ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jacques SAULOY

La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé

Tome 54, nº 1 (2004), p. 181-210.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_1_181_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
54, 1 (2004), 181–210

LA FILTRATION CANONIQUE PAR LES PENTES D'UN MODULE AUX q-DIFFÉRENCES ET LE GRADUÉ ASSOCIÉ

par Jacques SAULOY

0. Introduction.

Soit q un nombre complexe non nul de module $|q| \neq 1$. L'étude locale de l'équation aux q-différences linéaire :

$$(0) \qquad a_0(z)\, f(q^n z) + a_1(z)\, f(q^{n-1}z) + \cdots + a_n(z)\, f(z) = 0,$$

fait intervenir un polygone de Newton (*voir* [1], [2]). Nous montrons que celui-ci est en fait un objet intrinsèque : il peut être défini en fonction du

Mots-clés : Équations aux q-différences – Polygone de Newton – Filtration par les pentes.
Classification Math. : 39A13.

module aux q-différences associé. Il possède en outre de bonnes propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles. Dans le cas formel, il donne lieu à une décomposition du module aux q-différences associé en somme directe de modules purs (à une seule pente), comme dans le cas classique des équations différentielles complexes (*voir* [14], [15]).

Dans le cas convergent, apparaît un phénomène spécifique aux q-différences : le lemme d'Adams garantit l'existence de solutions convergentes associées à la première pente. Birkhoff et Guenther en ont déduit dans [5] une factorisation canonique convergente de tout opérateur aux q-différences. Ces résultats ont été repris, améliorés et appliqués par Marotte et Zhang (*voir* [13]). Nous en donnons une interprétation en termes d'existence, pour tout module aux q-différences, d'une filtration canonique par les pentes avec des quotients purs.

Birkhoff fondait de grands espoirs sur la factorisation canonique pour la formation d'invariants transcendants (*voir loc. cit.*). Nous montrons que le foncteur «gradué associé» possède en effet d'excellentes propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles, qui ont permis (avec d'autres outils plus puissants) d'achever le programme de Birkhoff (*voir* [17]). Il découle en effet de nos résultats que *la classification analytique à l'intérieur d'une classe isoformelle est équivalente à la classification à gradué fixé*; or, celle-ci se ramène (du point de vue algébrique) à des problèmes d'algèbre homologique (*voir* [22]).

Ces mêmes propriétés, proches de celles axiomatisées par Saavedra dans [18], permettent également de passer de la théorie de Galois des équations fuchsiennes, développée par voie analytique dans [20], à la théorie de Galois locale des équations irrégulières (*voir* [23]). Par exemple, il en découle immédiatement la définition d'une composante unipotente du groupe de Galois qui agit trivialement sur les modules «modérément irréguliers», c'est-à-dire formé des «Stokes galoisiens».

0.1. Organisation de cet article.

Dans la première section, nous reprenons et mettons en forme des résultats classiques dus, pour l'essentiel, à Adams, Carmichael et Birkhoff. En 1.1, nous définissons le polygone de Newton d'un opérateur aux q-différences et établissons ses premières propriétés. En 1.2, nous rappelons les principaux résultats de factorisation sous la forme qui nous sera nécessaire. Ces énoncés ont été exhumés après un long sommeil par Changgui Zhang : voir [13] et [25], en particulier le paragraphe 5; ils vont par paire : cas convergent-cas formel. Les principaux énoncés sont les théorèmes 1.2.1 et (surtout) 1.2.3, dont les corollaires 1.2.2 et 1.2.4 jouent un rôle essentiel.

Dans la deuxième section, après de brefs rappels sur le formalisme des modules aux q-différences, nous montrons le caractère intrinsèque du polygone de Newton (théorème 2.2.5). L'ingrédient principal est l'utilisation du théorème de Jordan-Hölder, selon la méthode de Katz dans [12], II.2.2. Nous décrivons ensuite le comportement du polygone de Newton vis-à-vis des opérations linéaires.

L'étude au 3.1 du sous-module de rang maximum de pente donnée est la deuxième étape cruciale. Le théorème 3.1.1 est une traduction du lemme d'Adams. On en déduit facilement l'existence de la filtration canonique (théorème 3.1.6), qui est une traduction du théorème de factorisation de Birkhoff-Guenther. Les excellentes propriétés de la filtration et du gradué associé vis-à-vis des opérations linéaires sont données en 3.2 et 3.3.

Nous n'avons pas abordé l'application à la *résolution* des théorèmes de factorisation, qui n'est pas logiquement nécessaire à nos résultats. On la trouvera dans la «version longue» de cet article, parue sous forme de prépublication [21]. Outre la description très détaillée des algorithmes, la principale différence avec les références mentionnées ci-dessus est que nous n'utilisons que des solutions uniformes sur $\mathbb{C}^*$, ce qui est important pour d'autres parties de la théorie (*voir* [20] et [23]).

0.2. Remerciements.

Cet article[1] provient, pour l'essentiel, de la rédaction d'exposés au Groupe de Travail sur les Équations aux q-Différences, dont je remercie tout particulièrement les animateurs, Lucia Di Vizio et Jean-Pierre Ramis, ainsi que l'un des participants lointains, Changgui Zhang, pour de nombreuses discussions excitantes, d'utiles conseils, et le plaisir d'une passion partagée.

(1) Les résultats présentés ici ont été annoncés dans une note parue aux C.R.A.S. en janvier 2002. Le texte comportait une petite erreur, corrigée ici (section 2.2).

Ce travail est dédié à Jean Giraud, dont le cours à Orsay «Étude locale des singularités» m'a appris l'intérêt des filtrations en géométrie, et, plus généralement, le plaisir de l'outil bien fait.

0.3. Conventions générales.

On fixe un nombre complexe q de module $|q| > 1$. Il est essentiel que $q \neq 1$, mais le choix fait ici ne l'est pas. On prendra cependant garde que notre définition du polygone de Newton y est adaptée (cf. par exemple la remarque 3.1.3). Le corps de base K est l'un des suivants :

$$\mathcal{M}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}(\{z\}) \subset \mathbb{C}((z)),$$

respectivement : corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, corps des séries de Laurent convergentes et corps des séries de Laurent formelles. Ce qui suit s'appliquera donc en particulier aux équations rationnelles, i.e. à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$. Notons que dans le cas (que nous appellerons «classique») des équations différentielles, on ne considère pas habituellement le corps de base $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. La raison pour le traiter à part ici est la propriété des équations aux q-différences à coefficients rationnels de «propager la méromorphie». Le corps K est muni de la valuation discrète v_0 (valuation z-adique). On notera $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation correspondant, de corps résiduel $\mathcal{O}/z\mathcal{O} = \mathbb{C}$. Le corps K est également muni d'un automorphisme :

$$\sigma_q : f(z) \mapsto f(qz).$$

On considèrera de plus une extension (L, σ_q) du «corps aux q-différences» (K, σ_q), où l'on cherchera les solutions d'équations. La définition précise de L n'a pas d'importance pour cet article. Pour fixer les idées, on pourra faire les choix suivants (*voir* [19], [15]). Si $K = \mathcal{M}(\mathbb{C})$ (resp. $K = \mathbb{C}(\{z\})$, resp. $K = \mathbb{C}((z))$), on prendra $L = \mathcal{M}(\mathbb{C}^*)$, corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$ (resp. $L = \mathcal{M}(\mathbb{C}^*, 0)$, corps des germes en 0 de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}^*$, resp. une K-algèbre obtenue par adjonction de symboles dont la définition est détaillée dans [15], chap. 12).

Nous aurons besoin des extensions ramifiées K_l de K pour $l \in \mathbb{N}^*$: elles sont définies de façon naturelle à l'aide de variables z_l telles que $z_l^l = z$; on les suppose de plus compatibles, c'est-à-dire que $z_{lm}^l = z_m$. On introduit de même une famille compatible de racines de q : $q_l^l = q$ et $q_{lm}^l = q_m$. Il suffit pour cela de fixer $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $q = e^{-2\imath\pi\tau}$, puis de prendre $q_l = e^{-2\imath\pi\tau/l}$.

On notera enfin $\mathcal{D}_q = K\left\langle \sigma, \sigma^{-1} \right\rangle$ l'algèbre de Öre des polynômes de Laurent non commutatifs, caractérisée par les relations :

$$\forall x \in K, \forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ \sigma^k x = \sigma_q^k(x)\sigma^k.$$

Un tel polynôme $P \in \mathcal{D}_q$ modélise donc l'opérateur aux q-différences $P(\sigma_q)$, d'où une opération de $\mathcal{D}_q$ sur L. On utilisera principalement des polynômes *entiers*, c'est-à-dire dont tous les monômes sont à degrés positifs. Avec ces conventions, l'équation (0) s'écrit :

$$(1)\quad P.f \underset{\text{def}}{=} P(\sigma_q)(f) = a_0\ \sigma_q^n f + \cdots + a_n\ f = 0, a_0, \ldots, a_n \in K\ ,\ a_0 a_n \neq 0.$$

Dans cette équation, l'opérateur aux q-différences P est le polynôme (entier) $a_0\ \sigma^n + \cdots + a_n$ de $\mathcal{D}_q$. La fonction inconnue f est recherchée dans L.

On vérifie facilement que l'anneau $\mathcal{D}_q$ est euclidien (à gauche et à droite). Soit $P = \sum_{\alpha \leqslant i \leqslant \beta} a_i \sigma^i$ un élément de $\mathcal{D}_q$. On appellera *degré absolu* de P l'entier naturel $\deg(P) = \beta - \alpha$ si $a_\alpha a_\beta \neq 0$ (et $-\infty$ si $P = 0$). Il est immédiat que $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$. On appellera *valuation z-adique* de P l'entier $v_0(P) = \min(v_0(a_\alpha), \ldots, v_0(a_\beta))$ (donc $+\infty$ si $P = 0$). Une variante du lemme de Gauss permet de montrer que $v_0(PQ) = v_0(P) + v_0(Q)$.

1. Polygone de Newton, factorisation, solutions.

1.1. Le polygone de Newton d'une équation aux q-différences.

Polygone de Newton

1.1.1. DÉFINITION. — Soit $P = \sum a_i \sigma^i \in \mathcal{D}_q$ un opérateur aux q-différences non nul. On définit son *polygone de Newton* $N(P)$ comme l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^2$ de l'ensemble :

$$\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \ /\ j \geqslant v_0(a_i)\}.$$

C'est aussi, par définition, le polygone de Newton de l'équation aux q-différences $P.f = \sum a_i \sigma_q^i f = 0$. On peut d'ailleurs se restreindre aux a_i non nuls. Cette définition dépend évidemment du choix de la valuation v_0.

Dans le cas d'équations à coefficients dans K_l (obtenues par ramification, par exemple en 1.1.4) c'est la valuation z_l-adique qui sera employée.

1.1.2. *Terminologie.* — La frontière de $N(P)$ est formée de deux demi-droites verticales et de $k \geqslant 1$ segments non verticaux, que l'on oriente de gauche à droite, d'où k vecteurs de coordonnées $(r_1, d_1), \ldots, (r_k, d_k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, de pentes $\mu_1 = \frac{d_1}{r_1}, \ldots, \mu_k = \frac{d_k}{r_k} \in \mathbb{Q}$. On les suppose indexés de telle sorte que $\mu_1 > \cdots > \mu_k$. Les lettres r, d sont choisies par analogie avec des notions de rang et de degré (de fibrés vectoriels, par exemple). La *première pente* est μ_k (donc, la plus petite).

Si l'on multiplie (à gauche ou à droite) l'opérateur P par $a\sigma^k$, où $a \in K^*$, $k \in \mathbb{Z}$, le polygone de Newton $N(P)$ subit une translation de vecteur $(k, v_0(a))$. En particulier, en ramenant P à la forme (1) avec $a_0 = 1$, on cale l'origine du premier vecteur en $(0,0)$. Dorénavant, nous supposerons que $P = \sigma^n + a_1\,\sigma^{n-1} + \cdots + a_n$ est entier unitaire (par commodité, nous conservons la notation $a_0 = 1$).

On notera $S(P) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$ l'ensemble des pentes de P. La *fonction de Newton* de P est la fonction $r_P : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ de support $S(P)$ et telle que $\mu_i \mapsto r_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a donc :

$$r_P = \sum_{i=1}^{k} r_i \delta_{\mu_i},$$

où δ_μ désigne la fonction de Kronecker (indicatrice de $\{\mu\}$).

1.1.3. LEMME. — *La correspondance entre fonctions de Newton et polygones de Newton ayant l'origine du premier vecteur en* $(0,0)$ *est une bijection additive.*

Preuve. — Il est facile de construire la fonction de Newton r à partir du polygone de Newton N et réciproquement. L'addition étant associative et commutative des deux côtés, il suffit, pour prouver l'additivité, de la vérifier dans le cas d'une somme $\delta_\mu + r$, où μ minore le support de r. Mais, dans ce cas, c'est un exercice facile de géométrie affine. □

Manipulations élémentaires sur les pentes

1.1.4. *Ramification* $z = z_l^l$, $q = q_l^l$. — Les pentes sont multipliées par l. En particulier, en prenant pour l un multiple commun des r_i (par exemple $n!$), on se ramène au cas où les pentes sont entières. Cette opération revient à une extension de corps aux q-différences, soit encore à une extension du corps de base de l'algèbre $\mathcal{D}_q$. Elle est donc compatible avec les opérations de $\mathcal{D}_q$.

1.1.5. *Changement de fonction inconnue $f = ug$.* — Soit u un élément inversible de L tel que $\sigma_q u = \alpha u$, $\alpha \in K^*$. On a alors $Pf = 0 \Leftrightarrow P^{[u]}g = 0$, avec

$$\begin{aligned} P^{[u]} \underset{\text{def}}{=} u^{-1}Pu &= \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\sigma_q^{n-i}(u)}{u} \sigma^{n-i} \\ &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} \sigma_q^i(\alpha)\right) \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{\sigma_q^i(\alpha) \cdots \sigma_q^{n-1}(\alpha)} \sigma^{n-i}. \end{aligned}$$

Les pentes de $P^{[u]}$ sont donc $\mu_1 - v_0(\alpha), \dots, \mu_k - v_0(\alpha)$.

1.1.6. *Symboles de transformation de jauge.* — On peut remarquer que, d'après la troisième formule de 1.1.5, $P^{[u]}$ peut être défini en fonction de α seul. On prouve alors directement que $P \mapsto P^{[u]}$ est un automorphisme de $\mathcal{D}_q$ et que $P^{[uv]} = \left(P^{[u]}\right)^{[v]}$. Nous aurons seulement besoin d'un symbole u correspondant à $\alpha = z^{\mu}$, que nous noterons $u = \theta^{\mu}$; il peut provenir d'un élément θ de L tel que $\sigma_q(\theta) = z\theta$. On peut ainsi ramener une pente entière à 0 : si $\mu_i \in \mathbb{Z}$, on prend, dans 1.1.5, $u = \theta^{\mu_i}$, c'est-à-dire $\alpha = z^{\mu_i}$.

Équation caractéristique, exposants

On suppose ici que $S(P) \subset \mathbb{Z}$. On va définir l'équation caractéristique et les exposants attachés à la i-ème pente $\mu = \mu_i$ de P. Nous noterons temporairement $P' = P^{[\theta^{\mu}]}$ (il n'y a pas de risque de confusion avec la dérivée, qui n'intervient nulle part). D'après 1.1.5, la i-ème pente de $P' = a'_0\sigma^n + \cdots + a'_n$ vaut 0. Il existe donc des indices $\alpha < \beta$ dans $\{0, \dots, n\}$ tels que, notant $l = v_0(P')$:

$$\begin{cases} v_0(a'_\alpha) = v_0(a'_\beta) = l \\ \forall i \in \{0, \dots, n\} \text{ , } v_0(a'_i) \geqslant l \\ \forall i \in \{0, \dots, \alpha - 1\} \cup \{\beta + 1, \dots, n\} \text{ , } v_0(a'_i) > l. \end{cases}$$

On a donc $r_i = \beta - \alpha$. On introduit : $Q = z^{-l}P' = b_0\sigma^n + \cdots + b_n$, dont les coefficients sont donc dans l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ de K. Plus précisément, en posant :

$$\begin{aligned}\overline{Q} &\underset{\text{def}}{=} b_0(0)\,\sigma^n + \cdots + b_n(0)\\ &= b_\alpha(0)\,\sigma^{n-\alpha} + \cdots + b_\beta(0)\,\sigma^{n-\beta}\\ &\in \mathbb{C}[\sigma,\sigma^{-1}]\end{aligned}$$

(qui est donc un polynôme commutatif), on a $Q \equiv \overline{Q} \pmod{z\mathcal{O}\langle\sigma,\sigma^{-1}\rangle}$ et $b_\alpha(0)b_\beta(0) \neq 0$. L'équation $\overline{Q} = 0$ (ainsi que le polynôme $\overline{Q}$ lui-même) est appelée *équation caractéristique* attachée à la pente μ de P ; on peut la considérer comme définie à un facteur $\alpha\sigma^k$ près, $\alpha \in \mathbb{C}^*, k \in \mathbb{Z}$. On la notera $\overline{P}^{(\mu)}$, ou simplement $\overline{P}$ dans le cas de la pente $\mu = 0$. Si $\mu \notin S(P)$, l'équation caractéristique est une constante non nulle. En général,

$$\overline{P}^{(\mu)} = \left(z^{-v_0(P')}P'\right)_{z=0}.$$

On voit donc, dans tous les cas, que $r_P(\mu)$ est égal au degré absolu $\deg(\overline{P}^{(\mu)})$ de l'équation caractéristique.

1.1.7. LEMME. — *L'équation caractéristique est multiplicative :*

$$\forall P_1, P_2 \in \mathcal{D}_q\ ,\ \forall \mu \in \mathbb{Q}\ ,\ \overline{P_1P_2}^{(\mu)} = \overline{P_1}^{(\mu)}\overline{P_2}^{(\mu)}.$$

Preuve. — En effet, c'est une conséquence immédiate des propriétés de la valuation et du degré absolu dans $\mathcal{D}_q$ et de 1.1.6. □

1.1.8. THÉORÈME. — *Le polygone de Newton est additif. Précisément, P_1 et P_2 étant des opérateurs aux q-différences comme ci-dessus :*

$$\begin{aligned} r_{P_1P_2} &= r_{P_1} + r_{P_2},\\ N(P_1P_2) &= N(P_1) + N(P_2).\end{aligned}$$

Preuve. — On déduit la première égalité du lemme 1.1.7 et du fait que $r_P(\mu) = \deg(\overline{P}^{(\mu)})$; la deuxième égalité est alors conséquence du lemme 1.1.3. □

1.2. Factorisations d'un opérateur aux q-différences.

Pour plus de précision sur ce qui suit, voir [13], [21] et [25]. Nous fixons, jusqu'à la fin de cette section, les notations suivantes : P est un opérateur aux q-différences, μ en est une pente entière. Les *exposants* $c_1, \ldots, c_p$ attachés à la pente μ de P sont les racines de l'équation caractéristique $\overline{P}^{(\mu)}$ et $m_1, \ldots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On suppose les c_i indexés de telle sorte que, si $\frac{c_j}{c_i} = q^l$, $l \in \mathbb{N}^*$, alors $i < j$ («les exposants les moins résonnants sont factorisés à droite les premiers»).

Factorisation formelle

Le corps de base est ici $K = \mathbb{C}((z))$ (cas formel).

1.2.1. Théorème. — (i) *Sous les hypothèses précédentes, on a une factorisation $P = QR$, où $\mu \notin S(Q)$ et où $R = R_1 \cdots R_p$, avec*

$$\forall i \in \{1, \ldots, p\} \ , \ R_i = (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,m_i}^{-1} \cdots (z^{-\mu}\sigma - c_i).u_{i,1}^{-1},$$

les $u_{i,j}$ étant des séries formelles telles que $u_{i,j}(0) = 1$.

(ii) *On a, de plus, $S(R) = \{\mu\}$, $r_R = (m_1 + \cdots + m_p)\delta_\mu$ et $\overline{R}^{(\mu)} = \prod_{i=1}^{p}(X - c_i)^{m_i}$.*

Preuve. — Voir *loc. cit.* pour l'assertion (i). L'assertion (ii) est alors conséquence immédiate des définitions 1.1.1 et 1.1.2 et du théorème 1.1.8. □

1.2.2. Corollaire. — *Si ν est une pente entière quelconque de l'opérateur P, celui-ci se factorise sous la forme QR, avec $S(R) = S(P) \backslash \{\nu\}$ et $S(Q) = \{\nu\}$.*

Preuve. — Notons $S(P) = \{\mu_1, \ldots, \mu_k\}$, où $\nu = \mu_1$. En itérant le théorème 1.2.1 (μ prenant successivement les valeurs $\mu_k, \ldots, \mu_1$), on obtient une décomposition $P = P_1 \cdots P_k$ avec $S(P_i) = \{\mu_i\}$, $i = 1, \ldots, k$. On pose alors $Q = P_1$ et $R = P_2 \cdots P_k$ et l'on conclut avec le théorème 1.1.8. □

Factorisation convergente

Le corps de base est ici $K = \mathbb{C}(\{z\})$ ou $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ (cas convergent).

1.2.3. Théorème *(Birkhoff-Guenther)*. — *On reprend les hypothèses de 1.2.1, en supposant de plus que μ est la première pente. La factorisation obtenue en 1.2.1 est convergente.*

Preuve. — Voir *loc. cit.*. □

1.2.4. COROLLAIRE. — *Soit ν la plus grande pente de l'opérateur P, supposée entière. Alors P admet une factorisation convergente (c'est-à-dire définie sur K) $P = QR$, avec $S(R) = S(P) \setminus \{\nu\}$ et $S(Q) = \{\nu\}$.*

Preuve. — Analogue à celle de 1.2.2, mais il faut noter les pentes par ordre décroissant : $\mu_1 > \cdots > \mu_k$; c'est bien la première pente μ_k qui apparaîtra à droite dans la première décomposition, et la plus grande pente $\nu = \mu_1$ qui apparaîtra la dernière, à gauche. □

2. Polygone de Newton d'un module aux q-différences.

2.1. Équations, systèmes, modules.

Les objets

Nous décrivons ici différents modèles de l'équation aux q-différences scalaire d'ordre n et leurs relations. Nous partons de l'équation (1), dans laquelle nous supposons $a_0 = 1$. Notons, pour $f \in L$:

$$X_f = \begin{pmatrix} f \\ \sigma_q f \\ \vdots \\ \sigma_q^{n-1} f \end{pmatrix}.$$

Alors f est solution de l'équation (1) si et seulement si X_f est solution de l'équation (ou système) linéaire de rang n :

$$\sigma_q X = AX, \tag{2}$$

où l'inconnue X est un vecteur et où la matrice du système est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix} \in GL_n(K).$$

On peut écrire le système (2) sous forme d'équation au point fixe : $\Phi_A(X) = X$, où l'on a défini $\Phi_A : X \mapsto A^{-1}(\sigma_q X)$. L'opérateur Φ_A est σ_q-*linéaire* autrement dit, il est additif et $\forall \lambda, X \ : \Phi_A(\lambda X) = \sigma_q(\lambda)\Phi_A(X)$

(cette représentation est analogue à la représentation des solutions du système différentiel $\frac{dX}{dz} = AX$ comme éléments du noyau de la connexion $\Delta : X \mapsto \frac{dX}{dz} - AX$ et la semi-linéarité correspond à la formule de Leibnitz). Ceci conduit à définir un *module aux q-différences* sur le corps aux q-différences (K, σ_q) comme un couple (M, Φ), où M est un K-espace vectoriel de dimension finie et Φ un automorphisme σ_q-linéaire de M. Par le choix d'une base de M, tout tel module s'identifie à un module de la forme (K^n, Φ_A) avec $A \in GL_n(K)$. Un module aux q-différences (M, Φ) peut être considéré comme un module *à gauche* sur l'anneau $\mathcal{D}_q$ (cf. les conventions générales) : si $P = \sum a_i \sigma^i \in \mathcal{D}_q$ et $x \in M$, on pose $P.x = P(\Phi)(x) = \sum a_i \Phi^i(x)$. Le fait que $\dim_K(M) < \infty$ équivaut au fait que le $\mathcal{D}_q$-module M est de longueur finie. Les modules aux q-différences sont donc exactement les $\mathcal{D}_q$-modules à gauche de longueur finie. Par abus de langage, on appellera *rang* d'un $\mathcal{D}_q$-module à gauche de longueur finie, ou du module aux q-différences correspondant, la dimension du K-espace vectoriel sous-jacent.

Soit $F \in GL_n(K)$. Si l'on pose $X = FY$ dans (2), on est conduit à une équation $\sigma_q Y = BY$, avec $B = (\sigma_q F)^{-1} AF$, que l'on considèrera comme équivalente à (2). On notera en conséquence $A \sim (\sigma_q F)^{-1} AF$. Cela équivaut à l'isomorphie des $\mathcal{D}_q$-modules associés (cf. 2.1.3). À titre d'exemple, si l'on part de l'équation d'ordre 1 : $\sigma_q f = af$, $a \in K^*$, on obtient le module $(K, a^{-1}\sigma_q)$. C'est aussi le $\mathcal{D}_q$-module monogène $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$, où $P = \sigma - a^{-1}$. Tout module de rang 1 est de cette forme; de plus, l'équation $\sigma_q f = af$ est équivalente à l'équation $\sigma_q f = bf$ si et seulement si $\exists u \in K^* : \frac{b}{a} = \frac{\sigma_q(u)}{u}$.

2.1.1. *Lemme du vecteur cyclique.* — *Soit (M, Φ) un module aux q-différences de rang n sur K. Alors il existe $x \in M$ tel que $\mathcal{B} = (x, \Phi(x), \ldots, \Phi^{n-1}(x))$ est une base de M. On dira que $\mathcal{B}$ est une base cyclique et que x est un vecteur cyclique.*

Preuve. — Une preuve analytique est donnée dans [19] et une preuve algébrique plus générale dans [9]. □

On peut alors écrire $\Phi^n(x) + a_1\Phi^{n-1}(x) + \cdots + a_n x = 0$; le polynôme non commutatif $P = \sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathcal{D}_q$ annule le générateur x du $\mathcal{D}_q$-module à gauche M. De l'euclidianité de $\mathcal{D}_q$ on tire que $\mathcal{D}_q P$ est même l'idéal annulateur de x :

2.1.2. Corollaire. — (i) *Tout module aux q-différences est isomorphe à un module de la forme $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$, où P est entier unitaire, autrement dit, de la forme ci-dessus.*

(ii) *Tout système aux q-différences est équivalent au système (2) obtenu en vectorialisant une équation (1).*

Preuve. — Pour prouver cette dernière assertion, on prend une matrice $A \in GL_n(K)$ et l'on considère le module $(K^n, \Phi_{A'})$ associé à la *contragrédiente* $A' = {}^tA^{-1}$ de A. Dans la base canonique $\mathcal{B}$ de K^n, $\Phi_{A'}$ est décrit par la relation $\Phi_{A'}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}A''$, où $A'' = {}^tA$. Soient $\mathcal{B}'$ une base cyclique, P la matrice de passage : $\mathcal{B}' = \mathcal{B}P$ et $F = {}^tP$ la transposée de celle-ci. On vérifie sans peine que la transformation de jauge F fournit une équivalence entre A et la matrice associée à une équation. $\square$

Plus généralement, soit y un élément du module aux q-différences M. Il existe un plus grand entier p tel que la famille $(y, \Phi(y), \ldots, \Phi^{p-1}(y))$ est libre sur K ; le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est stable par Φ et Φ^{-1}, il admet donc une structure de module aux q-différences. La relation linéaire $\Phi^p(y) + b_1\Phi^{p-1}(y) + \cdots + b_p y = 0$ détermine l'unique polynôme entier unitaire de degré minimum $Q = \sigma^p + b_1\sigma^{p-1} + \cdots + b_p$ tel que $Q(\Phi)(y) = 0$: on l'appellera le *polynôme (annulateur) minimal* de y. L'idéal à gauche annulateur dans $\mathcal{D}_q$ de y est $\mathcal{D}_q Q$ et le module engendré par y est isomorphe à $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q Q$.

Mise en garde. — L'appel à la contragrédiente dans la preuve ci-dessus peut sembler artificiel, mais il est lié au fait suivant : si l'on applique directement la première assertion de 2.1.2 au module (K, Φ_A), la matrice A n'est pas équivalente au système obtenu par linéarisation de l'équation $P.f = 0$ mais de l'équation *duale* (voir 2.1.9 à 2.1.11). Par exemple, partons de l'équation d'ordre 2 : $\sigma_q^2 f - \lambda\sigma_q f + \mu f = 0$, correspondant à l'opérateur $Q = \sigma^2 - \lambda\sigma + \mu$. L'équation hypergéométrique basique et l'équation de Tschakaloff (q-analogue de la série d'Euler, cf. [10]) sont des cas particuliers. La matrice associée par le procédé ci-dessus est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}$. Il est facile de voir que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur cyclique du module aux q-différences associé $M = (K^2, \Phi_A)$, de polynôme annulateur minimal : $P = \sigma^2 - \frac{\sigma_q(\lambda)}{\sigma_q(\mu)}\sigma + \frac{1}{\mu}$. Ce n'est pas notre opérateur Q de départ, mais son dual (ou «formal adjoint» dans la terminologie de [12]), et les pentes de $N(P)$ sont opposées à celles de $N(Q)$. Le module $M = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$ est le dual de $N = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$ au sens expliqué plus bas. Il est de tradition, dans la théorie des connexions, d'associer à Q le module M, alors qu'en théorie des $\mathcal{D}$-modules on lui associe le module N. La définition intrinsèque des solutions de Q en termes de son module associé n'est donc pas la même dans les deux cas.

Les morphismes

2.1.3. *Morphismes de modules aux q-différences.* — Un morphisme du système $\sigma_q X = AX$ de rang n vers le système $\sigma_q Y = BY$ de rang p est une matrice $F \in M_{p,n}(K)$ telle que $(\sigma_q F)\, A = BF$; il s'interprète comme une transformation de jauge $X \mapsto Y = FX$ qui envoie les solutions du premier vers les solutions du second. De manière plus intrinsèque, un morphisme de (M, Φ) vers (N, Ψ) est une application K-linéaire $f : M \to N$ telle que $\Psi \circ f = f \circ \Phi$ (un choix de bases redonne la description précédente). Il est clair que cela équivaut précisément à la $\mathcal{D}_q$-linéarité pour l'application correspondante entre $\mathcal{D}_q$-modules à gauche. La composition et les morphismes identités sont définis de manière évidente.

2.1.4. Proposition. — *On obtient ainsi une catégorie abélienne* $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$, *dans laquelle tout objet M s'insère dans une suite exacte :*

$$0 \to \mathcal{D}_q \to \mathcal{D}_q \to M \to 0.$$

Preuve. — En effet, la catégorie $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathcal{D}_q Mod$ des modules à gauche sur l'anneau $\mathcal{D}_q$ formée des modules de longueur finie. Par ailleurs, si $M = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$, la flèche $\mathcal{D}_q \to \mathcal{D}_q$ dans la suite exacte ci-dessus n'est autre que la multiplication à droite par P. □

2.1.5. *Objet unité et foncteurs solutions.* — L'équation triviale $\sigma_q f = f$ a pour modèle le module aux q-différences (K, σ_q), donc le $\mathcal{D}_q$-module à gauche $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - 1)$. C'est *l'unité* pour la structure tensorielle introduite en 2.1.6 et on le note (traditionnellement) $\underline{\mathbf{1}}$. On définit les deux foncteurs représentés par $\underline{\mathbf{1}}$:

$$\Gamma(M) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(\underline{\mathbf{1}}, M)$$
$$\Gamma^{\vee}(M) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Hom}(M, \underline{\mathbf{1}})$$

Prenons pour M un module aux q-différences admettant les deux descriptions : $(M, \Phi) = (K^n, \Phi_A)$ et $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$ (notations du début de 2.1). On a alors les identifications naturelles :

$$\Gamma(M) = \{x \in M \ / \ \Phi(x) = x\} = \{X \in K^n \ / \ \sigma_q X = AX\}$$
$$\Gamma^\vee(M) = \{f \in K \ / \ P.f = 0\}.$$

Ces deux foncteurs sont exacts à gauche. Le foncteur Γ est covariant, c'est le *foncteur des cosolutions*, le foncteur $\Gamma^\vee$ est contravariant, c'est le *foncteur des solutions* (ceci pour respecter ce qui semble être devenu l'usage standard en théorie des $\mathcal{D}$-modules). On peut aussi considérer Γ comme un foncteur «sections globales» (*voir* [6], 5.5, ou une interprétation faisceautique dans [17]).

Constructions tensorielles

Les constructions qui suivent et les preuves de leurs propriétés sont détaillées dans [15] et [20]. La terminologie tannakienne est celle de [7] et de [8].

2.1.6. *Produit tensoriel et* Hom *interne.* — Soient (M, Φ) et (N, Ψ) deux modules aux q-différences. Il y a un unique automorphisme σ_q-linéaire de $M \otimes_K N$ tel que $x \otimes y \mapsto \Phi(x) \otimes \Psi(y)$. Il en fait un module aux q-différences. De même, l'automorphisme σ_q-linéaire de $\mathrm{Hom}_K(M, N)$ défini par $f \mapsto \Psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ en fait un module aux q-différences. On a donc deux bifoncteurs, le produit tensoriel et le «Hom interne», que l'on notera $\underline{\mathrm{Hom}}$.

2.1.7. LEMME. — *Ces deux foncteurs sont exacts, et on a la propriété d'adjonction :*

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M \otimes N, P) = \underline{\mathrm{Hom}}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(N, P)).$$

De plus, $\underline{1}$ *est une unité pour le produit tensoriel. Le foncteur de passage au dual :* $M^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(M, \underline{1})$ *est exact et compatible avec le produit tensoriel.* □

On voit que le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}(M, N)$ est en fait formé des sections globales (ou cosolutions) de $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$. En particulier, le K-espace vectoriel sous-jacent au dual de (M, Φ) est le dual du K-espace vectoriel M et le dual de (K^n, Φ_A) est (K^n, Φ_B), où B est la contragrédiente ${}^tA^{-1}$ de A.

2.1.8. COROLLAIRE. — *La catégorie* $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ *est une catégorie tensorielle rigide* $\mathbb{C}$*-linéaire.* □

Dualité

Les calculs qui suivent sont inspirés d'un lemme de Gabber (cf. [12], I.1.5). Soit (M, Φ) un module aux q-différences admettant la base cyclique $(e_0, \dots, e_{n-1})$. On a donc, pour $0 \leqslant i \leqslant n-2$, $\Phi(e_i) = e_{i+1}$ et $\Phi(e_{n-1}) = -a_n e_0 - \cdots - a_1 e_{n-1}$, où $P = \sigma^n + a_1 \sigma^{n-1} + \cdots + a_n$ est le polynôme minimal de e_0. D'après 2.1.6 et 2.1.7, le dual de (M, Φ) est $(M^\vee, \Phi^\vee)$, où $M^\vee$ est le dual de M et $\Phi^\vee$ la contragrédiente ${}^t\Phi^{-1}$ de Φ. Soit $(e_0^\vee, \dots, e_{n-1}^\vee)$ la base duale de la base $(e_0, \dots, e_{n-1})$. On notera $\langle u, v\rangle$ l'application d'une forme linéaire u à un élément v.

2.1.9. Lemme. — *Soient $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors*

(i) $$\left\langle \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee), e_j \right\rangle = \begin{cases} \text{si } j \leqslant n-2 \ : \ \delta_{i,j+1} \\ \text{si } j = n-1 \ : \ -\sigma_q^{-1}(a_{n-i}) \end{cases}$$

(ii) $$\left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee) = \begin{cases} \text{si } i = 0 \ : \ -\sigma_q^{-1}(a_n) e_{n-1}^\vee \\ \text{si } i \geqslant 1 \ : \ e_{i-1}^\vee - \sigma_q^{-1}(a_{n-i}) e_{n-1}^\vee \end{cases}$$

(iii) $$e_i^\vee = \begin{cases} \text{si } i = 0 \ : \ -a_n \Phi^\vee(e_{n-1}^\vee) \\ \text{si } i \geqslant 1 \ : \ \Phi^\vee(e_{i-1}^\vee) - a_{n-i} \Phi^\vee(e_{n-1}^\vee). \end{cases}$$

Preuve. — La première assertion se prouve en remarquant que, par définition du dual, on a la formule générale : $\langle \Phi^\vee(u), \Phi(v)\rangle = \sigma_q(\langle u, v\rangle)$, d'où $\langle u, v\rangle = \sigma_q^{-1}(\langle \Phi^\vee(u), \Phi(v)\rangle)$. On applique cette dernière égalité à $u = \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee)$ et $v = e_j$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee), e_j \right\rangle &= \sigma_q^{-1}(\langle e_i^\vee, \Phi(e_j)\rangle) \\ &= \sigma_q^{-1} \left(\begin{cases} \text{si } j \leqslant n-2 \ : \ \langle e_i^\vee, e_{j+1}\rangle = \delta_{i,j+1} \\ \text{si } j = n-1 \ : \ \langle e_i^\vee, -a_n e_0 - \cdots - a_1 e_{n-1}\rangle = -a_{n-i} \end{cases} \right) \end{aligned}$$

d'où l'on tire bien la formule annoncée.

Pour la deuxième assertion, on part de la formule générale $\forall u \in M^\vee$, $u = \sum_{j=0}^{n-1} \langle u, e_j\rangle e_j^\vee$, que l'on applique à $u = \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee)$:

$$\begin{aligned} \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \left(\Phi^\vee\right)^{-1}(e_i^\vee), e_j \right\rangle e_j^\vee \\ &= -\sigma_q^{-1}(a_{n-i}) e_{n-1}^\vee + \begin{cases} \text{si } i = 0 \ : 0 \\ \text{si } i \geqslant 1 \ : \ e_{i-1}^\vee. \end{cases} \end{aligned}$$

La troisième assertion vient alors immédiatement. □

2.1.10. Proposition. — *Sous les hypothèses ci-dessus, $e_{n-1}^{\vee}$ est un vecteur cyclique de $M^{\vee}$, de polynôme minimal $P^{\vee} = \sigma^n + b_1\sigma^{n-1} + \cdots + b_n$, où (en posant, par commodité, $a_0 = 1$) :*

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}\ ,\ b_i = \frac{\sigma_q^{n-i-1}(a_{n-i})}{\sigma_q^{n-1}(a_n)}.$$

Preuve. — D'après le point (iii) du lemme 2.1.9, le plus petit sous-espace de $M^{\vee}$ stable par $\Phi^{\vee}$ et contenant $e_{n-1}^{\vee}$ est $M^{\vee}$, donc $e_{n-1}^{\vee}$ est un vecteur cyclique, dont il reste à déterminer le polynôme minimal. On déduit également du lemme, par récurrence :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}\ :\ e_i^{\vee} = -\sum_{j=0}^{i} \sigma_q^{i-j}(a_{n-j})\,(\Phi^{\vee})^{i-j+1}\,(e_{n-1}^{\vee}),$$

d'où $Q(\sigma_q)(e_{n-1}^{\vee}) = 0$, avec $Q = 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \sigma_q^{i-j}(a_{n-j})\sigma^{n-j} \in \mathcal{D}_q$. En divisant ce polynôme (entier) par son coefficient dominant $\sigma_q^{n-1}(a_n)$, on obtient le polynôme minimal entier unitaire $P^{\vee}$ annoncé. □

2.1.11. *Lien entre solutions et cosolutions.* On peut maintenant élucider le lien entre les deux modèles de l'équation (1). On peut supposer celle-ci écrite sous la forme $P.f = 0$, où $P = \sigma^n + a_1\sigma^{n-1} + \cdots + a_n$. Notons ${}_PM$ le module obtenu par transformation de (1) en système. C'est donc K^n muni de l'automorphisme σ_q-linéaire $X \mapsto A^{-1}(\sigma_q X)$, où A est la matrice décrite au début de 2.1. Notons d'autre part M_P le module $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$. Son opérateur Φ est la multiplication par σ modulo P. Une base cyclique est donc formée des classes modulo P : $\overline{1}, \overline{\sigma}, \ldots, \overline{\sigma^{n-1}}$. La matrice de Φ dans cette base est ${}^tA$. Ce module est donc isomorphe à K^n muni de l'automorphisme σ_q-linéaire $X \mapsto B^{-1}(\sigma_q X)$, où $B = {}^tA^{-1}$ est la contragrédiente de A. Ainsi, les modèles ${}_PM$ et M_P de (1) sont duaux l'un de l'autre (2.1.7), ce qui explique pourquoi les solutions de (1) peuvent être vues au choix comme solutions de l'un ou cosolutions de l'autre. On retrouve le fait que tout module aux q-différences est isomorphe à un module ${}_PM$, autrement dit qu'il provient d'une équation (2.1.2).

2.2. Définition intrinsèque du polygone de Newton.

Dévissage et triangularisation

Notons $K^*_{\sigma_q}$ le groupe quotient de K^* par le sous-groupe $\{\frac{\sigma_q(u)}{u} \;/\; u \in K^*\}$.

2.2.1. *Lemme : classes de modules de rang* 1. — *L'application qui, à $a \in K^*$ associe le module $M_{\sigma - a}$ induit une bijection de $K^*_{\sigma_q}$ sur l'ensemble des classes d'isomorphie de modules aux q-différences de rang* 1 *sur K .*

Preuve. — Il découle du lemme du vecteur cyclique (2.1.1) que tout objet M de $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ s'écrit sous la forme $M_P = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P$ avec P entier unitaire (l'anneau $\mathcal{D}_q$ n'étant pas commutatif, on ne peut cependant pas caractériser l'idéal $\mathcal{D}_q P$ comme idéal annulateur de M et en déduire l'unicité de P). Par ailleurs, le rang du module M (c'est-à-dire sa dimension sur K, cf. le début de 2.1) est un invariant d'isomorphie (car toute bijection $\mathcal{D}_q$-linéaire est K-linéaire) et M_P a pour rang le degré de P. Donc M_P est de rang 1 si et seulement si $P = \sigma - a, a \in K^*$. De plus, la description donnée au début de 2.1.1 entraine que tout P' tel que $M_P \simeq M_{P'}$ est, dans ce cas, de la forme $P' = \sigma - a'$, où $\exists u \in K^* \; : \; \frac{a'}{a} = \frac{\sigma_q(u)}{u}$. □

2.2.2. *Lemme : suites exactes et polynômes minimaux.* — *Toute suite exacte dans* $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ *est isomorphe à une suite exacte de la forme :*

$$0 \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q Q \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q R \to 0, \tag{3}$$

où P, Q, R sont des polynômes non commutatifs entiers unitaires tels que $P = QR$.

Preuve. — Soient P, Q, R des polynômes non commutatifs entiers unitaires tels que $P = QR$. Alors $\mathcal{D}_q P \subset \mathcal{D}_q R$, d'où la surjection canonique $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q P \to \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q R \to 0$. L'anneau $\mathcal{D}_q$ étant intègre, le noyau $\mathcal{D}_q R/\mathcal{D}_q P = \mathcal{D}_q R/\mathcal{D}_q QR$ est canoniquement isomorphe, via l'application linéaire à gauche $F \mapsto FR$, à $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q Q$. On obtient donc une suite exacte de la forme indiquée. Réciproquement, on déduit facilement de 2.1 que toute suite exacte dans $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ s'identifie à une suite exacte (3). □

Tout objet M de la catégorie abélienne $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ étant, par hypothèse, de longueur finie, il admet un dévissage :

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M,$$

où tous les quotients $S_i = M_i/M_{i-1}$ sont simples. D'après le théorème de Jordan-Hölder, les classes d'isomorphie des modules S_i sont bien déterminées dans leur ensemble, c'est-à-dire à permutation près, et en conservant leurs multiplicités. Le rang de M est la somme des rangs des S_i. Tout objet de rang 1 est donc simple. Nous dirons que le module M est *triangularisable* si, pour l'un des dévissages ci-dessus (et donc pour tous), tous les quotients $S_i = M_i/M_{i-1}$ sont de rang 1. Cela revient exactement à dire que la matrice A qui apparait dans la description sous la forme (K^n, Φ_A) peut être choisie triangulaire supérieure.

2.2.3. Théorème. — *Soit M un module aux q-différences sur l'un des corps aux q-différences (K, σ_q) mentionnés dans les conventions générales. Il existe une extension (K_l, σ_{q_l}) de (K, σ_q) obtenue par ramification $z = z_l^l, q = q_l^l$ (cf. 1.1.4) telle que le module $M_l = K_l \otimes_K M$ obtenu par extension des scalaires est triangularisable.*

Preuve. — En effet, c'est une conséquence immédiate des résultats de 1.2 et du lemme 2.2.2 (comparer à [14]). □

Construction du polygone de Newton

Notons v_0 la valuation z-adique sur les corps qui nous intéressent. Notre but est d'attribuer la pente $v_0(a)$ à l'équation $\sigma_q f = af$ et d'identifier celle-ci au module $\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a)$, donc au *second* modèle (celui des solutions et non celui des cosolutions) [(2)].

2.2.4. *L'algorithme.* — La méthode employée est inspirée de Katz (cf. [12], II.2). On part d'un module aux q-différences M sur (K, σ_q). On va construire la *fonction de Newton* $r_M : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ de M (cf. 1.1.2).

1. Quitte à ramifier, on peut supposer M triangularisable.
2. Chaque module simple S_i qui intervient dans la décomposition de M est de rang 1, donc de la forme $M_{\sigma - a_i}$, l'élément a_i étant déterminé à un facteur $\frac{\sigma_q(u)}{u}$ près; en particulier, la valuation $\mu_i = v_0(a_i)$ est bien déterminée. On attribue à S_i la fonction de Newton $r_{S_i} = \delta_{\mu_i}$: autrement dit, le polygone de Newton de S_i a une seule pente, de valeur μ_i et de multiplicité 1.

---

(2) Ce point est important et la confusion entre les deux modèles a entraîné la présence d'énoncés inexacts dans ma note de C.R.A.S. sur ce sujet.

3. On attribue à M la fonction de Newton r_M somme des r_{S_i}. D'après le théorème de Jordan-Hölder, celle-ci est bien déterminée (i.e. ne dépend pas du dévissage choisi).
4. Si l'on a dû ramifier au niveau l, on divise toutes les pentes calculées par l. Comme la ramification au niveau l multiplie les valuations par l, le choix du niveau de ramification n'influe pas sur le résultat final.

Cette définition du polygone de Newton est tautologiquement additive pour les suites exactes (voir le lemme 1.1.3). Par construction, si M_P est de rang 1, son polygone de Newton est égal à celui du polynôme non commutatif P. D'après 1.1.8 et 2.2.2, cela est encore vrai si M_P est triangularisable. Enfin, d'après 1.1.4 et le dernier point de l'algorithme, cela reste vrai en toute généralité.

2.2.5. THÉORÈME ET DÉFINITION. — *On peut associer à tout module aux q-différences M un polygone de Newton $N(M)$ défini par la fonction de Newton associée r_M, de manière que*

(i) *Le polygone de Newton d'un polynôme non commutatif entier unitaire P est celui de M_P : $N(M_P) = N(P)$.*

(ii) *Le passage au polygone de Newton est additif pour les suites exactes.* □

2.2.6. *Exemple : première pente d'un élément.* — Reprenant les notations qui suivent 2.1.2, notons $Q = \sigma^p + b_1\sigma^{p-1} + \cdots + b_p$ le polynôme annulateur minimal de $y \in M$. La première pente de Q est aussi la première pente du sous-module $\mathcal{D}_q y$ de M. Notons la $\mu(y)$. On vérifie facilement qu'elle vaut $\mu(y) = \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{v_0(b_i)}{i}$.

2.3. Propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles.

Propriétés du polygone de Newton

Nous exprimerons surtout ces propriétés à l'aide de la fonction de Newton.

2.3.1. THÉORÈME. — (i) *Additivité : pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, on a $r_M = r_{M'} + r_{M''}$ et $N(M) = N(M') + N(M'')$.*

(ii) *Multiplicativité : pour tous modules aux q-différences M_1 et M_2, on a $\forall \mu \in \mathbb{Q}$: $r_{M_1\otimes M_2}(\mu) = \sum_{\mu_1+\mu_2=\mu} r_{M_1}(\mu_1) r_{M_2}(\mu_2)$.*

(iii) *Symétrie : notant* $M^\vee$ *le dual de* M, *on a* $\forall \mu \in \mathbb{Q}\ :\ r_{M^\vee}(\mu) = r_M(-\mu)$.

Preuve. — La première assertion a déjà été vue au 2.2. Pour la seconde assertion (où l'on a bien affaire à une somme finie de termes non nuls), on vérifie d'abord la formule dans le cas où M_1 et M_2 sont de rang 1 : elle vient alors, par application de la définition (2.2.4, point 2), de l'égalité :

$$(\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a_1)) \otimes (\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a_2)) = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a_1 a_2).$$

Le cas de deux modules triangularisables s'en déduit grâce à (i) et à l'exactitude du produit tensoriel (cf. 2.1.7). Le cas général vient alors de 2.2.3, du comportement du polygone de Newton par ramification (cf. 1.1.4) et de la compatibilité du produit tensoriel avec l'extension des scalaires (donc avec la ramification). Pour la troisième assertion, on raisonne de la même manière à partir de l'égalité $(\mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a))^\vee = \mathcal{D}_q/\mathcal{D}_q(\sigma - a^{-1})$. □

2.3.2. Corollaire. — *Notons* $S(M)$ *l'ensemble des pentes de* M *(donc, le support de* r_M*). Alors, avec les notations de 2.3.1, on a :*

(i) $S(M) = S(M') \cup S(M'')$.

(ii) $S(M_1 \otimes M_2) = S(M_1) + S(M_2)$.

(iii) $S(M^\vee) = -S(M)$. □

Notons en particulier les très utiles conséquences suivantes :

2.3.3. Corollaire.

(i) *Soit* N *un quotient de* M, *par exemple, l'image* $f(M)$ *de* M *par un morphisme. Alors* $S(N) \subset S(M)$.

(ii) *Soient* M' *et* M'' *des sous-modules de* M. *Alors* $S(M')$, $S(M'') \subset S(M)$ *et* $S(M' + M'') = S(M') \cup S(M'')$. *Si de plus* $S(M') \cap S(M'') = \varnothing$, *leur somme est directe.*

(iii) *Si* $S(M) \cap S(N) = \varnothing$, *tout morphisme de* M *dans* N *est nul.* □

Modules purs, modules fuchsiens

Un module *pur de pente* μ est un module M tel que $S(M) = \{\mu\}$. La question difficile, à ce stade, est de savoir si un module M tel que $\mu \in S(M)$ admet un sous-module de pente μ non trivial, autrement dit, si l'on peut «casser les pentes» de son polygone de Newton. Ce sera l'objet de la section 3.1. On déduit de 2.3.2 et 2.3.3 :

2.3.4. COROLLAIRE.

(i) *Tout sous-module, tout module quotient, toute image par un morphisme d'un module pur de pente μ sont soit triviaux, soit des modules purs de pente μ.*

(ii) *Toute extension de modules purs de pente μ en est un.*

(iii) *Si $\mu \in S(M)$, la somme N des sous-modules purs de pente μ de M est soit nulle, soit le plus grand sous-module pur de pente μ de M. Les sous-modules ainsi associés aux différentes pentes $\mu \in S(M)$ sont en somme directe.*

(iv) *Le dual d'un module pur de pente μ est un module pur de pente $-\mu$.*

(v) *Le produit tensoriel de deux modules purs de pentes μ et ν est un module pur de pente $\mu + \nu$.* □

Un module *fuchsien* est un module pur de pente 0. Le lien avec les autres caractérisations des équations fuchsiennes et des systèmes fuchsiens est explicité dans l'appendice de [19] et dans [20].

2.3.5. THÉORÈME. — *La sous-catégorie pleine de la catégorie* $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ *formée des modules fuchsiens est stable par passage aux sous-quotients, aux extensions, au produit tensoriel, au dual et aux* Hom *internes. C'est donc une catégorie tensorielle rigide $\mathbb{C}$-linéaire.*

Il faut simplement noter que le Hom interne s'exprime à l'aide du produit tensoriel et du dual : $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N) = M^\vee \otimes N$; le reste est conséquence immédiate de 2.3.4. □

Il est démontré dans [15] et [20] que cette catégorie est tannakienne sur $\mathbb{C}$.

3. La filtration canonique par les pentes et le gradué associé.

3.1. La filtration canonique par les pentes.

Le plus grand sous-module pur de pente μ

Soit $\mu \in S(M)$. On notera (uniquement dans ce paragraphe) $M^{[\mu]}$ le plus grand sous-module pur de pente μ de M, dont l'existence a été établie en 2.3.4,(iii). Il découle d'ailleurs de 2.3.4 et 2.3.1 qu'il est *invariant par tout automorphisme du module aux q-différences M* d'une part, que son rang est *a priori* majoré par $r_M(\mu)$ d'autre part.

3.1.1. THÉORÈME. — *Soit μ une pente du module M, supposée quelconque dans le cas formel, maximale ($\mu = \max S(M)$) dans le cas convergent. Alors M admet un sous-module $M^{[\mu]}$ pur de pente μ et de rang maximum $r_M(\mu)$.*

Preuve. — On suppose dans un premier temps que $S(M) \subset \mathbb{Z}$; en particulier, M est triangularisable (2.2.3). On écrit $M = M_P$ avec P entier unitaire. On a donc $\mu \in S(M) = S(P)$. D'après 1.2.2 (cas formel) et 1.2.4 (cas convergent), il y a une factorisation $P = QR$, où Q et R sont entiers unitaires et $S(Q) = \{\mu\}$, $S(R) = S(P) - \{\mu\}$. Le degré de Q est $r_P(\mu) = r_M(\mu)$. Le sous-module M_Q de $M = M_P$ (2.2.2) est donc pur de pente μ et de rang $r_M(\mu)$. C'est donc $M^{[\mu]}$ et ce dernier a bien le rang maximum dans ce cas.

On prend maintenant M quelconque. Il existe un entier naturel non nul l tel que $S(M) \subset \frac{1}{l}\mathbb{Z}$. Notons $(K', \sigma_{q'})$ l'extension (K_l, σ_{q_l}) déjà utilisée en 2.2.3. Soit $M' = K' \otimes_K M$ le module obtenu par extension des scalaires et notons $\mu' = l\mu$: c'est une pente de M', la plus grande dans le cas convergent; de plus, $S(M') = lS(M) \subset \mathbb{Z}$. D'après le premier cas étudié, $M'^{[\mu']}$ a le rang maximum, soit $r_{M'}(\mu') = r_M(\mu)$. Le groupe de Galois de K' sur K est cyclique, engendré par l'automorphisme $\gamma : f(z') \mapsto f(jz')$, où l'on a noté z' la variable ramifiée z_l et où j est une racine primitive l-ème de l'unité. L'automorphisme K-linéaire $\gamma \otimes Id_M$ de M' commute à σ', c'est donc un automorphisme de module aux q'-différences, qui laisse $M'^{[\mu]}$ invariant d'après les remarques précédentes. Par descente galoisienne (cf. par exemple [24], chap. 11.1), il existe un unique sous-espace vectoriel M_1 du K-espace vectoriel M tel que $M'^{[\mu']} = K' \otimes_K M_1$. Il est alors facile de voir que M_1 est en fait le sous-module $M^{[\mu]}$ et que celui-ci a bien pour rang le rang maximum $r_M(\mu) = r_{M'}(\mu')$. □

De l'additivité du polygone de Newton pour les suites exactes on tire alors le

3.1.2. COROLLAIRE. — *Le sous-module $M^{[\mu]}$ est tel que $S(M/M^{[\mu]}) = S(M) - \{\mu\}$.* □

Le lemme d'Adams permet donc de *casser les pentes dans le cas convergent.*

3.1.3. *Remarque : q^{-1}-différences.* — Le module (M, Φ) sur le corps aux différences (K, σ_q) permet de définir le module (M, Φ^{-1}) sur le corps aux différences (K, σ_p), où $p = q^{-1}$. Celui-ci modélise l'équation (1), vue comme équation aux p-différences. Les pentes de ces deux modules (et de ces deux équations) sont deux à deux opposées. Avec les notations du théorème 3.1.1, le module aux p-différences (M, Φ^{-1}) admet un sous-module pur associé à la pente $-\mu$ (donc, dans le cas convergent, sa *plus petite* pente) ; ce sous-module est formé des mêmes éléments que $M^{[\mu]}$.

3.1.4. *Un exemple scindé.* — Nous considérons l'opérateur

$$P = (z\sigma - 1)(\sigma - 1) = z\sigma^2 - (1 + z)\sigma + 1.$$

Les pentes sont 0 et -1. La factorisation ci-dessus fournit un sous-module de pente 0 de $M = M_P$ et le théorème 3.1.1 un sous-module de pente -1. On a donc $M = M^{[0]} \oplus M^{[-1]}$. On le vérifie en fabriquant un système fondamental de solutions. On résoud tout d'abord $(\sigma - 1)f = 0$, qui donne $f_1 = 1$; puis le système $(\sigma - 1)f = g$, $(z\sigma - 1)g = 0$, qui donne $g(z) = e_{q,z^{-1}}$ et $f_2 = \sum_{k\geqslant 1} \sigma_q^{-k} g$, qui converge.

3.1.5. *Un exemple avec solution divergente.* — Nous considérons l'opérateur

$$P = (\sigma - 1)(z\sigma - 1) = qz\sigma^2 - (1 + z)\sigma + 1.$$

Les pentes sont 0 et -1. La factorisation ci-dessus, qui est la factorisation canonique, fournit un sous-module de pente -1 de $M = M_P$, en accord avec le théorème 3.1.1 : c'est $M^{[-1]}$; le quotient est pur de pente 0 (c'est l'unité $\underline{1}$), mais la suite exacte n'est pas scindée. On le vérifie en fabriquant un système fondamental de solutions. On résoud tout d'abord $(z\sigma - 1)f = 0$, qui donne $f_1(z) = e_{q,z^{-1}}$. puis le système $(z\sigma - 1)f = g$, $(\sigma - 1)g = 0$, qui donne $g(z) = 1$ et $f_2(z) = -\sum_{k\geqslant 0} q^{k(k-1)/2} z^k$, qui diverge (c'est un q-analogue de la série d'Euler).

La filtration canonique

Soit M un module aux q-différences. On numérote ses pentes : $S(M) = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$. Dans le cas formel, l'ordre est arbitraire; dans le cas convergent, on suppose que $\mu_1 > \cdots > \mu_k$.

3.1.6. Théorème. — *Dans le cas convergent, il existe une unique tour de sous-modules : $\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_k = M$ telle que, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, le module quotient M_i/M_{i-1} est pur de pente μ_i. Les rangs de ces quotients sont alors les $r_M(\mu_i)$.*

Preuve. — Cela vient tout seul en itérant 3.1.1 et 3.1.2. □

3.1.7. Théorème. — *Dans le cas formel, M admet une unique décomposition en somme directe de modules purs. Ceux-ci sont purs de pentes $\mu_1, \dots, \mu_k$ et leurs rangs sont les $r_M(\mu_i)$.*

Preuve. — Cela découle de 3.1.1 et de 2.3.4. □

3.1.8. *La filtration canonique : notations.* — Soit $\mu \in \mathbb{Q}$ quelconque (pas nécessairement une pente de M). On note $M^{\geqslant\mu}$ ou $F^{\geqslant\mu}(M)$ (resp. $M^{>\mu}$ ou $F^{>\mu}(M)$) le plus grand sous-module de M dont toutes les pentes sont $\geqslant \mu$ (resp. $> \mu$). On a donc :

$$S(M^{\geqslant\mu}) = S(M) \cap [\mu; +\infty[\text{ et son rang vaut } \sum_{\mu_i \geqslant \mu} r_M(\mu_i),$$

$$S(M^{>\mu}) = S(M) \cap]\mu; +\infty[\text{ et son rang vaut } \sum_{\mu_i > \mu} r_M(\mu_i).$$

Les $F^{\geqslant\mu}(M)$ forment la *filtration canonique (descendante) par les pentes de* M. Les couples $(F^{\geqslant\mu}(M), M/F^{\geqslant\mu}(M))$ et $(F^{>\mu}(M), M/F^{>\mu}(M))$ cassent donc en deux le polygone de Newton.

On note $M^{(\mu)} = M^{\geqslant\mu}/M^{>\mu}$: c'est $\{0\}$ si μ n'est pas une pente de M, un module pur de pente μ et de rang $r_M(\mu)$ si μ est une pente de M.

3.2. Propriétés fonctorielles, abéliennes et tensorielles.

Tout ce qui suit repose sur des raisonnements par « abstract nonsense » à partir du principe suivant, qui est une paraphrase de 3.1.6 :

Soit $(G^{\geqslant\mu}(M))_{\mu\in\mathbb{Q}}$ une filtration descendante d'un module aux q-différences M telle que les sauts non triviaux $G^{\geqslant\mu}(M)/G^{>\mu}(M)$ (nécessairement en nombre fini puisque M est de rang fini) soient purs de pente l'indice μ du saut. Alors c'est la filtration canonique.

Propriétés fonctorielles et abéliennes

3.2.1. Lemme. — (i) *Soit M' un sous-module de M. Alors*

$$\forall\mu \in \mathbb{Q}\,,\ F^{\geqslant\mu}(M') = F^{\geqslant\mu}(M) \cap M'.$$

(ii) *Soit M'' un module quotient de M. Alors*

$$\forall\mu \in \mathbb{Q}\,,\ F^{\geqslant\mu}(M'') = \text{ image de } F^{\geqslant\mu}(M) \text{ dans } M''.$$

Preuve. — En effet, dans chaque cas, le membre de droite est le terme général d'une filtration à laquelle on peut appliquer le principe énoncé plus haut. □

3.2.2. Proposition. — *Tout morphisme de modules aux q-différences est strict relativement aux filtrations canoniques. Autrement dit, si f est un morphisme de M dans N :*

$$\forall\mu \in \mathbb{Q}\,,\ f(M^{\geqslant\mu}) = f(M) \cap N^{\geqslant\mu}.$$

Preuve. — Cela découle immédiatement du lemme. □

3.2.3. Corollaire. — *Les $F^{\geqslant\mu}$ et les $F^{>\mu}$ sont des endofoncteurs de la catégorie* $\mathrm{DiffMod}(K,\sigma_q)$. □

Le comportement vis-à-vis des suites exactes découle de la proposition et apparaîtra clairement en 3.3, avec l'étude du foncteur « gradué associé ».

Propriétés tensorielles

3.2.4. Proposition. — *La filtration canonique sur le produit tensoriel $M_1 \otimes M_2$ est donnée par la formule : $F^{\geqslant \mu}(M_1 \otimes M_2) = \sum_{\mu_1+\mu_2 \geqslant \mu} F_1^{\geqslant \mu_1}(M_1) \otimes F_2^{\geqslant \mu_2}(M_2)$.*

Preuve. — Soit $M = M_1 \otimes M_2$, de sorte que $S(M) = S(M_1) + S(M_2)$ (cf. 2.3.2). Pour $\mu \in \mathbb{Q}$, on pose $G^{\geqslant \mu}(M) = \sum_{\mu_1+\mu_2 \geqslant \mu} M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2}$. Il est clair que les $(G^{\geqslant \mu}(M))_{\mu \in \mathbb{Q}}$ forment une filtration descendante de M dont les sauts ont lieu aux pentes de M. Notons : $H^{\mu}(M) = \sum_{\mu_1+\mu_2 \geqslant \mu} \big(M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{> \mu_2} + M_1^{> \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2}\big)$. On voit que $H^{\mu}(M) \subset G^{\geqslant \mu}(M)$, l'inclusion étant stricte si et seulement si μ est une pente de M. Soient $\mu' > \mu$ deux pentes consécutives de M. Alors, si $\mu_1 + \mu_2 \geqslant \mu$, on voit que $M_1^{> \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2} \subset H^{\mu'}(M)$ puis, par symétrie et en additionnant, que $H^{\mu}(M) \subset G^{\geqslant \mu'}(M)$. Par conséquent, $H^{\mu}(M) = G^{> \mu}(M)$.

On a deux surjections naturelles :

$$\bigoplus_{\mu_1+\mu_2 \geqslant \mu} M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2} \to G^{\geqslant \mu}(M) \to 0$$

et

$$\bigoplus_{\mu_1+\mu_2 \geqslant \mu} \big(M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{> \mu_2} + M_1^{> \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2}\big) \to G^{> \mu}(M) \to 0,$$

d'où, par passage au quotient, une surjection :

$$\bigoplus_{\mu_1+\mu_2 \geqslant \mu} \frac{M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2}}{M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{> \mu_2} + M_1^{> \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2}} \to \frac{G^{\geqslant \mu}(M)}{G^{> \mu}(M)} \to 0.$$

Or, de la formule générale :

$$\frac{A'}{A} \otimes \frac{B'}{B} = \frac{A' \otimes B'}{A \otimes B' + A' \otimes B},$$

on déduit l'isomorphisme canonique :

$$\frac{M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2}}{M_1^{\geqslant \mu_1} \otimes M_2^{> \mu_2} + M_1^{> \mu_1} \otimes M_2^{\geqslant \mu_2}} = M_1^{(\mu_1)} \otimes M_2^{(\mu_2)},$$

autrement dit, on a une surjection :

$$\bigoplus_{\mu_1+\mu_2 = \mu} M_1^{(\mu_1)} \otimes M_2^{(\mu_2)} \to \frac{G^{\geqslant \mu}(M)}{G^{> \mu}(M)} \to 0,$$

qui entraîne que $G^{\geqslant \mu}(M)/G^{> \mu}(M)$ est pur de pente μ. □

3.2.5. *Remarque.* — Ces propriétés de la filtration sont analogues à celles axiomatisées par Saavedra dans [18] (en mieux puisque nous filtrons par des sous-objets) et *opposées* à celles axiomatisées par Yves André dans [3].

3.3. Le gradué associé.

Modules modérément irréguliers

3.3.1. *La catégorie* $\mathrm{DiffMod}_{mi}(K,\sigma_q)$. — On appellera *modérément irrégulier* un module aux q-différences somme directe de modules purs. Cette terminologie est inspirée de l'expression «modérément ramifié» en arithmétique et en géométrie algébrique. La propriété d'être modérément irrégulier est conservée par extension des scalaires. On notera $\mathrm{DiffMod}_{mi}(K,\sigma_q)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{DiffMod}(K,\sigma_q)$ formée des modules modérément irréguliers et, pour tout entier naturel non nul l (niveau de ramification suffisant pour triangulariser), on notera $\mathrm{DiffMod}_{mi,l}(K,\sigma_q)$ la sous-catégorie pleine dont les objets ont toutes leurs pentes dans $\frac{1}{l}\mathbb{Z}$. La catégorie $\mathrm{DiffMod}_{mi}(K,\sigma_q)$ est naturellement graduée par $\mathbb{Q}$. Les morphismes sont de degré 0. La catégorie est stable par sous-quotient et constructions tensorielles (mais pas par extensions). C'est donc une sous-catégorie tannakienne de $\mathrm{DiffMod}(K,\sigma_q)$. La projection $M \rightsquigarrow M^{(\mu)}$ sur la composante de degré (ou pente) μ est un foncteur exact. Ces propriétés sont encore valables pour chacune des sous-catégories $\mathrm{DiffMod}_{mi,l}(K,\sigma_q)$.

3.3.2. *Fonction et polynôme de Hilbert-Samuel.* — On peut associer à tout module modérément irrégulier $M = \bigoplus M^{(\mu)}$ sa *fonction de Hilbert-Samuel* $\mu \mapsto r_M(\mu) = \dim_K(M^{(\mu)})$ (qui est aussi sa fonction de Newton) et son *polynôme de Hilbert-Samuel* :

$$\mathcal{R}_M(T) = \sum_{\mu\in\mathbb{Q}} r_M(\mu)T^{\mu},$$

(qui est un polynôme ramifié). La formation de ce dernier est additive pour les suites exactes et multiplicative pour le produit tensoriel. La dualisation se traduit par $T \leftarrow T^{-1}$. En combinaison avec 3.3.4, ces propriétés «expliquent» (ou enrichissent) les propriétés de la fonction de Newton obtenues en 2.3.1.

Le foncteur *gr*

Si M est un module aux q-différences, rappelons que l'on note $M^{(\mu)} = \frac{F^{\geqslant\mu}(M)}{F^{>\mu}(M)}$ le facteur de pente μ de M et que celui-ci est non nul si et seulement si μ est une pente de M ; dans ce cas, il est pur de pente μ et de rang $r_M(\mu)$. Nous noterons :

$$gr(M) = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{Q}} M^{(\mu)} = \bigoplus_{\mu\in S(M)} M^{(\mu)}$$

le *gradué associé* à la filtration canonique de M ; c'est un module modérément irrégulier. D'après 3.2.2, tout morphisme $f : M \to N$ envoie $F^{\geqslant\mu}(M)$ dans $F^{\geqslant\mu}(N)$ et $F^{>\mu}(M)$ dans $F^{>\mu}(N)$, donc induit $f^{(\mu)} : M^{(\mu)} \to N^{(\mu)}$ donc aussi $gr(f) : gr(M) \to gr(N)$.

3.3.3. THÉORÈME. — *On définit ainsi un foncteur* $\mathbb{C}$*-linéaire exact de la catégorie abélienne* $\mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ *dans sa sous-catégorie pleine* $\mathrm{DiffMod}_{mi}(K, \sigma_q)$*. Ce foncteur est une rétraction de l'inclusion.*

Preuve. — L'exactitude est une conséquence classique du fait que tous les morphismes sont stricts (cf. 3.2.2). □

3.3.4. THÉORÈME. — *Le foncteur gr est compatible au produit tensoriel et fidèle.*

Preuve. — D'après [18], IV.2.1, il découle de 3.2.4 que le foncteur qui associe à M le K-espace vectoriel sous-jacent à $gr(M)$ possède les propriétés indiquées. Le fait que gr lui-même possède ces propriétés est alors trivial. □

3.3.5. *Remarque.* — D'après 3.1.7, dans le cas formel, $\mathrm{DiffMod}_{mi}(K, \sigma_q) = \mathrm{DiffMod}(K, \sigma_q)$ et ce foncteur est isomorphe au foncteur identité.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C.R ADAMS, On the Linear Ordinary q-Difference Equations, Ann. Math, Série 2, Vol. 30, no 2 (1929), 195-205.

[2] C.R ADAMS, Linear q-Difference Equations, Bull. A.M.S (1931), 361-399.

[3] Y. ANDRÉ, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Invent. Math., 148, No. 2 (2002), 285-317.

[4] J.-P. BÉZIVIN, Sur les équations fonctionnelles aux q-différences, Aequationes Mathematicae, 43 (1992), 159-176.

[5] G.D. BIRKHOFF and P.E. GUENTHER, Note on a Canonical Form for the Linear q-Difference System, Proc. Nat. Acad. Sci, Vol. 27, No. 4 (1941), 218-222.

[6] P. DELIGNE, Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in Galois Groups over $\mathbb{Q}$ (Ihara & al. eds), MSRI Publications 16, (1989) Springer Verlag.

[7] P. DELIGNE, Catégories Tannakiennes, in Grothendieck Festschrift (Cartier & al. eds), Vol. II, (1990) Birkhäuser.

[8] P. DELIGNE and J. MILNE, Tannakian Categories, in Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties (Deligne & al. eds), Lecture Notes in Mathematics, 900, (1989) Springer Verlag.

[9] L. DI VIZIO, Arithmetic theory of q-difference equations. The q-analogue of Grothendieck-Katz conjecture on p-curvatures. Invent. Math, 150 (2002), 517-578.

[10] L. DI VIZIO, J.-P. RAMIS, J. SAULOY et C. ZHANG, Equations aux q-différences, Gazette des Mathématiciens, 96, Société Mathématique de France (2003).

[11] N. KATZ, Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin, Publications Mathématiques de l'I.H.E.S, no 39 (1970), 175-232.

[12] N. KATZ, On the calculation of some differential Galois groups, Invent. Math., 87 (1987), 13-61.

[13] F. MAROTTE et C. ZHANG, Multisommabilité des séries entières solutions formelles d'une équation aux q-différences linéaire analytique, Annales de l'Institut Fourier, Tome 50, fasc. 6 (2000), 1859-1890.

[14] C. PRAAGMAN, The formal classification of linear difference equations, Proc. Kon. Ned. Ac. Wet., ser. a, (1983), 86.

[15] M. VAN DER PUT and M.F. SINGER, Galois theory of difference equations, Lecture Notes in Mathematics, 1666, Springer Verlag (1997).

[16] J.-P. RAMIS, About the growth of entire functions solutions to linear algebraic q-difference equations, Annales de Fac. des Sciences de Toulouse, Série 6, Vol. I, no 1, (1992) 53-94.

[17] J.-P. RAMIS, J. SAULOY and C. ZHANG, Local analytic classification of irregular q-difference equations, (2001) Article en préparation.

[18] N. SAAVEDRA RIVANO, Catégories tannakiennes, Lecture Notes in Mathematics, 265, Springer Verlag (1972).

[19] J. SAULOY, Systèmes aux q-différences singuliers réguliers : classification, matrice de connexion et monodromie, Annales de l'Institut Fourier, Tome 50, fasc. 4 (2000), 1021-1071.

[20] J. SAULOY, Galois theory of fuchsian q-difference equations, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, Volume 36, Issue 6, 2003, 925-968.

[21] J. SAULOY, La filtration canonique par les pentes d'un module aux q-différences et le gradué associé. Prépublication du Laboratoire Emile Picard, 249 (2002).

[22] J. SAULOY, Classification analytique locale des équations aux q-différences irrégulières, Rédaction d'exposés au Groupe de Travail «Equations aux q-différences», url : picard.ups-tlse.fr/ sauloy (2002).

[23] J. SAULOY, Local Galois theory of irregular q-difference equations, Article en préparation (2002).

[24] T.A. SPRINGER, Linear Algebraic Groups, Birkhäuser (1998).

[25] C. ZHANG, Développements asymptotiques q-Gevrey et séries G_q-sommables, Annales de l'Institut Fourier, Tome 49, fasc. 1 (1999), 227-261.

Manuscrit reçu le 6 mai 2003,
revisé le 29 septembre 2003,
accepté le 17 octobre 2003.

Jacques SAULOY,
Université Paul Sabatier, U.F.R. M.I.G.
Laboratoire Émile Picard
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4 (France).

sauloy@picard.ups-tlse.fr