ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Andreas BERNIG & Ludwig BRÖCKER

Courbures intrinsèques dans les catégories analytico-géométriques

Tome 53, nº 6 (2003), p. 1897-1924.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2003__53_6_1897_0>

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2003, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://aif.cedram.org/), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://aif.cedram.org/legal/). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
53, 6 (2003), 1897–1924

COURBURES INTRINSÈQUES DANS LES CATÉGORIES ANALYTICO-GÉOMÉTRIQUES

par A. BERNIG & L. BRÖCKER

1. Introduction.

Les courbures de Lipschitz-Killing apparaissent dans des contextes très différents comme la géométrie convexe, la géométrie riemannienne ou la géométrie combinatoire. En règle générale, une formule qui est vraie dans un de ces domaines (comme la formule cinématique) reste valable dans les autres contextes. Dans cet article, nous proposons un formalisme qui fonctionne à la fois pour les ensembles convexes, sous-analytiques et les sous-variétés d'une variété analytique réelle fixée. L'outil employé est le cycle normal, qui a été introduit pour les ensembles sous-analytiques par J. Fu. Une description plus explicite est fournie par la théorie de Morse stratifiée.

Nous définissons des formes différentielles universelles, appelées *formes de Lipschitz-Killing*. Quand on les intègre sur le cycle normal, on récupère deux types de mesure. Les courbures relatives $\tilde{\Lambda}_i$ reflètent la géométrie du plongement, tandis que les courbures intrinsèques Λ_i sont indépendantes du plongement. Dans le cas classique où on a soit un ensemble convexe soit une sous-variété d'un espace euclidien, les courbures intrinsèques correspondent aux *Quermassintegrale* de Minkowski et aux *volumes invariants* de H. Weyl. Notre définition généralise ces notions à des ensembles ayant de fortes singularités et plongés dans une variété

Mots-clés : Courbures – Espaces sous-analytiques – Formule cinématique – Densités.
Classification math. : 53C65 – 14P10.

riemannienne qui n'est pas forcement plate. Ceci est très utile par exemple pour étudier comment ces invariants dépendent de la métrique de l'espace ambiant.

Nous aurons besoin de certaines stratifications satisfaisant des conditions naturelles comme les conditions de Whitney ou de Verdier. Les ensembles considérés ici font partie d'une catégorie analytico-géométrique. Pour de tels ensembles, on peut toujours trouver des stratifications de ce type.

Le cas des variétés à courbure sectionnelle constante κ est d'un intérêt particulier. Dans ce cas, les deux types d'invariants sont liés par le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Soient $X \subset M_\kappa^N$ un ensemble définissable et compact. Alors les mesures de courbure relatives $\tilde{\Lambda}_i(X,-)$ et les mesures de courbure intrinsèques $\Lambda_i(X,-)$ satisfaisont l'équation suivante (avec $\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!}$) :*

$$\Lambda_j(X,U) = \sum_{i=j,j+2,j+4,\ldots}^{N} \binom{i}{j} \frac{2\kappa^{\frac{i-j}{2}}}{s_{i-j}} \tilde{\Lambda}_i(X,U).$$

Dans le cas des variétés à courbure constante κ, nous démontrons une formule cinématique (dont Santalo ([25]) ne connaissait que les premiers termes) et nous montrons comment les courbures relatives sont liées à la croissance du volume. Ces formules sont particulièrement simples grâce à l'utilisation des courbures relatives. On pourrait les réécrire avec les courbures intrinsèques, mais cela donnerait des formules beaucoup plus compliquées.

Un corollaire de ces calculs est la généralisation suivante du théorème de Gauss-Bonnet :

THÉORÈME 1.2 (Formule de Gauss-Bonnet généralisée). — *Soit $X \subset M_\kappa^N$ un ensemble définissable et compact. Alors*

$$\chi(X) = \sum_{i=0,2,4,\ldots}^{N} \frac{2\kappa^{\frac{i}{2}}}{s_i} \tilde{\Lambda}_i(X).$$

Une autre application concerne les densités locales des ensembles définissables. Ceci répond à une question de M. Coste. Finalement, nous donnons des relations entre les volumes des simplexes réguliers dans les espaces hyperboliques et sphériques.

Remerciements. Nous tenons à remercier M. Pierre-Louis Guerini d'avoir bien voulu relire cet article.

2. Notations.

La fonction gamma sera notée par Γ. Pour simplifier, nous écrirons $n! := \Gamma(n+1)$ même si n n'est pas un nombre entier.

Le volume de la boule-unité de dimension n dans l'espace euclidien est donné par $b_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(\frac{n}{2})!}$ et le volume d'une sphère de dimension n se calcule par $s_n = (n+1)b_{n+1} = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(\frac{n-1}{2})!}$.

Soit M_κ^n la variété riemannienne simplement connexe de dimension n et de courbure sectionnelle constante κ. Alors M_n^κ est unique et donnée par

$$M_\kappa^n = \begin{cases} S_\kappa^n & \kappa > 0 \quad \text{(sphère)} \\ \mathbb{R}^n & \kappa = 0 \quad \text{(espace euclidien)} \\ H_\kappa^n & \kappa < 0 \quad \text{(espace hyperbolique).} \end{cases}$$

Les fonctions modifiées du sinus et du cosinus seront appelées sn_κ et cs_κ :

$$\mathrm{sn}_\kappa(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \sin \sqrt{\kappa} t & \kappa > 0 \\ t & \kappa = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|\kappa|}} \sinh \sqrt{|\kappa|} t & \kappa < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{cs}_\kappa(t) := \begin{cases} \cos \sqrt{\kappa} t & \kappa > 0 \\ 1 & \kappa = 0 \\ \cosh \sqrt{|\kappa|} t & \kappa < 0. \end{cases}$$

3. Mesures de courbure dans des catégories analytico-géométriques.

3.1. Catégories analytico-géométriques.

La définition suivante est due à van den Dries et Miller ([24]).

DÉFINITION 3.1. — *Une catégorie analytico-géométrique $\mathcal{C}$ est la donnée des couples (M, X) avec les propriétés suivantes :*

a) *M est une variété analytique réelle et X un sous-ensemble de M.*

b) *Pour chaque M fixée, l'ensemble des ensembles $X \subseteq M$ tels que $(M, X) \in \mathcal{C}$ forme une algèbre de Boole qui comprend M et que nous notons par $\mathcal{C}(M)$.*

c) *Si $(M, X) \in \mathcal{C}$ alors $(M \times \mathbb{R}, X \times \mathbb{R}) \in \mathcal{C}$.*

d) *Pour chaque application propre analytique $f : M \to N$ et $X \in \mathcal{C}(M)$, $f(X) \in \mathcal{C}(N)$.*

e) *Si X est un sous-ensemble de M, (U_i) un recouvrement ouvert de M, alors $X \in \mathcal{C}(M)$ si et seulement si $X \cap U_i \in \mathcal{C}(U_i)$ pour chaque i.*

f) *Les ensembles bornés de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ sont exactement les unions finies d'intervalles bornées.*

Par exemple, les ensembles sous-analytiques des variétés analytiques réelles forment une catégorie analytico-géométrique qui, de plus, est contenue dans toute autre catégorie.

Les catégories analytico-géométriques généralisent la notion de structure o-minimale. Une telle structure est donnée par une suite $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ telle que

a) ω_n est une algèbre de Boole de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.

b) Si $A \in \omega_n$ et $B \in \omega_m$, alors $A \times B \in \omega_{n+m}$.

c) Si $A \in \omega_{n+1}$, alors $\pi(A) \in \omega_n$ où $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ est la projection sur les n premières coordonnées.

d) ω_n comprend les ensembles algébriques réels de $\mathbb{R}^n$.

e) ω_1 est constitué de toutes les unions finies de points et d'intervalles de $\mathbb{R}$.

La structure o-minimale la plus petite est l'ensemble des ensembles semi-algébriques. La structure o-minimale qui est composée de tous les ensembles sous-analytiques de $\mathbb{R}^n, n = 1, 2 \ldots$ restant sous-analytiques dans la clôture projective $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est appelée $\mathbb{R}_{an}$.

Conformément à [24], il y a une correspondance biunivoque entre les catégories analytico-géométriques et les structures o-minimales contenant $\mathbb{R}_{an}$ que nous décrivons explicitement.

À une catégorie analytico-géométrique $\mathcal{C}$ nous associons une structure o-minimale $\sigma := \sigma(\mathcal{C})$ par

$$\sigma_n := \{X \subseteq \mathbb{R}^n : X \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))\}.$$

Ici, $\mathbb{R}^n$ est considéré comme sous-ensemble ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ à l'aide du plongement $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (1 : y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

En particulier, les ensembles bornés de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ sont contenus dans σ_n.

Par ailleurs, nous associons une catégorie analytico-géométrique $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\sigma)$ à chaque structure o-minimale σ contenant $\mathbb{R}_{\text{an}}$ par : $X \in \mathcal{C}(M^n)$ si et seulement si pour chaque point $x \in M$ il exist un voisinage ouvert U de x dans M, un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ et un isomorphisme analytique $h : U \to V$, tels que $h(U \cap X) \in \sigma_n$.

THÉORÈME 3.2 (van den Dries, Miller). — *Les deux opérations $\sigma \mapsto \mathcal{C}(\sigma)$ et $\mathcal{C} \mapsto \sigma(\mathcal{C})$ sont biens définies et mutuellement inverses.*

La preuve et les propriétés de base des catégories analytico-géométriques peuvent être consultées dans [24]. Par la suite, en tenant compte du théorème de van den Dries et Miller, on parlera d'ensemble définissable quand on aura donné une catégorie analytico-géométrique $\mathcal{C}$, une variété analytique réelle M et un ensemble $X \in \mathcal{C}(M)$.

Des précisions sur les stratifications et leurs relations peuvent être consultées dans [28].

Un point clé de la théorie des courbures est l'existence des stratifications modérées pour des ensembles définissables. En effet, c'est à partir de ces stratifications qu'on peut utiliser la théorie de Morse stratifiée et donner une description explicite du cycle normal (voir sous-section 3.2).

Introduisons d'abord quelques notations.

Pour une stratification de Whitney $X = \cup X^i \subset M$ d'un compact définissable X, nous dénotons par $\operatorname{Nor}_e X \subset SM$ l'ensemble des vecteurs unitaires normaux à une strate quelconque. Nous dénotons par $\operatorname{Nor}_e T_{X^i} X^j, X^i \subset \overline{X^j}$ le sous-ensemble de toutes les limites de vecteurs unitaires normaux à X^j dont les origines tendent vers un point de X^i.

DÉFINITION 3.3. — *Une stratification de Whitney $X = \cup X^i \subset M$ d'un ensemble définissable compact X est appelée* **modérée** *s'il existe une stratification $\cup N^\mu$ de l'espace des vecteurs unitaires normaux $\operatorname{Nor}_e X \subset SM$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

a) *$\{N^\mu\}$ est compatible avec les ensembles $\operatorname{Nor}_e T_{X^i} X^j, X^i \subset \overline{X^j}$, ce qui veut dire que chacun de ces ensembles est une union de strates.*

b) *La projection $\pi : \operatorname{Nor}_e X \to X, (x, v_e) \mapsto x$ est une submersion sur chaque strate.*

Il a été démontré dans [21] et [7] que chaque ensemble compact et définissable admet des stratifications modérées.

Afin de définir des courbures des ensembles d'une catégorie analytico-géométrique $\mathcal{C}$, nous aurons besoin d'une métrique. La définition est la suivante :

DÉFINITION 3.4. — *Soit $X \in \mathcal{C}(M)$ avec X compact et connexe. Une métrique sur X est une métrique analytique réelle sur un voisinage de X dans M.*

Remarque 3.5. — Une métrique sur X induit une métrique intrinsèque sur X dans le sens de [6]. Pour voir cela, nous prenons une stratification de Whitney de X ([24]) et utilisons un résultat de Bekka et Trotman ([1]). Pour des informations complémentaires concernant les propriétés métriques des espaces stratifiés, nous nous référons à l'article [14]. □

Une fois que nous avons une métrique sur M, nous pouvons identifier son fibré en sphères SM avec l'ensemble $\{(x,v), x \in M, v \in T_xM, \|v\| = 1\}$.

Par la suite, on considèrera toujours un compact $X \in \mathcal{C}(M)$ avec une métrique fixée.

Nous utiliserons deux fois le fait que X appartient à une catégorie analytico-géométrique: premièrement cela nous permettra d'associer à X son cycle normal et de définir ainsi ses courbures de Lipschitz-Killing. Cette définition pourrait être faite pour chaque ensemble admettant un cycle normal, par exemple un ensemble convexe ou à portée positive ("positive reach"). Deuxièmement, nous aurons besoin des stratifications modérées de X pour pouvoir donner des formules explicites. Ces formules seront cependant indépendantes de la stratification choisie.

3.2. Cycle normal d'ensembles définissables.

Soit M une variété riemannienne avec une métrique analytique réelle g. Pour le moment, nous supposons que M est connexe et orientée.

Nous notons $D^*(SM)$ l'algèbre des formes différentielles sur SM et $D_*(SM)$ l'espace des courants de masse finie.

Soit $N = \dim M$. La semi-norme plate sur $D_{N-1}(SM)$ est donnée par

$$\|C\|^\flat := \sup_\phi \{C(\phi) | \phi \in D^{N-1}(SM), \|\phi\| \leqslant 1, \|d\phi\| \leqslant 1\},$$

où $C \in D_{N-1}(SM)$ et $\|\cdot\|$ est la co-masse. Nous munissons $D_{N-1}(SM)$ de la topologie induite par $\|\cdot\|^\flat$.

Le cycle normal associé à un ensemble définissable compact X a été introduit par J. Fu. Nous décrivons une construction utilisant la théorie de Morse stratifiée ainsi que la construction originale de J. Fu. La première description est très explicite. Elle peut être utilisée pour donner des caractérisations plus géométriques des courbures de Lipschitz-Killing, voir [2] et [3]. Il est cependant difficile de démontrer à partir de cette définition que le courant obtenu est vraiment un cycle. Parallèlement, la deuxième construction utilise un argument d'approximation et le théorème de compacticité de Federer-Fleming. Elle présente l'avantage de fournir directement un cycle.

Heureusement, par un théorème d'unicité de J. Fu, les deux constructions donnent le même courant. On peut donc parler sans ambiguïté du cycle normal de X.

Nous choisissons une stratification modérée de X et définissons comme dans ([7], § 3) l'indice $\alpha(x,v)$ pour $(x,v) \in SM$ comme l'indice de Morse normal en $x \in X$ d'une fonction de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $\operatorname{grad} f_x = v$.

À cause du théorème de Hardt ([12], Théorème 5.22), α est une fonction définissable à valeurs intégrales sur SM. Le cycle normal de X est représenté par intégration sur le support de α, en utilisant α comme multiplicité.

Soit S une strate de X. Pour $x \in S$, on note S_x la sphère-unité dans le supplémentaire orthogonal de T_xS dans T_xM. Nous aurons aussi besoin de la projection canonique $\pi : SM \to M$. Alors pour tout $\phi \in D^0(SM)$, nous avons

$$(*) \qquad \tilde{X}\Big|_{\pi^{-1}S} (\phi(x,v)\pi^* dv) = \int_S \int_{S_x} \phi(x,v)\alpha(x,v) dv dx.$$

Ici, dv représente à la fois la forme de Gauss et la forme-volume sur S_x.

Les détails de cette construction sont disponibles dans [15] et [4]; voir aussi [26], [20] et [18].

Nous allons décrire maintenant la deuxième construction du cycle normal. Soit X un ensemble définissable et compact. Comme il est démontré dans [7], §6, il existe une fonction définissable continue $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $f \geqslant 0, f^{-1}(0) = X$ et $X_r = f^{-1}([0,r])$ est une variété lisse à bord pour tous $r > 0$. Soit N_r le fibré normal extérieur de X_r. Alors N_r définit un courant rectifiable $\tilde{N}_r \in D_{N-1}(SM)$, qui est représenté par l'intégration sur N_r. Par le théorème de compacticité de Federer-Fleming ([13], 4.2.17), il existe un courant rectifiable $\tilde{N}_0 \in D_{N-1}(SM)$ et une suite $(r_n) \to 0$ tels que $(\tilde{N}_{r_n}) \to \tilde{N}_0$. Par construction, $\tilde{N}_0$ est un cycle : $\partial \tilde{N}_0 = 0$. De plus, $\tilde{N}_0 \llcorner \kappa = 0$ où κ est la 1-forme canonique sur SM. Le cycle $\tilde{N}_0$ satisfait aussi la formule (*).

Maintenant, un théorème d'unicité de Fu ([17], Th. 4.1) affirme qu'il y a au plus un courant $\tilde{N}_0 \in D_{N-1}(SM)$ avec ces propriétés. Donc les deux courants construits coïncident. En particulier, ce courant est un cycle. Nous l'appelons le cycle normal de X et le dénotons par $nc(X)$.

Le cycle normal dépend de l'orientation de M. Si on change d'orientation, le cycle normal est multiplié par -1. Mais on appliquera le cycle normal seulement à des formes différentielles qui se comportent de la même façon lorsqu'on change d'orientation. Le résultat de l'intégration (les mesures de courbures) est par conséquent indépendant de l'orientation de M. Si M est non orientable ou non connexe, on peut toujours l'orienter localement. Une autre possibilité pour contourner ce petit problème technique serait d'utiliser un revêtement double de M. Dans le reste de cet article, nous supposons pour simplifier que M est orientée et connexe, mais les objets que nous construisons, les courbures relatives et intrinsèques, peuvent être définis dans le cas général en tenant compte de la remarque précédente.

3.3. Déterminants mixtes.

DÉFINITION 3.6. — *Soient $A^1, \ldots, A^m$ des matrices réelles de type (n,n). L'équation*

$$\det(t_1 A^1 + \cdots + t_m A^m) = \sum_{a_1+\ldots+a_m=n} t_1^{a_1} \cdots t_m^{a_m} \det{}_{a_1,\ldots,a_m}(A^1,\ldots,A^m)$$

définit pour chaque multi-indice $(a_1,\cdots,a_m)$ tel que $a_1+\cdots+a_m = n$, un nombre réel $\det_{a_1,\ldots,a_m}(A^1,\ldots,A^m)$, *appelé déterminant mixte d'ordre $(a_1,\ldots,a_m)$.*

Par exemple, on a $\det_n(A) = \det A$ et $\det_{i,n-i}(A, \mathrm{Id}) = \sigma_i(A)$.

Remarquons qu'il y a une autre façon de définir des déterminants mixtes.

Notons $e_1, \ldots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ avec base duale $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Soit $A_i^k := \sum A_{ij}^k \omega_j$. Alors on a l'équation

$$\frac{1}{a_1! \cdots a_m!} \sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi) A^1_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge A^1_{\pi(a_1)} \wedge \cdots \wedge A^m_{\pi(n)} \\ = \det{}_{a_1,\ldots,a_m}(A^1, \ldots, A^m)\omega.$$

La somme porte sur toutes les permutations π de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $\omega := \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n$.

Par abus de notation, nous écrirons aussi $\det_{a_1,\ldots,a_m}(A_1, \ldots, A_m)$ si A_1 n'est pas une matrice, mais si on a des 2-formes $A_{ij}^1, i, j = 1, 2, \ldots, n$ et si a_1 est pair. Dans ce cas, $A^1_{\pi(1)} \wedge \cdots \wedge A^1_{\pi(a_1)}$ devra être interprété comme $A^1_{\pi(1)\pi(2)} \wedge \cdots \wedge A^1_{\pi(a_1-1)\pi(a_1)}$. Ceci sera utile pour les 2-formes de courbure.

Pour des vecteurs de 1-formes $\omega^k = (\omega_i^k), i = 1, \ldots, n, k = 1, \ldots, m$ et des nombres naturels $a_1, \cdots, a_m$ tels que $a_1 + \cdots + a_m = n$, nous définissons une n-forme, appelée produit mixte, par

$$\langle \omega^1, \cdots, \omega^m \rangle_{a_1,\ldots,a_m} \\ := \frac{1}{a_1! \cdots a_m!} \sum_\pi \operatorname{sgn}(\pi) \omega^1_{\pi(1)} \cdot \omega^1_{\pi(a_1)} \cdots \omega^m_{\pi(a_1+\cdots+a_{m-1}+1)} \cdots \omega^m_{\pi(n)}.$$

Encore une fois, la somme s'étend sur toutes les permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Déterminant mixte et produit mixte sont reliés par l'équation

$$\langle \omega^1, \cdots, \omega^m \rangle_{a_1,\ldots,a_m}(e_1, \ldots, e_n) = \det{}_{a_1,\ldots,a_m}(\omega^1, \ldots, \omega^m)$$

où dans le terme de droite, nous considérons $\omega^1, \ldots, \omega^m$ comme des (n, n)-matrices définies par $\omega_{ij}^k := \omega_i^k(e_j)$.

3.4. Formes de Lipschitz-Killing relatives.

Nous rappelons que $N = \dim M$.

Soit $(x, v) \in SM$. Choisissons une base positive orthonormée $v = b_1, b_2, \ldots, b_N$ de T_xM de base duale $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$. Alors $b_2, \ldots, b_N$ peuvent être considérés comme une base orthonormée de T_vS^{N-1}, la base duale étant notée $\omega_2, \ldots, \omega_N$. Pour $k = 0, 1, \ldots, N-1$ nous posons

$$\tilde{\phi}_k := \frac{1}{s_{N-k-1}} \langle \omega, \sigma \rangle_{N-k-1,k}.$$

En faisant attention au fait que les indices varient ici de 2 à N, nous pouvons écrire explicitement

$$\tilde{\phi}_k := \frac{1}{s_{N-k-1}} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi)\omega_{\pi(2)} \cdots \omega_{\pi(N-k)}\sigma_{\pi(N-k+1)} \cdots \sigma_{\pi(N)}.$$

Dans cette formule, on somme sur toutes les permutations π de $\{2, 3, ..., N\}$.

Il est important de noter que cette forme est bien définie. Elle ne dépend donc pas de la base choisie. Un changement d'orientation correspond à la multiplication par -1 de cette forme. Elle sera appelée forme de Lipschitz-Killing relative.

Soit maintenant $\tilde{X}$ le cycle normal d'un compact $X \in \mathcal{C}(M)$.

Définition 3.7.

$$\tilde{\Lambda}_k(X) := \tilde{X}(\tilde{\phi}_k).$$

Ces quantités sont appelées **courbures de Lipschitz-Killing relatives**. *De plus, il existe des mesures de Radon signées $\tilde{\Lambda}_k(X, -)$ définies par*

$$\tilde{\Lambda}_k(X, B) := \tilde{X}\Big|_{\pi^{-1}(B)} (\tilde{\phi}_k)$$

pour tout borélien $B \subset X$.

Contrairement aux formes de Lipschitz-Killing relatives, les mesures de Lipschitz-Killing relatives ne dépendent pas de l'orientation. Dans le cas où $M = \mathbb{R}^N$, ces mesures correspondent aux mesures de Lipschitz-Killing habituelles. Si la courbure sectionnelle de M est constante, alors on va voir que les mesures de Lipschitz-Killing relatives apparaissent comme coefficients dans le volume des tubes autour de X et dans une formule cinématique.

Notre prochain but et de trouver une formule plus explicite pour les mesure de courbure relatives.

Considérons une strate S de X de dimension n. Alors S hérite de M une métrique riemannienne et un élément de volume. La sphère-unité dans $(T_xS)^\perp$ sera notée S_x; elle est de dimension $N - n - 1$.

Nous définissons une fonction $\tilde{\lambda}_k$ sur S par

$$\tilde{\lambda}_k(x) = \frac{1}{s_{N-k-1}} \int_{S_x} \alpha(x, v)\sigma_{n-k}(II_{x,v_e})dv_e.$$

Dans cette équation, II_{x,v_e} est la deuxième forme fondamentale de S dans la direction v et σ_{n-k} sa fonction symétrique d'ordre $n-k$. L'indice α

est l'indice de Morse normal en $x \in X$ d'une fonction de Morse $f : M \to \mathbb{R}$ telle que $\operatorname{grad} f_x = v$.

PROPOSITION 3.8. — *Pour chaque borélien $U \subset S$, on a*

$$\tilde{\Lambda}_k(X,U) = \int_U \tilde{\lambda}_k(x)dx.$$

Démonstration. — Comme la définition de ϕ_k exige une base positive orthonormée, mais, cependant, est indépendante de cette base, nous pouvons choisir $v = b_1, b_2, \ldots, b_N$ de telle façon que $b_{N-n+1}, \ldots, b_N$ forment une base orthonormée de T_xS (S est la strate dans laquelle se trouve x et n est sa dimension).

Il faut être prudent et ne pas confrondre les vecteurs tangents de M et ceux de SM. Pour cela, nous écrivons $c_i := b_i$, où on considère b_i pour $i \leqslant N-n$ comme un vecteur tangent de $T_vS_x \subset T_{(x,v)}SM$ et b_i pour $i > N-n$ comme vecteur tangent de $T_xS \subset T_{(x,v)}SM$.

Nous remarquons que

- $\sigma_i(c_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j > N-n \end{cases}$
- $\omega_i(c_j) = \begin{cases} 1 & i = j \leqslant N-n \\ 0 & i \neq j, j \leqslant N-n \\ II_x(b_i, b_j) & j \geqslant N-n+1. \end{cases}$

Soient A la matrice de type $(N-1, N-1)$ dont les entrées sont données par $a_{ij} := \sigma_i(c_j)$ et B la matrice telle que $b_{ij} = \omega_i(c_j)$, $i, j = 2, \ldots, N$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{N-n-1} & 0 \\ * & II_x \end{pmatrix}.$$

Alors $\phi_k(b_2, \cdots, b_N)$ est le déterminant mixte d'ordre $(k, N-k-1)$ de A et B, qui est donné par $\sigma_{n-k}(II_x)$. Il ne reste plus qu'à l'intégrer sur S_x. □

Remarque 3.9. — La description des courbures relatives donnée par la proposition 3.8 est très explicite et peut facilement être utilisée pour calculer ces quantités (voir par exemple les calculs dans [2], [3]). Elle montre aussi que les courbures relatives ne dépendent pas seulement des contributions des strates, mais aussi de la façon dont laquelle les strates sont recollées entre elles. Plus précisément, c'est ici que la théorie de Morse stratifiée prend toute sa mesure. Le théorème principal de cette théorie (voir [18], [19]) affirme que chaque indice de Morse peut s'écrire comme produit de l'indice de Morse tangentielle et de l'indice de Morse normal. Ceci s'applique à l'indice α et rend son calcul facile, au moins pour des strates de petites co-dimensions. □

3.5. Formes de Lipschitz-Killing intrinsèques.

Nous considérons un ensemble compact $X \in \mathcal{C}(M)$ muni d'une métrique. À X, on peut associer ses courbures de Lipschitz-Killing de la façon suivante: on recouvre un voisinage de X dans M par des ouverts qui peuvent être plongés isométriquement dans un espace euclidien et on prend les courbures de Lipschitz-Killing dans cet espace (pour des sous-ensembles définissables dans l'espace euclidien, les courbures de Lipschitz-Killing sont définies dans les articles [4] et [7]). D'après l'invariance des courbures de Lipschitz-Killing par isométrie définissable ([7]), cela donne des mesures de Radon signées bien définies $\Lambda_j(X, -)$ sur X.

Pourtant, il serait souhaitable d'avoir une description semblable à la description des courbures relatives dans le dernier paragraphe, qui n'utilise aucun plongement dans un espace euclidien. Pour cela, soit $\pi : SM \to M$ la projection canonique et $\pi^*\Omega$ l'image inverse du tenseur de courbure de M. Dans une base, $\pi^*\Omega$ est representé par la matrice de 2-formes $(\pi^*\Omega)_{ij} = -\frac{1}{2} R_{ijkl}\sigma_k \wedge \sigma_l$. Nous posons

$$\phi_k := \sum_{i=k,k+2,\dots} \frac{2(-1)^{\frac{i-k}{2}}}{s_{i-k}s_{N-i-1}} \langle \pi^*\Omega, \omega, \sigma \rangle_{i-k,N-i-1,k}.$$

Comme auparavant, les ϕ_k permettent de définir des mesures de Radon signées en posant, pour chaque borélien $B \subset X$,

$$\Lambda'_k(X, B) := \tilde{X}\Big|_{\pi^{-1}(B)} (\phi_k).$$

Comme c'était le cas pour les courbures relatives, les courbures intrinsèques sont indépendantes de l'orientation de M. Elles existent donc même dans le cas où M n'est pas orientable.

Proposition 3.10. — *La mesure de Radon signée $\Lambda'_k(X,-)$ est égale à la mesure de Lipschitz-Killing euclidienne $\Lambda_k(X,-)$.*

Démonstration. — Nous choisissons une stratification modérée de X, une strate S de X de dimension n et un point x de S. Un voisinage U de x dans M admet un plongement isométrique dans un espace euclidien $\mathbb{R}^{N'}$, où N' peut être grand. Pour simplifier l'argument, nous pouvons supposer que $S \subset U$.

Soit $S_x^{N'-n-1}$ la sphère-unité dans le supplémentaire orthogonal de T_xS dans $T_x\mathbb{R}^{N'}$ et $v \in S_x^{N'-n-1}$. La projection de v sur T_xM donne un vecteur $\bar{v}$ de norme $r = \|\bar{v}\|$. D'autre part, $v^\perp := v - \bar{v}$ est dans la sphère de dimension $N'-N-1$ et de rayon $\sqrt{1-r^2}$ dans le supplémentaire orthogonal $(T_xM)^\perp \subset T_x\mathbb{R}^{N'}$. La deuxième forme fondamentale $II_{x,v}$ de la strate S en x dans la direction de v peut être écrite comme $II_{x,\bar{v}} + II_{x,v^\perp}$. Le deuxième terme est simplement la restriction de la forme fondamentale de $M \subset \mathbb{R}^{N'}$ à S.

Avec ces notations, $\Lambda_k(X,-)|_S$ est donné par intégration sur S de la fonction suivante :

$$\begin{aligned}\lambda_k(x) &= \frac{1}{s_{N'-k-1}} \int_{S_x^{N'-n-1}} \alpha(x,v)\sigma_{n-k}(II_{x,v})dv \\ &= \frac{1}{s_{N'-k-1}} \int_{\|\bar{v}\|\leqslant 1} \frac{\alpha(x,\bar{v})}{\sqrt{1-r^2}} \\ &\qquad \left(\int_{\|v^\perp\|=\sqrt{1-\|\bar{v}\|^2}} \sigma_{n-k}(II_{x,\bar{v}} + II_{x,v^\perp})dv^\perp\right) d\bar{v}.\end{aligned}$$

Pour calculer le terme entre parenthèses, nous allons utiliser le lemme de Weyl :

Lemme 3.11 (Lemme de Weyl). — *Soient $A, L^1, \ldots, L^p$ des matrices réelles d'ordre d et soit $(e_1,\ldots,e_d)$ la base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ de base duale $(\omega_1,\ldots,\omega_d)$. Posons $\alpha_i := \sum_j A_{ij}\omega_j$, $\lambda_i^m := \sum_j L_{ij}^m\omega_j$ et $\Lambda_{ij} := \sum_{m=1}^p \lambda_i^m \wedge \lambda_j^m$. Alors*

$$\int_{\|t\|=\rho} \det(A + t_1L^1 + \ldots + t_pL^p)\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_d = \sum_{e=0}^{\lfloor \frac{d}{2}\rfloor} \frac{s_{p+2e-1}}{(d-2e)!\pi^e e! 4^e} T_e \rho^{p+2e-1}$$

où

$$T_e := \sum_{\pi\in\mathcal{S}_d} \operatorname{sgn}(\pi)\Lambda_{\pi(1)\pi(2)} \wedge\cdots\wedge \Lambda_{\pi(2e-1)\pi(2e)} \wedge \alpha_{\pi(2e+1)} \wedge\cdots\wedge \alpha_{\pi(d)}.$$

Afin de simplifier les calculs, nous utilisons la notation abrégée

$$C(d,p,e) := \frac{s_{p+2e-1}}{(d-2e)!\pi^e e! 4^e}.$$

Nous appliquons le lemme de Weyl (avec $A = II_{x,\bar{v}}, p = N' - N, d = n, L^i =$ coordonnées de $II_{x,v^\perp}$) en tenant compte de la formule de Gauss ($\Lambda_{ij} = -\pi^*\Omega_{ij}$). Le terme entre parenthèses est donné par

$$\begin{aligned}
&\int_{\|v^\perp\| = \sqrt{1-\|\bar{v}\|^2}} \sigma_{n-k}(II_{x,\bar{v}} + II^M_{x,v^\perp}) dv^\perp \\
&= \sum_{e=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C(n, N'-N, e)(-1)^e (2e)!(n-2e)! \det{}_{2e,n-2e-k,k}(\pi^*\Omega, II, \mathrm{Id}) \\
&\qquad \sqrt{1-r^2}^{N'-N+2e-1}.
\end{aligned}$$

En remplaçant cette équation dans la formule de λ_k et en utilisant des coordonnées polaires, il vient

$$(**) \qquad \lambda_k(x) = \sum_{\imath=k,k+2,\ldots} \frac{2(-1)^{\frac{\imath-\jmath}{2}}}{s_{i-k}s_{N-\imath-1}} \int_{S_x^{N-n-1}} \alpha(x,w) \det{}_{i-k,n-\imath,k}(\pi^*\Omega, II_w, \mathrm{Id}) dw.$$

Ensuite, on note que $\langle \pi^*\Omega, \omega, \sigma \rangle_{\imath-k,N-\imath-1,k}(c_2, \ldots, c_N)$ est égal au déterminant mixte d'ordre $(i-k, N-i-1, k)$ des matrices

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi^*\Omega \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{N-n-1} & 0 \\ 0 & II_w \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_n \end{pmatrix}.$$

Celui-ci est égal à $\det_{i-k,n-i,k}(\pi^*\Omega, II_w, \mathrm{Id})$. Il s'ensuit que $\Lambda'_k(X,-)$ est donné par l'intégration de la fonction

$$\lambda'_k(x) = \sum_{i=k,k+2,\ldots} \frac{2(-1)^{\frac{\imath-k}{2}}}{s_{i-k}s_{N-i-1}} \int_{S_x^{N-n-1}} \alpha(x,v) \det{}_{i-k,n-i,k}(\pi^*\Omega, II_v, \mathrm{Id}) dv.$$

Comme $\lambda(x) = \lambda'(x)$, nous voyons que $\Lambda_k(X,-) = \Lambda'_k(X,-)$. Ceci termine la démonstration. □

La remarque 3.4 s'applique aussi au cas des courbures intrinsèques. Ces mesures dépendent de la géométrie des strates, mais, à cause de l'indice α, la position relative des strates joue un rôle essentiel. Notons que la formule (**) est très explicite pour le calcul des Λ_k.

4. Le cas de variétés à courbure constante.

Nous allons voir que les courbures relatives des sous-ensembles définissables d'une variété à courbure sectionnelle constante apparaissent dans d'autres contextes. Premièrement, nous montrons que dans ce cas, elles peuvent être calculées à partir des courbures intrinsèques.

4.1. Comparaison des courbures relatives et intrinsèques.

Par le formalisme des formes différentielles, il devient très facile de lier les deux types de courbures. Ceci vient du fait qu'on connaît les 2-formes de courbures. Nous rappelons que le théorème1.1 affirmait l'équation suivante :

$$\Lambda_j(X,-) = \sum_{i=j,j+2,j+4,\dots}^{N} \binom{i}{j} \frac{2\kappa^{\frac{i-j}{2}}}{s_{i-j}} \tilde{\Lambda}_i(X,-).$$

Démonstration du théorème 1.1. — Une grande partie de la démonstration a déjà été faite dans les paragraphes 3.4 et 3.5 ; il suffit de remplacer la 2-forme de courbure. Comme la courbure de M est constante et égale à κ, on a $(\pi^*\Omega)_{ij} = -\kappa\sigma_i \wedge \sigma_j$ et par conséquent

$$\begin{aligned}
\phi_k &= \sum_{i=k,k+2,\dots} \frac{2(-1)^{\frac{i-k}{2}}}{s_{i-k}s_{N-i-1}} \langle \pi^*\Omega, \omega, \sigma\rangle_{i-k,N-i-1,k} \\
&= \sum_{i=k,k+2,\dots} \frac{2\kappa^{\frac{i-k}{2}}}{s_{i-k}s_{N-i-1}} \langle \sigma, \omega, \sigma\rangle_{i-k,N-i-1,k} \\
&= \sum_{i=k,k+2,\dots} \frac{2\kappa^{\frac{i-k}{2}}}{s_{i-k}s_{N-i-1}} \binom{i}{k} \langle \omega, \sigma\rangle_{N-i-1,i} \\
&= \sum_{i=k,k+2,\dots} \frac{2\kappa^{\frac{i-k}{2}}}{s_{i-k}} \binom{i}{k} \tilde{\phi}_i.
\end{aligned}$$

L'intégration sur $\tilde{X}$ montre que

$$\Lambda_k(X,-) = \sum_{i=k,k+2,\dots} \frac{2\kappa^{\frac{i-k}{2}}}{s_{i-k}} \binom{i}{k} \tilde{\Lambda}_i(X,-).$$

Ceci termine la démonstration. □

Remarque 4.1.

- Pour $\kappa = 0$, la formule est triviale.
- Nous voyons qu'on peut également exprimer les courbures relatives comme combinaisons linéaires des courbures intrinsèques.
- En particulier, à chaque ensemble définissable on peut associer des κ-courbures $\Lambda_k^\kappa(X,-)$, même si l'ensemble n'est pas inclus dans M_κ^N. Et si par hasard $X \subset M_\kappa^N$, alors $\Lambda_k^\kappa(X,-) = \tilde{\Lambda}_k(X,-)$. Par exemple, on a $4\pi\Lambda_{m-2}^\kappa(X,-) = 4\pi\Lambda_{m-2}(X,-) - \kappa m(m-1)\operatorname{vol}(X,-)$ avec $m = \dim X$. En utilisant cela, le théorème principal de [2] peut être formulé de la façon suivante : Si X est compact, définissable, connexe et est un espace d'Alexandrov de courbure plus grande ou égale à κ, alors $\Lambda_{m-2}^\kappa(X,-)$ est une mesure positive. □

Démonstration de la généralisation du Théorème de Gauss-Bonnet (Théorème 1.2). — C'est une conséquence directe du théorème 1.1 en tenant compte du fait que $\Lambda_0 = \chi$. □

4.2. Le volume des tubes.

Sur le fibré normal de X, $\operatorname{Nor} X$, on a une mesure canonique donnée par $\operatorname{Vol}_{\operatorname{Nor} X} = (\exp \circ \iota)^* \operatorname{Vol}_M$ où ι est l'inclusion $\iota : \operatorname{Nor} X \hookrightarrow TM$ et $\exp : TM \to M$ est l'application exponentielle de M.

On définit le volume d'un tube autour de X par

$$\operatorname{Vol}_\alpha \operatorname{Tub}_R(X,U) := \int_{\operatorname{Nor} S} 1_{\operatorname{Tub}_R(X,U)} \alpha(x,v) d \operatorname{Vol}_{\operatorname{Nor} X}.$$

Définition 4.2. — *Soient*

$$\theta_0^\kappa(R) := 1$$

$$\theta_j^\kappa(R) := j \int_0^R \operatorname{sn}_\kappa^{j-1}(r) \operatorname{cs}_\kappa(r)^{N-j} dr, \quad j = 1, \dots, N.$$

Nous appelons une combinaison linéaire $\sum_{j=0}^{d} c_j \theta_j^\kappa$ *de telles fonctions un* κ*-polynôme de degré* d*.*

THÉORÈME 4.3. — *Soit* $X \in \mathcal{C}(M_\kappa^N)$ *un ensemble compact. Alors le volume d'un tube autour de* X *de rayon* R *est donné par le* κ*-polynôme*

$$\mathrm{Vol}_\alpha \mathrm{Tub}_R(X, U) = \sum_{i=0}^{N} b_{N-i} \tilde{\Lambda}_i(X, U) \theta_{N-i}^\kappa(R).$$

Démonstration. — Soit M une variété riemannienne quelconque de dimension N, $\pi : TM \to M$ son fibré tangent. L'espace total TM est une variété riemannienne dont la métrique est donnée par la définition suivante : Soient $c_i(t) = (x_i(t), v_i(t)), i = 1, 2$ deux courbes dans TM. Alors

$$\langle c_1'(0), c_2'(0) \rangle := \langle x_1'(0), x_2'(0) \rangle + \left\langle \frac{D}{dt} v_1, \frac{D}{dt} v_2 \right\rangle.$$

Avec cette métrique, π est une submersion riemannienne.

Nous retournons au cas de courbure constante $M = M_\kappa^N$.

L'application exponentielle est donnée par

$$\exp : TM \to M$$
$$\exp(x, v) := \exp_x v.$$

Soit $p := (x, v) \in TM$ un vecteur tangent. Posons $y := \exp(p)$ et $r := \|v\|$. Comme π est une submersion riemannienne, T_pTM est la somme orthogonale de T_xM et de $T_v\pi^{-1}(x)$. Choisissons une base orthonormée $Y_1, \ldots, Y_N$ de T_xM aver $Y_N = \frac{v}{r}$.

Nous remarquons que $\pi^{-1}(x) = T_xM$ est un espace euclidien. On peut identifier $T_v\pi^{-1}(x)$ et T_xM. Par conséquent, $Y_1, \ldots, Y_N$ est aussi une base orthonormée de $T_v\pi^{-1}(x)$, qu'on appellera $Z_1, \ldots, Z_N$ pour ne pas confondre.

Par transport parallèle de $Y_1, \ldots, Y_N$ le long de la géodésique c donnée par $t \mapsto \exp_x t\frac{v}{r}, t \in [0, r]$, nous construisons des bases orthonormées $Y_1(t), \ldots, Y_N(t)$ de $T_{c(t)}M$ pour chaque t. Nous allons exprimer $d\exp$ par rapport aux bases $\{Y_1, \ldots, Y_N, Z_1, \ldots, Z_N\}$ de T_pTM et $\{Y_1(r), \ldots, Y_N(r)\}$ de T_yM.

Une base des champs de Jacobi orthogonaux à c' est donnée par les $2N - 2$ champs de vecteur $\{(\mathrm{cs}_\kappa t)Y_j(t), (\mathrm{sn}_\kappa t)Y_j(t) | j = 1, \ldots, N-1\}$.

Pour chaque $i = 1, \dots, N-1$, on considère la variation de géodésiques $c_s(t) := \exp_{x(s)} t\frac{v(s)}{r}$ où $x(s)$ est une courbe avec $x(0) = x_0$ et $x'(0) = Y_i$ et v est parallèle le long de cette courbe. Alors $J(t) := \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} c_s(t)$ est un champ de Jacobi le long de c. Comme on a $J(0) = Y_i \perp c'(0)$ et $J'(0) = 0$, nous pouvons déduire que $J(t) = \mathrm{cs}_\kappa(t) Y_i(t)$.

Il s'ensuit

$$d\exp(Y_i) = J(r) = \mathrm{cs}_\kappa(r) Y_i(r), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

De l'autre côté, il est facile de voir que

$$d\exp(Y_N) = Y_N(r).$$

Ensuite, pour $i = 1, \dots, N-1$, nous considérons la variation de géodésiques $c_s(t) = \exp_x t\frac{v(s)}{r}$ où $v(s)$ est une courbe telle que $v(0) = v_0$ et $v'(0) = Z_i$. Alors $J(t) := \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} c_s(t)$ est un champ de Jacobi sur c tel que $J(0) = 0 \perp c'(0)$ et $J'(0) = \frac{Y_i}{r}$. Donc $J(t) = \frac{\mathrm{sn}_\kappa(t)}{r} Y_i(t)$ et

$$d\exp(Z_i) = J(r) = \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r)}{r} Y_i(r), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Il est clair que

$$d\exp(Z_N) = Y_N(r).$$

Dans notre base, $d\exp$ est représenté par la matrice de type $(N, 2N)$:

$$d\exp = \begin{pmatrix} \mathrm{cs}_\kappa(r)\,\mathrm{Id}_{N-1} & 0 & \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r)}{r}\,\mathrm{Id}_{N-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit S une strate de dimension $n = \dim S$. $\mathrm{Nor}\, S$ est un sous-ensemble de TM.

Pour tout $v \in T_x M$, soit τv la projection orthogonale de v sur l'espace normal à x.

Soient $c_i(t) = (x_i(t), v_i(t)), i = 1, 2$ deux courbes dans $\mathrm{Nor}\, S$. Alors

$$\langle c_1'(0), c_2'(0) \rangle := \langle x_1'(0), x_2'(0) \rangle + \left\langle \tau \frac{D}{dt} v_1, \tau \frac{D}{dt} v_2 \right\rangle$$

définit une métrique riemannienne sur $\mathrm{Nor}\, S$ telle que $\pi : \mathrm{Nor}\, S \to S$ soit une submersion riemannienne.

Soit $p = (x, v) \in \mathrm{Nor}\, S$. Alors $T_p \mathrm{Nor}\, S = T_x S \oplus T_v \mathrm{Nor}_x S$. Nous choisissons une base orthonormée $X_1, \dots, X_n$ de $T_x S$ et une base orthonormée $X_{n+1}, \dots, X_N$ de $T_v \mathrm{Nor}_x S$. Tous ces vecteurs forment une base orthonormée de $T_p \mathrm{Nor}\, S$.

Nous allons calculer la différentielle du plongement $\iota : \operatorname{Nor} S \hookrightarrow TM$ par rapport aux bases $\{X_1, \ldots, X_N\}$ de $T_p \operatorname{Nor} S$ et $\{Y_1, ..., Y_N, Z_1, ..., Z_N\}$ de T_pTM où, avec les identifications faites, $X_i = Y_i = Z_i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$.

Soit $c : [0, \epsilon) \to \operatorname{Nor} S$ une courbe donnée par $c(t) = (x(t), v(t))$. Nous supposons $c'(0) = X_i$, ce qui veut dire que $x'(0) = X_i$ et $\tau \nabla_{X_\imath} v = 0$. Alors $\iota c : [0, \epsilon) \to TM$ est une courbe telle que $(\iota c)'(0) = (Y_i, \nabla_{Y_\imath} v) = Y_i + \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{Y_\imath} v, Z_j \rangle Z_j$. Par conséquent,

$$d\iota(X_\imath) = Y_\imath + \sum_{j=1}^{n} \langle \nabla_{Y_\imath} v, Z_j \rangle Z_j.$$

Le deuxième terme est la deuxième forme fondamentale de S dans la direction de v. Avec $r := \|v\|, v_e := \frac{v}{r}$, on a $v = rv_e$. Ce terme est donc égal à $rII_{x,v_e}(X_i, X_j)$.

De même, nous choisissons une courbe $c : [0, \epsilon) \to \operatorname{Nor} S$ donnée par $c(t) = (x, v(t))$ telle que $c'(0) = X_k$, ce qui veut dire que $x'(0) = 0$ et $\tau \frac{D}{dt} v = X_k$. Alors $\iota c : [0, \epsilon) \to TM$ est une courbe telle que $(\iota c)'(0) = (0, \frac{D}{dt} v)$. On en déduit

$$d\iota(X_k) = Z_k + \left(\frac{D}{dt} v - \tau \frac{D}{dt} v \right).$$

Le vecteur entre parenthèses est tangent à S et est donc une combinaison linéaire de $Y_1, \ldots, Y_n$.

La matrice de $d\iota$ a, dans les bases $\{X_1, \ldots, X_N\}$ de $T_p \operatorname{Nor} S$ et $\{Y_1, \ldots, Y_N, Z_1, \ldots, Z_N\}$ de T_pTM la forme suivante :

$$d\iota = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ 0 & 0 \\ rII_{x,v_e} & * \\ 0 & \mathrm{Id}_{N-n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} d(\exp \circ \iota) &= d \exp \circ d\iota \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{cs}_\kappa(r) \,\mathrm{Id}_n + \mathrm{sn}_\kappa(r) II_{x,v_e} & * & * \\ 0 & \frac{\mathrm{sn}_\kappa(r)}{r} \mathrm{Id}_{N-n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons

$$M(x,v) := \begin{pmatrix} \mathrm{cs}_\kappa(r) \,\mathrm{Id}_n + \mathrm{sn}_\kappa(r) II_{x,v_e} & * \\ 0 & \mathrm{sn}_\kappa(r) \,\mathrm{Id}_{N-n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors $\det d(\exp \circ \iota) = r^{-N+n+1} \det M(x,v)$.

Le déterminant $\det M(x,v)$ est facile à calculer :

$$\det M(x,v) = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{cs}_\kappa^i(r)\,\mathrm{sn}_\kappa^{N-i-1}(r)\sigma_{n-i}(II_{x,v_e}).$$

Maintenant, nous avons deux mesures de volume sur $\operatorname{Nor} S$. Il s'agit premièrement de $\mathrm{Vol}_{\operatorname{Nor} S} = (\exp \circ \iota)^* \mathrm{Vol}_M$ et deuxièmement de $\mu_{\operatorname{Nor} S}$, la mesure de volume canonique associée à la métrique riemannienne sur $\operatorname{Nor} S$. Grâce aux calculs faits auparavant, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_{\operatorname{Nor} S} &= (\exp \circ \iota)^* \mathrm{Vol}_M \\ &= r^{-N+n+1} \det M(x,v)\mu_{\operatorname{Nor} S}. \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer le volume d'un tube autour de S :

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_\alpha \mathrm{Tub}_R(S,U) &= \int_{\operatorname{Nor} S} 1_{\mathrm{Tub}_R(S,U)}\alpha(x,v)d\,\mathrm{Vol}_{\operatorname{Nor} S} \\ &= \int_{\operatorname{Nor} S} 1_{\mathrm{Tub}_R(S,U)}\alpha(x,v) \det M(x,v) r^{-N+n+1}\mu_{\operatorname{Nor} S} \\ &= \int_U \int_{(T_xS)^\perp} 1_{0,R}(\|v\|)\alpha(x,v)\det M(x,v) r^{-N+n+1} dv dx \\ &= \int_U \int_{S_x} \int_0^R \alpha(x,v_e)\det M(x, rv_e) dr dv_e dx \\ &= \sum_{i=0}^N b_{N-\imath}\theta_{N-i}^\kappa(R) \int_U \tilde{\lambda}_i(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^N b_{N-i}\tilde{\Lambda}_i(X,U)\theta_{N-i}^\kappa(R). \end{aligned}$$

Dans les deux dernières lignes, nous avons utilisé la description explicite des $\tilde{\Lambda}_i$ donnée dans la proposition 3.8.

La même équation reste valable si $n = N$, car dans ce cas $\mathrm{Vol}_\alpha \mathrm{Tub}_R(S,U) = \mathrm{vol}\, U = \mathrm{vol}\, U\theta_0^\kappa(R)$.

En sommant sur toutes les strates, il vient

$$\mathrm{Vol}_\alpha \mathrm{Tub}_R(X,U) = \sum_{i=0}^N b_{N-i}\tilde{\Lambda}_i(X,U)\theta_{N-i}^\kappa(R).$$

□

4.3. La formule cinématique.

Notons $G = G_\kappa$ le groupe des isométries de M_κ^N. Sur G, il y a une mesure positive canonique, la mesure de Haar. Celle-ci est unique à une constante positive près. Nous choisissons la normalisation de telle façon que le volume de toutes les isométries qui transforment un point fixé p_0 dans un borélien U soit donné par $\operatorname{vol} U$. Alors on a

$$\operatorname{vol} G_\kappa = \operatorname{vol} M_\kappa^N = \begin{cases} \infty & \text{pour } \kappa \leqslant 0 \\ \dfrac{s_N}{\kappa^{\frac{N}{2}}} & \text{pour } \kappa > 0. \end{cases}$$

Théorème 4.4 (Formule cinématique). — *Soient X et Y des ensembles compacts dans $\mathcal{C}(M)$ où $M = M_\kappa^N$ est de courbure constante. Alors pour des boréliens $U \subset X, V \subset Y$, on a la formule cinématique :*

$$\int_{G_\kappa} \tilde{\Lambda}_k(X \cap \sigma Y, U \cap \sigma V) d\mu(\sigma) = \sum_{p+q=k+N} e(p,q,N) \tilde{\Lambda}_p(X,U) \tilde{\Lambda}_q(Y,V).$$

Les constantes sont données par

$$e(p,q,N) = \frac{s_{p+q-N} s_n}{s_p s_q}.$$

Démonstration. — Cette formule a été démontrée dans le cas des ensembles à portée positive ("positive reach") par J. Fu ([16]). En particulier, elle est valable pour des variétés à bord. Chaque ensemble définissable peut être approximé dans la topologie plate par des variétés à bord (voir [7]). En plus, les courbures relatives sont continues pour cette topologie, ce qui est évident à partir de la définition. Il s'ensuit que la formule cinématique est valable pour les ensembles définissables. □

Corollaire 4.5 (Formule cinématique de boules). — *Soit $X \in \mathcal{C}(M_\kappa^N)$. Alors*

$$\int_{M_\kappa^N} \chi(X \cap B(a,r)) da = \sum_{i=0}^N b_{N-i} \theta_{N-i}^\kappa(r) \tilde{\Lambda}_i(X).$$

Démonstration. — Nous savons que $\chi(X \cap B(a,r)) = \Lambda_0(X \cap B(a,r))$. On remplace ensuite la formule du théorème 1.1 et la formule cinématique, pour voir que l'intégrale à gauche est donnée par une somme $\sum_{i=0}^N c_i(r) \tilde{\Lambda}_i(X)$. En prenant suffisamment d'exemples (comme des sphères) ou par un calcul explicite, on peut calculer que $c_i(r) = b_{N-i}\theta^\kappa_{N-i}(r)$.

Une manière plus directe de dériver cette formule utilise le fait que l'intégrale à gauche n'est rien d'autre que le volume d'un tube de rayon r autour de X. Ici, la théorie de Morse stratifiée est encore une fois utile. Nous fixons $r > 0$. Pour presque tous $a \in M$, r n'est pas un valeur critique de la fonction dist_a^2. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, la fonction dist_a^2 n'a pas de valeur critique dans l'intervalle $(0, \epsilon]$. Par conséquent, $B(a,\epsilon) \cap X$ est soit vide (dans le cas où $a \notin X$) soit a une structure conique (dans le cas où $a \in X$). Dans les deux cas, $\chi(B(a,\epsilon) \cap X) = 1_{a\in X}$. Par la théorie de Morse stratifiée, on a alors

$$\begin{aligned}\chi(X \cap B(a,r)) &= \chi(B(a,\epsilon) \cap X) + \sum_{(x,v)\in \mathrm{Tub}_r X, v\neq 0, \exp_x v = a} \alpha(x,v)\\ &= 1_{a\in X} + \sum_{(x,v)\in \mathrm{Tub}_r X, v\neq 0, \exp_x v = a} \alpha(x,v).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_{M^N_\kappa} \chi(X \cap B(a,r))da = \mathrm{Vol}_\alpha \mathrm{Tub}_r(X).$$

En remplaçant la formule pour le volume des tubes du théorème 4.3, on obtient le corollaire 4.5. □

5. Densités locales.

Les courbures de Lipschitz-Killing permettent de définir des quantités locales formant une suite qui commence par la caractéristique d'Euler du link et qui se termine par la densité classique, aussi appelée nombre de Lelong. Le théorème suivant répond à une question de Michel Coste.

THÉORÈME 5.1. — *Soient $X \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ et $P \in X$. Posons $X_r := X \cap S(P,r) \subset M^{N-1}_{\frac{1}{r^2}}$. Alors pour chaque $i = 0, 1, \ldots, N-1$, la limite*

$$\theta_i(X,P) := \lim_{r\to 0} \frac{\Lambda_i(X_r)}{s_i r^i}$$

existe. Elle sera appelée densité d'ordre i. La limite

$$\tilde\theta_i(X,P) := \lim_{r\to 0} \frac{\tilde\Lambda_i(X_r)}{s_i r^i}$$

existe aussi et est appelée densité sphérique d'ordre i.

Exemple 5.2.

- La densité d'ordre $\dim X - 1$ est la densité habituelle, dont l'existence est démontrée dans [22] : $\theta_{\dim X-1}(X,P) = \theta(X,P)$.
- La densité d'ordre 0 est égale à la moitié de la caractéristique d'Euler du link : $\theta_0(X,P) = \frac{1-\chi_{\mathrm{loc}}(X,P)}{2}$.

Démonstration du théorème. — Pour $\alpha < \pi$ fixé, nous considérons la fonction

$$h_\alpha(v) := \chi\big(\{w \in \mathbb{R}^N \,|\, \|w\| = \|v\|, \angle(w,v) \leqslant \alpha\}\big).$$

Par le théorème de Hardt, h_α est définissable pour chaque $\alpha < \pi$. D'autre part, cette fonction est à valeurs entiers et est donc localement constante. La densité θ d'une telle fonction est définie de façon évidente (par additivité). On a donc par la formule cinématique de boules :

$$\begin{aligned}\theta(h_\alpha,0) &= \lim_{r\to 0} \frac{\int_{S(0,r)} h_\alpha(v)dv}{s_{n-1}r^{n-1}}\\ &= \lim_{r\to 0} \frac{\sum_{j=0}^N b_{N-j-1}\tilde{\Lambda}_j(X_r)\theta_{N-j-1}^{\frac{1}{r^2}}(r\alpha)}{s_{N-1}r^{N-1}}.\end{aligned}$$

Par changement de variables, nous arrivons à

$$\theta_{N-j-1}^{\frac{1}{r^2}}(r\alpha) = r^{N-j-1}\theta_{N-j-1}^1(\alpha).$$

Par conséquent,

$$\theta(h_\alpha,0) = \lim_{r\to 0}\sum_{j=0}^N \frac{b_{N-j-1}\tilde{\Lambda}_j(X_r)\theta_{N-j-1}^1(\alpha)}{s_{N-1}r^j}.$$

La limite existe pour chaque valeur de α. Mais les fonctions $\theta_i^1(\alpha)$ sont linéairement indépendantes. La limite $\lim_{r\to 0}\frac{\tilde{\Lambda}_j(X_r)}{r^j}$ doit donc exister pour chaque j. Par le théorème 1.1 la limite de

$$\frac{\Lambda_j(X_r)}{s_j r^j} = \sum_{i=j,j+2,j+4,\ldots}^N \binom{i}{j}\frac{2}{r^i s_{i-j}s_j}\tilde{\Lambda}_i(X_r)$$

existe quand r tend vers 0. □

COROLLAIRE 5.3. — *Les densités locales peuvent être exprimées comme combinaisons linéaires des densités sphériques :*

$$\theta_j(X,P) = \sum_{i=j,j+2,\ldots}^N \binom{i}{j}\frac{2s_i}{s_{i-j}s_j}\tilde{\theta}_i(X,P).$$

Démonstration. — C'est une conséquence directe du théorème 1.1. □

Remarque 5.4. — G. Comte ([10]) a défini des densités locales en posant, pour $X \subset \mathbb{R}^N$, ensemble sous-analytique,

$$\mu_j(X,P) := \lim_{r\to 0} \frac{\Lambda_j(X \cap B(P,r))}{b_j r^j} \qquad j = 0,1,\ldots,N.$$

Il a démontré que la limite existe. En utilisant le lemme de Thom et la proposition 3.8, on peut exprimer ces quantités comme combinaisons linéaires de nos invariants. Plus précisément, on obtient une formule qui ressemble un peu à l'équation du corollaire précédent (bien que maintenant la somme s'étende sur tous les $i = j, j+1, \ldots$) :

$$\mu_j(X,P) = \tilde{\theta}_{j-1}(X,P) + \sum_{i=j}^{N} \binom{i}{j} \frac{s_i}{s_{i-j} b_j} \tilde{\theta}_i(X,P) \qquad j = 1,2,\ldots,N.$$

G. Comte a aussi défini d'autres invariants locaux en moyennant sur les densités des projections sur des plans linéaires. Il semble probable que ces invariants peuvent s'exprimer comme combinaisons linéaires des densités sphèriques. Mais cette question reste ouverte. Pour plus d'information concernant la géométrie locale des ensembles sous-analytiques, le lecteur pourra consulter le livre [11]. □

6. Volume d'un simplexe régulier idéal dans l'espace hyperbolique.

LEMME 6.1. — *Soit P un m-simplexe régulier idéal dans l'espace hyperbolique H^m. Alors le long d'une k-face, le link de la section normale est un $m-k-1$ simplexe régulier sphérique de longueur* $\arccos \frac{1}{k+1}$.

Démonstration. — Soient $P_0, \ldots, P_m$ les sommets d'un simplexe régulier avec longueur d. Nous utilisons le modèle hyperboloïde de H^m. Nous considérons ces points comme vecteurs dans $\mathbb{R}^{n,1}$. Alors $\langle P_i, P_i\rangle = -1$ et $\langle P_i, P_j\rangle = -\arccos(d)$ pour $i \neq j$. La section normale le long d'une k-face est donnée par le simplexe de sommets $\bar{P}_0 := \frac{P_0+\cdots+P_k}{k+1}, P_{k+1}, \ldots, P_m$. L'angle hyperbolique en $\bar{P}_0$ de deux points parmi $P_{k+1}, \ldots, P_m$ peut être calculé facilement. Il tend vers $\arccos \frac{1}{k+1}$ lorsque d tend vers ∞. □

LEMME 6.2. — *Considérons le cône convexe dans* $\mathbb{R}^n$ *engendré par des vecteurs unitaires* $v_1, \ldots, v_n$ *dont l'angle de chaque paire est* α. *Alors le cône dual, qui consiste en tous les vecteurs qui forment un angle d'au moins* $\frac{\pi}{2}$ *avec chacun des vecteurs du cône donné, est engendré par des vecteurs* $v_1^*, \ldots, v_n^*$ *de façon à ce que l'angle de chaque paire soit* β, β *étant relié à* α *par la relation*

$$\cos\alpha + \cos\beta + (n-2)\cos\alpha\cos\beta = 0.$$

Démonstration. — On peut vérifier immédiatement que v_i^* pointe dans la direction $-v_i + \frac{\cos\alpha}{1+(n-2)\cos\alpha}\sum_{j\neq i} v_j$. De cette observation on déduit l'affirmation ci-dessus. □

Soit $v_i(d)$ le volume d'un simplexe régulier de longueur d dans l'espace hyperbolique de dimension i et $v_i := v_i(\infty)$.

De même, soit $\tilde{v}_i(d)$ le volume d'un simplexe régulier de longueur d dans S^i. Nous posons $\tilde{v}_{-1}(d) := 1$ et $\tilde{v}_0(d) = \frac{1}{2}$.

PROPOSITION 6.3. — *Avec ces notations, on a la formule suivante :*

$$1 = \sum_{i=0}^{m} \frac{2(-1)^i}{s_{2i}s_{2m-2i-1}} \binom{2m+1}{2i+1} \tilde{v}_{2m-2i-1}\left(\arccos\left(\frac{-1}{2m-1}\right)\right) v_{2i}.$$

Démonstration. — Soit P le simplexe régulier idéal dans l'espace hyperbolique de dimension $2m$. Conformément au théorème 1.1, on peut écrire les courbures de Lipschitz-Killing intrinsèques comme somme de courbures relatives :

$$1 = \Lambda_0(P) = \sum_{i=0}^{m} \frac{2(-1)^i}{s_{2i}} \tilde{\Lambda}_{2i}.$$

Le nombre de $2i$-faces est $\binom{2m+1}{2i+1}$ et, par les lemmes 6.1 et 6.2, l'angle normé extérieur à un tel $2i$-face est $\frac{\tilde{v}_{2m-2i-1}\left(\arccos\left(\frac{-1}{2m-1}\right)\right)}{s_{2m-2i-1}}$. Son volume est v_{2i}. Ceci achève la démonstration de la proposition 6.3. □

Par exemple, nous avons par définition $v_0 = 1$ et, par la formule Gauss-Bonnet, $v_2 = \pi$. Pour calculer le terme suivant, nous notons que $\tilde{v}_1(\arccos(-1/3)) = \pi - \frac{\arccos(1/3)}{2\pi}$ et $\tilde{v}_3(\arccos(-1/3)) = \frac{1}{2}$. La formule devient alors

$$1 = \frac{5}{2} - 5\left(\frac{1}{2} - \frac{\arccos(1/3)}{2\pi}\right) + \frac{3}{4\pi^2}v_4.$$

Par conséquent,

$$v_4 = \frac{10}{3}\pi \arcsin(1/3) - \frac{1}{3}\pi^2.$$

PROPOSITION 6.4.

$$1 = \sum_{i=0}^{m} \frac{2(-1)^i}{s_{2i}s_{2m-2i}} \binom{2m+2}{2i+1} \tilde{v}_{2m-2i} \left(\arccos \left(\frac{-1}{2m} \right) \right) v_{2i}.$$

Démonstration. — Choisissons un simplexe P régulier idéal dans l'espace hyperbolique de dimension $2m+1$. On a :

$$1 = \Lambda_0(P) = \sum_{i=0}^{m} \frac{2(-1)^i}{s_{2i}} \tilde{\Lambda}_{2i}.$$

Le nombre de ($2i$-faces) est $\binom{2m+2}{2i+1}$, l'angle extérieur normé est $\frac{\tilde{v}_{2m-2i}\left(\arccos\left(\frac{-1}{2m}\right)\right)}{s_{2m-2i}}$, le volume v_{2i}. Ceci termine la démonstration de la proposition 6.4. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. BEKKA, D. TROTMAN, On metrics properties of stratified sets, Manuscripta Math., 111 (2003), 71–95.

[2] A. BERNIG, Scalar Curvature of definable Alexandrov spaces, Advances in Geometry, 2 (2002), 29–55.

[3] A. BERNIG, Scalar Curvature of definable CAT spaces, Advances in Geometry, 3 (2003), 23–43.

[4] A. BERNIG, L. BRÖCKER, Lipschitz-Killing invariants, Mathematische Nachrichten, 245 (2002), 5–25.

[5] J. BOCHNAK, M. COSTE, M.-F. ROY, Géométrie Algébrique Réelle, Springer-Verlag, 1987.

[6] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Springer-Verlag, 1999.

[7] L. BRÖCKER, M. KUPPE, Integral geometry of tame sets, Geom. Dedicata, 82 (2000), 285–323.

[8] J. CHEEGER, W. MÜLLER, R. SCHRADER, On the curvature of piecewise flat spaces, Comm. Math. Phys., 92 (1984), 405–454.

[9] J. CHEEGER, W. MÜLLER, R. SCHRADER, Kinematic and tube formulas for piecewise flat spaces, Indiana Univ. Math. I., 35 (1986), 737–754.

[10] G. COMTE, Équisingularité réelle : invariants locaux et conditions de régularité, preprint Université de Nice 2001.

[11] G. COMTE, Y. YOMDIN, Tame Geometry with Applications in Smooth Analysis, livre à paraître.

[12] M. COSTE, An introduction to o-minimal geometry. Universitá di Pisa, Dipartimento di Matematica, 2000.

[13] H. FEDERER, Geometric Measure Theory, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

[14] M. FERRAROTTI, About geodesic distance on Riemannian stratified spaces, preprint, 1997.

[15] J. FU, Curvature measures of subanalytic sets, Amer. J. Math., 116 (1994), 819–880.

[16] J. FU, Kinematic formulas in integral geometry, Indiana Univ. Math. J., 39 (1990), 1115–1154.

[17] J. FU, Monge-Ampère functions I, Indiana Univ. Math. J., 38 (1989), 745–771.

[18] M. GORESKY, R. MACPHERSON, Stratified Morse Theory, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988.

[19] H. HAMM, On stratified Morse theory, Topology, 38 (1999), 427–438.

[20] M. KASHIWARA, P. SCHAPIRA, Sheaves on Manifolds, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990.

[21] M. KUPPE, Integralgeometrie Whitney-Stratifizierter Mengen, Dissertation Münster, 1999.

[22] K. KURDYKA, G. RABY, Densité des ensembles sous-analytiques, Ann. Inst. Fourier, 39-3 (1989), 753–771.

[23] L. VAN DEN DRIES, Tame Topology and O-Minimal Structures, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 248, Cambridge University Press, 1998.

[24] L. VAN DEN DRIES, C. MILLER, Geometric Categories and o-minimal structures, Duke Math. Journal, 84 (1996), 497–540.

[25] L.A. SANTALÓ, Introduction to Integral Geometry, Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago, Paris, 1953.

[26] J. SCHÜRMANN, Topology of singular spaces and constructible sheaves, www.math.uni-hamburg.de/home/schuermann.

[27] R. SULANKE, P. WINTGEN, Differentialgeometrie und Faserbündel, Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart, 1972.

[28] D. TROTMAN, Espaces stratifiés réels, dans Stratifications, singularities and differential equations, travaux en Cours, 55 (1997), 93–107.

[29] H. WEYL, On the volume of tubes, Amer. J. Math., 61 (1939), 461–472.

[30] M. Zähle, Curvature and currents for unions of sets with positive reach, Geom. Dedicata, 23 (1987), 155–171.

[31] M. Zähle, Approximation and characterization of generalized Lipschitz-Killing curvatures, Ann. Global Anal. Geom., 8 (1990), 249–260.

Manuscrit reçu le 28 mai 2002,
accepté le 21 mars 2003.

Andreas BERNIG,
Universität Freiburg
Institut für Mathematik
Eckerstr. 1
79104 Freiburg (Germany).
bernig@math.unizh.ch

Ludwig BRÖCKER,
Mathematisches Institut
Einsteinstr. 62
48149 Münster (Germany).
broe@math.uni-muenster.de