flots horocycliques sur les quotients de $SL(2, \mathbb{R})$ par un sous-groupe discret cocompact contenant $-\text{id}$. Le corollaire suivant permet néanmoins de se ramener au cas où $\rho(h)$ est trivial :

COROLLAIRE 4.3. — À un revêtement d'indice fini près, l'holonomie de h est triviale.

Preuve. — Comme M est un fibré en cercles, son groupe fondamental admet la présentation suivante :

$$\langle a_i, b_1, \dots, a_g, b_g, h \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = h^e, [a_i, h] = 1, [b_i, h] = 1 \rangle.$$

Le genre g est supérieur ou égal à 2. Montrer le corollaire revient à montrer que Γ contient un sous-groupe d'indice fini qui ne contient que des puissances paires de h . En effet, le revêtement fini de M associé à ce sous-groupe est un fibré en cercles dont les fibres sont relevées des fibres de la fibration de M sur Σ . L'holonomie de ces fibres pour le flot transversalement projectif relevé sont alors des puissances paires de $\rho(h) = \sigma_0$; elle est donc bien triviale.

Si la classe d'Euler e est nulle, le sous-groupe engendré par les a_i , les b_i et h^2 convient. Sinon, le sous-groupe engendré par les a_i et les b_i est d'indice fini. En nous restreignant à ce sous-groupe, nous nous ramenons au cas $e = 1$. Considérons maintenant le groupe diédral D_2 des isométries d'un carré du plan. Il est engendré par deux symétries axiales, l'une, que nous notons s_1 , admettant pour axe une diagonale du carré, l'autre, s_2 , d'axe la médiatrice d'un des côtés. Le produit $s_1 s_2$ est une rotation d'angle $\pm \frac{1}{2} \pi$; le carré de ce produit est donc $-\text{id}$; en particulier, il est dans le centre de D_2 . On en déduit l'existence d'un morphisme κ de Γ vers D_2 tel que :

- lorsque g est impair : κ envoie chaque a_i sur s_1 , chaque b_i sur s_2 , et h sur $-\text{id}$;
- lorsque g est pair, κ envoie a_1 et b_1 sur id , chaque a_i ($i \geq 2$) sur s_1 , chaque b_i ($i \geq 2$) sur s_2 , et h sur $-\text{id}$.

Le noyau de κ est alors un sous-groupe d'indice fini de Γ qui ne contient que les puissances paires de h . □

5. Injectivité du morphisme d'holonomie.

Dorénavant, dans tout ce qui suit, nous supposons que Φ n'est pas une fibration projective.

D'après le corollaire 4.3, on peut supposer que ρ passe au quotient en un morphisme $\hat{\rho} : \bar{\Gamma} \rightarrow \text{SL}(3, \mathbb{R})$.

PROPOSITION 5.1. — *Le morphisme $\hat{\rho}$ est injectif.*

Cette proposition, et la preuve que nous allons en donner, sont les analogues de la proposition 2.1.2 de [13]. Elle provient du lemme suivant : soit N le noyau du morphisme $\hat{\rho} : \Gamma \rightarrow \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$.

LEMME 5.2. — *Le quotient de l'action de N sur Q_Φ muni de la topologie quotient est une surface séparée au sens de Hausdorff, de groupe fondamental isomorphe à N .*

Voyons pourquoi le lemme implique la proposition : comme N contient H , il est à centre non-trivial. Étant le groupe fondamental d'une surface, s'il n'est pas cyclique, il est isomorphe à \mathbb{Z}^2 , et la surface est un tore. L'application \mathcal{D} passe en un homéomorphisme local entre la surface quotient de Q_Φ par N et \mathbb{RP}^2 . La surface ne peut donc pas être un tore : N est donc cyclique. Comme h est indivisible dans Γ , N et H sont confondus.

Avant d'aborder la preuve du lemme 5.2, introduisons de nouvelles notations et conventions : le quotient de Q_Φ par H est un anneau, que nous notons A_Φ . Nous le munissons une fois pour toute d'une orientation. Nous notons $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow A_\Phi$ la composition de $\pi : \tilde{M} \rightarrow Q_\Phi$ suivie de la projection de Q_Φ sur A_Φ . Nous notons $\hat{\mathcal{D}}$ et $\hat{\mathcal{D}}^s$ les homéomorphismes locaux de A_Φ vers \mathbb{RP}^2 et S^2 induits par \mathcal{D} et \mathcal{D}^s . L'anneau A_Φ admet deux bouts. Reprenant les conventions de [13], nous appelons *Nord* l'un de ces bouts, et *Sud* l'autre bout. Quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que l'action de Γ préserve chaque bout de l'anneau. Tout plongement propre de la droite réelle dans A_Φ envoie chaque bout de \mathbb{R} sur un bout de A_Φ . Si les deux bouts de \mathbb{R} sont envoyés dans les deux bouts différents de A_Φ nous disons que le plongement est *vertical*. Sinon, il est dit *Nord-Nord* ou *Sud-Sud*, selon la nature du bout de A_Φ dans lequel le plongement envoie les deux bouts de \mathbb{R} . Si $\hat{\mathcal{D}}(d)$ est une droite ou demi-droite, chaque bout de d correspond à une extrémité de $\hat{\mathcal{D}}(d)$. Nous appelons *extrémité Sud de $\hat{\mathcal{D}}(d)$* celle correspondant au bout Sud, et *extrémité Nord* celle correspondant au bout Nord.

Si d et d' sont deux droites verticales disjointes, leur union borde dans A_Φ deux domaines chacun homéomorphe au disque. Un de ces domaines est dit à *l'Ouest de d relativement à d'* , l'autre à *l'Est de d relativement à d'* , selon une convention qui doit paraître évidente à toute personne disposant de notions élémentaires en géographie.

Un sous-anneau ouvert A de A_Φ est dit *essentiel* si l'inclusion de A dans A_Φ est une équivalence d'homotopie. Une courbe fermée simple dans un anneau est dite aussi *essentielle* si elle n'est pas homotopiquement triviale dans l'anneau. Observons qu'une courbe fermée simple essentielle dans un sous-anneau essentiel de A_Φ est essentielle dans A_Φ . De plus, une courbe essentielle dans un anneau rencontre tous les plongements verticaux de \mathbb{R} dans l'anneau. Le complémentaire d'une telle courbe fermée simple dans A_Φ est formée de deux composantes connexes, dont l'une, que nous appelons *composante Nord*, contient une suite de points qui s'accumule sur le bout Nord de A_Φ , et dont l'autre, *la composante Sud*, contient une suite de points qui s'accumule sur le bout Sud. On peut alors choisir les bouts Nord et Sud de A dans A_Φ en prescrivant que la composante Nord de c dans A soit contenue dans la composante Nord de c dans A_Φ . Ce choix est clairement indépendant de celui de la courbe fermée simple essentielle dans A . La frontière de A dans A_Φ se partitionne en deux sous-parties Nord et Sud : la frontière Nord (resp. Sud) est l'ensemble des points dans la frontière de A qui appartiennent aussi à la frontière de la composante Nord (resp. Sud) d'une courbe fermée simple essentielle de A . Cette notion est là encore indépendante du choix de la courbe fermée simple.

Preuve de 5.2. — Pour tout élément x de Q_Φ , soit U_x une assiette de \mathcal{D} contenant x . Comme l'action de N sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ est triviale, il découle du lemme des assiettes emboîtées que si U_x rencontre nU_x pour un élément n de N , alors la restriction de n à U_x est l'identité. L'ensemble des points fixes de n est donc un ouvert. Étant fermé, et Q_Φ étant connexe, l'action de n sur Q_Φ est alors triviale. Si n était non trivial, ceci signifierait que toutes les orbites du flot radial sont périodiques. D'après la proposition 3.1, ceci n'est possible que si Φ est une fibration projective, ce que nous avons exclu.

On en déduit que l'action de N sur Q_Φ est libre, et que tout élément du quotient de Q_Φ par N contient un voisinage homéomorphe à un ouvert du plan : la projection de U_x . Le quotient est donc muni d'un atlas qui en fait une surface, éventuellement non Hausdorff. Soit x et y deux éléments de Q_Φ , dont les projections dans le quotient ne sont pas séparées par la topologie quotient. Comme \mathcal{D} est N -invariant, et que $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ est Hausdorff, x et y ont même image par \mathcal{D} . On peut donc prendre deux assiettes connexes U_x et U_y de \mathcal{D} , contenant respectivement x et y , et ayant même image par \mathcal{D} . Par ailleurs, il existe un élément n de N tel que nU_y rencontre U_x . Alors, nU_y et U_x ont même image par \mathcal{D} . D'après le lemme des assiettes emboîtées,

U_x et nU_y sont confondus. Donc, $x = ny$. Ceci montre comme voulu que le quotient de Q_Φ par N est séparé au sens de Hausdorff.

Pour achever la preuve du lemme, il suffit de voir que N est le groupe fondamental du quotient. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'application passage au quotient est un revêtement. En effet, comme Q_Φ est simplement connexe, il s'agit alors du revêtement universel, et par définition même de l'espace quotient, le groupe de Galois de ce revêtement est N . Or, le fait que ce soit un revêtement est clair puisque les nU_x définis ci-dessus sont deux-à-deux disjoints. \square

COROLLAIRE 5.3. — Soient γ_1 et γ_2 deux éléments de $\bar{\Gamma}$. On suppose que $\hat{\rho}(\gamma_1)$ et $\hat{\rho}(\gamma_2)$ préservent une même ligne projective, et que cette ligne projective contient un point fixe commun à $\hat{\rho}(\gamma_1)$ et $\hat{\rho}(\gamma_2)$ (ceci se produit par exemple si $\hat{\rho}(\gamma_1)$ et $\hat{\rho}(\gamma_2)$ ont deux points fixes en commun). Alors, γ_1 et γ_2 appartiennent à un même sous-groupe cyclique de $\bar{\Gamma}$.

Preuve. — Le groupe des transformations projectives préservant une ligne projective et un point contenu dans cette ligne projective est résoluble. Le corollaire découle alors du lemme 5.1, et du fait que les sous-groupes résolubles de $\bar{\Gamma}$ sont cycliques. \square

6. Existence d'éléments loxodromiques.

PROPOSITION 6.1. — Le groupe d'holonomie $\rho(\Gamma)$ contient un élément loxodromique.

Rappelons qu'un élément de $SL(3, \mathbb{R})$ est dit loxodromique si ses trois valeurs propres sont de modules deux à deux différents. En particulier, toutes ses valeurs propres sont réelles.

Pour montrer la proposition 6.1, nous utiliserons le théorème suivant (cf. appendice de [5]) :

THÉORÈME (Y. Benoist). — Soit G la composante connexe de l'identité d'un sous-groupe algébrique réductif de $SL(n, \mathbb{R})$. Si G contient un élément loxodromique, il en est de même pour tout sous-groupe Zariski-dense de G . \square

Preuve de 6.1. — Soit G_0 la composante neutre de l'adhérence Zariski de $\rho(\Gamma)$ dans $SL(3, \mathbb{R})$. Il contient un sous-groupe d'indice fini

de $\rho(\Gamma)$. Il n'est donc pas résoluble. D'après le théorème 6.2, il nous suffit de montrer que G_0 contient un élément loxodromique.

Supposons dans un premier temps que G_0 est réductif : son groupe dérivé S est semi-simple. Il découle alors de la classification des algèbres de Lie semi-simples que S est conjugué dans $SL(3, \mathbb{R})$ à l'un des groupes suivants :

- $SL(3, \mathbb{R})$ tout entier,
- $SO(3)$,
- $SO_0(2, 1)$,
- $SL(2, \mathbb{R}) \times \{1\} \subset \text{Aff}(2, \mathbb{R})$.

Pour étayer succinctement cette affirmation, nous invoquons l'autorité de [22], lemma 2.6 (ii).

Ainsi, G_0 contient un élément loxodromique, sauf dans le cas $S = SO(3)$. Si on se trouve dans ce cas exceptionnel, le feuilletage Φ est en fait transversalement riemannien. D'après le théorème III-A-1 de [14], soit Φ est une fibration projective, soit M est à groupe fondamental résoluble : nous avons exclu ces cas de figure.

Passons maintenant au cas non-réductif : alors, il existe un plan ou une droite G_0 -invariant. Dans le premier cas, les éléments du groupe dérivé $[G_0, G_0]$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} & * \\ A & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où A est un élément de $SL(2, \mathbb{R})$. Dans le second cas, ils sont de la forme

$$\begin{pmatrix} & 0 \\ A & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\rho([\Gamma, \Gamma])$ n'est pas virtuellement résoluble, qu'il est à indice fini près contenu dans son adhérence Zariski, et que son adhérence Zariski est $[G_0, G_0]$, on obtient qu'il existe un élément γ pour lequel $\rho(\gamma)$ a l'une des formes ci-dessus et où la matrice A correspondante est de plus hyperbolique. $\rho(\gamma)$ est alors loxodromique comme voulu. \square

Remarque 6.3. — Quand le groupe de monodromie préserve un plan, l'élément loxodromique que nous avons exhibé dans le lemme 6.1 est tel

que la ligne $\rho(\Gamma)$ -invariante soit précisément celle contenant les points fixes attractifs et répulsifs. Dans le cas où le groupe de monodromie préserve une droite, l'élément loxodromique exhibé est tel que la droite $\rho(\Gamma)$ -invariante est la direction propre associée à la valeur propre de module intermédiaire.

7. Une guirlande de secteurs invariants.

Dans tout le reste de cet article, γ_0 désigne un élément de Γ dont l'image par ρ est loxodromique. En remplaçant γ_0 par son carré si nécessaire (mais nous ne le ferons pas toujours, cf. remarque 7.2), on peut supposer qu'il est positivement loxodromique, i.e., que les valeurs propres de $\rho(\gamma_0)$ sont positives. Dans une base convenable, $\rho(\gamma_0)$ est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad 0 < \lambda < \mu < \nu.$$

Son action sur \mathbb{RP}^2 admet trois points fixes : un répulsif, que nous noterons x_1 (il s'agit de $[1; 0; 0]$), un attractif, noté x_3 (c'est $[0; 0; 1]$), le dernier x_2 étant de type selle (il s'agit de $[0; 1; 0]$). Les droites projectives reliant deux d'entre eux sont exactement les seules droites $\rho(\gamma_0)$ -invariantes. Nous appelons *ligne $\rho(\gamma_0)$ -principale* et notons λ_2 la droite projective passant par x_1 et x_3 ; *ligne $\rho(\gamma_0)$ -stable* celle passant par x_2 et x_1 (notée λ_3); et *$\rho(\gamma_0)$ -instable* celle passant par x_2 et x_3 (notée λ_1) (nous nous autorisons à enlever le préfixe $\rho(\gamma_0)$ - si aucune confusion n'est à craindre). Le complémentaire des points fixes de $\rho(\gamma_0)$ dans chacune de ces lignes $\rho(\gamma_0)$ -invariantes est appelé *demi-droite invariante*. Elle est dite *stable*, *instable* ou *principale* selon la nature de la ligne invariante qui la contient. La ligne $\rho(\gamma_0)$ -stable (resp. $\rho(\gamma_0)$ -instable) privée de x_1 (resp. x_3) est appelée *droite $\rho(\gamma_0)$ -stable* (resp. *$\rho(\gamma_0)$ -instable*). Une composante connexe du complémentaire des lignes $\rho(\gamma_0)$ -invariantes est un $\rho(\gamma_0)$ -triangle convexe. Nous notons $\pm x_i^s$ les relevés des x_i dans \mathbf{S}^2 , et λ_i^s les grands cercles relevés des λ_i dans \mathbf{S}^2 .

Une ligne dans Q_Φ est dite virtuellement γ_0 -stable (resp. virtuellement γ_0 -instable, virtuellement γ_0 -principale) si son image par \mathcal{D} est contenue dans une ligne $\rho(\gamma_0)$ -stable (resp. $\rho(\gamma_0)$ -instable, $\rho(\gamma_0)$ -principale). Une telle ligne est une (demi-)droite stable (resp. instable, principale) si son image par \mathcal{D} est une (demi-)droite stable (resp. instable, principale) (le préfixe γ_0 - est lui aussi facultatif dans nos notations). Si elle est γ_0 -invariante, nous

omettons le terme « virtuellement » et disons que la ligne (ou droite ou demi-droite) est γ_0 -stable (ou γ_0 -instable, ou γ_0 -principale). Une composante connexe du complémentaire dans Q_Φ de l'union des lignes virtuellement γ_0 -invariantes est un γ_0 -triangle. Il est dit *complet* si c'est une assiette de \mathcal{D} et que son image par \mathcal{D} est un $\rho(\gamma_0)$ -triangle convexe. C'est un *triangle* γ_0^k -invariant s'il est préservé par γ_0^k .

Nous aurons aussi besoin de considérer le feuilletage singulier Ψ de A_Φ dont les feuilles régulières sont envoyées par $\widehat{\mathcal{D}}$ dans les orbites du flot de \mathbb{RP}^2 défini par le sous-groupe à un paramètre suivant :

$$\widehat{\Psi}^t = \begin{pmatrix} \lambda^t & 0 & 0 \\ 0 & \mu^t & 0 \\ 0 & 0 & \nu^t \end{pmatrix}.$$

Le temps 1 de ce flot est $\rho(\gamma_0)$, ce qui montre que Ψ est γ_0 -invariant.

Pour tout entier positif k , nous appelons γ_0^k -secteur toute assiette T de \mathcal{D} vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) T est contenu dans un γ_0 -triangle γ_0^k -invariant,
 - 2) T est union de feuilles de Ψ qui sont γ_0^k -invariantes,
 - 3) le bord de T dans A_Φ contient au moins deux γ_0 -demi-droites.
- Observons que d'après le lemme de fermeture des assiettes, ces demi-droites sont γ_0^k -invariantes.

Nous étendons cette terminologie, ces qualificatifs et ces conventions à S^2 et A_Φ de manière évidente.

Enfin, nous notons H_0 le groupe engendré par H et γ_0 . Il est isomorphe à \mathbb{Z}^2 .

Le but de cette section est de montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 7.1. — *Il existe un entier positif k et une famille finie T_1, \dots, T_n de γ_0^k -secteurs tels que :*

- les adhérences de deux membres T_i et T_j sont disjointes, sauf lorsque i et j sont deux indices successifs, auquel cas l'intersection entre ces deux adhérences est une demi-droite γ_0^k -invariante;
- l'union des T_i et des frontières communes à T_j, T_{j+1} est un sous-anneau essentiel γ_0 -invariant de A_Φ .

Remarque 7.2. — Dans le reste de cet article (à l'exception notable du corollaire 9.7), lorsque nous utiliserons la proposition 7.1, nous nous ramènerons le plus souvent au cas $k = 1$ en remplaçant γ_0 par γ_0^k .

Remarque 7.3. — Cet énoncé est très proche de celui du lemme page 8 de [20], dont nous reprenons certains arguments.

La preuve de cette proposition repose sur l'étude des feuilles de Ψ qui sont préservées par une puissance de γ_0 . La principale difficulté est de montrer qu'il existe effectivement de telles feuilles! Nous commençons par traiter le cas particulier où l'action de γ_0 est propre.

LEMME 7.4. — *Supposons qu'il existe un sous-anneau essentiel A_0 qui soit γ_0 -invariant et sur lequel γ_0 agit librement et proprement discontinûment. Alors, A_0 est formé de γ_0^k -secteurs satisfaisant toutes les conditions exigées à la proposition 7.1.*

Preuve. — Le quotient de A_0 par γ_0 est un tore T_0 , naturellement muni d'une structure projective réelle, dont l'holonomie est la restriction de ρ à H_0 . Le lemme est un corollaire de la classification des tores projectifs (voir par exemple [8]), mais en guise d'illustration des arguments à venir, nous préférons en esquisser une preuve rapide.

Soit \tilde{A}_0 l'unique relevé H_0 -invariant de A_0 dans Q_Φ . Soit \mathcal{D}_0 la restriction de \mathcal{D} à \tilde{A}_0 .

Remarquons tout d'abord que l'image de \mathcal{D}_0 évite les points fixes de $\rho(\gamma_0)$. En effet, pour chaque indice $i = 1, 2, 3$, considérons le feuilletage de $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ dont les feuilles régulières sont les droites projectives contenant x_i . C'est un feuilletage singulier dont toutes les singularités sont d'indice $+1$. Par ailleurs, ce feuilletage est $\rho(\gamma_0)$ -invariant. Il induit donc un feuilletage sur T_0 dont toutes les singularités sont d'indice $+1$. D'après la formule de l'indice de Poincaré-Hopf, ce feuilletage est sans singularité, ce qui prouve notre affirmation.

Soit $A \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ le groupe des matrices diagonales à coefficient positif : comme T_0 est compact, et que le centralisateur de $\rho(H_0)$ contient A , il existe une action de A sur \tilde{A}_0 pour laquelle \mathcal{D}_0 est équivariante (l'action de A sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ étant l'action projective usuelle). Comme l'image de \mathcal{D}_0 évite les points fixes de $\rho(\gamma_0)$, les orbites de cette action sont toutes de dimension au moins un. Les lignes virtuellement γ_0 -invariantes dans \tilde{A}_0 sont précisément les orbites unidimensionnelles de cette action de A . Elles

se projettent dans le tore T_0 en des courbes fermées simples deux à deux disjointes.

Soit U une orbite ouverte de cette action : comme l'action de A sur chacune de ses orbites ouvertes dans $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ est libre et transitive, il en est de même pour son action sur U : l'ouvert U est une assiette de \mathcal{D}_0 . Remarquons que d'après le lemme 3.8 (et le corollaire 4.3) aucun élément de H ne préserve U ; en particulier, U n'est pas \tilde{A}_0 tout entier. D'après le lemme de fermeture des assiettes, la restriction de \mathcal{D}_0 à l'adhérence de U est injective. Par ailleurs, le bord de U est formé d'orbites unidimensionnelles. On en déduit que U se projette dans T_0 en un anneau bordé par deux courbes fermées simples disjointes. Il en découle que le tore T_0 est obtenu en recollant le long de leurs bords les quelques anneaux provenant des diverses orbites ouvertes. Il existe donc un élément $\gamma_0^k h^\ell$ de H_0 qui préserve chaque orbite ouverte de A , l'entier k étant non-nul. Le lemme 7.4 s'en déduit aisément par projection dans A_0 . \square

LEMME 7.5. — *Il existe un sous-anneau essentiel A_0 de A_Φ qui est γ_0 -invariant et sur lequel γ_0 agit librement.*

Preuve. — Soit x un point k -périodique de γ_0 (s'il n'y en a pas, il n'y a rien à démontrer). D'après le lemme 3.2, ce point périodique est de type selle, i.e., préimage par \hat{D} de x_2 . Issues de x il y a quatre demi-droites stables ou instables qui, d'après le lemme 3.2, ne contiennent que x_0 dans leur adhérence. En particulier, chacune de ces demi-droites s'accumule sur le bord de A_Φ . Parmi elles, il y en a au moins deux qui sont successives pour l'ordre cyclique sur les rayons issus de x , et qui s'accumulent sur la même composante du bord de A_Φ . Le complémentaire de l'union de x et de ces deux demi-droites admet deux composantes connexes : l'une, que notons $A(x)$, est un sous-anneau essentiel, et l'autre, $D(x)$, est un disque. Nous pouvons effectuer ce choix de manière équivariante, i.e., de sorte que $D(\gamma_0(x)) = \gamma_0 D(x)$. Pour toute paire de points γ_0 -périodiques x et x' , tout point d'intersection entre les bords des disques $D(x)$ et $D(x')$ est point fixe d'une puissance de γ_0 , ce qui implique que x et x' sont égaux. Deux disques $D(x)$ et $D(x')$ sont donc soit confondus, soit disjoints, soit emboîtés l'un dans l'autre. Comme toute courbe de Jordan essentielle ne peut rencontrer qu'un nombre fini de demi-droites virtuellement γ_0 -invariantes, pour un disque donné $D(x)$, il n'y a qu'un nombre fini de disques $D(x')$ qui le contiennent. On en déduit que tout compact de A_Φ ne rencontre qu'un nombre fini de $D(x)$, puis que l'intersection de tous les anneaux $A(x)$ est

un sous-anneau essentiel γ_0 -invariant de A_Φ . Cette intersection est alors le sous-anneau essentiel A_0 recherché dans lequel γ_0 agit librement \square

Nous nous intéressons maintenant aux γ_0 -triangles dans Q_Φ (ou A_Φ) qui, rappelons-le, sont les composantes connexes des préimages par \mathcal{D} (ou $\widehat{\mathcal{D}}$) des $\rho(\gamma_0)$ -triangles. Plus précisément, nous allons nous préoccuper des γ_0 -triangles qui sont préservés par une puissance de γ_0 :

LEMME 7.6. — *Pour tout sous-anneau essentiel $A \subset A_\Phi$ qui est γ_0 -invariant, il existe un entier k non-nul pour lequel γ_0^k préserve au moins un γ_0 -triangle dans A . Par ailleurs, aucun γ_0 -triangle dans A_Φ ne peut être préservé par un élément non-trivial de H .*

Preuve. — Tout compact de A_Φ ne rencontre qu'un nombre fini de γ_0 -triangles. Donc, si l'action de γ_0 sur l'ensemble des γ_0 -triangles de A est libre, son action sur A est libre et proprement discontinue. Ceci contredit le lemme 7.4.

Supposons maintenant qu'une puissance h^ℓ de h préserve un γ_0 -triangle dans Q_Φ . Alors, la projection de ce γ_0 -triangle dans A_Φ contient un lacet qui n'est pas homotopiquement trivial. On peut trouver au voisinage de ce lacet — et donc dans le même γ_0 -triangle — une courbe de Jordan c qui soit essentielle dans A_Φ . Comme l'action de $\rho(\gamma_0)$ restreinte à un $\rho(\gamma_0)$ -triangle est libre et propre, tout itéré $\gamma_0^k c$ est disjoint de c dès que k suffisamment grand. L'union de c et de $\gamma_0^k c$ est alors le bord d'un sous-anneau fermé essentiel de A dont l'union des γ_0^k -itérés est un sous-anneau essentiel γ_0^k -invariant et sur lequel γ_0^k agit librement et proprement discontinûment. Ce sous-anneau contient une courbe de Jordan essentielle (en l'occurrence, c !) qui ne rencontre aucune ligne virtuellement γ_0 -invariante. Ceci contredit le lemme 7.4 appliqué à γ_0^k . \square

Quitte à remplacer γ_0 par une puissance adéquate (voir remarque 7.2), on peut supposer qu'il existe des triangles γ_0 -invariants dans A_0 . Remarquons que la frontière d'un triangle γ_0 -invariant dans A_0 n'est pas quelconque : chacune de ses composantes connexes est une 1-variété fermée à coins, dont l'image par $\widehat{\mathcal{D}}_0$ est contenue dans la frontière d'un $\rho(\gamma_0)$ -triangle. Nous appelons *ligne brisée* une telle sous-variété de A_0 .

LEMME 7.7. — *Il existe un sous-anneau essentiel A_1 de A_0 qui est γ_0 -invariant et pour lequel le bord de tout triangle γ_0 -invariant et contenu dans A_1 admet deux composantes connexes qui sont des lignes verticales γ_0 -invariantes éventuellement brisées.*

Preuve. — Il se peut qu'un triangle γ_0 -invariant T de A_0 soit de la forme suivante : T admet dans son bord une composante connexe ℓ qui est soit une ligne brisée virtuellement γ_0 -invariante, soit une ligne virtuellement γ_0 -invariante, et qui soit de type Nord-Nord ou Sud-Sud, et telle que T soit dans la composante connexe $D(\ell)$ de $A_0 \setminus \ell$ qui est homéomorphe au disque (l'autre composante connexe de $A_0 \setminus \ell$ est alors un sous-anneau essentiel de A_0).

Remarquons tout d'abord que dans cette situation, ℓ , et par suite $D(\ell)$, est γ_0 -invariante. En effet, $\gamma_0\ell$ est une composante connexe de ∂T , qui est contenue dans $D(\ell)$; donc, $\gamma_0\ell$ est soit égal à ℓ , et nous avons fini ; soit contenu dans l'ouvert $D(\ell)$. Dans ce dernier cas, $\gamma_0\ell$ est nécessairement une ligne, brisée ou non, de même type Nord-Nord ou Sud-Sud que ℓ . C'est donc le bord d'un disque contenu dans $D(\ell)$, qui ne peut être que $\gamma_0 D(\ell)$ puisqu'au plus une composante de $A_0 \setminus \gamma_0\ell$ est homéomorphe au disque. Donc, dans ce cas, l'adhérence de $\gamma_0 D(\ell)$ est contenue dans $D(\ell)$. Les $\gamma_0^{-n} D(\ell)$ pour n positif forment donc une suite de disques strictement croissante pour l'inclusion. Considérons une courbe de Jordan essentielle c dans A_0 rencontrant $D(\ell)$: elle rencontre tous les $\gamma_0^{-n} D(\ell)$ sans toutefois être contenue dans l'un d'eux puisqu'elle est essentielle. Donc, c rencontre tous les $\gamma_0^{-n}\ell$; or, étant compact, elle ne peut rencontrer la préimage par \mathcal{D}_0 des droites $\rho(\gamma_0)$ -invariantes qu'en un nombre fini de points : deux au moins des $\gamma_0^{-n}\ell$ doivent donc être égaux, ce qui contredit le fait que les $\gamma_0^{-n} D(\ell)$ sont strictement emboîtés les uns dans les autres.

Nous affirmons maintenant que deux disques de ce type sont soit d'adhérences disjointes, soit emboîtés l'un dans l'autre, soit confondus. Plus précisément, nous affirmons que si T et T' sont deux triangles γ_0 -invariants contenus respectivement dans deux disques $D(\ell)$ et $D(\ell')$ où ℓ, ℓ' sont des composantes connexes de respectivement $\partial T, \partial T'$, alors soit ℓ et ℓ' sont égaux (et donc $T = T'$), soit ℓ et ℓ' sont disjointes.

Montrons-le : supposons que $\ell \cap \ell'$ n'est pas vide. Comme ℓ et ℓ' sont γ_0 -invariants, il en est de même pour leur intersection. Comme l'action de γ_0 sur A_0 est libre, ses orbites dans ℓ (ou dans ℓ') relient les deux bouts de ℓ (et donc de ℓ'). Il s'ensuit que ℓ et ℓ' sont simultanément Nord-Nord ou Sud-Sud. Donc, $D(\ell)$ et $D(\ell')$ ne sont pas disjointes.

Par ailleurs, comme l'adhérence de $D(\ell)$ n'est pas contenue dans $D(\ell')$, la frontière de $D(\ell) \cap D(\ell')$ dans A_0 ne peut coïncider avec sa frontière dans $D(\ell')$: il existe donc un élément x de $\ell \cap \ell'$ adhérent à $D(\ell) \cap D(\ell')$. Or, il est aisé de voir que tout point de ℓ (resp. ℓ') admet un voisinage U

tel que $U \cap D(\ell)$ (resp. $U \cap D(\ell')$) est égal à $U \cap T$ (resp. $U \cap T'$). Donc, comme x admet des points de $D(\ell) \cap D(\ell')$ arbitrairement proches, on en déduit que $T \cap T'$ est non vide, et donc $T = T'$. L'égalité $\ell = \ell'$ en découle.

Comme lors de la preuve du lemme 7.5, en ôtant les adhérences de tous ces disques, on obtient un sous-anneau γ_0 -invariant A_1 . Soit maintenant un triangle γ_0 -invariant T dans A_1 . Soit \tilde{T} un de ces relevés dans \tilde{A}_0 : il existe un entier ℓ pour lequel \tilde{T} est $\gamma_0 h^\ell$ -invariant. D'après le lemme 7.6, ce γ_0 -triangle est disjoint de son image par h . Il existe donc une et une seule composante connexe $\tilde{\ell}$ de $\partial\tilde{T}$ qui déconnecte \tilde{T} de $h\tilde{T}$. Comme $h\tilde{T}$ est $\gamma_0 h^\ell$ -invariant, il en est de même pour $\tilde{\ell}$. Pour la même raison, l'unique composante $\tilde{\ell}'$ de $\partial\tilde{T}$ qui déconnecte \tilde{T} de $h^{-1}\tilde{T}$ est elle aussi $\gamma_0 h^\ell$ -invariante.

Pour conclure, il suffit de voir que les projections de $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}'$ dans A_0 sont en fait dans A_1 et que ces projections sont des lignes disjointes et verticales (peut-être brisées, mais cela n'a pas d'incidence sur l'argument). L'égalité éventuelle entre $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}'$ signifierait que $\tilde{\ell}$ se projette dans A_0 en une ligne non-verticale qui découpe A_0 en deux parties, l'une homéomorphe au disque, et l'autre étant un sous-anneau essentiel ; et que le triangle T est contenu dans la partie homéomorphe au disque. Mais ceci est interdit par construction même de A_1 ! Donc, $\tilde{\ell}$ et $\tilde{\ell}'$ sont disjointes. Comme aucune puissance de h ne préserve \tilde{T} (cf. lemme 7.6), leurs projections dans A_1 sont deux lignes γ_0 -invariantes disjointes. La verticalité de ces deux lignes invariantes provient du fait que $\tilde{\ell}$ (resp. $\tilde{\ell}'$) déconnecte ses itérés respectifs par h et h^{-1} . \square

LEMME 7.8. — *Les composantes connexes γ_0 -invariantes et verticales d'un triangle γ_0 -invariant contenu dans A_1 sont des demi-droites.*

Preuve. — Soient T un triangle γ_0 -invariant contenu dans A_1 et ℓ, ℓ' les deux composantes connexes verticales γ_0 -invariantes du bord. Nous étudions la restriction Ψ_T à T du feuilletage Ψ . Il s'agit d'un feuilletage régulier, qui est envoyé par \widehat{D} sur le feuilletage $\widehat{\Psi}$ restreint à un $\rho(\gamma_0)$ -triangle T_0 . Ce feuilletage restreint à T_0 ne contient pas de transversale fermée : il en est donc de même pour Ψ_T . Remarquons que comme chaque feuille régulière de $\widehat{\Psi}$ est homéomorphe à \mathbb{R} , la restriction de \widehat{D} à chaque feuille de Ψ_T est injective. Nous affirmons que chaque feuille de Ψ_T déconnecte T , i.e., que son complémentaire dans T admet deux composantes connexes. Pour ce faire, considérons la composante connexe U_T de $A_1 \setminus (\ell \cup \ell')$ contenant T : c'est un ouvert homéomorphe à \mathbb{R}^2 . Toute feuille de Ψ_T est une sous-variété fermée plongée dans U_T . La topologie du plan assure qu'elle doit déconnecter U_T , et par suite, T également.

Ces deux propriétés de Ψ_T (pas de lacet transverse, et chaque feuille déconnecte) assurent que l'espace des feuilles de Ψ_T est une 1-variété simplement connexe, mais qui, *a priori*, n'est pas séparée au sens de Hausdorff. Pour bien saisir les arguments à suivre, une certaine familiarité avec ce genre d'espace topologique est souhaitable. Nous utiliserons des résultats de [1].

Nous notons \mathcal{L}_T l'espace de feuilles de Ψ_T . Nous nous intéressons à la dynamique induite par γ_0 sur \mathcal{L}_T . Les composantes ℓ et ℓ' imposent la forme du feuilletage Ψ_T dans la zone de T près d'elles. Si ℓ est une demi-droite, les feuilles de Ψ_T qui lui sont proches sont γ_0 -invariantes. L'objectif de ce lemme est de montrer que ℓ (ainsi que ℓ') est effectivement une demi-droite, ce qui revient à exclure le cas où ℓ contient des préimages des points fixes de $\rho(\gamma_0)$. Supposons donc que ce cas se produit. Soit x une préimage d'un point fixe de $\rho(\gamma_0)$; disons de x_1 . Comme nous nous sommes restreints à $A_1 \subset A_0$, la ligne (peut-être brisée) ℓ ne contient pas de points fixes. Le segment τ contenu dans ℓ et d'extrémités x et $\gamma_0 x$ se projette donc par \widehat{D} en le bord tout entier du triangle T_0 . De plus, l'union de ces γ_0 -itérés est ℓ tout entier. On en déduit que ℓ est véritablement une ligne brisée, et que la restriction de \widehat{D} à ℓ est un revêtement cyclique infini au-dessus de ∂T_0 . Or, les feuilles de $\widehat{\Psi}$ contenues dans T_0 sont toutes des « segments » qui joignent x_1 à x_3 . On en déduit la forme de Ψ_T près de ℓ : notons x_i^n les \widehat{D} -préimages de x_i dans ℓ ; nous les indiquons de sorte que, pour chaque indice n , leur placement par rapport à l'ordre sur $\ell \approx \mathbb{R}$ soit tel que

$$x_3^{n-1} < x_1^n < x_2^n < x_3^n < x_1^{n+1}.$$

Alors, pour chaque indice n , il existe des feuilles de Ψ_T qui relient x_3^n à x_1^n , et d'autres qui relient x_3^n à x_1^{n+1} (voir la figure 2).

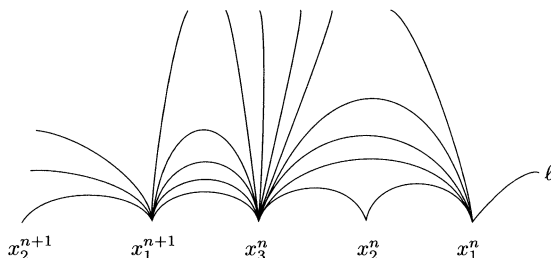


Figure 2. Les feuilles de Ψ_T près de ℓ

Plus précisément, pour chaque indice n , notons I_n l'ensemble des feuilles de Ψ_T qui contiennent x_1^n dans leur adhérence, et J_n l'ensemble des feuilles de Ψ_T qui contiennent x_3^n dans leur adhérence. Chacun est un ouvert de feuilles rencontrées par une même transversale : ce sont des intervalles dans \mathcal{L}_T . Ces deux intervalles ont une partie commune, qui correspond aux feuilles reliant x_1^n à x_3^n . Cette partie commune, que nous notons Y_n , est un sous-intervalle dans chacun d'entre eux, qui est infini d'un côté, i.e., la frontière de Y_n dans I_n (resp. J_n) est réduite à un point y_n (resp. y'_n). Remarquons que y_n et y'_n ne sont pas séparés par la topologie de \mathcal{L}_T . De manière analogue, $I_{n+1} \cap J_n$ est un sous-intervalle Z_n dont la frontière dans J_n (resp. I_{n+1}) n'est formée que d'un seul point z_n (resp. z'_n). Observons que Y_n et Z_n sont disjoints puisqu'une feuille de Ψ_T ne peut pas s'accumuler à la fois sur x_1^n , x_3^n et x_1^{n+1} .

Oublions un moment que I_n et J_n soit des ouverts de \mathcal{L}_T , et appelons $\mathcal{L}(\ell)$ la 1-variété obtenue (abstraitement) en recollant tous les I_n et les J_n le long de leurs parties communes Y_n et Z_n . Cette 1-variété est simplement connexe, et il existe une application de $\mathcal{L}(\ell)$ dans \mathcal{L}_T qui consiste à se rappeler que les I_n et J_n sont des ouverts de \mathcal{L}_T . Nous affirmons que cette application, qui est ouverte, est en fait un plongement, i.e., injective. En effet, si tel n'est pas le cas, ceci signifie qu'il existe une feuille f de Ψ_T reliant un x_i^n à un $x_i^{n'}$ (avec i égal à 1 ou 3, disons 1; et $n \neq n'$); ou reliant un x_1^n avec un $x_3^{n'}$ (avec $n \neq n', n' - 1$). La première situation est impossible car \widehat{D} est injective le long de chaque feuille de Ψ_T . Dans le second cas, si on ajoute à la feuille f le segment dans ℓ qui relie x_1^n à $x_3^{n'}$, on obtient une courbe de Jordan. Cette courbe de Jordan n'est pas essentielle dans A_1 puisqu'elle évite la ligne verticale ℓ' . Elle est donc le bord d'un disque à coins D . Étudions la restriction de Ψ à ce disque. Son bord est constitué de points singuliers de Ψ et de feuilles régulières de Ψ . Étant compact, toutes les feuilles de Ψ qu'il contient doivent relier une préimage par \widehat{D} de x_1 avec une préimage de x_3 . En particulier, toute feuille issue de x_1^n doit rejoindre une préimage de x_3 . Or, pour chacune de ces préimages, l'ensemble des feuilles la joignant à x_1^n est ouvert. Comme l'ensemble des feuilles issues de x_1^n et contenues dans D est connexe, on en déduit qu'elles doivent toutes atteindre la même préimage de x_3 . On aboutit à une contradiction puisque certaines d'entre elles atteignent x_3^n (si $n' > n$) ou x_{n-1}^3 (si $n' < n - 1$) alors que f atteint $x_3^{n'}$.

Comme ℓ est γ_0 -invariant, l'action de γ_0 sur \mathcal{L}_T préserve $\mathcal{L}(\ell)$ (que maintenant nous voyons plongé dans \mathcal{L}_T). Soit $\mathcal{A}(\ell)$ le complémentaire dans $\mathcal{L}(\ell)$ de l'union des Y_n et Z_n . Observons que $\mathcal{A}(\ell)$ est lui-aussi γ_0 -

invariant. Par ailleurs, il existe un entier p non-nul tel que, pour chaque indice n , l'image de x_i^n par γ_0 soit x_i^{n+p} . Pour tout élément x de $\mathcal{L}(\ell)$, considérons tous les chemins reliant dans T la feuille x à la feuille $\gamma_0 x$. Il n'est pas toujours possible de trouver un tel chemin qui soit partout transverse à Ψ_T , aussi le nombre minimal de points de tangence entre Ψ_T et un tel chemin est-il en général non-nul. Nous notons $d(x, \gamma_0 x)$ ce nombre minimal. Il découle de la simple connexité de \mathcal{L}_T que, lorsque x appartient à $\mathcal{L}(\ell)$, le nombre $d(x, \gamma_0 x)$ est réalisé par un chemin contenu dans l'union des feuilles appartenant à $\mathcal{L}(\ell)$. Par ailleurs, ce nombre est facile à calculer pour les chemins contenus dans $\mathcal{L}(\ell)$: il est $2p$ lorsque x appartient à $\mathcal{A}(\ell)$, et vaut $2p + 1$ lorsque x appartient à $\mathcal{L}(\ell) \setminus \mathcal{A}(\ell)$. Comme p est non-nul, il découle du corollaire 2.20 de [1] que l'action de γ_0 sur \mathcal{L}_T sépare les points, i.e., que pour tout élément y de \mathcal{L}_T , il existe un voisinage de y qui est disjoint de son image par γ_0 . Remarquons d'ores et déjà que ceci implique que γ_0 n'admet pas de points fixes dans \mathcal{L}_T , et donc, que ℓ' n'est pas une demi-droite. Ainsi, ℓ et ℓ' sont simultanément de même nature : ce sont des lignes brisées.

Or, comme pour tout homéomorphisme de \mathcal{L}_T qui sépare les points, la forme de l'ensemble des points x pour lesquels $d(x, \gamma_0 x)$ est pair est bien compris : il s'agit de son *axe fondamental*. Notons $\mathcal{A}(\gamma_0)$ l'axe fondamental de γ_0 dans \mathcal{L}_T . Nous venons de montrer qu'il contient $\mathcal{A}(\ell)$. D'après la proposition 2.10 de [1], pour tout élément x de $\mathcal{A}(\gamma_0)$, l'axe $\mathcal{A}(\gamma_0)$ est contenu dans l'union des γ_0 -itérés de tout chemin continu τ reliant x à γ_0 dans \mathcal{L}_T . Or, lorsque x appartient à $\mathcal{A}(\ell) \subset \mathcal{A}(\gamma_0)$, le chemin τ peut être choisi dans $\mathcal{L}(\ell)$. On en déduit que $\mathcal{A}(\gamma_0)$ est contenu dans $\mathcal{L}(\ell)$. Par conséquent, $\mathcal{A}(\gamma_0)$ est confondu avec $\mathcal{A}(\ell)$.

Mais nous avons vu que ℓ' est du même type que ℓ . Tout ce qui précède s'applique donc aussi à ℓ' . En particulier, l'ensemble $\mathcal{A}(\ell')$ des feuilles de Ψ_T issues d'une singularité dans ℓ' mais qui n'en rejoint pas une autre doit lui-aussi être confondu avec $\mathcal{A}(\gamma_0)$. Ceci signifie que $\mathcal{A}(\gamma_0)$ est formé des feuilles de Ψ_T qui relie une singularité dans ℓ à une singularité dans ℓ' . *Mais il est clair que l'union de ces feuilles est un ouvert de T !* On obtient une contradiction puisque $\mathcal{A}(\ell)$ n'est pas un ouvert de $\mathcal{L}(\ell)$. Cette contradiction finale achève la preuve du lemme. \square

Nous sommes en mesure de conclure :

Preuve de 7.1. — Il s'agit de montrer que tout triangle γ_0 -invariant T contient un γ_0 -secteur dont la frontière contient les deux composantes

verticales de ∂T . Tous ces γ_0 -secteurs lorsqu'on fait varier le triangle γ_0 -invariant T constituent le sous-anneau essentiel recherché. Remarquons que ces secteurs sont en nombre fini puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de demi-droites γ_0 -invariantes verticales (elles doivent toutes rencontrer n'importe quelle courbe de Jordan essentielle dans A_1).

Pour ce faire, nous considérons à nouveau la restriction de Ψ à T , comme lors de la preuve du lemme 7.8, dont nous reprenons les notations.

Les feuilles proches de ℓ et de ℓ' sont des points fixes de l'action de γ_0 sur \mathcal{L}_T . Notons $\mathcal{E}(\gamma_0)$ l'ensemble des points fixes de γ_0 dans \mathcal{L}_T . Comme chaque feuille de $\widehat{\Psi}$ est préservée par $\rho(\gamma_0)$, il est clair que $\mathcal{E}(\gamma_0)$ est ouvert.

La proposition 2.19 de [1] nous indique que $\mathcal{E}(\gamma_0)$ est une 1-variété connexe et simplement connexe. Supposons l'existence de deux feuilles f_1 et f_2 qui ne sont pas séparées par la topologie de \mathcal{L}_T . Alors, il existe des transversales τ_1 et τ_2 à Ψ_T telles que

- chaque τ_i rencontre f_i en un point x_i ,
- pour chaque indice i , il existe une composante connexe τ'_i de $\tau_i \setminus \{x_i\}$, de sorte que toute feuille de Ψ_T rencontre τ'_1 si et seulement si elle rencontre τ'_2 .

Nous notons V_i le saturé par Ψ_T de la transversale τ_i . La restriction de $\widehat{\mathcal{D}}$ à chaque τ_i est un homéomorphisme local à valeurs dans l'espace des feuilles de la restriction de $\widehat{\Psi}$ dans T_0 . Comme cet espace de feuilles est homéomorphe à \mathbb{R} , on en déduit que cette application est injective. Or, nous avons vu que la restriction de $\widehat{\mathcal{D}}$ à chaque feuille de Ψ_T est injective : chaque ouvert V_i est donc une assiette de $\widehat{\mathcal{D}}$. Leur intersection $V_1 \cap V_2$ est donc *a fortiori* une assiette. D'après le lemme de fermeture des assiettes, la restriction de $\widehat{\mathcal{D}}$ à l'union $f_1 \cup f_2$ est injective. Or, les images de f_1 par f_2 par $\widehat{\mathcal{D}}$ sont contenues dans la même feuille régulière \widehat{f} de $\widehat{\Psi}$, et chacune de ces images est un ouvert connexe $\rho(\gamma_0)$ -invariant de \widehat{f} . Ceci est absurde puisqu'il n'existe pas dans \widehat{f} deux ouverts connexes disjoints $\rho(\gamma_0)$ -invariants.

Cette contradiction montre que $\mathcal{E}(\gamma_0)$ est séparé au sens de Hausdorff, et est donc homéomorphe à \mathbb{R} . L'argument utilisé ci-dessus pour montrer que V_1 et V_2 sont des assiettes montre aussi que l'union des feuilles appartenant à $\mathcal{E}(\gamma_0)$ forme une assiette de $\widehat{\mathcal{D}}$. Cette assiette vérifie toutes les conditions demandées pour être un γ_0 -secteur. \square

Achevons cette section en établissant quelques notations et propriétés de la famille de γ_0 -secteurs T_1, \dots, T_n exhibée par la proposition 7.1.

Pour chaque indice i , nous notons d_i la composante connexe commune à ∂T_{i-1} et ∂T_i (en convenant $T_{-1} = T_n$). Les divers d_i sont appelés (γ_0) -arêtes. Ce sont chacune des demi-droites γ_0 -invariantes. Chacune est dite de type stable, instable ou principal selon qu'elle est une demi-droite γ_0 -stable, γ_0 -instable ou γ_0 -principale.

LEMME 7.9. — *Deux arêtes successives d_i et d_{i+1} ne sont jamais de même type.*

Preuve. — Ceci résulte du lemme de fermeture des assiettes appliqué à l'assiette T_i . \square

L'union des secteurs T_i et des d_i est un sous-anneau essentiel γ_0 -invariant que nous appelons $A(\gamma_0)$. Relevons par acquis de conscience que l'anneau $A(\gamma_0)$ n'est pas unique : nous avons effectué un choix en sélectionnant le sous-anneau A_0 lors du lemme 7.5. Dans $A(\gamma_0)$, les seules lignes virtuellement γ_0 -invariantes sont clairement les arêtes, qui sont des demi-droites verticales. Nous notons $\widehat{\mathcal{D}}_0$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}_0^s$) la restriction de $\widehat{\mathcal{D}}$ (resp. $\widehat{\mathcal{D}}^s$) à $A(\gamma_0)$. Pour chaque indice i , nous notons D_i le domaine dans $A(\gamma_0)$ qui est à l'Est de d_i relativement à d_{i+1} .

Remarque 7.10. — Les secteurs étant en nombre fini, on peut les choisir de sorte que si deux d'entre eux ont des images par $\widehat{\mathcal{D}}_0$ qui sont contenues dans le même triangle \widehat{T}_i et des arêtes de même type, alors leurs images sont en fait égales.

Remarque 7.11. — Les arêtes sont en nombre fini et verticales dans $A(\gamma_0)$. Nous pouvons les indexer en une liste (d_1, \dots, d_n) de sorte que d_{i+1} soit l'unique arête contenue dans le domaine à l'Est de d_i relativement à d_{i+2} . Nous venons de supposer implicitement $n \geq 3$, et dans les raisonnements à suivre, nous serons amenés à considérer jusqu'à six arêtes successives. Nous supposons toujours que ces triangles successifs sont deux à deux disjoints. Ce parti pris se justifie de la manière suivante : pour chaque entier positif k , soit $A_{\mathbb{F}}^k$ l'anneau obtenu en quotientant $Q_{\mathbb{F}}$ par l'action de h^k . C'est un revêtement fini d'indice k de $A_{\mathbb{F}}$. La suite (d_1, \dots, d_n) se relève en une suite de γ_0 -arêtes aussi longue que l'on veut : il suffit de prendre l'entier k très grand. Les arguments à suivre s'adaptent alors au cas $n < 6$: il suffit de les appliquer dans le relevé $A_{\mathbb{F}}^k$, avec k suffisamment grand.

Pour toute arête d_i nous notons $\ell(d_i) = d_i$ si l'adhérence de d_i ne

contient pas de point fixe de γ_0 . Sinon, on note $\ell(d_i)$ l'unique droite γ_0 -invariante contenant d_i . Comme γ_0 n'admet pas de point fixe attractif ou répulsif, $\ell(d_i)$ est dans les deux cas un fermé image d'un plongement de la droite réelle dans A_Φ . C'est en fait la droite «maximale» de A_Φ contenant d_i . La restriction de $\widehat{\mathcal{D}}$ à $\ell(d_i)$ est un homéomorphisme dont l'image est une demi-droite affine ou une droite affine, selon que $\ell(d_i) = d_i$ ou non.

LEMME 7.12. — *Les arêtes principales sont verticales dans A_Φ . Chaque droite ou demi-droite $\ell(d_i)$ est verticale dans A_Φ .*

Preuve. — La première affirmation provient de la construction des arêtes, du fait que les arêtes principales sont fermées dans A_Φ , et du fait que $A(\gamma_0)$ est un sous-anneau essentiel.

Pour traiter la deuxième affirmation, supposons *a contrario* l'existence d'un $\ell(d_i)$ non vertical. C'est donc, disons, une droite de type Nord-Nord. Comme d_i est verticale dans $A(\gamma_0)$, ceci n'est possible que si $\ell(d_i)$ contient un point fixe x de γ_0 , et que d_i est une composante connexe de $\ell(d_i) \setminus \{x\}$. On ne perd aucune généralité en supposant que d_i est de type stable. Soient A et D les composantes connexes de $A_\Phi \setminus \ell(d_i)$, la première étant un sous-anneau essentiel et l'autre un disque. Un des secteurs d'arête d_i est alors contenu dans D ; disons qu'il s'agit de T_i . Comme $A(\gamma_0)$ est un sous-anneau essentiel, il doit s'échapper de D : ceci implique que la composante connexe de $\ell(d_i) \setminus \{x\}$ autre que d_i doit aussi être une arête d_k de $A(\gamma_0)$. Le même genre d'argument montre que la demi-droite γ_0 -instable issue de x et contenue dans D est elle-aussi une arête d_j de $A(\gamma_0)$. Si l'indice j n'est pas $i + 1$, alors d_{i+1} est une arête principale contenue dans D : ceci est absurde puisque les arêtes principales sont des lignes verticales dans A_Φ . Donc, $j = i + 1$, et, de même, $k = i + 2$. Si $\ell(d_{i+1})$ est verticale, les demi-droites γ_0 -invariantes issues de x et s'accumulant vers le Nord sont d_i , d_{i+1} et d_{i+2} . Mais ceci signifie que soit T_i , soit T_{i+1} est contenu dans la langue supprimée lors du lemme 7.5 pour définir le sous-anneau A_0 !

Cette contradiction montre que $\ell(d_{i+1})$ n'est pas verticale. Mais dans ce cas, les quatre demi-droites γ_0 -invariantes issues de x sont des arêtes successives, et on aboutit comme ci-dessus à l'absurdité qu'un des γ_0 -secteurs aurait dû être supprimé lors du lemme 7.5. \square

Pour chaque indice i , nous notons \widehat{T}_i l'unique $\rho(\gamma_0)$ -triangle qui contient $\widehat{\mathcal{D}}(T_i)$.

DÉFINITION 7.13. — Un γ_0 -secteur est dit complet si son image par $\widehat{\mathcal{D}}_0$ est \widehat{T}_i tout entier.

LEMME 7.14. — Un secteur est complet dès qu'une de ses arêtes est de type principal.

Preuve. — Supposons d_i de type principal. En observant la restriction de $\widehat{\Psi}$ à \widehat{T}_i , on constate que tout chemin reliant le côté principal $\widehat{\mathcal{D}}_0(d_i)$ à un autre côté (par exemple, $\widehat{\mathcal{D}}_0(d_{i+1})$) doit rencontrer toutes les feuilles de $\widehat{\Psi}$ dans \widehat{T}_i . Le lemme s'en déduit aisément vu notre construction de T_i . \square

L'analogie de ce lemme ne s'applique pas dans le cas où T_i n'a pas d'arête principale. Dans ce cas, $\widehat{\mathcal{D}}_0(T_i)$ est un domaine de \widehat{T}_i bordé par une feuille de $\widehat{\psi}$ et contenant x_2 dans son adhérence.

Pour chaque indice i , les demi-droites $\widehat{\mathcal{D}}_0(d_i)$ et $\widehat{\mathcal{D}}_0(d_{i+1})$ ont un point fixe x_j en commun dans leurs adhérences. Les chemins contenus dans $\widehat{\mathcal{D}}_0(T_i)$ convergeant vers le point fixe x_j de $\rho(\gamma_0)$ se relèvent en des chemins contenus dans T_i qui définissent un bout de $A(\gamma_0)$, toujours le même. Nous l'appelons *bout anguleux de T_i* . Nous disons qu'il est *attractif*, *répulsif* ou *de type selle* selon la nature de x_j . Nous convenons aussi de dire qu'il est de *type x_j* . Nous disons que T_i est *orienté vers le Sud* (resp. *le Nord*) si les chemins dans T_i définissant son bout anguleux s'accumulent sur le bord Sud (resp. Nord) de $A(\gamma_0)$. Le lemme suivant est clair :

LEMME 7.15. — Soient T_i et T_{i+1} deux γ_0 -secteurs successifs. Les arêtes d_{i-1} et d_{i+1} sont de même type si et seulement si les secteurs T_i et T_{i+1} sont orientés simultanément vers le même bout de $A(\gamma_0)$. \square

COROLLAIRE 7.16. — Supposons que les arêtes de $A(\gamma_0)$ ne prennent que deux types parmi les trois types possibles stable, instable et principal. Alors, $\rho(\Gamma)$ fixe un point de \mathbb{RP}^2 .

Preuve. — D'après les lemmes 7.9 et 7.15, les secteurs sont tous orientés vers le même bout de $A(\gamma_0)$, disons le bout Nord. De plus, leurs bouts anguleux sont tous du même type (attractif, répulsif ou selle). Soit x_j le point fixe de $\rho(\gamma_0)$ correspondant à cet angle commun. Grâce à la remarque 7.10, on peut supposer qu'il existe un voisinage U de x_j qui soit $\rho(\gamma_0)$ -invariant et tel que la restriction de $\widehat{\mathcal{D}}_0$ à $A(\gamma_0)$ soit un revêtement fini d'image $U \setminus x_j$. Une version du lemme de fermeture des assiettes montre alors que la frontière Nord de $A(\gamma_0)$ dans A_Φ est soit vide, soit réduite à une

préimage de x_j . Le second cas est clairement impossible puisque $A(\gamma_0)$ est un sous-anneau essentiel de A_Φ . La frontière Nord de $A(\gamma_0)$ est donc vide : ceci signifie que $A(\gamma_0)$ contient un ouvert U_0 dont la frontière dans A_Φ est une courbe fermée simple essentielle de $A(\gamma_0)$. Soit y_n une suite de points dans U_0 convergeant vers le bout Nord de A_Φ : les images $\widehat{\mathcal{D}}_0(y_n)$ convergent vers x_j . Pour tout élément γ de Γ , les γy_n s'accroissent eux-aussi sur le bout Nord. Ils appartiennent donc eux-aussi à U_0 dès que n est suffisamment grand, ce qui montre

$$x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{\mathcal{D}}_0(\gamma y_n) = \gamma x_j. \quad \square$$

LEMME 7.17. — Soit d une droite ou demi-droite fermée verticale de A_Φ . L'intersection entre d et $A(\gamma_0)$ est non-vidée. De plus, un des cas de figure suivants se produit :

- 1) d contient une des arêtes d_i (elle est alors γ_0 -invariante),
- 2) d rencontre transversalement une, deux ou trois arêtes (pas plus), son intersection avec chaque arête est réduite à au plus un point,
- 3) d contient un point fixe de γ_0 ,
- 4) $\widehat{\mathcal{D}}_0(d)$ est une droite ou demi-droite dont une extrémité est un point fixe de $\rho(\gamma_0)$ correspondant au bout anguleux d'un secteur T dans $A(\gamma_0)$.

Preuve. — La ligne d doit rencontrer $A(\gamma_0)$ puisqu'elle est verticale. Comme la restriction à d de $\widehat{\mathcal{D}}_0$ est injective, et qu'une droite affine ne coupe une droite projective donnée qu'en au plus un point (à moins qu'elle y soit contenue), d soit contient un d_i , soit ne rencontre chaque arête qu'en au plus un point, et elle ne rencontre dans ce cas qu'au plus trois. Si d contient une arête d_i , elle est égale à $\ell(d_i)$.

Sinon, la ligne d doit rencontrer un secteur T_i . L'image de $d \cap T_i$ par $\widehat{\mathcal{D}}_0$ est un segment fermé dans $\widehat{\mathcal{D}}_0(T_i)$. Nous avons décrit précédemment $\widehat{\mathcal{D}}_0(T_i)$: c'est soit \widehat{T}_i tout entier, soit un ouvert de \widehat{T}_i bordé par deux côtés de \widehat{T}_i et une feuille de $\widehat{\Psi}$. Dans les deux cas (par concavité de la feuille de $\widehat{\Psi}$ dans le second cas), on voit qu'étant fermée, $\widehat{\mathcal{D}}_0(d \cap T_i)$ doit s'accumuler sur $\widehat{\mathcal{D}}_0(d_i)$ ou $\widehat{\mathcal{D}}_0(d_{i+1})$, ou sur un point fixe de $\rho(\gamma_0)$. On conclut grâce au lemme de fermeture des assiettes. \square

8. Groupe d'holonomie non-irréductible.

Dans cette section, nous supposons que le groupe d'holonomie (ou un sous-groupe d'indice fini) préserve une ligne ou un point dans $\mathbb{R}P^2$.

LEMME 8.1. — *Aucune des arêtes dans $A(\gamma_0)$ n'est de type principal.*

Preuve. — Traitons d'abord le cas où $\rho(\Gamma)$ préserve une ligne : d'après la remarque 6.3, cette ligne est la ligne $\rho(\gamma_0)$ -principale λ_3 . Considérons les composantes connexes de $\widehat{D}^{-1}(\lambda_3)$, i.e., les lignes virtuellement γ_0 -principales. Elles sont échangées par l'action de $\bar{\Gamma}$ sur A_Φ . Celles qui sont verticales sont en nombre fini, et sont elles aussi permutées par l'action de Γ . Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini de lui-même, on peut supposer que les lignes virtuellement γ_0 -principales sont $\bar{\Gamma}$ -invariantes. Elles correspondent donc à des surfaces plongées dans M tangentes au flot et dont les groupes fondamentaux sont isomorphes à $\bar{\Gamma}$. Ceci est impossible puisqu'étant tangentes à Φ , ces surfaces doivent être de genre nul. Ceci montre qu'aucune ligne virtuellement γ_0 -principale n'est verticale, ce qui montre qu'aucune d'entre elles ne rencontre $A(\gamma_0)$.

Dans le cas où $\rho(\Gamma)$ préserve un point de \mathbb{RP}^2 , ce point est nécessairement le point fixe de type selle x_2 de $\rho(\gamma_0)$ (cf. lemme 3.2 et remarque 6.3). Comme $\rho(\Gamma)$ n'est pas résoluble, il existe au moins un élément γ de Γ tel que le conjugué $\gamma'_0 = \gamma\gamma_0\gamma^{-1}$ a une image par ρ dont les lignes stables et instables sont distinctes de celles de $\rho(\gamma_0)$. Supposons que $A(\gamma_0)$ admet une arête principale d_i . L'arête d_i est commune à deux γ_0 -secteurs T_{i-1} et T_i qui, d'après le lemme 7.14, sont complets. L'image de $T_{i-1} \cup d_i \cup T_i$ par \widehat{D}_0 est un demi-plan P_i dont l'intersection avec toute ligne de \mathbb{RP}^2 passant par x_2 est une droite complète. Appliquons le lemme 7.17 pour comprendre l'intersection entre d_i et $A(\gamma'_0)$.

- Si d_i contient un point fixe de γ'_0 , ce point fixe n'est pas de type selle puisque le point fixe de type selle de $\rho(\gamma'_0)$ est x_2 . Ceci contredit le lemme 3.2. Le cas 3) du lemme 7.17 ne se produit donc pas.

- Si d_i contient une arête d'_j de $A(\gamma'_0)$, les extrémités éventuelles de cette arête dans d_i sont des points fixes de γ'_0 . D'après l'argument ci-dessus, ceci montre que d_i et d'_j sont confondus. Ceci contredit notre choix de γ'_0 puisque le seul point fixe commun à $\rho(\gamma_0)$ et $\rho(\gamma'_0)$ est x_2 . Le cas 1) du lemme 7.17 ne se produit donc pas.

- Si le cas 4) du lemme 7.17 se produit, $\rho(\gamma_0)$ et $\rho(\gamma'_0)$ ont un point fixe commun sur la ligne $\rho(\gamma_0)$ -principale. Ceci contredit là encore notre choix de γ'_0 .

Donc, c'est le cas 2) du lemme 7.17 qui se produit : d_i rencontre transversalement une arête d'_j de γ'_0 . Notons τ'_j l'intersection entre d'_j et $T_{i-1} \cup d_i \cup T_i$, et $\widehat{\tau}'_j \subset P_i$ son image par \widehat{D}_0 . Si d'_j est une arête γ_0 -stable

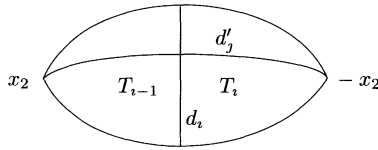


Figure 3. Le cas d'_j non-principale

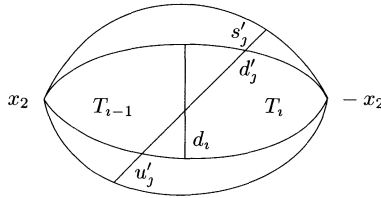


Figure 4. Le cas d'_j principale

ou instable, $\widehat{\tau}'_j$ est une droite complète dont l'image contient un point fixe attractif ou répulsif de $\rho(\gamma'_0)$. On en déduit que d'_j doit contenir un point fixe attractif ou répulsif de γ'_0 : contradiction.

Donc, d'_j est γ'_0 -principale. L'adhérence de $\widehat{\tau}'_j$ dans P_i est formée de deux points \widehat{u}'_j et \widehat{s}'_j , le premier appartenant au côté γ_0 -instable de P_i , et l'autre au côté γ_0 -stable de P_i (voir la figure 4). Aucun d'entre eux ne peut être point fixe de $\rho(\gamma'_0)$ puisque $\rho(\gamma_0)$ et $\rho(\gamma'_0)$ n'ont pas de ligne invariante en commun. On en déduit que l'adhérence de τ'_j dans A_Φ contient deux points s'_j et u'_j , préimages respectives de \widehat{s}'_j et de \widehat{u}'_j . De plus, s'_j appartient à la frontière de T_i ou de T_{i-1} . Soit ℓ_s la ligne virtuellement γ_0 -stable passant par s'_j : elle rencontre d'_j . Comme précédemment pour d'_j dans $T_{i-1} \cup d_i \cup T_i$, on voit que l'intersection entre ℓ_s et l'union de d'_j avec les deux γ'_0 -secteurs d'arête commune d'_j est une droite complète dont l'image par \widehat{D}_0 contient x_1 . Elle rencontre la frontière dans A_Φ de T_i ou de T_{i-1} . D'après le lemme de fermeture des assiettes, on en déduit que ℓ^s est γ_0 -invariante. Ceci est absurde puisqu'elle contient une préimage du point fixe répulsif x_1 . Cette contradiction montre que l'existence de l'arête principale d_i est impossible. \square

Le lemme 8.1 montre que nous sommes dans la situation étudiée au corollaire 7.16 : le point x_2 est préservé par $\rho(\Gamma)$. Plus précisément, il existe un voisinage U de x_2^s dans \mathbf{S}^2 tel que \widehat{D}_0^s est un revêtement fini d'image $U \setminus x_2^s$.

Considérons le feuilletage régulier \mathcal{G} de $\mathbf{S}^2 \setminus x_2^s$ dont les feuilles sont

les grands cercles passant par x_2^s privés de x_2^s . Il se projette dans $\mathbb{RP}^2 \setminus x_2$ en un feuilletage $\tilde{\mathcal{G}}$ dont les feuilles sont les droites projectives contenant x_2^s privées de x_2 . Le feuilletage \mathcal{G} est $\rho^s(\Gamma)$ -invariant. Son tiré en arrière par $\widehat{\mathcal{D}}$ est un feuilletage Γ -invariant de codimension 1 de A_Φ . Nous le notons $\widehat{\mathcal{G}}$, et \mathcal{L} son espace de feuilles. L'image par $\widehat{\mathcal{D}}^s$ de chaque feuille \widehat{r} de $\widehat{\mathcal{G}}$ (i.e., de chaque élément de \mathcal{L}) est contenue dans une feuille $\tau(\widehat{r})$ de \mathcal{G} . Comme \widehat{r} et $\tau(\widehat{r})$ sont des copies de la droite réelle, la restriction de $\widehat{\mathcal{D}}$ à chaque \widehat{r} est injective, et son image est un sous-intervalle de $\tau(\widehat{r})$.

LEMME 8.2. — *L'espace des feuilles \mathcal{L} est homéomorphe au cercle. L'action de Γ sur \mathcal{L} est minimale.*

Preuve. — Soit $\widetilde{\mathcal{F}}$ le tiré en arrière de \mathcal{G} par \mathcal{D}_M^s , et \mathcal{F} sa projection par $p : \widetilde{M} \rightarrow M$. L'espace des feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ quotienté par l'action de h est naturellement homéomorphe à \mathcal{L} . De plus, comme chaque feuille de la projection de $\widetilde{\mathcal{F}}$ dans A_Φ , i.e. $\widehat{\mathcal{G}}$, est une copie de \mathbb{R} , aucune feuille de $\widetilde{\mathcal{G}}$ n'est préservée par l'action de h . La restriction de \mathcal{D}_M à chaque feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ est une fibration triviale de fibre \mathbb{R} au-dessus d'une copie de \mathbb{R} : les feuilles de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont donc homéomorphes au plan. Chaque feuille de \mathcal{F} est donc quotient d'une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}$ par un sous-groupe de Γ qui, d'après ce qui précède, ne contient aucune puissance de h . La restriction de ρ^s à un tel sous-groupe est donc injective, et son image est un sous-groupe de $\rho^s(\Gamma)$ qui préserve x_2^s est une droite projective contenant x_2^s : c'est donc un groupe résoluble. Comme $\rho^s(\Gamma)$ est un groupe de surface, on en déduit que les feuilles de \mathcal{F} sont des plans ou des cylindres. En particulier, aucune n'est compacte, et aucune n'admet une infinité de bouts. Le lemme 8.2 découle alors d'un théorème de W. Thurston ([33]) et d'un théorème de G. Duminy (cf. [12], corollary 1.2). \square

On note Ω l'image de \mathcal{D} .

LEMME 8.3. — *L'application $\mathcal{D} : A_\Phi \rightarrow \Omega$ est un revêtement fini cyclique. De plus, aucun élément de $\rho(\Gamma)$ n'admet de point fixe attractif ou répulsif dans Ω , et aucune feuille de $\widehat{\mathcal{G}}$ n'est entièrement contenue dans Ω .*

Preuve. — D'après le lemme 8.2, le feuilletage $\widehat{\mathcal{G}}$ est un feuilletage produit, en particulier, chacune de ses feuilles est verticale dans A_Φ et rencontre donc $A(\gamma_0)$. On en déduit que pour chaque feuille \widehat{r} de $\widehat{\mathcal{G}}$, son image par $\widehat{\mathcal{D}}^s$ est un sous-intervalle de $\tau(\widehat{r})$ de la forme $]x_2^s, x(\widehat{r})[$.

L'application τ est un homéomorphisme local entre \mathcal{L} et l'espace des feuilles de \mathcal{G} . Comme ces deux espaces sont homéomorphes au cercle,

τ est un revêtement cyclique fini. Pour toute feuille r de $\widehat{\mathcal{G}}$, considérons l'intersection entre tous les intervalles $]x_2^s, x(\widehat{r})[$ lorsque \widehat{r} décrit toutes les préimages de r par τ : c'est un sous-intervalle de la forme $]x_2^s, x(r)[$. L'union de ces intervalles lorsque r parcourt l'ensemble des feuilles de \mathcal{G} est un sous-anneau essentiel Ω^s de $\mathbf{S}^2 \setminus \pm x_2^s$ qui est $\widetilde{\rho}^s(\Gamma)$ -invariant. La préimage de Ω^s par \mathcal{D}_M^s est un ouvert Γ -invariant de \widetilde{M} homéomorphe à \mathbb{R}^3 . Cette préimage passe au quotient dans M en un ouvert W qui est un $K(\Gamma, 1)$. Or, M est lui-aussi un $K(\Gamma, 1)$. Donc, l'inclusion de W dans M est une équivalence d'homotopie, ce qui montre, par compacité de M , que W est M tout entier : Ω^s est donc l'image de $\widehat{\mathcal{D}}^s$. Ceci montre que pour toute feuille r de \mathcal{G} , l'extrémité $x(\widehat{r})$ ne dépend pas de la préimage \widehat{r} de r par τ . Comme τ est un revêtement cyclique fini et que la restriction de $\widehat{\mathcal{D}}^s$ à chaque feuille de $\widehat{\mathcal{G}}$ est injective, ceci montre que $\widehat{\mathcal{D}}^s$ est un revêtement cyclique fini de $A_{\mathbb{F}}$ sur Ω^s . Remarquons que ceci implique, grâce au lemme 3.2, que Ω^s ne contient pas de point fixe attractif ou répulsif d'éléments de $\rho^s(\Gamma)$.

Toute feuille r de \mathcal{G} se projette sur la même feuille de $\overline{\mathcal{G}}$ que son opposé $-r$. Acheter la preuve du lemme 8.3 revient à montrer que pour tout r , les projections dans \mathbb{RP}^2 des intervalles $]x_2^s, x(r)[$ et $]x_2^s, x(-r)[$ sont disjointes. Comme Ω^s ne contient pas de point fixe attractif ou répulsif d'éléments de $\rho^s(\Gamma)$, ceci est vrai lorsque r est préservé par un élément loxodromique de $\rho^s(\Gamma)$. Comme Ω^s est ouvert, l'ensemble des feuilles r pour lesquelles ceci est vrai est fermé. Ce fermé est invariant par l'action de $\rho^s(\Gamma)$ sur les feuilles de \mathcal{G} : le lemme 8.3 est donc un corollaire du lemme 8.2. \square

LEMME 8.4. — *Tous les éléments non-triviaux de $\widehat{\rho}(\overline{\Gamma})$ sont loxodromiques, de point fixe de type selle x_2 .*

Preuve. — Soit γ_1 un élément de Γ dont l'image par ρ n'est pas triviale. Nous avons *a priori* cinq cas possibles :

- *Premier cas* : x_2 est un point fixe de $\rho(\gamma_1)$ de type parabolique. Par « point fixe parabolique », nous voulons dire que nous supposons qu'il existe une droite projective d_1 qui est $\rho(\gamma_1)$ -invariante et qui contient x_2 mais pas d'autre point fixe de $\rho(\gamma_1)$. L'intersection entre Ω et d_1 doit être $\rho(\gamma_1)$ -invariante : elle doit donc être une feuille complète de $\overline{\mathcal{G}}$. Ceci contredit le lemme 8.3.

- *Deuxième cas* : x_2 est point fixe attractif ou répulsif de $\rho(\gamma_1)$. Soit U_1 le bassin d'attraction de x_2 pour $\rho(\gamma_1)$ privé de x_2 . C'est un plan affine époiné qui doit être contenu dans Ω . Soit d une droite projective contenant x_2 . D'après le lemme 8.3, l'intersection entre d et

le complémentaire de Ω n'est pas réduite à x_2 . Par ailleurs, l'intersection entre d et le complémentaire de U_1 est réduite à un seul point. Donc, les intersections $d \cap U_1$ et $d \cap \Omega$ sont égales. Comme ceci est valable pour toute droite d passant par x_2 , on en déduit que Ω et U_1 sont égaux.

L'action de $\rho(\gamma_1)$ sur Ω est donc libre et propre : d'après le corollaire 3.4, Φ est une fibration projective, ce que nous avons exclu.

- *Troisième cas : $\rho(\gamma_1)$ admet une ligne de points fixes contenant x_2 et un point fixe attractif ou répulsif.* — Soit d_1 la ligne de points fixes de $\rho(\gamma_1)$ et y_1 son point fixe attractif ou répulsif : en inversant au besoin γ_1 , on peut supposer que y_1 est un point fixe attractif. Soit x un point de \bar{M} dont l'image par \mathcal{D}_M appartient à d_1 . On note ℓ la droite projective contenant $\mathcal{D}_M(x)$ et y_1 et \widetilde{W} la composante connexe de $\mathcal{D}_M^{-1}(\ell)$ contenant x . Comme $\widehat{\mathcal{D}}$ est un revêtement fini, on peut supposer, quitte à le remplacer par une puissance de lui-même, que γ_1 préserve $\widehat{\pi}(x)$. En remplaçant γ_1 par $h^k \gamma_1$ pour un entier k convenable, on peut supposer que l'orbite de x sous $\widetilde{\Phi}^t$ est préservée par γ_1 , i.e., qu'il existe un nombre réel T tel que $\widetilde{\Phi}^T(x) = \gamma_1 x$. L'application de premier retour le long du flot sur un petit disque transverse centré en $p(x)$ est décrite par la dynamique de $\rho(\gamma_1)$ au voisinage de $\mathcal{D}_M(x)$. On en déduit que $W = p(\widetilde{W})$ est une variété stable ou instable (selon le signe de T) de l'orbite de x sous Φ^t : ceci signifie que l'orbite sous Φ^t de tout point de W s'accumule sur celle de x dans le futur (cas stable) ou le passé (cas instable). Ceci implique que W est l'image d'une immersion injective de l'anneau. En d'autres termes, les Γ -itérés de \widetilde{W} sont disjoints ou confondus. De plus, $\mathcal{D}_M(\widetilde{W})$ est $\ell \setminus y_1$, et deux points de \widetilde{W} ont même image par \mathcal{D}_M si et seulement si ils sont sur la même orbite de $\widetilde{\Phi}^t$. Notons d l'image de \widetilde{W} par π .

Soit maintenant d'_1 la composante connexe de $\mathcal{D}^{-1}(d_1)$ qui contient $\pi(x)$. D'après le lemme 8.2, l'union des Γ -itérés de d'_1 est dense dans Q_Φ . Il existe donc un itéré $\gamma d'_1$ de d'_1 qui rencontre d en un point \bar{x}' , mais qui est disjoint de d'_1 . Or, tous les points de d'_1 sont des points fixes de γ_1 : \bar{x}' est donc un point fixe de $\gamma \gamma_1 \gamma^{-1}$. Il est donc l'image par π d'une orbite de $\widetilde{\Phi}^T$ contenue dans \widetilde{W} qui se projette en une orbite périodique de Φ^t . Or, la seule orbite périodique de Φ^t contenue dans W est celle contenant $p(x)$: on en déduit que \bar{x}' doit être égal à $\pi(x)$. Mais ceci est impossible puisque nous avons choisi $\gamma d'_1$ différent de d'_1 . Cette contradiction finale montre que le troisième cas ne peut pas se produire.

- *Quatrième cas : $\rho(\gamma_1)$ est (conjugué à) une rotation.* — D'après la proposition 5.1, l'angle de rotation de $\rho(\gamma_1)$ est irrationnel. Soit g^t le

sous-groupe elliptique à un paramètre de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ dont le temps 1 est $\rho(\gamma_1)$. L'anneau Ω est g^t -invariant : il est donc feuilleté par des ellipses $\rho(\gamma_1)$ -invariantes centrées en x_2 . Soit E une de ces ellipses. D'après le lemme 8.3, la préimage de E par $\mathcal{D} \circ \pi$ est un l'image d'un plongement de \mathbb{R}^2 dans \widetilde{M} qui est préservé par h et γ_1 . Notons \widetilde{T}_E l'image de ce plongement du plan et T_E le tore quotient de \widetilde{T}_E par le groupe engendré par h et γ_1 . L'application de revêtement p induit une immersion de T_E dans M . L'intersection entre E et un $\rho(\gamma)E$ est soit vide, soit E tout entier, soit réduite à un ou deux points. On en déduit que le lieu des autointersections de l'image de T_E dans M est une union finie de courbes fermées simples. Par ailleurs, ces intersections sont tangentes à Φ . On en déduit que si l'immersion de T_E dans M n'est pas l'image d'un plongement, $p(T_E)$ contient une orbite périodique, ce qui signifie qu'il existe des entiers p et q tels que $h^p \gamma_1^q$ fixe un point de $\pi(\widetilde{T}_E)$. L'image de $h^p \gamma_1^q$ par ρ est $\rho(\gamma_1)^q$, ce qui montre que q est nul. On obtient une contradiction puisqu'aucune puissance non-triviale de h ne fixe de point dans Q_Φ .

Cette contradiction montre que l'immersion de T_E dans M est un plongement. Les tores ainsi associés aux diverses ellipses $\rho(\gamma_1)$ -invariantes forment un feuilletage de M par tores. Ceci est impossible puisque Γ n'est pas résoluble.

• *Cinquième cas* : x_2 est un point fixe de type selle. — C'est, comme nous voulions le prouver, le seul cas possible. \square

Nous sommes en mesure de conclure :

PROPOSITION 8.5. — *Si le groupe d'holonomie préserve une droite ou un point du plan projectif, le feuilletage Φ est un revêtement fini d'un feuilletage horocyclique projectif.*

Preuve. — D'après le lemme 8.4, la représentation $\widehat{\rho} : \overline{\Gamma} \rightarrow \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ est hyperbolique en x_2 au sens de la section 2.2.2. D'après le théorème 2.1, il existe un anneau topologique $\Omega(\widehat{\rho})$ qui est $\widehat{\rho}(\overline{\Gamma})$ -invariant et sur lequel l'action de $\widehat{\rho}(\overline{\Gamma})$ est minimale. De plus, $x_2 \cup \Omega(\widehat{\rho})$ est un disque topologique. On en déduit que $\Omega(\widehat{\rho})$ rencontre Ω , puis qu'il y est contenu par minimalité de l'action. Comme le complémentaire de $x_2 \cup \Omega(\widehat{\rho})$ est une courbe fermée simple sur laquelle $\widehat{\rho}(\overline{\Gamma})$ agit minimalement et que Ω n'est pas $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ tout entier, les deux anneaux Ω et $\Omega(\widehat{\rho})$ sont égaux.

Notons Φ_0 le feuilletage horocyclique projectif associé à $\widehat{\rho}$. Son espace ambiant est le quotient $M(\widehat{\rho})$ de $X(\widehat{\rho})$ par $\widehat{\rho}(\overline{\Gamma})$ (cf. notations de la

section 2.2.2). Par construction même de Φ_0 , l'espace des orbites Q_{Φ_0} du relevé de Φ_0 dans le revêtement universel est le revêtement universel de $\Omega = \Omega(\widehat{\rho})$. De plus, le groupe fondamental de $M(\widehat{\rho})$, que nous notons Γ' , est une extension cyclique de $\bar{\Gamma}$ dont l'action sur Q_{Ψ} est caractérisée par le fait suivant : Γ' est isomorphe au groupe de *tous* les relevés dans Q_{Φ_0} des transformations $\widehat{\rho}(\gamma) : \Omega(\widehat{\rho}) \rightarrow \Omega(\widehat{\rho})$, y compris les relevés de l'identité de $\Omega(\widehat{\rho})$, i.e., les automorphismes du revêtement de Q_{Φ_0} sur $\Omega(\widehat{\rho})$. Donc, l'isomorphisme $\widehat{\rho} : \bar{\Gamma} \rightarrow \widehat{\rho}(\bar{\Gamma})$ se relève en un morphisme injectif de Γ dans Γ' . Comme M et $M(\widehat{\rho})$ sont tous les deux compacts, l'image de ce morphisme est un sous-groupe d'indice fini de Γ' . Soit M' le revêtement fini de $M(\widehat{\rho})$ associé à ce sous-groupe, et Φ'_0 le relèvement de Φ_0 dans M' . Comme Q_{Φ} et $Q_{\Phi_0} = Q_{\Phi'_0}$ sont tous les deux revêtements universels de $\Omega(\widehat{\rho})$, ils sont homéomorphes, et l'homéomorphisme entre eux envoie l'action de Γ sur Q_{Φ} sur celle de Γ' sur $Q_{\Phi'_0}$. La proposition 8.5 découle alors de la proposition 3.5 (ainsi que de la remarque 3.6). \square

9. Groupe d'holonomie fortement irréductible.

Dans cette section, nous traitons le cas laissé en suspens : celui où aucun sous-groupe d'indice fini de $\rho(\Gamma)$ ne fixe un point ou une ligne de \mathbb{RP}^2 . Dans ce cas, l'adhérence Zariski de $\rho(\Gamma)$ est un groupe algébrique réductif. Nous laissons au lecteur la preuve du lemme suivant :

LEMME 9.1. — *Soient y_1, y_2 et y_3 trois éléments différents non colinéaires du plan projectif. Soient ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les trois droites projectives passant respectivement par y_2 et y_3, y_1 et y_3, y_1 et y_2 . Alors, il existe un élément γ de Γ tel que $\widehat{\rho}(\gamma)$ n'envoie aucun des y_i dans l'un des ℓ_j .* \square

Soit γ un élément de Γ . Pour établir de nouvelles propriétés de l'anneau $A(\gamma_0)$, nous allons le comparer à son itéré par γ . Nous notons γ'_0 le conjugué $\gamma\gamma_0\gamma^{-1}$. L'anneau $A(\gamma'_0) = \gamma A(\gamma_0)$ satisfait les conditions de la proposition 7.1. D'après le corollaire 9.1, on peut choisir γ de Γ de telle sorte que, pour chaque point fixe x_j de $\rho(\gamma_0)$, l'image $\rho(\gamma)x_j$ n'appartient pas à l'une des trois lignes $\rho(\gamma_0)$ -invariantes. Nous supposons dans la suite que γ vérifie cette propriété.

LEMME 9.2. — *Soient d_i une γ_0 -arête et d'_j une γ'_0 -arête. Alors, $\ell(d_i)$ et $\ell(d'_j)$ ne se rencontrent qu'en au plus un point. De plus, si $\ell(d_i)$ rencontre deux $\ell(d'_j)$ et $\ell(d'_k)$ différents, alors d'_j et d'_k sont de types différents.*

Preuve. — Le lemme provient du fait que deux droites affines de \mathbb{RP}^2 non confondues se rencontrent en au plus un point, et que la restriction de \widehat{D} à une arête est injective. \square

LEMME 9.3. — *Pour tout indice i , $\ell(d_i)$ rencontre au moins une γ'_0 -arête.*

Preuve. — Étant verticale, $\ell(d_i)$ doit rencontrer $A(\gamma'_0)$. Le lemme découle du lemme 7.17. \square

L'objet du lemme suivant est de préciser quelle est la situation dans laquelle une arête peut contenir un point fixe dans son adhérence (voir la figure 7 illustrant cette situation) :

LEMME 9.4. — *Soit d_i une arête γ_0 -stable qui n'est pas fermée dans A_Φ , i.e., telle que $\ell(d_i)$ contient un point fixe de γ_0 extrémité de d_i dans $\ell(d_i)$. Alors, d_{i-1} ou d_{i+1} est une arête γ_0 -instable telle que la ligne γ_0 -instable $\ell(d_{i\pm 1})$ qui la contient est verticale. Lorsqu'il s'agit de d_{i+1} , les arêtes d_{i-1} et d_{i+2} sont γ_0 -principales, quand il s'agit de d_{i-1} , les arêtes d_{i-2} et d_{i+1} sont γ_0 -principales.*

Preuve. — Notons x_0 le point fixe de γ_0 contenu dans $\ell(d_i)$. Soit u_0 la ligne γ_0 -instable contenant x_0 . Nous montrons dans un premier temps que u est verticale. Supposons qu'elle ne le soit pas : on peut supposer qu'elle est Nord-Nord. Dans ce cas, elle ne peut rencontrer $A(\gamma_0)$ et ne peut donc pas contenir les arêtes des secteurs T_{i-1} et T_{i+1} . On en déduit que d_{i-1} et d_{i+1} sont γ_0 -principales, et donc, d'après le lemme 7.14, que T_{i-1} et T_i sont complets. D'après le lemme 9.3, il existe une γ'_0 -arête d' rencontrant $\ell(d_i)$. Supposons dans un premier temps que cette intersection a lieu dans d_i . D'après notre choix de γ , la ligne contenant $\widehat{D}_0(\ell(d'))$ ne peut pas contenir x_1 . On en déduit que $\ell(d')$ rencontre d_{i-1} ou d_{i+1} . Par symétrie, on peut supposer que l'arête rencontrée est d_{i+1} . Alors, $\ell(d')$ rencontre les trois triangles successifs T_{i-1} , T_i et T_{i+1} . D'après 7.14, chacun de ces trois secteurs est complet. On en déduit que l'intersection entre $\widehat{D}(\ell(d'))$ et $\widehat{D}(T_{i-1} \cup d_i \cup T_i \cup d_{i+1} \cup T_{i+1})$ est une droite affine toute entière (voir figure 5).

Or, $\widehat{D}(\ell(d'))$ est exactement une droite affine complète. Elle est donc contenue dans $\widehat{D}(T_{i-1} \cup d_i \cup T_i \cup d_{i+1} \cup T_{i+1})$. Comme elle est une ligne $\rho(\gamma'_0)$ -invariante privée d'un point fixe de $\rho(\gamma'_0)$, on en déduit que la ligne $\rho(\gamma_0)$ -instable contient un point fixe de $\rho(\gamma'_0)$. Ceci contredit notre choix de γ .

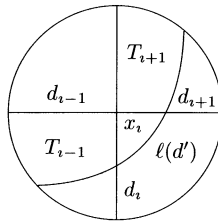


Figure 5. $\widehat{D}(\ell(d')) \cap \widehat{D}(T_{i-1} \cup d_i \cup T_i \cup d_{i+1} \cup T_{i+1})$ est une droite affine

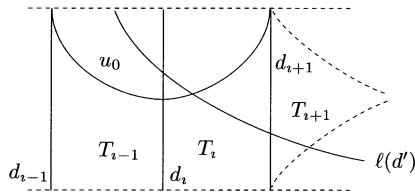


Figure 6. Intersection de $\ell(d')$ avec u_0 , d_{i+1} et T_{i+1}

Voyons maintenant le cas où d' rencontre $\ell(d_i)$ en dehors de d_i (figure 6). Étant verticale, $\ell(d')$ doit rencontrer u_0 . D'après le lemme de fermeture des assiettes, la frontière de $T_{i-1} \cup d_i \cup T_i$ dans A_Φ est l'union de d_{i-1} , de d_{i+1} et de u_0 . On en déduit que $\ell(d')$ rencontre T_{i-1} ou T_i ; on peut supposer sans perte de généralité qu'il s'agit de T_i . Comme la ligne γ'_0 -invariante ne peut pas contenir x_1 , la ligne $\ell(d')$ doit aussi rencontrer d_{i+1} , et enfin T_{i+1} . Ainsi, $\ell(d')$ rencontre déjà des lignes virtuellement γ_0 -invariantes de chaque type : stable ($\ell(d_i)$), instable (u_0), et principale (d_{i+1}). Elle ne peut donc plus en rencontrer d'autres. Or, T_{i+1} est complet : en pénétrant dans T_{i+1} , la ligne $\ell(d')$ ne peut plus s'en échapper. Mais comme $\ell(d')$ est fermée, l'adhérence de son image par \widehat{D}_0 doit admettre un extrémité sur un des côtés stable ou instable de $\widehat{D}_0(T_{i+1})$. Cette extrémité doit alors être l'image d'un bout de d' , et donc, un point fixe de $\rho(\gamma'_0)$. Ceci est absurde puisque nos choix interdisent à $\rho(\gamma'_0)$ d'admettre un point fixe sur une droite γ_0 -invariante.

Cette contradiction montre que u_0 est verticale. Elle contient donc une γ_0 -arête d_j . Il n'y a que deux lignes γ_0 -invariantes passant par x_0 : on en déduit que l'indice j est $i - 1$ ou $i + 1$ (cette alternative correspond à celle entre d_{i-1} et d_{i+1} dans l'énoncé du lemme). On peut se restreindre sans perte de généralité au cas $j = i + 1$. Considérons un petit voisinage de x_0 et itérons-le par γ_0 : c'est l'union des quatre rayons γ_0 -invariants issus

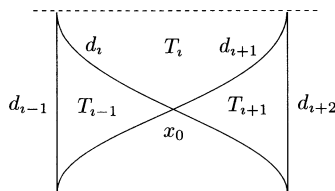


Figure 7. Configuration des arêtes autour d'un point fixe

de x_0 et de quatre ouverts qui sont des «secteurs virtuels». Les secteurs virtuels contenant d_i ou d_{i+1} dans leurs frontières sont T_{i-1} , T_i et T_{i+1} . Le quatrième secteur ne pourrait être T_{i-2} ou T_{i+2} , car, selon le cas, T_i devrait alors être confondu avec T_{i-3} ou T_{i+3} , ce qui est absurde. Le lemme s'en déduit aisément. \square

L'argument utilisé au cours de la preuve de 9.4 dans le cas où l'arête γ_0 -stable rencontre une arête γ'_0 -invariante (celui de la figure 5) montre aussi :

COROLLAIRE 9.5. — Soit d_i , d_{i+1} et d_{i+2} trois γ_0 -arêtes successives. Si d_i est de type principal et d_{i+1} de type stable (resp. instable), alors d_{i+2} est de type instable (resp. stable). \square

LEMME 9.6. — Soient d_i , d_{i+1} , d_{i+2} et d_{i+3} quatre γ_0 -arêtes successives. Si d_i est de type principal, il en est de même pour d_{i+3} .

Preuve. — On peut supposer sans perte de généralité que d_{i+1} est de type stable et que T_i est orienté vers le Nord. Si $\ell(d_{i+1})$ contient un point fixe de γ_0 , le lemme 9.6 n'est autre que le lemme 9.4. Nous supposons donc que ce n'est pas le cas. D'après le lemme 9.5, d_{i+2} est de type instable, et donc, si d_{i+3} n'est pas de type principal, il est de type stable. Nous allons montrer que ceci est impossible.

Remarquons tout d'abord que comme d_{i+1} est supposée ne pas contenir de point fixe de γ_0 dans son adhérence, il en est de même pour d_{i+2} et d_{i+3} . D'après le lemme 7.15, T_{i+1} et T_{i+2} sont orientés vers le Sud. Notons B l'union de T_i , de d_i et de T_{i-1} . D'après le lemme 7.14, l'image \widehat{B} de B par \widehat{D} est un demi-plan bordé par les droites stables et instables de $\rho(\gamma_0)$. Soit d' une γ'_0 -arête rencontrée par $\ell(d_{i+2}) = d_{i+2}$ (cf. lemme 9.3). Supposons que $\ell(d')$ rencontre d_{i+1} : elle rencontre alors B . Comme $\ell(d')$ rencontre d_{i+2} qui est de type instable, $\widehat{D}(\ell(d'))$ ne peut rencontrer la

droite instable contenue dans le bord de \widehat{B} . Par ailleurs, son intersection avec \widehat{B} est un segment fermé dans \widehat{B} . On en déduit qu'une des extrémités de $\widehat{D}(\ell(d'))$ appartient à la frontière de \widehat{B} . Or, cette frontière est contenue dans l'union des lignes $\rho(\gamma_0)$ -invariantes, et chaque extrémité de $\widehat{D}(\ell(d'))$ est image par $\rho(\gamma)$ d'un point fixe de $\rho(\gamma_0)$. Ceci contredit notre choix de γ .

Cette contradiction montre que $\ell(d')$ ne rencontre pas d_{i+1} . Nous distinguons deux cas, selon le type de d_{i+4} . (Remarquer que d_{i+4} n'est pas de type stable puisque d_{i+3} l'est déjà.)

• *Premier cas : d_{i+4} est de type principal.* — La situation est symétrique par rapport à d_{i+2} . L'argument précédent montre donc que $\ell(d')$ ne rencontre pas d_{i+3} . Il est donc contenu dans le domaine à l'Est de d_{i+1} relativement à d_{i+3} . Étant vertical, il s'accumule vers le Sud de ce domaine. Or, T_{i+1} et T_{i+2} sont orientés vers le Sud. On en déduit que l'extrémité Sud de $\ell(d')$ — qui est point fixe de $\rho(\gamma'_0)$ — est confondu avec l'angle Sud commun à T_{i+1} et T_{i+2} — qui est point fixe de $\rho(\gamma_0)$. Contradiction.

• *Deuxième cas : d_{i+4} est de type instable.* — Alors, $\ell(d')$ ne peut pas rencontrer d_{i+4} puisque d_{i+2} est de type instable. La ligne $\ell(d')$ est donc contenue dans $U_{i+1, i+4}$. D'après le lemme 7.15, T_{i+3} est orienté vers le Sud, tout comme T_{i+1} et T_{i+2} . On applique de nouveau l'argument précédent : l'extrémité Sud de $\ell(d')$ doit être les angles Sud communs de T_{i+1} , T_{i+2} et T_{i+3} , ce qui est absurde. \square

COROLLAIRE 9.7. — *Il existe un convexe saillant dans \mathbb{RP}^2 préservé par l'action de $\rho(\Gamma)$.*

Pour montrer ce corollaire, nous allons utiliser le critère suivant, dû à Y. Benoist (corollaire 3.14 de [7]) :

PROPOSITION 9.8. — *Un sous-groupe irréductible de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ préserve un convexe saillant de \mathbb{RP}^{n-1} si et seulement si il est proximal et que tous ses éléments loxodromiques sont positivement proximaux.* \square

Un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est *proximal* si il contient un élément proximal (i.e., admettant un point fixe attracteur dans \mathbb{RP}^{n-1}). Un élément de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ est *loxodromique* si ses valeurs propres sont simples et de modules deux-à-deux différents : elles sont alors réelles. Un élément *positivement proximal* est un élément proximal dont la valeur propre de plus grand module est positive.

Preuve de 9.7. — Dans notre cas, $\rho^s(\Gamma) \subset P^+GL(3, \mathbb{R})$ est irréductible, et il est proximal d'après la proposition 6.1. Nous raisonnons donc par l'absurde, supposant l'existence d'un élément γ_1 de Γ dont l'image par ρ^s soit loxodromique mais pas positivement proximale. Toute l'étude que nous avons effectuée depuis la section 7 est valable pour tout élément loxodromique de $\rho(\Gamma)$ dont les valeurs propres sont positives, nous pouvons donc supposer que l'image par ρ^s de l'élément loxodromique γ_0 que nous considérons depuis lors est γ_1^2 . Ayons la prudence d'observer que nous avons pris l'habitude de remplacer à volonté γ_1 par une de ses puissances, mais nous ne pouvons plus effectuer cette économie d'écriture sans perdre l'information essentielle ici, à savoir la négativité de la valeur propre dominante ! Cependant, il existe un entier non-nul k tel que tous les lemmes établis précédemment sont valables lorsqu'on remplace dans l'énoncé γ_0 par γ_0^k . Observons que le domaine $A(\gamma_0^k)$ est γ_0 -invariant ; en particulier, l'image par γ_0 de chaque arête γ_0^k -principale est une arête γ_0^k -principale. Mais γ_1 ne préserve peut-être pas $A(\gamma_0)$: prenons conscience que les $\rho(\gamma_1)$ -triangles sont échangés par $\rho(\gamma_1)$ mais ne sont pas préservés ! Par contre, le fait qu'on puisse supposer que Γ préserve les bouts Nord et Sud de A_Φ provient de la restriction à un sous-groupe d'indice deux de Γ , on peut donc continuer à le supposer. D'autre part, les arêtes γ_1 -principales sont caractérisées par le fait que ce sont les seules lignes virtuellement γ_1 -principales verticales. À ce titre, elles sont permutées par γ_1 .

Le fait que $\rho^s(\gamma_1)$ ne soit pas positivement proximal signifie : $\rho^s(\gamma_1)(x_3^s) = -x_3^s$. En modifiant l'indexation des γ_0^k -arêtes, on peut supposer que d_3 est de type principal. Alors, d'après le corollaire 9.5 et le lemme 9.6, chaque arête d_i est de type principal si et seulement si son indice i est divisible par 3 (ce qui implique aussi que le nombre n d'arêtes est divisible par 3). Ces mêmes résultats ont aussi le corollaire suivant : *l'image par \widehat{D}^s d'une arête γ_0^k -principale d_{3k} est $\widehat{D}^s(d_3)$ si k est impair, et $-\widehat{D}^s(d_3)$ si k est pair.* Nous considérons que le meilleur moyen de s'en convaincre est l'observation de la figure 8 en ayant en mémoire que pour aller de d_{6k} à d_{6k+3} , il faut passer par une arête stable et une arête instable, pas nécessairement dans cet ordre.

En particulier, $\rho^s(\gamma_1)(x_1^s) = -x_1^s$, et donc, $\rho^s(\gamma_1)(\widehat{D}^s(d_3)) = -\widehat{D}^s(d_3)$. On en déduit que $\gamma_1 d_3$, qui est une arête γ_0^k -principale, a un indice divisible par 6.

Pour obtenir une contradiction, nous nous intéressons à un autre aspect des arêtes principales. L'image par \widehat{D} de chacune d'entre elles est un

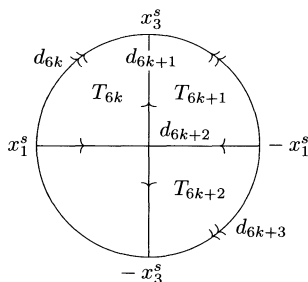


Figure 8. Passage d'une arête principale à une autre

segment d'extrémités x_1 et x_3 , et chacune de ces extrémités correspond à un bout de l'arête. Nous dirons que d_i est orientée vers le Nord si son bout Nord correspond au point fixe attractif x_3 , et orientée vers le Sud sinon. Ceci équivaut à demander à ce que les γ_0^k -itérés de tout point de l'arête s'accroissent dans le futur vers le bout Nord de l'arête. En examinant à nouveau la figure 8 on s'aperçoit que les orientations Nord et Sud des arêtes principales alternent, i.e., deux arêtes d_{3k} et $d_{3\ell}$ sont orientées vers le même bout si et seulement si leurs indices ont le même reste modulo 6. Il s'ensuit que d_3 et $\gamma_1 d_3$ ne sont pas orientées vers le même bout de A_Φ . Ceci contredit le fait que γ_1 préserve chaque bout de A_Φ . \square

Notons C le convexe saillant $\rho(\Gamma)$ -invariant obtenu au corollaire 9.7.

LEMME 9.9. — *Le groupe $\widehat{\rho}(\bar{\Gamma})$ divise le convexe C , i.e., il est discret et le quotient de son action sur C est compact.*

Preuve. — Soit G_0 la composante neutre de l'adhérence de $\rho(\Gamma)$ dans $SL(3, \mathbb{R})$, et S la partie semisimple d'une décomposition de Levi de G_0 : à conjugaison dans $SL(3, \mathbb{R})$ près, S est un des groupes suivants : $SL(3, \mathbb{R})$, $SO(3)$, $SO_0(2, 1)$, $SL(2, \mathbb{R}) \times \{1\}$, ou le groupe trivial $\{id\}$ (cf. preuve de 6.1).

Par ailleurs, S doit lui aussi préserver le convexe saillant C : on en déduit que S est soit trivial, soit $SO_0(2, 1)$. Dans le premier cas, G_0 est résoluble. Or, comme $\rho(\Gamma)$ ne contient pas de sous-groupe distingué résoluble non-trivial, ceci implique que G_0 est trivial, i.e., que $\rho(\Gamma)$ est discret. Son action sur C est donc libre et proprement discontinue. En effet, l'action de $\rho(\Gamma)$ préserve la métrique de Hilbert de C (cf. [11]), ce qui montre qu'elle est propre ; et comme $\rho(\Gamma)$ est sans torsion, l'action est libre. Le quotient de cette action est une surface de groupe fondamental isomorphe à $\bar{\Gamma}$: il est donc compact.

Pour montrer le lemme, il faut donc montrer que S n'est pas $\mathrm{SO}_0(2, 1)$, ce que nous allons exclure par l'absurde. Remarquons qu'alors C est une ellipse et que $S = \mathrm{SO}_0(2, 1)$ est G_0 tout entier puisque $\mathrm{SO}_0(2, 1)$ est précisément le groupe des transformations projectives qui préserve l'ellipse C . Or, $\rho(\Gamma) \cap G_0$ est dense dans $G_0 = \mathrm{SO}_0(2, 1)$. Il doit donc exister un élément γ_1 de Γ dont l'image par ρ est elliptique, i.e. tel que, après conjugaison, $\rho(\gamma_1)$ soit une rotation. En particulier, $\rho^s(\gamma_1)$ préserve la structure holomorphe usuelle de $\mathbf{S}^2 \approx \mathbf{CP}^1$. Le tiré en arrière par \widehat{D}^s de cette structure holomorphe est une structure holomorphe γ_1 -invariante sur l'anneau A_Φ . Les structures holomorphes sur l'anneau sont connues : A_Φ s'identifie à un sous-anneau de \mathbf{C} de la forme $\{a < |z| < b\}$, où $a \geq 0$ et où b peut être infini. Les automorphismes de ces anneaux sont connus également : l'action de γ_1 sur A_Φ est de la forme $z \mapsto \lambda e^{i\theta} z$. D'après le corollaire 3.4, le réel λ vaut 1, et d'après la proposition 5, le nombre θ est en rapport irrationnel avec π . Les adhérences des orbites de γ_1 dans A_Φ sont donc des courbes fermées simples essentielles, qui s'envoient par \widehat{D} en des ellipses. On aboutit à une contradiction comme lors de l'étude du quatrième cas dans la preuve du lemme 8.4 : soit c une de ces courbes fermées simples, et H_1 le groupe engendré par h et γ_1 . La restriction de l'application de revêtement p à $\pi^{-1}(c)$ induit une immersion dans M du tore quotient de $\pi^{-1}(c)$ par H_1 . Comme chaque Γ -itéré de c ne rencontre c qu'en au plus deux points, le lieu des autointersections éventuelles de l'image de cette immersion du tore est une union finie de courbes fermées simples. Par ailleurs, ces courbes fermées simples sont des feuilles de Φ : ce sont des feuilles fermées de Φ . Mais comme $\rho(\gamma_1)$ est une rotation d'angle irrationnel, ces feuilles fermées doivent admettre des auto-accumulations non-triviales : cette contradiction montre que l'immersion considérée est en fait un plongement du tore dans M . Ainsi, M admet un feuilletage par tores ; mais ceci est impossible puisque Γ n'est pas résoluble! \square

Remarque 9.10. — Il découle en particulier du lemme 9.9 que tous les éléments non triviaux de $\rho(\Gamma)$ sont loxodromiques.

Soit (M_0, Φ_0) le feuilletage géodésique défini par la paire $(C, \rho(\Gamma))$. La suite de ce paragraphe consiste bien sûr à montrer que (M, Φ) est un revêtement fini de (M_0, Φ_0) . Soit \mathcal{M} l'intérieur du complémentaire de C dans \mathbf{RP}^2 . On note $\widetilde{\mathcal{M}}$ le revêtement universel de \mathcal{M} : il s'interprète comme étant l'espace des feuilles du relevé de Φ_0 dans le revêtement universel \widetilde{M}_0 de M_0 . On note $\pi_0 : \widetilde{M}_0 \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ l'application de projection, et Γ_0 le groupe fondamental de M_0 . L'action naturelle de Γ_0 sur $\widetilde{\mathcal{M}}$ est un relevé de

l'action de $\rho(\Gamma)$ sur \mathcal{M} . Plus précisément, Γ_0 est le groupe de *tous* les relevés dans \mathcal{M} des automorphismes projectifs $\rho(\gamma)$ de \mathcal{M} .

LEMME 9.11. — *L'application développante \mathcal{D}_M prend ses valeurs dans \mathcal{M} .*

Preuve. — Observons tout d'abord que l'image de $\widehat{\mathcal{D}}$ rencontre \mathcal{M} : en effet, comme le sous-anneau A_0 contient des lignes γ_0 -stable, l'image de \mathcal{D}^s rencontre chaque droite $\rho(\gamma_0)$ -stable. Or, toute droite $\rho(\gamma_0)$ -stable est contenue dans \mathcal{M} , à l'exception de son unique point de tangence avec le bord de C .

Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que l'image de $\widehat{\mathcal{D}}$ évite le bord de C . Supposons que ce ne soit pas le cas, et considérons une composante connexe ℓ de la préimage par $\widehat{\mathcal{D}}$ du bord de C . La courbe ℓ est la projection par π d'un relèvement dans \widetilde{M} d'un tore plongé dans M . Si ce tore est compressible, ℓ est une courbe de Jordan homotopiquement triviale dans A_Φ , qui est préservée par un élément γ de Γ . D'après le lemme de fermeture des assiettes et le lemme 3.1, γ n'est pas une puissance de h . Sinon, i.e., si le tore évoqué ci-dessus est incompressible, son groupe fondamental contient h , et ℓ est une courbe fermée simple essentielle. Dans les deux cas, ℓ est un lacet, ce qui entraîne que la restriction de $\widehat{\mathcal{D}}$ à ℓ est un revêtement fini. Par ailleurs, il existe dans les deux cas un élément γ de Γ qui n'est pas une puissance de h et qui préserve ℓ (il correspond à un élément du groupe fondamental du tore). D'après la remarque 9.10, $\rho(\gamma)$ est loxodromique : il admet donc un point fixe attractif, qui appartient nécessairement à l'adhérence de C . On en déduit que γ contient un point fixe attractif dans l'adhérence de D , ce qui contredit le lemme 3.2. \square

L'application \mathcal{D} se relève donc en un homéomorphisme local $\widetilde{\mathcal{D}} : Q_\Phi \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$. Cette application $\widetilde{\mathcal{D}}$ peut être interprétée comme étant l'application développante d'une structure Γ -invariante de Q_Φ modelée sur $(\Gamma_0, \widetilde{\mathcal{M}})$. Il s'ensuit qu'il existe un morphisme $\widetilde{\rho} : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ tel que, pour tout élément γ de Γ on a

$$\widetilde{\rho}(\gamma) \circ \widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\mathcal{D}} \circ \gamma \quad (*).$$

LEMME 9.12. — *L'application $\widetilde{\mathcal{D}} : Q_\Phi \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ est un homéomorphisme sur son image.*

Preuve. — Comme nous l'avons rappelé lors de la section 2.2.1, l'action de Γ sur le ruban de Möbius \mathcal{M} est conjuguée à son action diagonale sur

le produit $\partial C \times \partial C$ privé de la diagonale. Les fibres de la projection sur le premier facteur ∂C sont les feuilles d'un feuilletage $\rho(\Gamma)$ -invariant de \mathcal{M} que nous notons $\widehat{\mathcal{G}}_1$. Nous notons $\widehat{\mathcal{G}}$ le relevé dans \mathcal{M} de $\widehat{\mathcal{G}}$, et \mathcal{G} le tiré en arrière par \mathcal{D} de $\widehat{\mathcal{G}}$: comme les feuilles de $\widehat{\mathcal{G}}$ sont homéomorphes à \mathbb{R} , il en est de même pour celles de $\widehat{\mathcal{G}}$ et de \mathcal{G} , et la restriction de $\widetilde{\mathcal{D}}$ à chaque feuille de \mathcal{G} est injective. Ce feuilletage étant Γ -invariant, il induit un feuilletage sur M de codimension 1, que nous notons \mathcal{F} . Supposons que \mathcal{F} admet une feuille F compacte homéomorphe au tore. Soit ℓ l'image par π d'un relevé de F : c'est une feuille de \mathcal{G} . Elle est donc homéomorphe à la droite réelle, ce qui implique que le relevé de F est homéomorphe au plan. Ceci implique que le groupe fondamental de F s'injecte dans Γ ; en d'autres termes, Γ contient un sous-groupe libre abélien de rang deux qui préserve ℓ . Or, tout sous-groupe libre abélien de rang deux contient une puissance de h : on en déduit que la projection de ℓ dans A_Φ est un lacet. Mais ceci est absurde : l'image de ce lacet par $\widehat{\mathcal{D}}$ devrait être à la fois un lacet et contenu dans une feuille de $\widehat{\mathcal{G}}$!

Cette contradiction montre qu'aucune feuille de \mathcal{F} n'est homéomorphe au tore. D'après un théorème de W. Thurston [33], il s'ensuit que \mathcal{F} est une suspension. Ceci signifie en particulier que l'espace des feuilles \mathcal{L} de \mathcal{G} est homéomorphe à \mathbb{R} , et que l'action de h sur \mathcal{L} est libre. L'application $\widetilde{\mathcal{D}}$ induit une submersion σ de \mathcal{L} vers l'espace des feuilles de $\widehat{\mathcal{G}}$. Comme l'espace des feuilles de $\widehat{\mathcal{G}}$ est homéomorphe au cercle, on en déduit que σ est un homéomorphisme sur son image. Comme la restriction de $\widetilde{\mathcal{D}}$ à chaque feuille de \mathcal{G} est injective, il s'ensuit comme voulu que $\widetilde{\mathcal{D}}$ est un homéomorphisme sur son image. \square

Comme corollaire du lemme 9.12, nous obtenons que le morphisme $\widetilde{\rho} : \Gamma \rightarrow \Gamma_0$ est injectif. Le revêtement universel \widetilde{M}_0 est homéomorphe à \mathbb{R}^3 . Son quotient par $\widetilde{\rho}(\Gamma)$, que nous notons $M_0(\Gamma)$, est donc un $K(\Gamma, 1)$, tout comme M . Ce quotient est donc compact. On en déduit :

- $\widetilde{\rho}(\Gamma)$ est un sous-groupe d'indice fini de Γ_0 ,
- M est homéomorphe à $M_0(\Gamma)$ (car deux fibrés de Seifert homotopiquement équivalents à groupes fondamentaux non résolubles sont homéomorphes, cf. [29]).

Notons $U(\widetilde{\mathcal{D}})$ l'image de $\widetilde{\mathcal{D}}$. Elle est homéomorphe à $Q_\Phi \approx \mathbb{R}^2$; sa préimage $\widetilde{W}(\widetilde{\mathcal{D}})$ par π_0 est donc un ouvert $\widetilde{\rho}(\Gamma)$ -invariant de \widetilde{M}_0 et homéomorphe à \mathbb{R}^3 . La projection $W(\widetilde{\mathcal{D}})$ de $\widetilde{W}(\widetilde{\mathcal{D}})$ dans $M_0(\Gamma)$ est un $K(\Gamma, 1)$. Or, tout $K(\Gamma, 1)$ est compact puisque M en est un et est compact. L'ouvert $W(\widetilde{\mathcal{D}})$ est donc un compact de $M_0(\Gamma)$: il doit donc lui

être égal. On en déduit que $\tilde{D} : Q_\Phi \rightarrow \tilde{M}$ est un homéomorphisme. En conclusion, d'après la relation d'équivariance (*) et la proposition 3.5 (ainsi que la remarque 3.6) :

THÉORÈME 9.13. — *Le feuilletage (M, Φ) est un revêtement fini de (M_0, Φ_0) .* □

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. BARBOT, Actions de groupes sur les 1-variétés non séparées et feuilletages de codimension un, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6), 7-4 (1998), 559–597.
- [2] T. BARBOT, Variétés affines radiales de dimension trois, Bull. Soc. Math. France, 128 (2000), 347–389.
- [3] T. BARBOT, Flag structures on Seifert manifolds, Geom. Topol., 5 (2001), 227–266.
- [4] T. BARBOT, Plane affine geometry of Anosov flows, Ann. Sci. École Norm. Sup., 34-6 (2001), 871–889.
- [5] Y. BENOIST, F. LABOURIE, Sur les difféomorphismes d'Anosov affines à feuilletages stable et instable différentiables, Invent. Math., 111-2 (1993), 285–308.
- [6] Y. BENOIST, Nilvariétés projectives, Comment. Math. Helv., 69-3 (1994), 447–473.
- [7] Y. BENOIST, Automorphismes des cônes convexes, Invent. Math., 141 (2000), 149–193.
- [8] Y. BENOIST, Tores affines, in 'Crystallographic groups and their generalizations' (Kortrijk, 1999), 1–37, Contemp. Math., 262, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [9] Y. BENOIST, Convexes divisibles, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 332-5 (2001), 387–390.
- [10] M. BRUNELLA, On transversely holomorphic flows. I, Invent. Math., 126-2 (1996), 265–279.
- [11] H. BUSEMANN, P. KELLY, Projective geometry and projective metrics, Academic Press, 1953.
- [12] J. CANTWELL, L. CONLON, Endsets of exceptional leaves; a theorem of G. Duminy, in 'Foliations : geometry and dynamics' (Warsaw, 2000), 225–261, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.
- [13] Y. CARRIÈRE, F. DAL'BO, G. MEIGNIEZ, Inexistence de structures affines sur les fibrés de Seifert, Math. Ann., 296 (1993), 743–753.
- [14] Y. CARRIÈRE, Flots riemanniens, in 'Transversal structure of foliations' (Toulouse, 1982), 31–52, Astérisque, 116 (1984).
- [15] S. CHOI, Convex decomposition of real projective surfaces. I : π -annuli and convexity, J. Diff. Geom., 40 (1994), 165–208.
- [16] S. CHOI, W.M. GOLDMAN, The classification of real projective structures on compact surfaces, Bull. Amer. Math. Soc., 34 (1997), 161–171.
- [17] S. CHOI, The decomposition and classification of radiant affine 3-manifolds, avec un appendice par T. Barbot, Mem. Amer. Math. Soc. 154 (2001), no. 730.

- [18] S. DUPONT, Solvariétés projectives de dimension trois, Thèse Université Paris VII, 1999.
- [19] D.B.A. EPSTEIN, Foliations with all leaves compact, *Ann. Inst. Fourier*, 26-1 (1976), 265–282.
- [20] D. FRIED, Affine 3-manifolds that fiber by circles, preprint I.H.E.S., 1992.
- [21] D. FRIED, Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, *Topology*, 22-3 (1983), 299–303.
- [22] D. FRIED, W.M. GOLDMAN, Three-dimensional affine crystallographic groups, *Adv. in Math.*, 47-1 (1983), 1–49.
- [23] E. GHYS, Flots d’Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 20-2 (1987), 251–270.
- [24] E. GHYS, On transversely holomorphic flows. II, *Invent. Math.*, 126-2 (1996), 281–286.
- [25] W.M. GOLDMAN, Convex real projective structures on compact surfaces, *J. Diff. Geom.*, 31 (1990), 791–845.
- [26] W.M. GOLDMAN, Geometric structures on manifolds and varieties of representations, in ‘Geometry of group representations’ (Boulder, CO, 1987), 169–198, *Contemp. Math.* 74, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [27] A. HAEFLIGER, Groupoïde d’holonomie et classifiants, *Astérisque*, 116 (1984), 70–97.
- [28] G. HECTOR, Feuilletages en cylindres, in ‘Geometry and topology’ (Proc. III Latin Amer. School of Math., Inst. Mat. Pura Aplicada CNPq, Rio de Janeiro, 1976), 252–270, *Lecture Notes in Math.* 597, Springer, Berlin, 1977.
- [29] W. JACO, Lectures on three-manifold topology, in ‘CBMS Regional Conference Series in Mathematics’, 43, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980.
- [30] S. MATSUMOTO, Affine flows on 3-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 162 (2003), no. 771.
- [31] S. MATSUMOTO, T. TSUBOI, Transverse intersections of foliations in three-manifolds, *Monogr. Enseign. Math.*, 38 (2001).
- [32] W. THURSTON, The geometry and topology of 3-manifolds, Chapitre 13, *Princeton Lect. Notes*, 1977.
- [33] W. THURSTON, Foliations on 3-manifolds which are circle bundles, Thesis, Berkeley, 1972.
- [34] F. WALDHAUSEN, Eine Klasse von 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. I, II, *Invent. Math.*, 3 (1967), 308–333; *ibid.* 4 (1967), 87–117.

Manuscrit reçu le 12 février 2001, accepté le 3 février 2003.

Thierry BARBOT,
C.N.R.S
ENS Lyon, UMPA
UMR 5669
46 allée d’Italie
69364 Lyon (France).
barbot@umpa.ens-lyon.fr