ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Matthias MEULIEN

Sur les invariants des pinceaux de formes quintiques binaires

Tome 54, n^{o} 1 (2004), p. 21-52.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_1_21_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
54, 1 (2004), 21–51

SUR LES INVARIANTS DES PINCEAUX DE FORMES QUINTIQUES BINAIRES

par Matthias MEULIEN

Introduction.

Dans le présent article, nous nous intéressons aux invariants des pinceaux de formes quintiques binaires sous l'action naturelle du groupe $\mathbf{SL}_2$. On note $\mathbf{S}_n$ le $\mathbf{SL}_2$-module irréductible $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(n))$.

Un résultat classique affirme que la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_d)$ des pinceaux de formes binaires de degré d est birationnellement équivalente — la correspondance étant $\mathbf{SL}_2$-équivariante — à l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{S}_{2d-2})$ [Tra88]. Lorsque $d = 5$, ceci suggère de comparer l'algèbre des invariants des pinceaux de formes quintiques binaires avec l'algèbre des invariants d'une forme octique binaire.

Il est bien connu que la dimension projective de l'algèbre des invariants d'une forme binaire de degré d croît de manière spectaculaire avec d : les cas décrits par les géomètres du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle ($1 \leqslant d \leqslant 6$) correspondant à des algèbres de polynômes ou des hypersurfaces; le cas de l'octique ($d = 8$) correspondant à une algèbre de Gorenstein de codimension 3 [Pop92].

L'algèbre $\mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_8)^{\mathbf{SL}_2}$ a été décrite en 1967 par T. Shioda [Shi67]. Il s'agit du quotient de l'algèbre de polynômes $R = \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}]$ (le degré d'une indéterminée est donné par son indice) par l'idéal

Mots-clés : Théorie géométrique des invariants – Formes quintiques binaires – Quintiques rationnelles gauches – Séries de Poincaré – Anneaux de Gorenstein.
Classification math. : 14L24 – 14L30 – 14H50 – 13A50 – 13H10 – 13D40 – 15A72.

des Pfaffiens d'ordre 4 d'une matrice M alternée 5×5. T. Shioda identifie, au moyen des «séries de Gordan» [GrY03], une famille minimale de générateurs homogènes ainsi que la matrice M, rendant explicite la résolution projective minimale du R-module $\mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_8)^{\mathbf{SL}_2}$.

Nous donnons de l'algèbre des invariants des pinceaux de formes quintiques binaires une description analogue à celle obtenue par T. Shioda pour $\mathbf{S}_{.}(\mathbf{S}_8)^{\mathbf{SL}_2}$, à ceci près que nous n'avons pas identifié la matrice donnant les syzygies (théorèmes 2.2.7 et 2.2.9).

Voici maintenant comment procède cet article. Au §1.1 on étudie la stabilité sur la Grassmannienne. Pour cela on emprunte une piste inaugurée par J.-L. Verdier [Ver88] : le Wronskien, défini au moyen de l'unique application $\mathbf{SL}_2$-linéaire non nulle $\bigwedge^k \mathbf{S}_d \to \mathbf{S}_{k(d-k+1)}$, est un morphisme plat et fini de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$ vers $\mathbf{P}(\mathbf{S}_{k(d-k+1)})$. Par conséquent l'instabilité d'un k-plan est équivalente à l'instabilité d'une forme binaire, pour laquelle on dispose du critère de Hilbert (théorème 1.1.4). En particulier un pinceau de formes quintiques binaires est instable si et seulement si son Wronskien (ou Jacobien) est une octique binaire instable, c'est-à-dire possède une racine de multiplicité > 4.

Au passage on obtient une propriété remarquable du pléthysme $\mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_{d+1})$: il est symétrique en d et n (proposition 1.1.5). Comme cette propriété n'est pas utile pour la suite du travail, la démonstration n'est donnée qu'au §3; elle repose sur un calcul de séries hypergéométriques et le q-analogue de la formule de Saalschütz.

Au §1.2 on étend la formule de Springer donnant la série de Poincaré de l'algèbre graduée des invariants d'une forme binaire de degré d sous l'action naturelle du groupe $\mathbf{SL}_2$ [Spr80]. Il s'agit de donner une expression rationnelle de la série de Poincaré de l'algèbre graduée des invariants de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$ (théorème 1.2.1).

La suite de l'article est consacrée à l'étude de l'algèbre graduée $B^{\mathbf{SL}_2}$ des invariants des pinceaux de formes quintiques binaires ($k = 2$ et $d = 5$). La série de Poincaré de $B^{\mathbf{SL}_2}$ est égale à

$$\frac{1 + z^5 + z^6 + z^7 + z^{12}}{(1-z)\,(1-z^2)\,(1-z^3)^2\,(1-z^4)\,(1-z^5)}. \tag{1}$$

Le point clé de notre étude consiste à identifier un système de paramètres homogènes de $B^{\mathbf{SL}_2}$ des degrés 1, 2, 3, 3, 4 et 5 suggérés par le dénominateur de la fraction (1). Le §2.1 rassemble quelques énoncés de nature géométrique portant sur les covariants d'ordre 4. Ces résultats permettent d'identifier les orbites de $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)$ annulant les invariants non constants de degré $\leqslant 4$ (proposition 2.2.1). À ce stade, l'identification du système de paramètres homogènes résulte de la description des composantes homogènes de $B^{\mathbf{SL}_2}$ en degré $\leqslant 4$ (proposition 2.2.5).

L'expression (1) exprime donc que $B^{\mathbf{SL}_2}$ est un module libre de rang 5 sur le sous-anneau P engendré par les paramètres identifiés. Puisque $B^{\mathbf{SL}_2}$ est une algèbre graduée de Gorenstein, on obtient facilement que la P-algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}$ est engendrée par trois éléments : $B^{\mathbf{SL}_2}$ est le quotient de l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, x_3', x_4, x_5, x_5', x_6, x_7]$ par un idéal de hauteur 3. En conséquence, le théorème de structure de D. Buchsbaum et D. Eisenbud [BuE77] s'applique (théorème 2.2.7). Pour finir, un calcul permet de compléter le système de paramètres en une famille génératrice minimale (théorème 2.2.9).

Au cours de ce travail j'ai pu compter sur les lumières de Laurent Gruson : qu'il en soit remercié cordialement. Merci également à Thierry Levasseur dont la relecture fut un modèle de finesse et de tact.

Conventions et notations.

Dans tout le texte, le corps de base est $\mathbb{C}$. On note $\mathbf{P}_1 = \mathrm{Proj}(\mathbb{C}[X, Y])$, et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{S}_n = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_1}(n))$; le groupe $\mathbf{SL}_2$ des matrices carrées de dimension 2 et de déterminant 1 opère naturellement sur $\mathbf{P}_1$ et sur $\mathbf{S}_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Pour toute algèbre $A = \oplus_{n \geqslant 0} A_n$ graduée de type $\mathbb{N}$, nous noterons A_+ l'idéal $\oplus_{n>0} A_n$.

Mise au point sur la dualité.

On fixe une fois pour toutes une forme volume sur $\mathbf{S}_1$. Ce choix permet d'identifier $\mathbf{S}_1$ et son dual, puis $\mathbf{S}_n$ et son dual; ceci de manière $\mathbf{SL}_2$-linéaire. On dispose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une application bilinéaire non dégénérée qui est symétrique ou alternée selon la parité de n. Lorsque les calculs rendent nécessaire l'introduction d'une base de $\mathbf{S}_1$, nous la noterons (x, y) et nous la choisirons de volume un.

Formule de Clebsch-Gordan.

Le $\mathbf{SL}_2$-module $\mathbf{S}_n$ est irréductible, et tout $\mathbf{SL}_2$-module irréductible est isomorphe à un tel module. Le $\mathbf{SL}_2$-module $\mathbf{S}_m \otimes \mathbf{S}_n$ s'identifie à

$$\bigoplus_{k=0}^{\min(m,n)} \mathbf{S}_{m+n-2k}.$$

Cette identification peut être réalisée au moyen des applications $\mathbf{SL}_2$-linéaires

$$\mathbf{S}_m \otimes \mathbf{S}_n \xrightarrow{\tau_k} \mathbf{S}_{m+n-2k},$$

définies par

$$\tau_k(u \otimes v) = \frac{(m-k)!}{m!}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\frac{\partial^k u}{\partial x^i y^{k-i}}\frac{\partial^k v}{\partial x^{k-i} y^i}\ ;$$

on appelle $\tau_k(u \otimes v)$ le *transvectant d'ordre* k de u et v. Notons que $\tau_m\colon \mathbf{S}_m \otimes \mathbf{S}_m \to \mathbf{S}_0$ est la forme bilinéaire déjà mentionnée, $\tau_0\colon \mathbf{S}_m \otimes \mathbf{S}_n \to \mathbf{S}_{m+n}$ est la multiplication, et $\tau_n\colon \mathbf{S}_m \otimes \mathbf{S}_n \to \mathbf{S}_{m-n}$ $(m \geqslant n)$ induit l'application transposée de la multiplication

$$\forall (u,v,w) \in \mathbf{S}_{m-n} \times \mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_m \quad \tau_m(uv,w) = \tau_{m-n}(u, \tau_n(v,w)).$$

Pour $f \in \mathbf{S}_n$ $(n \geqslant 2)$, on note h_f le *Hessien* $\tau_2(f,f)$ de f; c'est une forme binaire de degré $2n-4$.

Systèmes de paramètres et stabilité.

Considérons A une algèbre de type fini qui est un $\mathbf{SL}_2$-module rationnel. Comme le groupe $\mathbf{SL}_2$ est réductif, l'algèbre $A^{\mathbf{SL}_2}$ est de type fini. En particulier elle possède des systèmes de paramètres. Supposons, de plus, A graduée de dimension n. Une famille $(f_1,\dots,f_n)$ d'invariants homogènes est un système de paramètres si et seulement si le fermé de $\mathrm{Spec}(A)$ défini par $(f_1,\dots,f_n)$ est le fermé défini par l'idéal $A_+^{\mathbf{SL}_2}A$ de A. Ce fermé est le fermé des points *instables*. Dans le complémentaire, les points sont dits *semi-stables*; un point semi-stable est dit *stable* si son orbite est fermée et son sous-groupe d'isotropie est fini.

Pour les formes binaires de degré n, on dispose du critère de Hilbert : $f \in \mathbf{S}_n$ est stable (resp. semi-stable) si et seulement si toutes ses racines homogènes sont de multiplicité $< n/2$ (resp. $\leqslant n/2$).

Invariants des formes quartiques binaires.

L'algèbre $\mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_4)^{\mathbf{SL}_2}$ des invariants d'une forme quartique binaire est une algèbre de polynômes engendrée par deux invariants de degré 2 et 3 : par exemple, les invariants g_2 et g_3 définis, pour $f \in \mathbf{S}_4$, par $g_2(f) = \tau_2(f,f)$ et $g_3(f) = \tau_2(h_f,f)$. Notons que g_2 est la forme quadratique associée au produit scalaire invariant sur $\mathbf{S}_4$.

Quintiques rationnelles gauches.

Un pinceau U de formes quintiques binaires est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbf{S}_5$. L'orthogonal U° est de dimension 4, et s'interprète comme une série linéaire de dimension 3 et degré 5 sur $\mathbf{P}_1$. D'où un morphisme $\mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_3$ lorsque U° est sans point de base, ou, de manière équivalente, si U° n'est contenu dans aucun hyperplan osculateur à $\mathcal{C}_5$, la quintique rationnelle normale de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_5)$, ou encore, si U ne rencontre pas $\mathcal{C}_5$; dans ce cas, on notera $\mathcal{C}_U$ la quintique rationnelle gauche image. Ce morphisme est un plongement si U ne rencontre pas le lieu des bisécantes à $\mathcal{C}_5$.

1. Généralités sur les séries linéaires sur $\mathbf{P}_1$.

1.1. Étude de la stabilité.

Morphisme Wronskien.

Soit w l'unique (à homothétie près) application $\mathbf{SL}_2$-linéaire de $\bigwedge^k \mathbf{S}_d$ sur $\mathbf{S}_{k(d-k+1)}$. L'image par w d'un k-vecteur décomposable $f_0 \wedge \cdots \wedge f_{k-1}$ est proportionnelle au déterminant de la matrice suivante :

(2) $$\left(\frac{\partial^{k-1} f_j}{\partial x^i \partial y^{k-1-i}}\right)_{0 \leqslant i,j \leqslant k-1}.$$

Remarque 1.1.1. — Lorsque $k=2$ on reconnaît l'application linéaire obtenue en factorisant le Jacobien $\tau_1 \colon \mathbf{S}_d \otimes \mathbf{S}_d \to \mathbf{S}_{2d-2}$ par $\mathbf{S}_d \otimes \mathbf{S}_d \to \bigwedge^2 \mathbf{S}_d$.

Lemme 1.1.2. — *Soit $f_0 \wedge \cdots \wedge f_{k-1}$ un k-vecteur non nul décomposable. Supposons les vecteurs $f_0, \ldots, f_{k-1}$ choisis de sorte que la suite $(\mathrm{ord}_{(0:1)}(f_i))_{i \in [0,k-1]}$ des multiplicités de la racine homogène $(0\colon 1)$ soit* *strictement décroissante. Alors la multiplicité de cette racine dans* $w(f_0 \wedge \cdots \wedge f_{k-1})$ *est égale à*

$$\sum_{i=0}^{k-1} (\mathrm{ord}_{(0:1)}(f_i) - i).$$

En particulier $w(f_0 \wedge \cdots \wedge f_{k-1})$ *n'est pas nul.*

Démonstration. — Posons $m_i = \mathrm{ord}_{(0:1)}(f_i)$ et $m = (m_0, \dots, m_{k-1})$. Visiblement la multiplicité de la racine homogène (0: 1) dans le déterminant de la matrice (2) est supérieure à

$$\sum_{i=0}^{k-1} (m_i - i).$$

Notons ℓ cet entier. Le coefficient du monôme $x^\ell y^{k(d-k+1)-\ell}$ dans $w(f_0 \wedge \cdots \wedge f_{k-1})$ est un multiple non nul du produit

$$1! \cdots (k-1)! \det \left(\binom{m_i}{j} \right)_{0 \leqslant i,j \leqslant k-1}.$$

Il suffit donc de montrer que le déterminant n'est pas nul. Or il est égal au déterminant de Vandermonde de $m_0, m_1, \dots, m_{k-1}$, et ces entiers sont supposés distincts. □

L'application w ne s'annule pas sur les k-vecteurs décomposables (lemme 1.1.2), et par conséquent définit un morphisme — le Wronskien — de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$ dans l'espace projectif $\mathbf{P}(\mathbf{S}_{k(d-k+1)})$. Ce morphisme (encore noté w) est $\mathbf{SL}_2$-équivariant. On désigne par A l'algèbre de polynômes $\mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_{k(d-k+1)})$, et B l'algèbre du cône de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$.

Lemme 1.1.3. — *Le morphisme* $w\colon \mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d) \to \mathbf{P}(\mathbf{S}_{k(d-k+1)})$ *est plat et fini. Son degré est le degré du plongement de Plücker; pour* $k = 2$, *ce degré est égal au nombre de Catalan* $(2d-2)!/d!(d-1)!$.

Démonstration. — Observons que A est une algèbre de polynômes de dimension $k(d-k+1)+1$ et B une algèbre de Cohen-Macaulay de même dimension. Par ailleurs le morphisme w induit un morphisme $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ dont le lieu d'annulation est le fermé défini par l'idéal A_+B de B; ce fermé est un singleton (lemme 1.1.2) donc le quotient B/A_+B est de longueur finie. En conséquence, le A-module gradué B est de type fini (lemme de Nakayama gradué) et libre [Bou98, chapitre X, §4, n°1, corollaire 4 de la proposition 3]. □

THÉORÈME 1.1.4. — *Soit $U \in \mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *le point U est stable (resp. semi-stable) ;*

(ii) *le Wronskien $w(U) \in \mathbf{P}(\mathbf{S}_{k(d-k+1)})$ est stable (resp. semi-stable) ;*

(iii) *$w(U)$ n'a pas de racine de multiplicité $\geqslant k(d-k+1)/2$ (resp. $> k(d-k+1)/2$).*

Démonstration. — Comme le morphisme $w\colon \mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d) \to \mathbf{P}(\mathbf{S}_{k(d-k+1)})$ est fini (lemme 1.1.3) et $\mathbf{SL}_2$-équivariant, les lieux stable ou semi-stable sont les images réciproques des lieux correspondants sur $\mathbf{P}(\mathbf{S}_{k(d-k+1)})$ [Mum65, théorème 1.19] d'où l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii). Pour obtenir (ii)$\Leftrightarrow$(iii), il suffit d'écrire le critère numérique de stabilité pour le Wronskien : les formes binaires de degré $k(d-k+1)$ stables (resp. semi-stables) sont celles dont les racines ont toutes une multiplicité $< k(d-k+1)/2$ (resp. $\leqslant k(d-k+1)/2$) [Mum65, proposition 4.1]. □

Loi de réciprocité.

L'algèbre quotient B/A_+B est naturellement munie d'une action du groupe $\mathbf{SL}_2$. Le problème de sa décomposition en $\mathbf{SL}_2$-modules irréductibles semble ouvert en général. Toutefoislorsque $k = 2$ on a, pour tout n, l'égalité suivante (cf. §3 pour une preuve) :

$$(B/A_+B)_n = \mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_{d-1-n}). \tag{3}$$

Par ailleurs l'algèbre B/A_+B est un anneau artinien de Gorenstein. Il s'agit également d'une algèbre graduée de type $\mathbb{N}$ dont le socle est la composante homogène de degré $d-2$ (il est connu que $\Omega_B = B(-d-1)$, et $\Omega_A = A(1-2d)$ puisque A est une algèbre de polynômes en $2d-1$ indéterminées). On obtient l'énoncé suivant, en identifiant les $\mathbf{SL}_2$-modules $(B/A_+B)_n$ et $(B/A_+B)_{d-2-n}$ [Bou98, chapitre X, §3, exercice 5].

PROPOSITION 1.1.5. — *Quels que soient les entiers d et n, le pléthysme $\mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_{d+1})$ est symétrique en d et n : les $\mathbf{SL}_2$-modules $\mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_{d+1})$ et $\mathbf{S}^{(d,d)}(\mathbf{S}_{n+1})$ sont isomorphes.*

Remarque 1.1.6. — L. Manivel a étendu cet énoncé au moyen de la combinatoire des tableaux de Young : le pléthysme $\mathbf{S}^{(n^k)}(\mathbf{S}_{d+k-1})$ est symétrique en d, k et n [Man02]. Il serait intéressant d'en avoir une démonstration plus géométrique.

Nombres de lacunes.

Rappelons brièvement la classique caractérisation des points d'inflexion d'une série linéaire au moyen du Wronskien. Elle sera utile dans l'étude des pinceaux de formes quintiques binaires.

Soit $U \in \mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$ que l'on interprète comme une série linéaire de dimension (projective) $k-1$ et degré d sur $\mathbf{P}_1$. Pour $P \in \mathbf{P}_1$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit le sous-espace vectoriel $U(-n \cdot P)$ de U par $\{f \in U \mid \mathrm{ord}_P(f) \geqslant n\}$; la suite décroissante $(U(-n \cdot P))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. Le point P est un *point d'inflexion* de U si la suite croissante $(n_0, \dots, n_{k-1})$ des entiers tels que $U(-n \cdot P) \neq U(-(n-1) \cdot P)$ et la suite $(1, 2, ..., k)$ sont distinctes; les entiers $n_0, \dots, n_{k-1}$ sont les *nombres de lacunes* de U en P.

LEMME 1.1.7. — *Soient $U \in \mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$, $P \in \mathbf{P}_1$. Le point P est un point d'inflexion de la série linéaire définie par U si et seulement si* $\mathrm{ord}_P(w(U)) > 0$.

Démonstration. — Considérons une base $(f_0, \dots, f_{k-1})$ subordonnée au drapeau $U \supset U(-n_0 \cdot P) \supset \cdots \supset U(-n_{k-1} \cdot P)$ osculateur en P; autrement dit $n_i = \mathrm{ord}_P(f_i) + 1$. On a $\mathrm{ord}_P(w(f_0 \wedge \cdots \wedge f_{k-1})) = \sum_{i=1}^{k} (n_{i-1} - i)$ (lemme 1.1.2) dont le membre de droite est nul si et seulement si on a l'égalité $(n_0, \dots, n_{k-1}) = (1, \dots, k)$. □

1.2. Série de Poincaré.

Il s'agit ici de donner une expression rationnelle de la série de Poincaré $\mathcal{H}_{B^{\mathbf{SL}_2}}(z)$ de l'algèbre graduée $B^{\mathbf{SL}_2}$. Pour de petites valeurs de k et d, cette expression est accessible au calcul.

Rappelons que B désigne l'algèbre du cône de la Grassmannienne $\mathbf{G}_k(\mathbf{S}_d)$. Il s'agit d'un $\mathbf{SL}_2$-module gradué de type $\mathbb{N}$, et $B_n = \mathbf{S}^{n\lambda}(\mathbf{S}_d)$ où $\lambda = (1^k\, 0^{d-k+1})$ désigne la partition de k qui est de longueur $d+1$ et a une seule colonne. Soit m la forme linéaire, sur les suites finies de longueur $d+1$, définie par la matrice ligne $(d\ d-2\ \dots\ -d)$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}$, on note $\sigma \cdot m$ la forme linéaire définie en permutant les colonnes de cette matrice, et $\epsilon(\sigma)$ la signature de σ. Enfin, pour $n \in \mathbb{Z}$ et X une indéterminée, on introduit la trace $\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}(X^{1/n})/\mathbb{C}(X)}$ de l'extension finie de corps $\mathbb{C}(X) \to \mathbb{C}(X^{1/n})$ induite par l'identité.

THÉORÈME 1.2.1. — *Avec les notations du paragraphe précédent, on a :*

$$(4)\quad \mathcal{H}_{B^{\mathbf{SL}_2}}(z) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1}\\ \langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle<0}} \frac{\epsilon(\sigma)}{\langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle} \operatorname{Tr}_{\mathbb{C}(z^{-1/\langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle})/\mathbb{C}(z)} \left(\frac{(z^2-1)z^{\langle\sigma\cdot m,\delta\rangle}}{v(z^d,z^{d-2},\ldots,z^{-d})}\right)$$

où $\delta = (d, d-1, \ldots, 0)$, *et* $v(z^d, z^{d-2}, \ldots, z^{-d})$ *est le déterminant de Vandermonde de* $z^d, z^{d-2}, \ldots, z^{-d}$.

Indiquons tout de suite quelques conséquences de ce théorème. Les deux premiers exemples étaient connus des géomètres du XIX[e] siècle [Sal90].

Exemple 1.2.2. — Le calcul montre que la série de Poincaré de l'algèbre des invariants des pinceaux de formes cubiques binaires ($k = 2$ et $d = 3$) est égale à :

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^3)}.$$

Le transvectant τ_3 induit un invariant de degré un. Les invariants g_2 et g_3 du Wronskien $w = \tau_1$ conduisent à des invariants de degré 2 et 3. La série de Poincaré indique que l'espace vectoriel $B_2^{\mathbf{SL}_2}$ est de dimension un; par conséquent $g_2(w)$ et τ_3^2 sont proportionnels. Comme g_2 et g_3 engendrent l'algèbre des invariants d'une quartique, l'annulation de τ_3 et $g_3(w)$ entraîne l'instabilité de w, donc caractérise l'instabilité sur la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_3)$ (théorème 1.1.4). Ces deux invariants forment donc un système de paramètres homogènes de l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}$. Par conséquent cette algèbre est une algèbre de polynômes de dimension 2

Exemple 1.2.3. — Le cas des pinceaux de formes quartiques binaires ($k = 2$ et $d = 4$) est plus intéressant : l'algèbre des invariants est une hypersurface. La série de Poincaré de cette algèbre est égale à (on commence par donner la forme irréductible) :

$$\frac{1-z^3+z^6}{(1-z^2)^2(1-z^3)(1-z^4)} = \frac{1+z^9}{(1-z^2)^2(1-z^4)(1-z^6)}.$$

On peut montrer que la dernière expression est *représentative* : l'algèbre des invariants des pinceaux de formes quartiques binaires est de rang 2 (engendrée par 1 et un invariant homogène de degré 9) sur une sous-algèbre de polynômes à 4 générateurs de degrés 2 (deux fois), 4 et 6 [Meu03].

Exemple 1.2.4. — La série de Poincaré de l'algèbre des invariants des pinceaux de formes quintiques binaires ($k=2$ et $d=5$) est égale à :

$$\frac{1+z^5+z^6+z^7+z^{12}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)(1-z^5)}. \tag{5}$$

Nous verrons que cette expression est représentative (théorème 2.2.7).

Exemple 1.2.5. — Pour la série de Poincaré des pinceaux de formes sextiques binaires ($k=2$ et $d=6$), on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{M(z)}{(1-z^2)^3(1-z^3)^2(1-z^4)(1-z^5)(1-z^8)}\\ = \frac{\widetilde{M}(z)}{(1-z^2)^3(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)^2(1-z^8)}\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}M(z) &= 1-2\,z^3+5\,z^4+z^5+18\,z^6+10\,z^7+28\,z^8\\ &\quad +16\,z^9+38\,z^{10}+15\,z^{11}+38\,z^{12}+16\,z^{13}\\ &\quad +28\,z^{14}+10\,z^{15}+18\,z^{16}+z^{17}+5\,z^{18}-2\,z^{19}+z^{22},\\ \widetilde{M}(z) &= 1+5\,z^4+z^5+15\,z^6+20\,z^7+30\,z^8+50\,z^9+63\,z^{10}\\ &\quad +72\,z^{11}+88\,z^{12}+102\,z^{13}+102\,z^{15}+88\,z^{16}+72\,z^{17}\\ &\quad +63\,z^{18}+50\,z^{19}+30\,z^{20}+20\,z^{21}+15\,z^{22}+z^{23}+5\,z^{24}+z^{28}.\end{aligned}$$

Exemple 1.2.6. — Terminons cette énumération avec la série de Poincaré de l'algèbre des invariants des réseaux de quintiques binaires ($k=3$ et $d=5$) :

$$\frac{N(z)}{(1-z^2)(1-z^4)^2(1-z^6)(1-z^8)^2(1-z^{10})} = \frac{\widetilde{N}(z)}{(1-z^4)^3(1-z^6)(1-z^8)^2(1-z^{10})}$$

où :

$$\begin{aligned}N(z) &= 1-z^2+7\,z^4+6\,z^6+45\,z^8+52\,z^{10}+136\,z^{12}\\ &\quad +147\,z^{14}+231\,z^{16}+197\,z^{18}+231\,z^{20}+147\,z^{22}\\ &\quad +136\,z^{24}+52\,z^{26}+45\,z^{28}+6\,z^{30}+7\,z^{32}-z^{34}+z^{36},\\ \widetilde{N}(z) &= 1+6\,z^4+13\,z^6+51\,z^8+97\,z^{10}+188\,z^{12}\\ &\quad +283\,z^{14}+378\,z^{16}+428\,z^{18}+428\,z^{20}+378\,z^{22}+283\,z^{24}\\ &\quad +188\,z^{26}+97\,z^{28}+51\,z^{30}+13\,z^{32}+6\,z^{34}+z^{38}.\end{aligned}$$

En vue de démontrer le théorème, on introduit la notion de *caractère formel*. Soient M un $\mathbb{C}$-espace vectoriel gradué de type $\mathbb{N}^e$, et $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant e}$ une famille d'indéterminées sur $\mathbb{C}$. Supposons $\dim_{\mathbb{C}}(M_\alpha) < \infty$ pour tout

$\alpha \in \mathbb{N}^e$, et M muni d'une action du groupe $\mathbf{SL}_2$ qui préserve la graduation. Dans ces conditions, on dit que M est un $\mathbf{SL}_2$-*module gradué* et on définit le *caractère formel* $\mathcal{H}_M(z)$ de M par la série formelle :

$$\sum_{\alpha} \mathrm{ch}(M_\alpha)\, z^\alpha \in \mathbb{C}(t)[[z]]$$

où $\mathrm{ch}(M_\alpha) \in \mathbb{C}(t)$ désigne le caractère du $\mathbf{SL}_2$-module M_α (relativement au tore maximal des matrices diagonales) et z^α le monôme $\prod_i z_i^{\alpha_i}$.

Exemple 1.2.7. — Si l'action de $\mathbf{SL}_2$ sur M est triviale, alors $\mathrm{ch}(M_\alpha) = \dim_{\mathbb{C}}(M_\alpha)$ et $\mathcal{H}_M(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ est la série de Poincaré de M.

Exemple 1.2.8. — Supposons M gradué de type $\mathbb{N}$ et notons C le $\mathbf{SL}_2$-module bigradué des covariants de M ; par définition,

$$C = \bigoplus_{m,n} (\mathbf{S}_m \otimes M_n)^{\mathbf{SL}_2} \ ;$$

et les éléments non nuls de $C_{m,n}$ sont les *covariants d'ordre m et de degré n de M*. Comme l'action de $\mathbf{SL}_2$ est triviale sur C, la série $\mathcal{H}_C(t,z)$ est la série de Poincaré de C (exemple 1.2.7). En particulier le terme constant en t est la série de Poincaré $\mathcal{H}_{M^{\mathbf{SL}_2}}(z)$ de l'espace vectoriel gradué des invariants de M.

On peut également lier les caractères formels $\mathcal{H}_C(t,z)$ et $\mathcal{H}_M(z)$. Dans $\mathbb{C}(t)[[z]]$, on a les égalités :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_M(z) &= \sum_n \mathrm{ch}(M_n)\, z^n \\ &= \sum_n \left(\sum_m \dim_{\mathbb{C}} (\mathbf{S}_m \otimes M_n)^{\mathbf{SL}_2}\, \mathrm{ch}(\mathbf{S}_m) \right) z^n,\end{aligned}$$

d'où :

$$(t - t^{-1})\, \mathcal{H}_M(z) = t\, \mathcal{H}_C(t,z) - t^{-1}\, \mathcal{H}_C(t^{-1}, z),$$

puisque le caractère du $\mathbf{SL}_2$-module $\mathbf{S}_m$ est égal à $(t^{m+1} - t^{-m-1})/(t - t^{-1})$.

LEMME 1.2.9. — *On a :*

$$\mathcal{H}_B(z) = v(t^d, t^{d-2}, \ldots, t^{-d})^{-1} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{d+1}} \epsilon(\sigma)\, \frac{t^{\langle \sigma \cdot m, \delta \rangle}}{1 - t^{\langle \sigma \cdot m, \lambda \rangle} z} \tag{6}$$

où $\delta = (d, d-1, \ldots, 0)$, et $v(t^d, t^{d-2} \ldots, t^{-d})$ est le déterminant de Vandermonde de $t^d, t^{d-2}, \ldots, t^{-d}$.

Pour $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ de module < 1, l'ensemble des pôles non nuls de la fraction rationnelle $\mathcal{H}_B(z) \in \mathbb{C}(t)$ est contenu dans :

$$\{t_0 \in \mathbb{C} \mid \exists \sigma \in \mathfrak{S}_{d+1},\ t_0^{-\langle \sigma \cdot m, \lambda \rangle} - z = 0\}.$$

Démonstration. — Commençons par écrire la formule de Weyl pour le caractère du $\mathrm{GL}(\mathbf{S}_d)$-module $B_n = \mathbf{S}^{n\lambda}(\mathbf{S}_d)$:

$$\text{(7)}\quad \mathrm{Tr}_{B_n}\begin{pmatrix} t_0 & & \\ & \ddots & \\ & & t_d\end{pmatrix} = v(t_0,\dots,t_d)^{-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1}}\epsilon(\sigma)\,t_{\sigma(0)}^{(\delta+n\lambda)_0}\cdots t_{\sigma(d)}^{(\delta+n\lambda)_d}\ ;$$

on en déduit le caractère du $\mathbf{SL}_2$-module B_n :

$$\text{(8)}\qquad \mathrm{ch}(B_n) = v(t^d,\dots,t^{-d})^{-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1}}\epsilon(\sigma)\,t^{\langle\sigma\cdot m,\delta\rangle}(t^{\langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle})^n.$$

La série formelle $\mathcal{H}_B(z) = \sum_n \mathrm{ch}(B_n)z^n$ est donc une somme de séries géométriques et est égale à la fraction rationnelle :

$$v(t^d,t^{d-2},\dots,t^{-d})^{-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1}}\epsilon(\sigma)\,\frac{t^{\langle\sigma\cdot m,\delta\rangle}}{1-t^{\langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle}z}.$$

Fixons $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ de module <1 et examinons les éventuels pôles de $t\mapsto\mathcal{H}_B(z)$. Dans l'expression (7), le Vandermonde divise la somme qui le suit car elle est alternée; par conséquent le Vandermonde $v(t^d,t^{d-2},\dots,t^{-d})$ ne contribue pas aux pôles de la fraction rationnelle $\mathcal{H}_B(z)\in\mathbb{C}(t,z)$. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1}$, les pôles de $t^{\langle\sigma\cdot m,\delta\rangle}/(1-t^{\langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle}z)$ sont des puissances fractionnaires de z et éventuellement 0; d'où le lemme. □

Démonstration du théorème 1.2.1. — Fixons $z\in\mathbb{C}-\{0\}$ de module <1. La fraction rationnelle $(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)$ n'a pas de pôle sur le cercle unité (lemme 1.2.9), et $\mathcal{H}_{B^{\mathbf{SL}_2}}(z)$ est égal au coefficient de $-t^{-1}$ dans le développement en série de Laurent de $(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)$ (exemple 1.2.8). Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de $(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)$ qui sont intérieurs au cercle unité et non nuls; on a :

$$\mathcal{P} = \{t_0\in\mathbb{C}\mid \exists\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1},\ \langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle<0\ \text{ et }\ t_0^{-\langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle}-z=0\}.$$

D'après le théorème des résidus,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{B^{\mathbf{SL}_2}}(z) &= \frac{-1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|t|=1}(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)\,\mathrm{d}t\\ &= -\sum_{t_0\in\mathcal{P}}\mathrm{Res}_{t_0}\Bigl(v(t^d,t^{d-2},\dots,t^{-d})^{-1}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{d+1}}\epsilon(\sigma)\,\frac{t^{\langle\sigma\cdot m,\delta\rangle}}{1-t^{\langle\sigma\cdot m,\lambda\rangle}z}\Bigr)\\ &\quad+\mathrm{Res}_0((t-t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)).\end{aligned}$$

Pour prouver le théorème, il suffit de démontrer que le résidu en zéro est nul.

On a $(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z) = t\,\mathcal{H}_C(t,z)-t^{-1}\,\mathcal{H}_C(t^{-1},z)$ (exemple 1.2.8). La fraction rationnelle $t\,\mathcal{H}_C(t,z)$ ne contribue pas au résidu en 0 car elle n'a pas de pôle en zéro (exemple 1.2.7). Étudions maintenant la contribution de $t^{-1}\,\mathcal{H}_C(t^{-1},z)$. Par définition du résidu en $+\infty$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_0(t^{-1}\,\mathcal{H}_C(t^{-1},z)) &= \operatorname{Res}_{+\infty}\left(-\frac{t\,\mathcal{H}_C(t,z)}{t^2}\right)\\ &= -\operatorname{Res}_{+\infty}(t^{-1}\,\mathcal{H}_C(t,z)).\end{aligned}$$

Il suffit de démontrer que le degré de $t^{-1}\,\mathcal{H}_C(t,z)$ est $\leqslant -2$ puisque, dans ce cas, $+\infty$ n'est pas un pôle de $t^{-1}\,\mathcal{H}_C(t,z)$ et $\operatorname{Res}_{+\infty}(t^{-1}\,\mathcal{H}_C(t,z))$ est nul.

Pour terminer la démonstration du théorème, montrons que le degré en t de $\mathcal{H}_C(t,z)$ est $\leqslant -1$. Désormais on ne considère plus que la graduation de C par l'ordre des covariants : *on oublie la graduation par le degré des covariants* (exemple 1.2.8). L'algèbre $C = (B \otimes \mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_1))^{\mathbf{SL}_2}$ est factorielle et Cohen-Macaulay [Bou87]; c'est donc un anneau de Gorenstein. Par conséquent le degré de la série de Poincaré $\mathcal{H}_C(t)$ est égal au degré du module dualisant Ω_C. Le lemme suivant permet de calculer ce degré.

LEMME 1.2.10. — *Soit G un groupe algébrique affine, réductif et connexe; soit R une algèbre graduée de type fini, Cohen-Macaulay et intégralement close. On suppose R munie d'une coaction de G compatible avec la graduation. Soient $X = \operatorname{Spec}(R)$, $Y = \operatorname{Spec}(R^G)$ et $\pi\colon X \to Y$ le morphisme quotient. Notons X^s l'ouvert des points stables de X, et X^l le plus grand ouvert de X sur lequel l'action de G est libre. On suppose les compléments de X^s et X^l dans X de codimension $\geqslant 2$. Alors on a l'égalité de $\mathcal{O}_X$-modules gradués :*

$$\pi^*\Omega_Y = \Omega_X.$$

Démonstration. — L'hypothèse Cohen-Macaulay assure l'existence des modules dualisants [Bou98, chapitre X, §9, n°3, corollaire 2 de la proposition 6]. D'autre part, les $\mathcal{O}_Y$-modules gradués cohérents $(\pi_*\Omega_X)^G$ et Ω_Y sont égaux [Kno89, Satz 5].

Sur l'ouvert X^l le morphisme π est fidèlement plat [Mum65, proposition 0.9]. Par conséquent la donnée d'un $\mathcal{O}_{X^l}$-module cohérent muni d'une G-linéarisation est équivalente à celle d'un $\mathcal{O}_{Y^l}$-module cohérent, les identifications se faisant par les foncteurs $\mathcal{F} \mapsto (\pi_*\mathcal{F})^G$ et π^*.

Comme Ω_X est G-linéarisé, les $\mathcal{O}_X$-modules inversibles $\pi^*\Omega_Y$ et Ω_X coïncident sur l'ouvert $X^l \cap X^s$. Mais le complément de cet ouvert est de codimension 2 et le schéma X est normal : Ω_X et $\pi^*\Omega_Y$ sont égaux. $\square$

Vérifions les hypothèses de ce lemme lorsque $G = \mathbf{SL}_2$ et $R = B \otimes \mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_1)$. Comme $B \otimes \mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_1)$ est factorielle, c'est une algèbre intégralement close ; par ailleurs, elle a bien la propriété de Cohen-Macaulay. Les lieux *non stable* et *non libre* de $\mathrm{Spec}(B \otimes \mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_1)) = \mathrm{Spec}(B) \times \mathbf{S}_1$ sont en codimension $\geqslant 2$ si et seulement si c'est le cas des lieux analogues sur $\mathbf{S}_{k(d-k+1)} \times \mathbf{S}_1$ puisque le Wronskien induit un morphisme fini :

$$\mathrm{Spec}(B) \times \mathbf{S}_1 \xrightarrow{w \times \mathrm{id}} \mathbf{S}_{k(d-k+1)} \times \mathbf{S}_1.$$

Composons avec la projection de $\mathbf{S}_{k(d-k+1)} \times \mathbf{S}_1$ sur $\mathbf{S}_{k(d-k+1)}$; lorsque $k(d-k+1) > 4$, le lieu non stable de $\mathbf{S}_{k(d-k+1)}$ est bien en codimension supérieure à 2 (critère de Hilbert) et le lieu non libre aussi (sur le lieu stable, « libre » signifie « ensemblistement libre » puisque l'action est propre).

Comme l'algèbre $B \otimes \mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_1)$ est engendrée sur B (qui est en degré 0) par deux éléments de degré 1, $\Omega_{B \otimes \mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_1)}$ est de degré -2 ; le lemme montre que c'est aussi le degré de Ω_C. Ainsi le degré en t de $\mathcal{H}_C(t,z)$ est $\leqslant -1$, et le théorème est démontré lorsque $k(d-k+1) > 4$. Pour traiter les quelques cas restants, il suffit de calculer $\mathcal{H}_B(z)$ à l'aide de la formule (6), et d'observer que le résidu en 0 est nul. □

Exemple 1.2.11. — Soient $e \in \mathbb{N}$. La série de Poincaré $\mathcal{H}_{C_{e,\cdot}}(z)$ de l'espace vectoriel gradué des covariants d'ordre e de l'algèbre B est égale au coefficient de $-t^{-e-1}$ dans le développement en série de Laurent de $t \mapsto (t - t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)$ (exemple 1.2.8). On a donc :

$$\mathcal{H}_{C_{e,\cdot}}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|t|=1} t^e (t - t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)\,\mathrm{d}t.$$

Et on dispose, pour $\mathcal{H}_{C_{e,\cdot}}(z)$, d'une formule analogue à celle du théorème à condition de démontrer que le résidu en zéro de $t^e(t-t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z)$ est nul. Or on a :

$$t^e(t - t^{-1})\,\mathcal{H}_B(z) = t^{e+1}\,\mathcal{H}_C(t,z) - t^{-e-1}\,\mathcal{H}_C(t^{-1},z).$$

Visiblement le premier terme du second membre n'a pas de pôle en zéro. Ensuite on a, par définition du résidu en $+\infty$,

$$\mathrm{Res}_{\,0}(t^{e-1}\,\mathcal{H}_C(t^{-1},z)) = -\,\mathrm{Res}_{\,+\infty}(t^{-e-1}\,\mathcal{H}_C(t,z)),$$

et le membre de droite est nul puisque $t^{-e-1}\,\mathcal{H}_C(t,z)$ est de degré $\leqslant -2$.

Cette observation permet de calculer la série de Poincaré de l'espace vectoriel gradué des covariants d'ordre 4 d'un pinceau de quintiques binaires :

$$\frac{z + z^2 + z^4 + z^6 + z^7}{(1-z)^2(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)} = z + 3\,z^2 + 6\,z^3 + 13\,z^4 + 24\,z^5 + 41\,z^6 + \mathbf{O}_0(z^7).$$

2. Cas des pinceaux de formes quintiques binaires.

Dans ce numéro on s'intéresse aux pinceaux de formes quintiques binaires ($k = 2$ et $d = 5$). Rappelons que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le $\mathbf{SL}_2$-module B_n s'identifie au pléthysme $\mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_5)$. En particulier $B_1 = \bigwedge^2 \mathbf{S}_5$, et, d'après la formule de Clebsch-Gordan,

$$B_1 = \mathbf{S}_8 \oplus \mathbf{S}_4 \oplus \mathbf{S}_0,$$

l'identification se faisant au moyen des transvectants τ_1, τ_3 et τ_5. Par la suite nous noterons respectivement w, p et j_1 les covariants linéaires d'ordre 8, 4 et 0 correspondants.

2.1. Étude de quelques covariants naturels.

Lieu d'annulation du covariant linéaire d'ordre quatre.

Les sous-groupes finis de $\mathbf{PSL}_2$ appartiennent à l'un des types suivants : cyclique, diédral, tétraédral, octaédral ou icosaédral; et les sous-groupes de chacun de ces types forment une classe de conjugaison de sous-groupes de $\mathbf{PSL}_2$. Il est connu que les sous-groupes octaédraux de $\mathbf{PSL}_2$ sont les stabilisateurs de *triplets conjugués*, c'est-à-dire d'ensembles de trois paires de points de $\mathbf{P}_1$ dont les éléments forment deux à deux des orbites harmoniques de $\mathbf{P}_1$. Une sextique binaire est dite *octaédrique* si l'image dans $\mathbf{PSL}_2$ de son stabilisateur est un groupe octaédral; les sextiques octaédriques forment une orbite sous $\mathbf{SL}_2$. Puisque $\{0, \infty\}$, $\{1, -1\}$ et $\{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ forment un triplet conjugué, la sextique binaire $xy(x^4 + y^4)$ est octaédrique.

À une sextique binaire correspond par *polarisation* un pinceau de quintiques binaires; c'est le *pinceau des dérivées* de la sextique.

Proposition 2.1.1. — *Le lieu d'annulation du covariant p est l'adhérence de l'orbite du pinceau des dérivées de la sextique octaédrique.*

Démonstration. — Notons U le pinceau des dérivées de la sextique octaédrique. On observe par le calcul qu'au point U le Wronskien w est une octique stable, p s'annule, et j_1 n'est pas nul. De plus, l'adhérence de l'orbite de U est un volume de degré 14 dans $\mathbf{P}(\bigwedge^2 \mathbf{S}_5)$. En effet, le projeté de ce fermé sur $\mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$ est l'adhérence de l'orbite de w dont le degré est 14 [MuU83, théorème 1.10].

Par ailleurs, la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)$ étant de degré 14 dans $\mathbf{P}(\bigwedge^2\mathbf{S}_5)$, l'intersection avec la variété linéaire définie par p est également de degré 14.

Dans ces conditions, pour montrer que $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5) \cap \{p = 0\}$ est l'adhérence de l'orbite de U, il suffit de démontrer que sa dimension est 3. Mais l'hyperplan défini par j_1 ne contenant pas $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5) \cap \{p = 0\}$, il revient au même de prouver que $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5) \cap \{p = 0, j_1 = 0\} = \mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5) \cap \mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$ est de dimension 2. Le lemme suivant termine donc la preuve de la proposition. □

LEMME 2.1.2. — *Le fermé $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5) \cap \mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$ de $\mathbf{P}(\bigwedge^2\mathbf{S}_5)$ s'identifie à la développable de la courbe rationnelle normale de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_8) \subseteq \mathbf{P}(\bigwedge^2\mathbf{S}_5)$. En particulier il est de dimension 2.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{D}$ cette développable. Il est connu que $\mathcal{D}$ est intersection de quadriques, et que l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathcal{D}}(2))$ est de dimension 15 [Wey93, théorème 2.15], [GrH94, théorème d'Enriques-Petri]. Puisque $\mathbf{SL}_2$ agit sur $\mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$ en laissant $\mathcal{D}$ globalement invariante, $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathcal{D}}(2))$ est un sous-$\mathbf{SL}_2$-module de $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathbf{S}_8)}(2))$; c'est le seul sous-$\mathbf{SL}_2$-module de dimension 15 puisque $\mathbf{S}^2(\mathbf{S}_8) = \mathbf{S}_{16} \oplus \mathbf{S}_{12} \oplus \mathbf{S}_8 \oplus \mathbf{S}_4 \oplus \mathbf{S}_0$ (formule de Clebsch-Gordan).

Rappelons que $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)$ est également intersection de 15 quadriques, et que le $\mathbf{SL}_2$-module $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)}(2))$ est isomorphe à $\bigwedge^2\mathbf{S}_5 = \mathbf{S}_8 \oplus \mathbf{S}_4 \oplus \mathbf{S}_0$.

Soit ι l'application $\mathbf{SL}_2$-linéaire de restriction $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)}(2)) \to \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathbf{S}_8)}(2))$. Le fermé $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5) \cap \mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$ est le lieu base de la série linéaire $\mathrm{im}(\iota)$ sur $\mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$. Vu les remarques précédentes, il suffit de démontrer que ι est injective.

Considérons la transformation quadratique Φ définie par $\mathrm{H}^0(\mathcal{I}_{\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)}(2))$:

$$\mathbf{P}(\textstyle\bigwedge^2\mathbf{S}_5) \overset{\Phi}{\rightsquigarrow} \mathbf{P}(\textstyle\bigwedge^2\mathbf{S}_5).$$

Elle apparaît comme le passage au carré dans l'algèbre extérieure suivi de l'identification entre $\bigwedge^4\mathbf{S}_5$ et $\bigwedge^2\mathbf{S}_5$. L'application ι est injective si et seulement si l'image de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$ par Φ est non dégénérée. Vérifions ce dernier point. La droite vectorielle engendrée par le bivecteur $x^5 \wedge x^4y + xy^4 \wedge y^5$ définit un point de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_8) \subseteq \mathbf{P}(\bigwedge^2\mathbf{S}_5)$; en effet, le calcul montre que $w = x^8 + y^8$, $p = 0$ et $j_1 = 0$ sur ce bivecteur. Son carré est proportionnel à $x^5 \wedge x^4y \wedge xy^4 \wedge y^5$ qui correspond, après l'identification de $\bigwedge^4\mathbf{S}_5$ et $\bigwedge^2\mathbf{S}_5$, à $x^3y^2 \wedge x^2y^3$. Aucune des projections de ce bivecteur sur $\mathbf{S}_8$, $\mathbf{S}_4$ et $\mathbf{S}_0$ n'est nulle, donc le plus petit sous-$\mathbf{SL}_2$-module de $\bigwedge^2\mathbf{S}_5$ qui le contient est $\bigwedge^2\mathbf{S}_5$ entier. □

Covariant quadrisécante.

Notons $\mathcal{O}(-1) \subseteq \mathbf{S}_5$ le sous-fibré tautologique sur la Grassmannienne $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)$. On dispose d'un morphisme de fibrés sur $\mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)$:

$$\mathcal{O}(-1) \otimes \mathbf{S}_1 \longrightarrow \mathbf{S}_5 \otimes \mathbf{S}_1 \xrightarrow{\tau_1} \mathbf{S}_4.$$

La puissance extérieure d'ordre 4 de ce morphisme donne un covariant q de degré 2 :

$$\mathcal{O}(-2) \xrightarrow{q} \mathbf{S}_4$$

puisque $\bigwedge^4(U \otimes \mathbf{S}_1) = (\bigwedge^2 U)^{\otimes 2} \otimes (\bigwedge^2\mathbf{S}_1)^{\otimes 2}$ (formule de Cauchy), et $\bigwedge^4\mathbf{S}_4 = \mathbf{S}_4$.

PROPOSITION 2.1.3. — *Soient $U \in \mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)$ qui ne rencontre pas le lieu des bisécantes à $\mathcal{C}_5$, la quintique rationnelle normale de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_5)$, et $\mathcal{C}_U \subseteq \mathbf{P}_3$ la quintique rationnelle correspondante. On a l'alternative suivante :*

(i) *$\mathcal{C}_U$ possède une unique quadrisécante;*

(ii) *$\mathcal{C}_U$ est tracée sur une quadrique.*

Dans le premier cas, le covariant q définit le diviseur découpé sur $\mathcal{C}_U$ par son unique quadrisécante; dans le second, il est nul.

Démonstration. — L'alternative est connue; rappelons toutefois que si une quintique rationnelle gauche est tracée sur une quadrique de $\mathbf{P}_3$ alors la quadrique est lisse et la courbe est de bidegré $(4,1)$: elle possède une famille de quadrisécantes.

Vérifions qu'à chaque hyperplan contenant l'image de l'application $U \otimes \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_4$ correspond une quadrisécante de $\mathcal{C}_U$. Soit $f \in \mathbf{S}_4$ définissant un tel hyperplan :

$$\forall g \in \mathbf{S}_4 \quad (g \in \operatorname{im}(U \otimes \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_4)) \Rightarrow (\tau_4(g,f) = 0).$$

Pour $(u,l) \in U \times \mathbf{S}_1$, on a $\tau_5(u,lf) = \tau_4(\tau_1(u,l),f) = 0$; par conséquent les multiples de f par les éléments de $\mathbf{S}_1$ définissent des formes linéaires sur $\mathbf{S}_5/U$. Or l'espace vectoriel $(\mathbf{S}_5/U)^*$ n'est autre que $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_3}(1))$ où $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}(\mathbf{S}_5/U)$ désigne le réceptacle de la projection de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_5)$ de sommet $\mathbf{P}(U)$. Autrement dit, si $P_1,\dots,P_4$ désignent les projections des quatre points de $\mathcal{C}_5 \simeq \mathbf{P}_1$ définis par f, alors, pour tout point P de $\mathcal{C}_U$, le diviseur

$P_1 + \cdots + P_4 + P$ est une section hyperplane de $\mathcal{C}_U$. Ceci exprime bien que les points $P_1, \ldots, P_4$ sont alignés.

Lorsque l'application $U \otimes \mathbf{S}_1 \to \mathbf{S}_4$ est de rang 4, son image est l'hyperplan défini par le covariant q ; la courbe $\mathcal{C}_U$ possède donc une unique quadrisécante. En revanche si le rang est $\leqslant 3$, ce que caractérise l'annulation de q, la courbe possède une infinité de quadrisécantes. □

Remarque 2.1.4. — L'espace vectoriel $(\mathbf{S}_4 \otimes B_2)^{\mathbf{SL}_2}$ des covariants d'ordre 4 et de degré 2 est de dimension 3 (exemple 1.2.11). Les trois covariants $j_1 p$, h_p et q en forment une base ; on vérifie leur indépendance linéaire en les évaluant sur le pinceau représenté par le bivecteur $(x^5 + y^5) \wedge (x^2y^3 + xy^4)$.

2.2. Structure de l'algèbre des invariants.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit $U \in \mathbf{G}_2(\mathbf{S}_5)$ qui annule les invariants homogènes non constants de degré $\leqslant 4$. Alors, soit U est instable, soit U appartient à l'orbite du pinceau des dérivées de la sextique $x^6 + 6\,xy^5$.*

Démonstration. — Le pinceau U est instable si et seulement si l'octique $w(U)$ est instable, c'est-à-dire a une racine de multiplicité > 4 (théorème 1.1.4). Notons $C_{4,2}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{S}_4$ engendré par les covariants d'ordre 4 et de degré 2 évalués en U. D'après l'hypothèse sur U, les invariants $\mathrm{g}_2(p) \in B_2$ et $\mathrm{g}_3(p) \in B_3$ sont nuls : le covariant p est instable. Par suite, on peut distinguer trois cas : i) p est nul, ii) p est une puissance quatrième, ou iii) p a une racine de multiplicité 3.

i) Le lieu d'annulation de p et j_1 est connu : il s'agit de la développable de la courbe rationnelle normale de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_8)$ (lemme 2.1.2). Or les octiques appartenant à la développable sont instables puisqu'elles ont une racine de multiplicité > 4 (critère de Hilbert). Donc une orbite annulant p et les invariants non constants de degré $\leqslant 4$ est nécessairement instable.

ii) Lorsque p a une racine quadruple, h_p est nul. Par ailleurs, l'hypothèse sur U entraîne l'annulation de $j_1 p$. Par conséquent l'espace vectoriel $C_{4,2}$ est de dimension $\leqslant 1$ (remarque 2.1.4). Toujours d'après l'hypothèse sur U, il est isotrope et orthogonal à p (pour la forme quadratique g_2).

Choisissons une base (x, y) de $\mathbf{S}_1$ telle que $p = x^4$. Quitte à modifier le second vecteur de base, $C_{4,2}$ est engendré par une combinaison linéaire des formes x^4, xy^3 ou x^4, x^3y. Dans les deux cas, U est instable (lemme 2.2.2 et lemme 2.2.3).

iii) Notons que la racine triple de p est une racine quadruple du Hessien h_p. Soient k un covariant d'ordre 4 et de degré 2, et a, b et c trois indéterminées sur le corps des nombres complexes; les coefficients du polynôme $\mathrm{g}_2(a\,p+b\,h_p+c\,k)$ sont invariants de degré $\leqslant 4$, et sont donc nuls. Comme g_2 définit une quadrique non singulière de $\mathbf{P}(\mathbf{S}_4)$, les quartiques p, h_p et k sont liées; par suite, $C_{4,2}$ est de dimension 2.

Choisissons une base (x, y) de $\mathbf{S}_1$ de sorte que $p = x^3y$. On a $h_p = x^4$, et $C_{4,2}$ est engendré par x^3y et x^4. Dans ce cas, U est instable ou appartient à l'orbite du pinceau des dérivées de la sextique $x^6 + 6xy^5$ (lemme 2.2.4).□

Lemme 2.2.2. — *Les hypothèses et notations sont celles de la proposition. Supposons $p = x^4$ et l'espace vectoriel $C_{4,2}$ engendré par une combinaison linéaire de x^4 et xy^3. Alors U est instable.*

Démonstration. — Introduisons $w_0, \dots, w_8 \in \mathbb{C}$ de sorte que $w = \sum_{i=0}^{8} \binom{8}{i} w_i\, x^{8-i} y^i$. Le covariant $\tau_4(w, p) \in C_{4,2}$ est proportionnel à $\partial^4 w/\partial y^4$, donc les coefficients w_5, w_6 et w_8 sont nuls. Par ailleurs, l'invariant $\tau_8(w, w)$ est nul; d'où l'équation :

$$64\, w_1 w_7 - 70^2 w_4^2 = 0. \tag{9}$$

Il en résulte que $w_7 = 0$ implique $w_4 = 0$ et w instable.

Poursuivons en supposant $w_7 \neq 0$. Dans ce cas, $\tau_4(w, p) = w_4\, x^4 + 4\, w_7\, xy^3$ engendre $C_{4,2}$. On a :

$$\begin{aligned}\tau_6(w, w) = (30\, w_2 w_4 - 20\, w_3^2)\, x^4 + (4\, w_0 w_7 - 20\, w_3 w_4)\, x^3 y \\ -(50\, w_4^2 + 4\, w_1 w_7)\, x^2 y^2 - 20\, w_2 w_7\, xy^3 - 12\, w_3 w_7\, y^4.\end{aligned}$$

Comme $\tau_6(w, w) \in C_{4,2}$, on voit que $50\, w_4^2 + 4\, w_1 w_7$ et w_3 sont nuls. Avec (9), on obtient $w_4 = 0$. Il en résulte que $C_{4,2}$ est engendré par xy^3.

Soit U° l'orthogonal de $U \subseteq \mathbf{S}_5$, et $P \in \mathbf{P}_1$. Considérons (n_1, n_2, n_3, n_4) la suite strictement croissante des nombres de lacunes de la série linéaire U° au point P (*cf.* §1.1); on a :

$$\operatorname{ord}_P(w(U^\circ)) = \sum_{i=1}^{4} n_i - i.$$

Le point P est un point base de U° si et seulement si $n_1 > 1$; dans ce cas, $\operatorname{ord}_P(w(U^\circ)) \geqslant 4$, et w est instable.

Supposons U° sans point de base, et prenons pour P le point à l'infini. Considérons $\mathcal{C}_U \subseteq \mathbf{P}_3$ la quintique rationnelle correspondante. Le covariant « quadrisécante » $q \in C_{4,2}$ n'est pas nul (remarque 2.1.4); comme q est proportionnel à xy^3, la courbe $\mathcal{C}_U$ a une tangente d'inflexion au point à l'infini. Par conséquent $n_2 \geqslant 3$ et $\mathrm{ord}_P(w(U^\circ)) \geqslant 0+1+1+1$. Autrement dit $(1{:}\,0)$ est une racine homogène de w, et sa multiplicité est au moins 3. En particulier $w_7 = 0$; c'est impossible. □

LEMME 2.2.3. — *Les hypothèses et notations sont celles de la proposition. Supposons $p = x^4$ et l'espace vectoriel $C_{4,2}$ engendré par une combinaison linéaire de x^4 et x^3y. Alors U est instable.*

Démonstration. — Soient $w_0, \ldots, w_8 \in \mathbb{C}$ comme dans la démonstration du lemme 2.2.2. On calcule les covariants $\tau_4(w,p)$ et $\tau_6(w,w)$, puis on exprime que ce sont des éléments de $C_{4,2}$; il en résulte que w_4, w_5, w_6, w_7 et w_8 sont nuls. Donc w est instable. □

LEMME 2.2.4. — *Les hypothèses et notations sont celles de la proposition. Si U n'est pas instable et $p = x^3y$, alors U appartient à l'orbite du pinceau des dérivées de la sextique $x^6 + 6\,xy^5$.*

Démonstration. — Introduisons $w_0, \ldots, w_8 \in \mathbb{C}$, coordonnées de w (démonstration du lemme 2.2.2). L'espace vectoriel $C_{4,2}$ est engendré par x^3y et x^4. De $\tau_4(w,p) \in C_{4,2}$ on déduit que les coefficients w_5, w_6 et w_7 sont nuls.

Comme l'invariant $\tau_8(w,w)$ est nul, on a :

$$2\,w_0w_8 + 70\,w_4^2 = 0. \tag{10}$$

D'autre part :

$$\tau_6(w,w) = (30\,w_2w_4 - 20\,w_3^2)\,x^4 - 20\,w_3w_4\,x^3y + (2\,w_0w_8 - 50\,w_4^2)\,x^2y^2 \\ +4\,w_1w_8\,xy^3 + 2\,w_2w_8\,y^4.$$

Comme $\tau_6(w,w) \in C_{4,2}$, on a $w_1w_8 = 0$, $w_2w_8 = 0$ et $2\,w_0w_8 - 50\,w_4^2 = 0$; avec (10) on obtient $w_4 = 0$ et $w_0w_8 = 0$. Si w_8 est nul, w est instable. Désormais $w_8 \neq 0$. On en déduit $w_1 = 0$ et $w_2 = 0$.

Le pinceau U est représenté par $w = 56\,w_3\,x^5y^3 + w_8\,y^8$, $p = x^3y$ et $j_1 = 0$; il reste à montrer qu'il est du type annoncé. Explicitons à l'aide des coordonnées de Plücker l'isomorphisme $\bigwedge^2 \mathbf{S}_5 \to \mathbf{S}_8 \oplus \mathbf{S}_4 \oplus \mathbf{S}_0$ défini par $w + p + j_1$:

$$\begin{aligned} w = {} & p_{0,1}\, x^8 + 4\, p_{0,2}\, x^7 y + 2\,(3\, p_{0,3} + 5\, p_{1,2})\, x^6 y^2 + 4\,(p_{0,4} + 5\, p_{1,3})\, x^5 y^3 \\ & + (p_{0,5} + 15\, p_{1,4} + 20\, p_{1,3})\, x^4 y^4 + 4\,(p_{1,5} + 5\, p_{2,4})\, x^3 y^5 \\ & + 2\,(3\, p_{2,5} + 5\, p_{3,4})\, x^2 y^6 + 4\, p_{3,5}\, x y^7 + p_{4,5}\, y^8, \\ p = {} & (p_{0,3} - 3\, p_{1,2})\, x^4 + 2\,(p_{0,4} - 2\, p_{1,3})\, x^3 y + (p_{0,5} + p_{1,4} - 8\, p_{2,3})\, x^2 y^2 \\ & + 2\,(p_{1,5} - 2\, p_{2,4})\, x y^3 + (p_{2,5} - 3\, p_{3,4})\, y^4, \\ j_1 = {} & p_{0,5} - 5\, p_{1,4} + 10\, p_{2,3}. \end{aligned}$$

Visiblement l'image du bivecteur :

$$p_{0,4}\, x^5 \wedge x y^4 + p_{1,3}\, x^4 y \wedge x^2 y^3 + p_{4,5}\, x y^4 \wedge y^5$$

par cet isomorphisme appartient au sous-espace de $\mathbf{S}_8 \oplus \mathbf{S}_4 \oplus \mathbf{S}_0$ engendré par $x^5 y^3$, y^8 et $x^3 y$. Or ce bivecteur est décomposable si et seulement si $p_{0,4}\, p_{1,3} = 0$ et $p_{1,3}\, p_{4,5} = 0$ (relations de Plücker). Considérons la seconde équation. Si $p_{4,5} = 0$, w est un multiple de $x^5 y^3$ qui est instable. Sinon $p_{1,3} = 0$; or $x y^4 \wedge \big(p_{4,5} y^5 - p_{0,4} x^5\big)$ est dans l'orbite du pinceau des dérivées de $x^6 + 6\, x y^5$. □

Introduisons quelques notations pour des invariants de petit degré (l'indice indique le degré) :

$$\begin{aligned} & j_2 = \mathrm{g}_2(p), \quad j_3 = \mathrm{g}_3(p), \quad j_3' = \tau_8(p^2, w), \\ & j_4 = \tau_8(p h_p, w) \quad \text{et} \quad j_5 = \tau_8(h_p^2, w). \end{aligned} \tag{11}$$

En y joignant l'invariant linéaire j_1, on obtient les six premiers invariants introduits par T. Moore [Moo28].

Proposition 2.2.5. — *Les invariants j_1, j_2, j_3, j_3', j_4 et j_5 forment un système de paramètres homogènes de l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}$.*

Démonstration. — La dimension de $B^{\mathbf{SL}_2}$ est 6. D'après la caractérisation habituelle des systèmes de paramètres homogènes des algèbres graduées d'invariants, les six invariants j_1, j_2, j_3, j_3', j_4 et j_5 forment un système de paramètres homogènes de $B^{\mathbf{SL}_2}$ si et seulement si les seules orbites annulant j_1, j_2, j_3, j_3', j_4 et j_5 sont les orbites instables. C'est équivalent à :

i) j_1, j_2, j_3, j_3' et j_4 engendrent l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}$ en degré $\leqslant 4$;

ii) l'invariant j_5 ne s'annule pas sur l'orbite stable du pinceau des dérivées de la sextique $x^6 + 6\, x y^5$ (proposition 2.2.1).

Commençons par démontrer i). Les dimensions des espaces vectoriels $B_1^{\mathbf{SL}_2}$, $B_2^{\mathbf{SL}_2}$, $B_3^{\mathbf{SL}_2}$ et $B_4^{\mathbf{SL}_2}$ sont respectivement 1, 2, 4 et 6. Ainsi les invariants j_1, j_2, j_3, j_3' et j_4 engendrent l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}$ en degré $\leqslant 4$ si et seulement si les monômes de degré $\leqslant 4$ en j_1, j_2, j_3, j_3' et j_4 sont linéairement indépendants. On traite le cas de chaque degré séparément.

Degré 2. Rappelons que, pour le pinceau des dérivées de la sextique octaédrique, $j_1 \neq 0$ et $p = 0$ (cf. §2.1); en particulier, j_2 est nul. Ceci montre que j_1^2 et j_2 sont linéairement indépendants.

Degré 3. Les monômes de degré 3 sont j_1^3, $j_1 j_2$, j_3 et j_3'. Considérons $a, b, c \in \mathbb{C}$ et une relation linéaire $a\, j_1^2 + b\, j_1 j_2 + c\, j_3 = 0$ entre les trois premiers monômes. Le coefficient a est nul puisque $j_1 \neq 0$, $j_2 = 0$ et $j_3 = 0$ sur le pinceau des dérivées de la sextique octaédrique. Ensuite on calcule le covariant p du pinceau représenté par le bivecteur $(x^5 + 10\, x^3 y^2) \wedge (10\lambda\, x^2 y^3 + y^5)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$; il est proportionnel à $x^4 + (1 - 8\lambda)\, x^2 y^2 + \lambda\, y^4$; pour de bons choix de λ, cette quartique annule g_2 ou g_3, donc b et c sont nuls. Par conséquent j_1^3, $j_1 j_2$ et j_3 sont indépendants. Pour finir prouvons que j_3' est indépendant des trois autres monômes. Considérons le pinceau représenté par le bivecteur $(x^5 + y^5) \wedge (x^2 y^3 + x y^4)$. Le calcul conduit aux expressions suivantes (à des facteurs numériques près) :

$$\begin{aligned} w &= 3\, x^6 y^2 + 4\, x^5 y^3 - 2\, x y^7 - y^8, \\ p &= x^4 + 4\, x^3 y, \\ j_1 &= 0. \end{aligned}$$

Comme la quartique p a une racine triple, j_2 et j_3 sont nuls. Mais :

$$\begin{aligned} j_3' &= \tau_8(p^2, w) \\ &= \tau_8(x^8, w) + 2\tau_8(x^7 y, w) + 16\tau_8(x^6 y^2, w) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

D'où l'indépendance des monômes de degré 3.

Degré 4. Dans ce cas, les monômes sont les suivants :

$$j_1^4,\ j_1^2 j_2,\ j_1 j_3,\ j_1 j_3',\ j_2^2 \ \text{ et } \ j_4.$$

L'indépendance linéaire des quatre multiples de j_1 résulte de l'étude des monômes de degré 3. Avant d'étudier l'indépendance des cinq premiers monômes, identifions un supplémentaire du sous-espace $j_1 B_3^{\mathbf{SL}_2}$ de $B_4^{\mathbf{SL}_2}$. Ici A désigne l'algèbre $\mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_8)$. On introduit i_2, i_3 et i_4 tels que $\mathrm{vect}(i_2) = A_2^{\mathbf{SL}_2}$, $\mathrm{vect}(i_3) = A_3^{\mathbf{SL}_2}$ et $\mathrm{vect}(i_2^2, i_4) = A_4^{\mathbf{SL}_2}$ [Shi67].

Lemme 2.2.6. — *On a* $B_4^{\mathbf{SL}_2} = j_1 B_3^{\mathbf{SL}_2} \oplus A_4^{\mathbf{SL}_2}$.

Démonstration. — L'espace vectoriel $B_3^{\mathbf{SL}_2}$ (resp. $B_4^{\mathbf{SL}_2}$) est de dimension 4 (resp. 6). Comme $A_4^{\mathbf{SL}_2}$ est de dimension 2, il suffit de vérifier que $A_4^{\mathbf{SL}_2} \cap j_1 B_3^{\mathbf{SL}_2} = 0$.

Soit donc $a_4 \in A_4^{\mathbf{SL}_2} \cap j_1 B_3^{\mathbf{SL}_2}$ que l'on suppose non nul. Alors $\mathrm{N}_{B/A}(j_1) \in A_{14}^{\mathbf{SL}_2}$ divise a_4^{14} puisque B est un A-module libre de rang 14 (lemme 1.1.3). De plus, comme j_1 est irréductible, $\mathrm{N}_{B/A}(j_1)$ engendre une puissance $\mathfrak{p}^\alpha$ d'un idéal premier de A. L'idéal $\mathfrak{p}$ contient l'idéal $a_4 A$. Or les facteurs de a_4 sont de degré 2 ou 4 puisque $A_1 = 0$. Le degré 4 est exclu puisque $\mathfrak{p}^\alpha$ est engendré en degré 14; par conséquent $\mathfrak{p} = i_2 A$. Donc $\mathrm{N}_{B/A}(j_1)$ et i_2^7 sont proportionnels et j_1 divise i_2. Puisque j_1 est le seul invariant de degré un, on voit que, sous l'hypothèse $a_4 \neq 0$, j_1^2 et i_2 sont proportionnels. Or j_1^2 et i_2 sont linéairement indépendants. □

Revenons à l'indépendance linéaire de j_1^4, $j_1^2 j_2$, $j_1 j_3$, $j_1 j_3'$ et j_2^2. Les sous-algèbres de $B^{\mathbf{SL}_2}$ engendrées par j_1, i_2, i_3, j_3 d'une part, et j_1, j_2, j_3, j_3' d'autre part, coïncident en degré $\leqslant 3$. Elles coïncident aussi en degré $\leqslant 4$ (lemme 2.2.6). Donc la famille $\{j_1^4, j_1^2 j_2, j_1 j_3, j_1 j_3', j_2^2\}$ est libre.

Pour finir construisons un pinceau qui annule les invariants de degré $\leqslant 3$ sans annuler j_4. Pour faciliter le calcul des invariants définis à l'aide de p, on impose $p = x^3 y$. Dans ce cas, les invariants j_3' et j_4 sont proportionnels aux coefficients de $x^2 y^6$ et xy^7 du Wronskien; d'autre part, comme p est une quartique instable, les invariants j_2 et j_3 sont nuls. Prenons des générateurs du pinceau U_λ cherché sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u &= u_0 x^5 + 5 u_1 x^4 y \qquad\qquad\qquad + 10 u_3 x^2 y^3 + 5 u_4 x y^4 \\ v &= v_0 x^5 + 5 v_1 x^4 y + 10 v_2 x^3 y^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + v_5 y^5. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} p = {} & (-u_3 v_0 - 3 u_1 v_2) x^4 + (4 u_3 v_1 - 2 u_4 v_0) x^3 y \\ & + (-u_4 v_1 + 8 u_3 v_2 + u_0 v_5) x^2 y^2 + (4 u_4 v_2 + 2 u_1 v_5) x y^3, \\ j_1 = {} & 5 u_4 v_1 - 10 u_3 v_2 + u_0 v_5. \end{aligned}$$

Pour $u_4 = 1$, $v_5 = 1$ et $v_0 = 1$, p est proportionnel à $x^3 y$ si et seulement si :

$$u_1 = -2 v_2^3, \quad u_3 = 3 u_1 v_2 = 6 v_2^2,$$

$$u_0 = u_4 v_2 - 8 u_3 v_2 = v_1 - 48 v_2.$$

Choisissons $v_1 = 18 v_2^3$ et $u_0 = -30 v_2^3$ et notons λ pour v_2. On a :

$$\begin{aligned} p &= (432 \lambda^5 - 2) x^3 y, \\ j_1 &= 5 \cdot 18 \lambda^3 - 10 \cdot 6 \lambda^3 - 30 \lambda^3 = 0. \end{aligned}$$

Le calcul montre que le Wronskien est égal à :

$$(12)\quad (-540\lambda^6+2\lambda)\,x^8-120\lambda^4\,x^7y-56\lambda^2\,x^6y^2 \\ +(-2160\lambda^5-4)\,x^5y^3-420\lambda^3\,x^4y^4-28\lambda\,x^3y^5+24\lambda^2\,xy^7+y^8.$$

Le coefficient de x^2y^6 (resp. xy^7) est nul (resp. non nul), et le pinceau U_λ est bien du type voulu. Ceci prouve l'indépendance des monômes de degré 4, et termine la démonstration de i).

Il reste à justifier ii). Considérons le pinceau des dérivées de la sextique $x^6+6\,xy^5$. Le covariant p de ce pinceau est égal à x^3y. Par conséquent l'invariant j_5 est proportionnel au coefficient de y^8 du Wronskien; or celui-ci n'est pas nul : $w=120\,x^5y^3-25\,y^8$. □

Théorème 2.2.7. — *Soient B l'algèbre du cône de la Grassmannienne des pinceaux de formes quintiques binaires, et R l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3,x_3',x_4,x_5,x_5',x_6,x_7]$ (le degré d'une indéterminée est donné par son indice).*

L'algèbre graduée $B^{\mathbf{SL}_2}$ est isomorphe au quotient de R par l'idéal des Pfaffiens d'ordre 4 d'une matrice $M=(m_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 4}$ alternée 5×5 ($m_{i,j}\in R_{2+i+j}$). De plus, la résolution projective minimale du R-module gradué $B^{\mathbf{SL}_2}$ est :

$$0\longleftarrow R\longleftarrow \bigoplus_{d=10}^{14} R(-d)\overset{M}{\longleftarrow}\bigoplus_{d=16}^{20} R(-d)\longleftarrow R(-30)\longleftarrow 0.$$

Démonstration. — Dans la suite on note P la sous-algèbre de $B^{\mathbf{SL}_2}$ engendrée par le système de paramètres homogènes (j_1, j_2, j_3, j_3', j_4, j_5) (proposition 2.2.5). Prouvons que l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}$ est un quotient de R par un idéal de hauteur 3. La série de Poincaré de $B^{\mathbf{SL}_2}$ est égale à (exemple 1.2.4) :

$$(13)\qquad \frac{1+z^5+z^6+z^7+z^{12}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)(1-z^5)}.$$

Par conséquent le P-module gradué $B^{\mathbf{SL}_2}$ est libre de rang cinq engendré en degrés 0, 5, 6, 7 et 12. Fixons une base $(1,b_5,b_6,b_7,b_{12})$ de $B^{\mathbf{SL}_2}$ sur P. L'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}/P_+B^{\mathbf{SL}_2}$ est une algèbre graduée de Gorenstein de dimension 0 [Bou98, chapitre X, §3, n°7, exemple 3]. Comme la classe de b_{12} appartient au socle, l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}/P_+B^{\mathbf{SL}_2}$ est engendrée par les classes de b_5, b_6 et b_7; pour des raisons de degré, cette famille de générateurs est minimale. Donc l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}$ est engendrée par les paramètres j_1, j_2, j_3,

j_3', j_4, j_5, et b_5, b_6 et b_7. Il s'agit bien d'un quotient de R par un idéal I de hauteur 3.

D'après la formule d'Auslander-Buchsbaum, $B^{\mathbf{SL}_2}$ est un R-module gradué de dimension projective 3. Considérons sa résolution projective minimale :

$$0 \longleftarrow R \longleftarrow \bigoplus_i R(-d_{1,i}) \longleftarrow \bigoplus_i R(-d_{2,i}) \longleftarrow R(-d_3) \longleftarrow 0.$$

Compte tenu de la définition de R, on a immédiatement :

$$\mathcal{H}_{B^{\mathbf{SL}_2}}(z) = \frac{1 - \sum_i z^{d_{1,i}} + \sum_i z^{d_{2,i}} - z^{d_3}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)(1-z^5)^2(1-z^6)(1-z^7)}.$$

Identifions avec (13) pour obtenir les entiers $d_{1,i}$, $d_{2,i}$ et d_3 :

$$\mathcal{H}_{B^{\mathbf{SL}_2}}(z) = \frac{1 - \sum_{i=10}^{14} z^i + \sum_{i=16}^{20} z^i - z^{30}}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)^2(1-z^4)(1-z^5)^2(1-z^6)(1-z^7)}.$$

Cette identification est possible car l'idéal I est engendré par au plus cinq éléments traduisant que b_5^2, b_5b_6, b_6b_7, b_7^2 et une combinaison linéaire de b_6^2 et b_5b_7 appartiennent à $P_+B^{\mathbf{SL}_2}$. Le théorème de structure de D. Buchsbaum et D. Eisenbud [BuE77, théorème 2.1] permet de conclure. □

Remarque 2.2.8. — Soit P' une sous-algèbre de $B^{\mathbf{SL}_2}$ engendrée par un système de paramètres homogènes de degrés $d_1, \ldots, d_6$. Le degré de l'extension de corps $\mathrm{Frac}(B^{\mathbf{SL}_2})\colon\mathrm{Frac}(P')$ est au moins 5; il est égal à $d_1 \ldots d_6\,[\mathcal{H}_{B^{\mathbf{SL}_2}}(z)(1-z)^6]_{z=1}$, soit $5\,d_1 \ldots d_6/1 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot 5$ [Shi67, lemme 1]. Supposons que ce soit 5. Comme $\dim_{\mathbb{C}}(B_2^{\mathbf{SL}_2}) = 2$, on a $(d_1, \ldots, d_6) = (1,2,3,3,4,5)$, de sorte que les sous-algèbres P et P' sont égales. Donc si P' est une sous-algèbre de polynômes de $B^{\mathbf{SL}_2}$ telle que l'extension $\mathrm{Frac}(B^{\mathbf{SL}_2})\colon\mathrm{Frac}(P')$ soit de degré 5 alors $P' = P$.

Introduisons trois invariants supplémentaires (les indices donnent les degrés) :

$$(14) \qquad j_5' = \tau_{12}(p^3, h_w),\ j_6 = \tau_{12}(p^2h_p, h_w) \ \text{ et } \ j_7 = \tau_{12}(ph_p^2, h_w).$$

THÉORÈME 2.2.9. — *Soit B l'algèbre du cône de la Grassmannienne des pinceaux de formes quintiques binaires. Les invariants j_1, j_2, j_3, j_3', j_4, j_5, j_5', j_6 et j_7 (cf. (11) et (14)) forment une famille minimale de générateurs homogènes de l'algèbre graduée $B^{\mathbf{SL}_2}$.*

Démonstration. — Soit P la sous-algèbre de $B^{\mathbf{SL}_2}$ engendrée par le système de paramètres homogènes $(j_1, j_2, j_3, j_3', j_4, j_5)$ (proposition 2.2.5).

On a vu que l'algèbre $B^{\mathbf{SL}_2}/P_+B^{\mathbf{SL}_2}$ est engendrée par les classes de trois invariants homogènes de degrés 5, 6 et 7 (démonstration du théorème 2.2.7). Les classes de j_5', j_6 et j_7 engendrent $B^{\mathbf{SL}_2}/P_+B^{\mathbf{SL}_2}$ à moins qu'une de ces classes ne soit nulle. Ceci revient à dire que :

i) j_5 et j_5' ne sont pas proportionnels;

ii) il est possible d'annuler les invariants de degré $\leqslant 3$ sans annuler j_5', j_6 et j_7.

Pour vérifier i) et ii) considérons la famille de pinceaux $(U_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$ introduite dans la preuve de la proposition 2.2.5. En U_λ, les invariants de degré $\leqslant 3$ sont nuls. Pour λ général, p est proportionnel à x^3y; ainsi, le Hessien de p est proportionnel à x^4. Par conséquent j_5 est proportionnel au coefficient de y^8 dans w, et les invariants j_5', j_6 et j_7 sont proportionnels aux coefficients de x^3y^9, x^2y^{10} et xy^{11} dans h_w. Remarquons que j_5 est constant. Il reste, pour identifier j_5', j_6 et j_7, à calculer h_w. Avec l'expression (12) de w, on obtient (à des coefficients numériques près) :

$$j_5' = 23400\lambda^5 + 20,\ j_6 = \lambda^3 \ \text{ et } \ j_7 = \lambda.$$

On a bien i) et ii). $\square$

3. Note sur l'application Wronskien.

Dans ce numéro on s'intéresse aux pinceaux de formes binaires de degré d ($k = 2$ et $d \geqslant 2$). Nous avons vu que le Wronskien munit B d'une structure de A-module libre de type fini compatible avec les opérations de $\mathbf{SL}_2$ (cf. §1.1); il s'agit de préciser la structure du $\mathbf{SL}_2$-module B/A_+B, à savoir :

$$B/A_+B = \bigoplus_{n=0}^{d-2} \mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_{d-1-n}). \tag{15}$$

En conséquence on obtient la «loi de réciprocité» énoncée dans la proposition 1.1.5.

Soit q une indéterminée. Dans la suite on note $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q$ le polynôme de Gauss :

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-m+1})}{(1-q^m)(1-q^{m-1})\dots(1-q)}.$$

On a immédiatement :

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-m \end{bmatrix}_q,$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_q \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{m+1}}. \tag{16}$$

Soient $x_1, \dots, x_n$ une famille finie d'indéterminées. Si μ est une suite finie d'entiers qui est de longueur inférieure à n alors $a_\mu(x_1, \dots, x_n)$ désigne le polynôme obtenu en « antisymétrisant » le monôme $x^\mu = x_1^{\mu_1} \dots x_n^{\mu_n}$:

$$a_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}} \epsilon(\sigma)\, x^{\sigma \cdot \mu}$$

où $\epsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ. Par exemple, pour $\delta = (n-1, n-2, \dots, 0)$, $a_\delta(x_1, \dots, x_n)$ est égal au déterminant de Vandermonde $\det(x_i^{n-j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(x_i - x_j)$. Avec ces notations le polynôme de Schur $s_\mu(x_1, \dots, x_n)$ est le quotient :

$$s_\mu(x_1, \dots, x_n) = \frac{a_{\mu+\delta}(x_1, \dots, x_n)}{a_\delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

Les caractères des $\mathbf{SL}_2$-modules sont identifiés à des polynômes symétriques en q et q^{-1}. Puisque $B = A \otimes_{\mathbb{C}} (B/A_+B)$, on a l'égalité des caractères formels : $\mathcal{H}_B(z) = \mathcal{H}_A(z)\mathcal{H}_{B/A_+B}(z)$; par conséquent si C désigne le $\mathbf{SL}_2$-module gradué $\oplus_n \mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_{d-1-n})$, la formule (15) est équivalente à :

$$\mathcal{H}_B(z) = \mathcal{H}_A(z)\mathcal{H}_C(z). \tag{17}$$

Lemme. — *Soit λ une suite finie de longueur $d+1$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On a :*

$$s_\lambda(q^d, q^{d-2}, \dots, q^{-d}) = q^{-\langle m, \lambda \rangle} \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d} \frac{(1 - q^{2(\lambda_i - \lambda_j - i + j)})}{(1 - q^{2(-i+j)})} \tag{18}$$

où m désigne la forme linéaire définie sur les suites finies de longueur $d+1$ par la matrice ligne $(d\ d-2\ \dots\ -d)$. En particulier, quel que soit l'entier n, on a :

$$s_{(n)}(q^d, q^{d-2}, \dots, q^{-d}) = q^{-dn} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2},$$
$$s_{(n,n)}(q^d, q^{d-2}, \dots, q^{-d}) = q^{-2(d-1)n} \frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Démonstration. — Démontrons (18); avec cette formule, les deux cas particuliers ne présentent pas de difficulté. On a :

$$\begin{aligned}
a_\mu(q^d,\dots,q^{-d}) &= \det\left(q^{(d-2i)\mu_j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant d}\\
&= q^{-d|\mu|}\det\left(q^{2(d-i)\mu_j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant d}\\
&= q^{-d|\mu|}\left(\prod_{0\leqslant i<j\leqslant d}(q^{2\mu_i}-q^{2\mu_j})\right)\\
&= (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}}q^{-d|\mu|+2\sum_{0<j\leqslant d} j\mu_j}\left(\prod_{0\leqslant i<j\leqslant d}(1-q^{2(\mu_i-\mu_j)})\right)\\
&= (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}}q^{-\langle m,\mu\rangle}\left(\prod_{0\leqslant i<j\leqslant d}(1-q^{2(\mu_i-\mu_j)})\right).
\end{aligned}$$

Reste à simplifier le quotient $\frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$ pour obtenir (18). □

On calcule à l'aide des formules du lemme les caractères formels $\mathcal{H}_A(z)$, $\mathcal{H}_B(z)$ et $\mathcal{H}_C(z)$. Ceci permet de traduire la relation (17) en une identité entre q-séries hypergéométriques. Puisque $A = \mathbf{S}^{\cdot}(\mathbf{S}_{2d-2})$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_A(z) &= \sum_n \mathrm{ch}(A_n)\,z^n\\
&= \sum_n s_{(n)}(q^{2d-2},q^{2d-4},\dots,q^{-2d+2})\,z^n\\
&= \sum_n q^{-2(d-1)n}\begin{bmatrix}2d-2+n\\ 2d-2\end{bmatrix}_{q^2} z^n.
\end{aligned}$$

Par ailleurs $B = \oplus_n \mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_d)$ entraîne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_B(z) &= \sum_n \mathrm{ch}(B_n)\,z^n\\
&= \sum_n s_{(n,n)}(q^d,q^{d-2},\dots,q^{-d})z^n\\
&= \sum_n q^{-2(d-1)n}\frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}}\begin{bmatrix}d+n\\ d\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix}d-1+n\\ d-1\end{bmatrix}_{q^2} z^n.
\end{aligned}$$

Ensuite $C = \oplus_{n=0}^{d-2}\mathbf{S}^{(n,n)}(\mathbf{S}_{d-1-n})$ entraîne :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_C(z) &= \sum_n s_{(n,n)}(q^{d-1-n},q^{d-3-n},\dots,q^{-d+1+n})\,z^n\\
&= \sum_n q^{-2(d-2-n)n}\frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}}\begin{bmatrix}d-1\\ d-1-n\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix}d-2\\ d-2-n\end{bmatrix}_{q^2} z^n\\
&= \sum_n q^{-2(d-2-n)n}\frac{1-q^2}{1-q^{2n+2}}\begin{bmatrix}d-1\\ n\end{bmatrix}_{q^2}\begin{bmatrix}d-2\\ n\end{bmatrix}_{q^2} z^n.
\end{aligned}$$

Dans la dernière expression le produit $\frac{1}{1-q^{2n+2}}\left[{d-1 \atop n}\right]_{q^2}$ est égal à $\frac{1}{1-q^{2d}}\left[{d \atop n+1}\right]_{q^2}$ (cf. (16)). Par conséquent, on a :

$$\mathcal{H}_C(z) = \frac{1-q^2}{1-q^{2d}} \sum_n q^{-2(d-2-n)n} \begin{bmatrix} d \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n.$$

Après simplification des facteurs $1-q^2$, (17) s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\sum_n q^{-2(d-1)n} \frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} z^n \\ = \left(\sum_n q^{-2(d-1)n} \begin{bmatrix} 2d-2+n \\ 2d-2 \end{bmatrix}_{q^2} z^n\right) \\ \times \left(\sum_n q^{-2(d-2-n)n} \begin{bmatrix} d \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n\right).\end{aligned}$$

D'après (16), on a :

$$\frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} = \frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d-1+n \\ n \end{bmatrix}_{q^2} = \frac{1-q^{2d}}{1-q^{2d+2n}} \begin{bmatrix} d+n \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2};$$

en utilisant encore une fois (16), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{1-q^{2d}}{1-q^{2n+2}} \begin{bmatrix} d+n \\ d \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} &= \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d+n \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \\ &= \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent (17) équivaut à la relation :

$$\begin{aligned}\sum_n q^{-2(d-1)n} \begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} z^n = \left(\sum_n q^{-2(d-1)n} \begin{bmatrix} 2d-2+n \\ 2d-2 \end{bmatrix}_{q^2} z^n\right) \\ \times \left(\sum_n q^{-2(d-2-n)n} \begin{bmatrix} d \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n\right).\end{aligned}$$

Finalement, en identifiant les coefficients de ces séries, on obtient que la décomposition (15) est équivalente aux relations (pour $n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{bmatrix} d-1+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d+n \\ d-1 \end{bmatrix}_{q^2} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} q^{2i(i+1)} \begin{bmatrix} 2d-2+n-i \\ 2d-2 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d \\ i+1 \end{bmatrix}_{q^2} \begin{bmatrix} d-2 \\ i \end{bmatrix}_{q^2}.$$

Or on reconnaît dans cette identité un cas particulier du q-analogue de la formule de Saalschütz [And76, chapitre III, théorème 3.4] :

$$\begin{bmatrix} a+b \\ A \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} b \\ B \end{bmatrix}_q = \sum_r q^{(B-r)(A-r-a)} \begin{bmatrix} A-a \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} B+a \\ a+r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} a+b+r \\ A+B \end{bmatrix}_q .$$

Il suffit en effet de choisir $A = B = d-1$, $a = 1$, $b = d-1+n$, $r = d-2-i$, et de substituer q^2 à q.

BIBLIOGRAPHIE

[And76] G. E. ANDREWS, The theory of partitions, coll. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.

[Bou98] N. BOURBAKI, Algèbre commutative, Masson, 1998.

[Bou87] J.-F. BOUTOT, Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs, Invent. Math., 88 (1987), 65–68.

[BuE77] D. A. BUCHSBAUM et D. EISENBUD, Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3, Amer. J. Math., 99-3 (1977), 447–485.

[GrY03] J. H. GRACE et A. YOUNG, The algebra of invariants, Cambridge University Press, 1903.

[GrH94] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, Principles of algebraic geometry, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994.

[Kno89] F. KNOP, Der kanonische Modul eines Invariantenrings, J. Algebra, 127-1 (1989), 40–54.

[Man02] L. MANIVEL, An extension of the Cayley-Sylvester formula, prépublication (2002).

[Meu03] M. MEULIEN, Sur les invariants des pinceaux de quintiques binaire, thèse (2002).

[Moo28] T. W. MOORE, On the invariant combinants of two binary quintics, Amer. J., 50 (1928), 415–430.

[MuU83] S. MUKAI et H. UMEMURA, Minimal rational threefolds, dans Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982), Springer, Berlin (1983), 490–518.

[Mum65] D. MUMFORD, Geometric invariant theory, coll. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[New80] P. E. NEWSTEAD, Invariants of binary cubics, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 89 (1981), 201–209.

[Pop92] V. L. POPOV, Groups, generators, syzygies, and orbits in invariant theory, American Mathematical Society, 1992.

[Sal90] G. SALMON, Traité d'algèbre supérieure, Gauthier-Villars et Fils, Paris, 2e éd. française d'après la 4e éd. anglaise, 1890.

[Shi67] T. SHIODA, On the graded ring of invariants of binary octavics, Amer. J. Math., 89 (1967), 1022–1046.

[Spr80] T. SPRINGER, On the invariant theory of SU_2, Indag. Math., 42 (1980), 339–345.

[Tra88] G. TRAUTMANN, Poncelet curves and associated theta characteristics, Expo. Math., 6-1 (1988), 29–64.

[Ver88] J.-L. VERDIER, Applications harmoniques de S^2 dans S^4, II, dans Harmonic mappings, twistors, and σ-models (Luminy, 1986), World Sci. Publishing, Singapore (1988), 124–147.

[Wey93] J. WEYMAN, Gordan ideals in the theory of binary forms, J. Algebra, 161-2 (1993), 370–391.

Manuscrit reçu le 10 mars 2003,
accepté le 9 mai 2003.

Matthias MEULIEN,
Université de Versailles
LAMA
45 avenue des Etats-Unis
78035 Versailles (France).
meulien@math.uvsq.fr