



# ANNALES

DE

# L'INSTITUT FOURIER

Stéphane FLON

**Ramification dans les corps des modules**

Tome 54, n° 2 (2004), p. 253-263.

[http://aif.cedram.org/item?id=AIF\\_2004\\_\\_54\\_2\\_253\\_0](http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_2_253_0)

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>

## RAMIFICATION DANS LE CORPS DES MODULES

par Stéphane FLON (\*)

---

### Introduction.

Un résultat de S. Beckmann dans l'article [Be] limite l'éventuelle ramification dans le corps des modules d'un revêtement  $f$  à certaines places, que l'on nomme « mauvaises places » : ce sont les places qui divisent l'ordre du groupe de monodromie  $G$  de  $f$ , ou en lesquelles les points de branchement se rencontrent par réduction (on dit aussi qu'ils *coalescent*).

Le résultat de S. Beckmann admet une démonstration naturelle dans le cadre des espaces de Hurwitz (voir [F1]), qui s'appuie sur le fait fondamental suivant (voir [FV]) : *le corps de rationalité d'un point d'un espace de Hurwitz  $h = [f]$  est aussi le corps des modules de  $f$ .*

En utilisant cette fois-ci les complétés de ces espaces, qui apparaissent comme des revêtements modérément ramifiés des espaces de configuration de points, nous pouvons déterminer la ramification des mauvaises places ne divisant pas l'ordre de  $G$ . Pour ce faire, on remarque que le problème général posé est de calculer la ramification de la restriction d'un revêtement modérément ramifié (le long de diviseurs à croisements normaux) à une section. Ce problème général est étudié [F3], d'où il ressort que la réponse dépend des *ordres d'intersection* de la section avec les diviseurs de ramification qu'elle rencontre en un point  $x$ , et requiert de trouver un *système cohérent de générateurs de l'inertie* de ces diviseurs au voisinage

---

(\*) Travail partiellement financé par l'European Community's Human Potential Programme (réseau G.T.E.M.).

Mots-clés : Corps des modules – Espace de Hurwitz des modules grossiers – (G-)revêtements – Problème inverse de Galois – Conjecture ABC.

Classification math. : 14D22 – 14E22 – 14H30.

de  $x$ . Le paragraphe 3.1 du présent article rappelle ces définitions et résultats.

Le premier chapitre est une introduction aux espaces de Hurwitz, comprenant les résultats classiques et utiles pour la suite. On décrit ensuite précisément la monodromie du revêtement générique géométrique du revêtement de Hurwitz (dédit du foncteur « points de branchement »), en calculant l'action du mapping class group pur sur le groupe fondamental de la sphère  $r$ -pointée (proposition 2.8). Le troisième chapitre, qui constitue le corps de cet article, est consacré à une étude du revêtement complété de Hurwitz. On y effectue un travail préliminaire afin d'appliquer les résultats de [F3] : on calcule notamment les *ordres d'intersection* de la section déduite du lieu de branchement avec les composantes du bord de  $\bar{U}^r$  qu'elle rencontre (proposition 3.6), et on détermine un *système cohérent de générateurs de l'inertie* au voisinage de tout point (paragraphe 3.3). Ce travail effectué, on démontre dans le dernier chapitre le résultat principal 4.1, qui décrit la ramification des mauvaises places ne divisant pas l'ordre du groupe de monodromie. On étudie enfin la possibilité de faire disparaître la ramification en ces places, par choix judicieux du lieu de branchement. En prenant l'exemple des groupes diédraux, on montre comment la conjecture ABC est une obstruction forte à la réalisation de ce souhait (propositions 4.6 et 4.10).

Pour faciliter la compréhension, nous avons jugé préférable de présenter certains résultats dans un unique cas particulier. Ils sont cependant valables en toute généralité, la seule difficulté étant le formalisme requis pour les énoncer. Le lecteur pourra consulter [F2] pour ces résultats généraux.

## 1. Position du problème et rappels.

### 1.1. Corps des modules d'un revêtement.

Dans la suite, un *revêtement de la droite projective*  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_L^1$  défini sur un corps  $L$  est un morphisme fini, plat, et génériquement étale sur  $L$ ,  $X$  étant une courbe projective lisse et géométriquement irréductible sur  $L$ . À un tel revêtement correspond une extension *régulière* de corps de fonctions, dont le degré est par définition le *degré* du revêtement, noté  $\deg(f)$ . Le groupe de Galois de la clôture galoisienne de cette extension est le *groupe de monodromie*  $G$  de  $f$ . Il est anti-isomorphe au groupe des automorphismes de  $f$ .

Les *points de branchement* du revêtement sont les points où la fibre géométrique n'est pas constituée de  $\deg(f)$  points. Soit  $x$  un point de la fibre de  $f$  au-dessus d'un point de branchement  $t$  de  $f$ . L'extension d'anneaux de valuation discrète correspondante permet de transporter les notions classiques de la théorie de la ramification.

La donnée conjointe d'un revêtement galoisien  $f$  et d'un isomorphisme  $h : G \rightarrow \text{Aut}(X/\mathbb{P}_L^1)$  définit un *G-revêtement*.

Un *(G-)revêtement* désignera dans la suite indifféremment un revêtement ou un G-revêtement.

Considérons une extension galoisienne  $L/K$ , ainsi qu'un (G-)revêtement  $f : X \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ , de lieu de branchement défini sur  $K$ . Tout élément  $\sigma$  de  $\text{Gal}(L/K)$  induit un (G-)revêtement  $f^\sigma : X^\sigma \rightarrow \mathbb{P}_L^1$ . Soit

$$G(f) := \{\sigma \in \text{Gal}(L/K), \text{ tel que } f^\sigma \simeq f\}$$

où  $f^\sigma \simeq f$  signifie que  $f^\sigma$  et  $f$  sont isomorphes *sur*  $L$  en tant que revêtements ou G-revêtements selon le cas.

**DÉFINITION 1.1.** — *Le corps des modules du (G-)revêtement  $f$  relativement à l'extension  $L/K$  est le corps  $L^{G(f)}$ . Le corps des modules d'un (G-)revêtement  $f$  relativement à  $K$  est le corps des modules relativement à  $K^s/K$  ( $K^s$  désignant une clôture séparable fixée de  $K$ ).*

*Le corps des modules d'un (G-)revêtement de lieu de branchement  $\{b_1, \dots, b_r\}$  est le corps des modules relativement au sous-corps premier de  $L$  : il contient le corps de rationalité du diviseur de branchement de  $f$ , (resp. le compositum des corps de rationalité de  $b_1, \dots, b_r$ ) si les points de branchement ne sont pas ordonnés (resp. s'ils le sont).*

Par construction, le corps des modules de  $f$  relativement à  $L/K$  est une extension de  $K$  contenue dans tout corps de définition intermédiaire. En particulier, le corps des modules de  $f$  relativement à  $K$  est une extension finie de  $K$  contenue dans chaque corps de définition de  $f$  contenant  $K$ .

Le corps des modules d'un revêtement est donc d'une certaine façon le plus petit corps de définition possible pour le revêtement considéré. Ce n'est cependant pas toujours un corps de définition (voir par exemple [CH], [Co], [CG]). On pourra aussi consulter les articles [D1], [D2] et [DD], qui décrivent l'obstruction à ce que le corps des modules soit un corps de définition (qui est de nature cohomologique).

Dans la suite,  $K$  est le compositum des corps de rationalité des points de branchement de  $f$ , et  $M$  le corps des modules correspondant. Pour étudier la ramification dans  $M/K$ , nous nous appuyerons sur une étude des espaces de Hurwitz.

## 1.2. Espace de Hurwitz sur un anneau et corps des modules.

Les espaces de Hurwitz sont des espaces de modules grossiers pour les revêtements de  $\mathbb{P}^1$  : ainsi, les points géométriques d'un tel espace sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de revêtements de  $\mathbb{P}^1$  de la catégorie considérée définis sur un corps algébriquement clos.

La construction initiale, qui remonte à Hurwitz [Hu], a été généralisée par Fulton [Fu] et Fried [Fr]. S. Wewers [W1] en a ensuite proposé une construction arithmétique, sur laquelle s'appuie cet article. Ces espaces apparaissent naturellement comme des revêtements d'espaces de configuration de points.

Si l'on fixe le nombre de points de branchement  $r$ , la catégorie des droites projectives  $\mathbb{P}^1$   $r$ -pointées (resp.  $r$ -marquées) admet un espace des modules fin (resp. grossier), l'espace de configuration de  $r$  points ordonnés (resp. non ordonnés)  $U^r$  (resp.  $U_r$ ) :

**DÉFINITION 1.2.** — *L'espace de configuration de  $r$  points ordonnés est le schéma  $U^r := (\mathbb{P}^1)^r - \Delta_r$ , où  $\Delta_r$  est la diagonale grasse (i.e. l'ensemble des  $r$ -uplets de  $\mathbb{P}^1$  où deux coordonnées au moins coïncident). L'espace de configuration de  $r$  points non ordonnés est le schéma quotient  $U_r := U^r/S_r$ .*

Considérons la catégorie  $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$  (resp.  $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}^G$ ) des revêtements (resp.  $G$ -revêtements) de  $\mathbb{P}^1$  de degré  $d$ , modérément ramifiés le long d'un diviseur de Cartier relatif lisse de degré  $r$ , de monodromie  $G \rightarrow S_d$  et d'invariant canonique d'inertie  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  (voir par exemple [Fr]).

Le groupe de Galois absolu sur  $\mathbb{Q}$  agit sur  $\mathbf{C}$  par action du caractère cyclotomique. Il existe donc un plus petit corps de nombres  $L$  (en fait une extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}$ ) pour lequel  $\mathbf{C}$  est invariant (à l'ordre des classes de conjugaison près dans le cas non ordonné) par l'action de  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/L)$ . On dit que  $\mathbf{C}$  est rationnelle sur  $L$ . Ainsi, dans le cas des points de branchement ordonnés,  $\mathbf{C}$  est rationnelle sur  $\mathbb{Q}$  si et seulement si, pour tout entier  $m$  premier à l'ordre de  $G$  et tout  $i$ , on a  $C_i^m = C_i$  (si  $g_i$  est un élément de  $C_i$ , alors  $C_i^m$  désigne la classe de conjugaison de  $g_i^m$ ).

Soit  $\mathcal{O}_L$  l'anneau des entiers de  $L$ . Stefan Wewers a prouvé dans [W1] le résultat suivant :

**THÉORÈME (Wewers).** — *Il existe un espace des modules grossier, noté  $H_G^{\text{ab}}(\mathbf{C})$  (resp.  $H_G^{\text{in}}(\mathbf{C})$ ), pour la catégorie  $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$  (resp.  $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}^G$ ); cet espace est défini sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_L)$ . De plus, on a un revêtement fini étale naturel  $\pi : H_G^{\text{ab}}(\mathbf{C}) \rightarrow U^r$  (resp.  $\pi : H_G^{\text{in}}(\mathbf{C}) \rightarrow U^r$ ) sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_L[1/|G|])$ , qui à une classe d'équivalence de revêtements associe leur ensemble ordonné de points de branchements.*

Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note  $H^{\text{ab}}$  pour  $H_G^{\text{ab}}(\mathbf{C})$ , et  $H^{\text{in}}$  pour  $H_G^{\text{in}}(\mathbf{C})$ . On notera aussi  $\mathcal{H}'$  pour désigner  $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}$  ou  $\mathcal{H}_{d,r,G,\mathbf{C}}^G$ .

**DÉFINITION 1.3.** — *L'espace  $H^{\text{ab}}$  (resp.  $H^{\text{in}}$ ) est appelé espace de Hurwitz pour les revêtements (resp.  $G$ -revêtements) de  $\mathbb{P}^1$  de degré  $d$ , à  $r$  points de branchement ordonnés, de monodromie  $G \hookrightarrow S_d$  et d'inertie  $\mathbf{C}$ .*

La fibre générique géométrique de  $\pi$  est en bijection avec un ensemble de nature combinatoire, provenant de la classification des revêtements topologiques, appelé ensemble des *classes de Nielsen* (cf. [FV]), sur lequel nous reviendrons au paragraphe 2.2.

On dispose de résultats analogues dans le cas où l'on n'ordonne pas les points de branchement (les espaces de Hurwitz sont alors notés  $H_G^{\text{ab}}(\mathbf{C})$  et  $H_G^{\text{in}}(\mathbf{C})$ , et apparaissent comme des revêtements étales naturels de  $U_r$ ).

Un résultat essentiel pour la suite, conséquence de la définition d'un espace des modules grossier, est le lien entre espace de Hurwitz et corps des modules (voir [FV] par exemple) :

**FAIT.** — *Le corps des modules d'un ( $G$ -)revêtement est le corps de rationalité du point  $h = [f]$  dans l'espace de Hurwitz correspondant.*

### 1.3. Complétion du revêtement $\pi$ .

On présente succinctement dans ce paragraphe les compactifications des espaces de Hurwitz et des espaces de configuration de points que S. Wewers a proposées dans [W1].

Soit  $\mathcal{H}'$  une des catégories de ( $G$ -)revêtements de  $\mathbb{P}^1$  à points de branchement ordonnés, comme dans le paragraphe précédent. Il existe des

champs  $\bar{\mathcal{H}}'$  et  $\bar{\mathcal{U}}^r$ , admettant des espaces des modules grossiers  $\bar{H}'$  et  $\bar{U}^r$ , propres sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_L[1/|G|])$  et  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$  respectivement, et des immersions ouvertes  $\mathcal{H}' \subset \bar{\mathcal{H}}'$  et  $\mathcal{U}^r \subset \bar{\mathcal{U}}^r$ . Le champ  $\bar{\mathcal{U}}^r$  admet même en fait un espace des modules *fin*  $\bar{U}^r$ , qui est lisse sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , et dont nous donnerons une description plus détaillée au paragraphe 3.2.1. Cet espace et ce champ sont construits pour refléter la coalescence des points de branchement. Le champ  $\bar{\mathcal{H}}'$  est construit de manière à respecter cette façon de représenter la coalescence des points de branchement. La catégorie utilisée est celle des revêtements *admissibles* (cf. [W2] pour une définition précise de ces derniers revêtements). Le résultat suivant (cf. [W1]) est fondamental pour la suite :

**THÉORÈME 1.4.** — *Le revêtement étale  $\pi$  se prolonge de façon naturelle en un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux  $\bar{\pi} : \bar{H}' \rightarrow \bar{U}^r$  au-dessus de  $\text{Spec}(\mathcal{O}_L[1/|G|])$ .*

Dans la suite,  $\bar{\pi}$  sera appelé le *revêtement de Hurwitz complété*.

*Remarque 1.5.* — Ce théorème admet un analogue pour le cas des (G-)revêtements à points de branchement non ordonnés. La différence principale réside dans le fait que le champ  $\bar{\mathcal{U}}_r$  n'admet pas d'espace des modules fins (ce qui est déjà le cas du champ  $\mathcal{U}_r$ , car certains de ses objets possèdent des automorphismes non triviaux).

## 2. Monodromie du revêtement de Hurwitz générique.

Nous étudions ici la monodromie du revêtement  $\pi_\eta$ , fibre générique du revêtement  $\pi$ , au-dessus du point générique de  $U^r$  : il s'agit par conséquent de décrire l'action du groupe fondamental de  $U^r$  sur une fibre géométrique de  $\pi_\eta$ . Ce paragraphe débute donc par des rappels sur ce dernier groupe, qui n'est autre que le *groupe des tresses pures de Hurwitz à  $r$  brins*, en insistant notamment sur le lien entre ce groupe et le *mapping class group de la sphère  $r$ -pointée*, de manière plus aisée pour la suite.

Après avoir rappelé la description combinatoire de toute fibre de  $\pi_\eta$  par le biais des *classes de Nielsen*, nous décrivons la monodromie du revêtement générique  $\pi_\eta$ . On explicite en particulier l'action d'une certaine classe de twists de Dehn, les *twists sarments*, sur l'ensemble des classes de Nielsen. Les formules ainsi obtenues permettent de calculer efficacement la monodromie de  $\pi_\eta$ , et donc par exemple de trouver facilement les composantes irréductibles des espaces de Hurwitz.

Cependant, elles nous seront surtout utiles pour rendre effectif le résultat principal de cet article (théorème 4.1), concernant la ramification dans le corps des modules.

### 2.1. Le groupe des tresses pures de Hurwitz.

Le livre de référence sur le sujet est [Bi]; la présentation du mapping class group par les twists de Dehn se trouve dans les articles [Ge] et [Lu].

*2.1.1. Mapping class group pur de la sphère  $r$ -pointée.* — On fixe un entier naturel  $r \geq 3$  et  $r$  points  $a_1, \dots, a_r$  de la sphère de Riemann  $\mathbb{S}^2$ . On note  $\underline{r} := \{1, \dots, r\}$ ,  $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_r)$  et  $A := \{a_1, \dots, a_r\}$ . Dans la suite, nous prendrons  $a_i = i$ , pour tout élément  $i$  de  $\underline{r}$ .

Le terme de **a**-homéomorphisme (resp. de **a**-isotopie) désignera un homéomorphisme (resp. une isotopie) laissant chaque point de  $A$  fixe.

**DÉFINITION 2.1.** — *Le mapping class group (pur) de la sphère  $r$ -pointée est le groupe  $\Gamma_{0,r}$  des classes de **a**-isotopie des **a**-homéomorphismes de  $\mathbb{S}^2$ .*

On connaît une présentation du mapping class group au moyen des *twists de Dehn* :

**THÉORÈME 2.2.** — *On obtient une présentation de  $\Gamma_{0,r}$  en prenant les twists de Dehn comme générateurs, et les relations suivantes :*

- $D_\alpha = 1$  si  $\alpha$  est d'homotopie triviale;
- $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha$  si  $|\alpha \cap \beta| = 0$ ;
- $D_\alpha D_\beta D_{\alpha\beta} = D_{\partial(\alpha,\beta)}$  si  $|\alpha \cap \beta| = 2$  (relation de la lanterne).

*Remarque 2.3.* — La notation  $|\alpha \cap \beta| = n$  signifie que  $n$  est le nombre minimal de points communs entre deux représentants de  $\alpha$  et  $\beta$ . Lorsque  $|\alpha \cap \beta| = 2$ , on peut trouver un voisinage de  $\alpha$  et  $\beta$  qui est une sphère à quatre trous; la figure 1 explicite le chemin  $\alpha\beta$  et les quatre chemins de  $\partial(\alpha, \beta)$ .

Les deux dernières formules de la présentation entraînent la formule bien connue  $D_{D_\alpha(\beta)} = D_\alpha D_\beta D_\alpha^{-1}$  pour toute donnée de deux classes de **a**-isotopie  $\alpha$  et  $\beta$  de chemins fermés simples sur  $\mathbb{S}^2 - A$ . Remarquons que cette formule se généralise en

$$D_{\lambda(\beta)} = \lambda D_\beta \lambda^{-1}$$

pour tout élément  $\lambda$  de  $\Gamma_{0,r}$ .

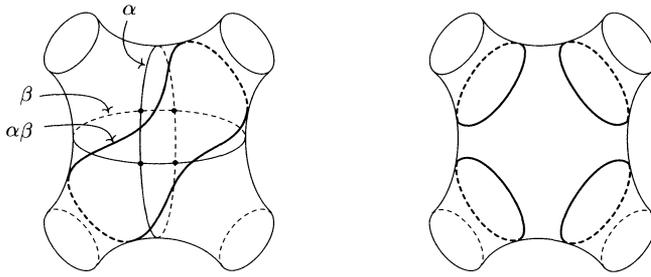


Figure 1. Illustration de la remarque 2.3

2.1.2. *Le groupe des tresses pures de Hurwitz; lien avec  $\Gamma_{0,r}$ .* — On rappelle que l'espace de configuration de points (complexe) est défini par

$$U^r := \{ \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r) \in (\mathbb{S}^2)^r ; \forall i \neq j, b_i \neq b_j \}.$$

Le groupe des tresses pures (de Hurwitz) de la sphère  $B^r\mathbb{S}^2$  est le groupe fondamental de  $U^r$ , de point base  $\mathbf{a}$ .

Une tresse pure de la sphère est représentée par une application  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_r) : [0; 1] \rightarrow U^r$ , telle que  $\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = a_i$ , et où  $\gamma_i$  est un chemin fermé simple.

Pour toute tresse  $b$  ainsi choisie, il existe une isotopie  $h$  de  $\mathbb{S}^2$  (ne laissant pas nécessairement les  $a_i$  fixes) telle que pour tout  $i$  entre 1 et  $r$ , et tout réel  $t$  entre 0 et 1,  $h_t(a_i) = \gamma_i(t)$ , et telle que  $h_0 = \text{Id}_{\mathbb{S}^2}$ . On pose alors

$$\phi(b) := [h_1] \in \Gamma_{0,r}$$

(où  $[h_1]$  désigne la classe de  $\mathbf{a}$ -isotopie de  $h_1$ ).

On vérifie que  $\phi$  est bien défini, et est en fait un morphisme de groupes; plus précisément, on a le théorème suivant (cf. [Bi]) :

**THÉORÈME 2.4.** — *Le morphisme de groupes  $\phi : B^r\mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_{0,r}$  est surjectif, de noyau le centre de  $B^r\mathbb{S}^2$ . De plus, le centre de  $B^r\mathbb{S}^2$  est d'ordre 2.*

*Exemple 1.* — L'unique élément non trivial  $z_r$  du centre de  $B^r\mathbb{S}^2$  est représenté par  $t \mapsto (e^{2i\pi t}, 2e^{2i\pi t}, \dots, re^{2i\pi t})$ .

**2.2. L'ensemble des classes de Nielsen.**

Nous décrivons ici de manière combinatoire une fibre géométrique de  $\pi_\eta$ . Soit  $a_0$  un point de  $\mathbb{S}^2 - A$ . On note par  $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$  le groupe fondamental (topologique) de  $\mathbb{S}^2 - A$  de point base  $a_0$ . Ici, nous prendrons  $a_0 = 0$ ; rappelons par ailleurs que l'on a choisi le point  $\mathbf{a} = (1, \dots, r)$  comme point base du groupe des tresses.

Le groupe  $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$  admet une présentation standard, liée à un choix standard de lacets sur  $\mathbb{S}^2 - \underline{r}$ . Il apparaît ainsi comme le quotient du groupe libre à  $r$ -éléments  $q_i, 1 \leq i \leq r$ , par la relation  $q_1 \cdots q_r = 1$ .

L'image de  $q_i^{-1}$  dans  $\Gamma_{0,r+1}$  (la sphère étant pointée par  $a_0, \dots, a_r$ ) est un twist de Dehn,  $D_{\beta_i}$  (voir la figure 2).

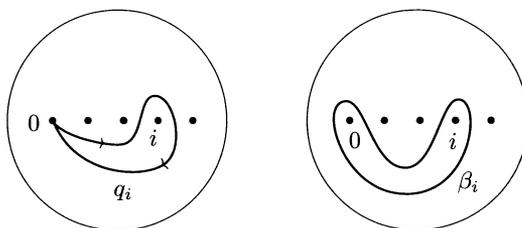


Figure 2

Par définition d'un espace des modules grossier (les points géométriques sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de revêtements), et à l'aide du théorème d'existence de Riemann, nous connaissons une description combinatoire de toute fibre géométrique du revêtement  $\pi_\eta$ , au moyen des *classes de Nielsen*.

PROPOSITION 2.5. — *Toute fibre géométrique de  $\pi_\eta$  est en bijection avec l'ensemble*

$$SNi^*(G) := \{(g_1, \dots, g_r) \mid g_1, \dots, g_r \in G, G = \langle g_i \rangle, g_1 \cdots g_r = 1\} / N$$

où  $N$ , qui agit par conjugaison sur le sous ensemble de  $G^r$  décrit, est le normalisateur de  $G$  dans  $S_d$  (resp.  $G$  lui-même) dans le cas des revêtements (resp. dans celui des  $G$ -revêtements).

On remplace l'astérisque par 'ab' dans le cas des revêtements et par 'in' dans le cas des  $G$ -revêtements.

DÉFINITION 2.6. — *On définit de manière analogue l'ensemble des classes de Nielsen  $SNi^*(\mathbf{C})$  lorsque l'on impose des conditions sur l'invariant d'inertie.*

### 2.3. Action du groupe des tresses sur les classes de Nielsen.

On déduit dans ce paragraphe une description combinatoire précise de la monodromie du revêtement  $\pi_\eta$  à partir de l'action du mapping class group pur sur le groupe fondamental de la sphère  $r$ -pointée.

*2.3.1. L'action de  $\Gamma_{0,r}$  sur le groupe fondamental de la sphère  $r$  pointée.* — Le groupe  $\Gamma_{0,r}$  agit naturellement sur le groupe  $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$  par automorphismes extérieurs de la façon suivante : on choisit pour tout élément de  $\Gamma_{0,r}$  un représentant  $h$  vérifiant  $h(a_0) = a_0$ . Soit  $[\ell]$  la classe de  $\mathbf{a}$ -isotopie d'un lacet  $\ell$  sur  $\mathbb{S}^2 - A$  basé en  $a_0$ . Alors  $[h] \cdot [\ell] := [h \circ \ell]$  définit une action de  $\Gamma_{0,r}$  sur  $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ .

En fait, on vérifie facilement que cette action extérieure est directement issue de l'action intérieure de  $\Gamma_{0,r+1}$  sur les  $D_{\beta_i}$ .

Nous allons maintenant expliciter, à l'aide de cette interprétation, l'action de certains twists de Dehn sur  $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$ , les *twists sarments*. Ces twists seront utiles pour définir un *choix cohérent de générateurs de l'inertie* au voisinage d'un point du bord de  $\bar{U}^r$  (voir [F3]).

**DÉFINITION 2.7.** — *Pour toute partition  $(I_1, I_2, I_3)$  d'un sous-ensemble plein (i.e. constitué d'entiers consécutifs)  $I = \text{de } \underline{r}$ , dont les extrémités  $i_0$  et  $i_1$  (avec  $i_0 < i_1$ ) appartiennent à  $I_1$ , on définit le twist sarment  $D_{[I_1, I_2, I_3]}$ , associé à la partition  $(I_1, I_2, I_3)$ , comme suit. Posons  $A_{i_0-1} = (i_0 - \frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{C}$  identifié à  $\mathbb{R}^2$ ,  $B_{i_1+1} = (i_1 + \frac{1}{2}, 0)$  et, pour tout  $i \in I$  :*

- $A_j = (j, -1)$  et  $B_j = (j, +1)$  si  $j \in I_1$  ;
- $A_j = (j, \frac{1}{2})$  et  $B_j = (j, +1)$  si  $j \in I_2$  ;
- $A_j = (j, -1)$  et  $B_j = (j, -\frac{1}{2})$  si  $j \in I_3$  ;

Par définition,  $D_{[I_1, I_2, I_3]}$  est le twist associé au chemin affine par morceaux  $A_{i_0-1}A_{i_0} \cdots A_{i_1}B_{i_1+1}B_{i_1} \cdots B_{i_0}A_{i_0-1}$ .

**Exemple 2.** — Considérons les twists associés aux lacets de la figure 3. On a alors

$$\begin{aligned} D_{[c_{1,4}]} &= D_{[\{1,4\}, \{2,3\}, \emptyset]}, & D_{[c_{3,6}]} &= D_{[\{3,6\}, \emptyset, \{4,5\}]}, \\ D_{[c_{2,5}]} &= D_{[\{2,5\}, \{3\}, \{4\}]}, & D_{[c_{2,3,5,6}]} &= D_{[\{2,3,5,6\}, \emptyset, \{4\}]}. \end{aligned}$$

**Notations.** — Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\underline{r}$ , et  $i$  et  $j$  tels que  $1 \leq i \leq j \leq r$ .

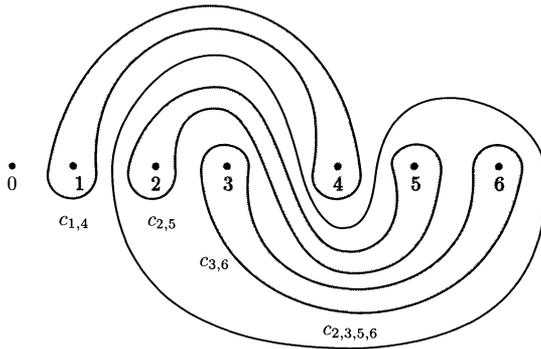


Figure 3. Les lacets de l'exemple 2

- On note  $q(i \xrightarrow{I} j)$  le produit des  $q_m$ , pour  $m \in I \cap \{i, \dots, j\}$ , le produit s'effectuant dans l'ordre naturel déduit de celui de  $\mathbb{N}$ .
- On note  $q(j \xrightarrow{I} i) := (q(i \xrightarrow{I} j))^{-1}$ .
- On prolonge de manière récursive ces notations en permettant l'indexation par plusieurs flèches. On écrira  $i \rightarrow j$  au lieu de  $i \xrightarrow{I} j$  lorsque  $I = \underline{r}$ . On utilisera librement une notation analogue pour les  $D_{\beta_i}$ .
- On écrira  ${}^q q' := qq'q^{-1}$ .

La proposition suivante donne l'action d'un twist sarment à n'importe quelle puissance (l'exemple 3 illustre la formule sur un cas particulier).

PROPOSITION 2.8. — Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , tout twist sarment  $D_{[I, I', I'']}$ , l'action de  $D_{[I, I', I'']}$  à la puissance  $n$  sur  $\pi_1(\mathbb{S}^2 - A)$  est donnée par la formule  $D_{[I, I', I'']}^n \cdot q_i = {}^q q_i$ , où

- $q = e$  pour  $i \notin I \cup I''$ ,
- $q = (q(i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i))^n$  pour  $i \in I$ ,
- $q = (q(i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i))^n (q(i \xrightarrow{I \cup I'} 1 \xrightarrow{I'} r \xrightarrow{I \cup I'} i))^n$  pour  $i \in I''$ .

Démonstration. — Soit  $D_{[I, I', I'']}$  un twist sarment. On choisit pour représentant le chemin  $c$  qui a servi à le définir et on note par  $D_{[I, I', I'']}^0$  le twist de  $\Gamma_{0, (r+1)}$  associé. Comme ce twist est d'intersection nulle avec tout twist  $D_{\beta_i}$  pour lequel  $i \notin (I \cup I'')$ , il a une action triviale sur ces derniers.

Pour  $i \in I$ , soit  $D_{[I, I', I'']}^1$  le twist associé au chemin obtenu en tirant

la branche «Sud» de  $c$  passant sous  $a_i$  derrière le point  $a_0$ . Ce twist a une action triviale sur  $D_{\beta_i}$  et on remarque que l'on a l'égalité suivante (c'est une conséquence de la relation de la lanterne) :

$$(D_{\beta}(i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i))(D_{[I, I', I'']}^0) = D_{[I, I', I'']}^1.$$

L'élévation de cette égalité à la puissance  $n$  donne, par commutation des éléments considérés :

$$(D_{\beta}(i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i))^n (D_{[I, I', I'']}^0)^n = (D_{[I, I', I'']}^1)^n.$$

Comme  $(D_{[I, I', I'']}^1)^n$  commute avec  $D_{\beta_i}$ , on obtient :

$$(D_{[I, I', I'']}^0)^n D_{\beta_i} = (D_{\beta}(i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i))^{-n} D_{\beta_i}.$$

Enfin, comme la tresse  $q_i$  induit l'élément  $D_{\beta_i}^{-1}$  de  $\Gamma_{0,r}$ , on obtient le résultat annoncé.

Pour  $i \in I''$ , le twist passe à l'aller et au retour au «Sud» de  $a_i$ . Soit  $D_{[I, I', I'']}^1$  le twist de  $\Gamma_{0,(r+1)}$  associé au chemin obtenu en tirant la branche «Sud»  $c$  passant sous  $a_i$  derrière  $a_0$ . Soit  $D_{[I, I', I'']}^2$  le twist de  $\Gamma_{0,(r+1)}$  associé au chemin obtenu en tirant *aussi* la branche «Nord» passant sous  $a_i$  derrière  $a_0$  (l'exemple 3 ci-dessous illustre les déformations des lacets effectuées dans cette situation).

On peut vérifier — avec la relation de la lanterne — que l'on a les relations suivantes :

$$(D_{\beta}(i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i)) D_{[I, I', I'']}^0 = D_{[I, I', I'']}^1,$$

$$(D_{\beta}(i \xrightarrow{I \cup I'} 1 \xrightarrow{I'} r \xrightarrow{I \cup I'} i)) D_{[I, I', I'']}^1 = D_{[I, I', I'']}^2.$$

En élevant ces égalités à la puissance  $n$  (et en tenant compte des relations de commutation), on obtient

$$(D_{\beta}(i \xrightarrow{I \cup I'} 1 \xrightarrow{I'} r \xrightarrow{I \cup I'} i))^n (D_{\beta}(i \xrightarrow{I'} 1 \xrightarrow{I \cup I'} r \xrightarrow{I'} i))^n (D_{[I, I', I'']}^0)^n = (D_{[I, I', I'']}^2)^n.$$

Or  $(D_{[I, I', I'']}^2)^n$  a une action triviale sur  $q_i$ . Ceci donne bien le résultat.  $\square$

*Exemple 3.* — Voyons comment nous avons procédé pour calculer l'action de  $D_{[c_{2,5}]}$  sur  $q_4$ . Nous avons d'abord tiré la branche «Sud» de  $c_{2,5}$  passant sous  $a_4$  derrière  $a_0$ , obtenant un lacet  $c_{2,5}^1$ , puis nous avons fait de même pour la branche «Nord», afin d'obtenir un lacet  $c_{2,5}^2$  d'intersection nulle avec  $\beta_4$ .

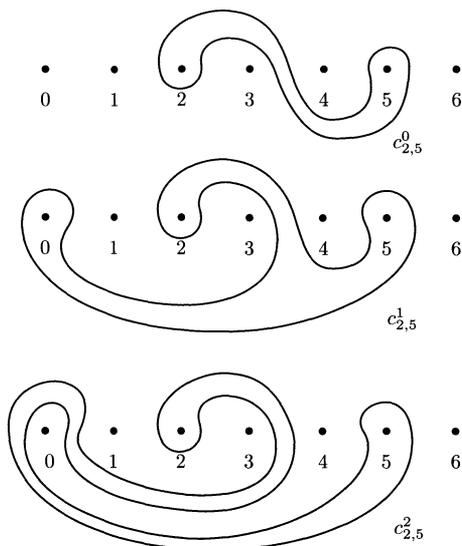


Figure 4. Les lacets de l'exemple 3

On déduit immédiatement de cette proposition l'action de  $\Gamma_{0,r}$  sur l'ensemble des classes de Nielsen. Dans notre exemple, l'action de ce twist à la puissance  $n$  sur l'ensemble des classes de Nielsen est la suivante :

$$D_{c_{2,5}}^n \cdot \mathbf{g} = (g_1, (g_2 g_3 g_5 g_3^{-1})^n g_2, g_3, ((g_3^{-1} g_2 g_3 g_5)^n (g_3^{-1} g_2^{-1} g_3 g_5^{-1})^n) g_4, (g_3^{-1} g_2 g_3 g_5)^n g_5, g_6).$$

### 3. Restriction du revêtement de Hurwitz complété : ordres d'intersection et système cohérent de générateurs de l'inertie.

#### 3.1. Restriction d'un revêtement modérément ramifié le long de diviseurs à croisements normaux.

On rappelle ici les résultats de [F3] utiles pour la suite.

Soit  $R$  un anneau de valuation discrète complet, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ . Soit  $X$  un schéma normal et localement noethérien sur  $R$ , muni d'un système de diviseurs à croisements normaux  $\underline{D} = (D_i)_{i \in I}$  relativement à  $R$ . Soit  $\phi$  une section de  $X$  sur  $R$ . On suppose que l'image du point générique  $s_\eta$  (resp. du point spécial  $s$ ) de  $\text{Spec}(R)$  n'appartient pas (resp. appartient) au support de  $\underline{D}$ .

Soit  $f : Y \rightarrow X$  un revêtement modérément ramifié le long de  $\underline{D}$ . La restriction  $\widetilde{\phi^*(f)}$  de  $f$  à  $\phi$  est le normalisé du pullback  $\phi^*(f)$ . Dans [F3], on calcule les groupes d'inertie de  $\widetilde{\phi^*(f)}$  au-dessus de  $\mathfrak{m}$ .

Pour ce faire, on s'appuie sur un résultat classique de S. Abhyankar permettant de décrire localement  $f$  en  $s$  pour la topologie étale : c'est le quotient d'un revêtement kummérien (i.e. un revêtement kummérien généralisé dans la terminologie de [GM]). On se ramène donc pour les calculs au cas d'un revêtement kummérien :

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X(T_i)_{1 \leq i \leq r}) / (T_i^{e_i} - a_i) \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_X).$$

Pour énoncer le résultat, il faut introduire deux notions : l'ordre d'intersection de la section  $\phi$  avec les composantes irréductibles de  $\underline{D}$  et la notion de système cohérent de générateurs de l'inertie.

Le morphisme  $\phi$  correspond à un morphisme d'anneaux  $\varphi : \mathcal{O}_X \rightarrow R$ , et l'ordre d'intersection  $m_i$  de  $\phi$  avec le diviseur  $D_i$  (d'équation locale  $a_i = 0$ ) est égal à la valuation de  $\varphi(a_i)$  dans  $R$ .

Soient  $t_i$  l'image de  $T_i$  dans  $\mathcal{O}_X(T_i)_{1 \leq i \leq r} / (T_i^{e_i} - a_i)$  et  $\zeta_{e_i}$  une racine  $e_i$ -ième de l'unité, pour chaque  $i$ . Définissons un système  $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq r}$  de générateurs des groupes d'inertie, par  $\alpha_i(t_i) = \zeta_{e_i} t_i$  et  $\alpha_i(t_j) = t_j$  pour  $i \neq j$ .

Si les  $\zeta_{e_i}$  forment un système cohérent de racines de l'unité, alors les  $\alpha_i$  forment un système cohérent de générateurs de l'inertie.

Le système  $(\alpha_i)_{i \in I}$  pour le revêtement kummérien induit un système  $(\alpha'_i)_{i \in I}$  cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de  $s$ , c'est-à-dire un système de générateurs de l'inertie du revêtement kummérien généralisé choisi décrivant localement  $f$ .

**THÉORÈME 2.4** (cf. [F3]). — *Tout groupe d'inertie local au-dessus de  $\mathfrak{m}$  dans la restriction  $\widetilde{\phi^*(f)}$  est engendré par l'élément  $(\alpha'_1)^{m_1} \cdots (\alpha'_r)^{m_r}$ .*

Dans la pratique, et notamment dans le cas des revêtements de Hurwitz complétés, il est plus facile d'obtenir un système cohérent analytique de générateurs de l'inertie. On prouve par exemple au paragraphe 3.3 que pour chaque point complexe du bord de  $\overline{U}^r$ , on peut choisir des tresses (éléments du groupe fondamental topologique de  $U^r$ ) donnant un tel système. Le groupe fondamental algébrique complexe (et plus généralement sur tout sous-corps algébriquement clos de  $\mathbb{C}$ ) est le complété profini du groupe fondamental topologique, et le système ainsi défini fournit à son tour un choix cohérent algébrique de générateurs de

l'inertie en caractéristique 0. De plus, le théorème de spécialisation de Grothendieck (voir par exemple [E1] et [E2]) permet d'obtenir un choix cohérent en caractéristique  $p$ .

Plus précisément, supposons que le corps des fractions  $K$  de  $R$  se plonge dans  $\mathbb{C}$  (par un plongement  $\rho$ ) et que le corps résiduel  $k$  de  $R$  est de caractéristique  $p$  positive. On suppose aussi disposer d'un point de  $X$  sur  $R$ , qui induit un point spécial  $\bar{x}$  et un point générique  $x_\eta$ , ces deux points se trouvant à l'intersection des mêmes diviseurs. Soit  $x_{\eta, \mathbb{C}}$  le point complexe déduit de  $x_\eta$  par le plongement  $\rho$ .

**PROPOSITION 3.1** (cf. [F3]). — *Tout choix d'un système cohérent analytique de générateurs de l'inertie au voisinage du point  $x_{\eta, \mathbb{C}}$  induit un choix cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de  $\bar{x}$ .*

La suite de ce chapitre est consacrée aux deux étapes préliminaires pour appliquer le théorème 2.4 de [F3] au cas du revêtement de Hurwitz complété, à savoir calculer les ordres d'intersection et trouver un système cohérent (analytique grâce à la proposition précédente) de générateurs de l'inertie.

### 3.2. Ordres d'intersection.

*3.2.1. Compactification de l'espace de configuration de points.* — On suit dans ce paragraphe la construction d'une compactification de l'espace de configuration de points effectuée dans [GHP] et [W1].

Dans l'article [GHP], les auteurs construisent une compactification de l'espace des modules de courbes lisses de genre 0 et  $r$ -pointées, en introduisant la notion d'arbre stable de droites projectives  $r$ -pointé. Si l'on distingue, suivant [W1], une des composantes d'un tel arbre, en fixant un isomorphisme de cette composante avec la droite projective, on obtient une compactification de  $U^r$ . La composante distinguée est appelée *racine*. Résumons les résultats alors obtenus :

**PROPOSITION 3.1** (description globale de  $\bar{U}^r$ ). — *Il existe une compactification naturelle  $\bar{U}^r$  de  $U^r$  en un schéma projectif, lisse sur  $\mathbb{Z}$ . Les points géométriques de cet espace sont des arbres stables de droites projectives  $r$ -pointés et à racine distinguée. Le bord  $S^r$  de  $\bar{U}^r$  est constitué de diviseurs à croisements normaux, dont on note les composantes irréductibles  $S^I$ , où  $I$  décrit les sous-ensembles de  $\underline{r}$  comportant au moins deux éléments.*

Soit  $X$  un point du bord de  $\bar{U}^r$ , pointé par  $(\phi_1, \dots, \phi_r)$ , et de type combinatoire  $T$  (i.e. de graphe d'intersection  $T$ ). L'arbre  $T$  est orienté par l'éloignement à la racine. Soit  $t$  une arête de  $T$  : elle sépare  $T$  en deux sous-arbres. Soit  $I$  l'ensemble des indices des sommets du sous-arbre ne contenant pas la racine. On note alors  $t = t_I$  et  $\sigma_I$  le sommet de  $t$  appartenant à ce sous-arbre.

Fixons un quadruplet d'indices distincts  $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$  de  $r$ . Les indices  $w_1$ ,  $w_2$  et  $w_3$  marquent chacun un sommet de l'arbre  $T$ , non nécessairement distincts. Il existe un unique sommet commun aux trois chemins minimaux dans  $T$  reliant ces trois sommets marqués. La composante  $C$  de  $X$  associée à ce sommet est l'unique composante sur laquelle les points  $\phi_{w_1}$ ,  $\phi_{w_2}$  et  $\phi_{w_3}$  demeurent distincts après contraction des autres composantes; elle est appelée *composante médiane* (cf. [GHP]). On définit un isomorphisme  $\mu$  de cette composante avec  $\mathbb{P}^1$  en envoyant les projetés de  $\phi_{w_1}$ ,  $\phi_{w_2}$  et  $\phi_{w_3}$  sur 0, 1, et  $\infty$  respectivement. Le *birapport du quadruplet*  $w$  est l'image par  $\mu$  de la projection de  $\phi_{w_4}$  sur  $C$ .

PROPOSITION 3.2 (paramétrisation locale de  $\bar{U}^r$ , voir [GHP]). — *Le point  $X$  appartient à  $S^I$  si et seulement si une arête de  $T$  peut s'écrire  $t_I$ . Les birapports fournissent une paramétrisation locale de  $\bar{U}^r$  en tout point. Plus précisément, si  $\{w_1, w_4\}$  et  $\{w_2, w_3\}$  sont séparés par une arête  $t_I$ , alors le birapport  $\lambda_w$  s'annule localement sur  $S^I$  en  $X$ . Si la seule arête qui sépare  $\{w_1, w_4\}$  de  $\{w_2, w_3\}$  est  $t_I$ , alors  $\lambda_w = 0$  détermine localement  $S^I$  (on dit que le quadruplet distingue  $t_I$ ).*

3.2.2. *Coalescence de points de ramification en une place; ordre d'intersection d'une section avec un diviseur.* — Soit  $R$  un anneau de valuation discrète complet, de valuation  $v$ , d'uniformisante  $\pi$ . On note  $K$  (resp.  $k_v$ ) le corps des fractions (resp. le corps résiduel) de  $R$ . On suppose que  $k_v$  est algébriquement clos.

On considère  $r$  points distincts  $b_1, \dots, b_r$  de  $\mathbb{P}^1$  définis sur  $K$ . Ces points  $b_1, \dots, b_r$  définissent des sections  $\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_r$  de  $\mathbb{P}_R^1$ , qui peuvent se rencontrer sur la fibre spéciale. On se place dans cette situation.

Le point  $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_r)$  de  $U^r$  est défini sur  $K$ . Le schéma  $\bar{U}^r$  étant projectif sur  $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ , le point  $\mathbf{b}$  s'étend de manière unique en une section

$$\tilde{\mathbf{b}} : \text{Spec}(R) \longrightarrow \bar{U}^r.$$

La restriction de cette section à la fibre spéciale induit un point  $\bar{\mathbf{b}}$  du bord de  $\bar{U}^r$ , à l'intersection de certains diviseurs  $S^I$ .

Le but de ce paragraphe est de décrire la section  $\tilde{\mathbf{b}}$ , notamment son ordre d'intersection avec tout diviseur  $S^I$  qu'elle rencontre en  $\bar{\mathbf{b}}$ . Cette section se construit en effectuant des éclatements successifs en tout point de la fibre spéciale où deux sections  $\tilde{b}_i$  et  $\tilde{b}_j$  se rencontrent, jusqu'à obtenir un modèle *stable*.

**DÉFINITION 3.3.** — Soit  $X$  un modèle sur  $R$  de  $\mathbb{P}_K^1$  marqué par  $b_1, \dots, b_r$ . On dit que  $X$  est un modèle stabilisable si la fibre spéciale  $X_v$  est un arbre stable de droites projectives pointé par  $r'$  points (avec  $r' \leq r$ ) à racine distinguée (l'arbre étant marqué par son intersection avec les différentes sections  $\tilde{b}_i$ ).

Un modèle stable est un modèle stabilisable où les sections  $\tilde{b}_i$  ne se rencontrent pas.

**DÉFINITION 3.4.** — Soit  $B \subseteq \{b_1, \dots, b_r\}$ , comportant au moins deux éléments. On appelle ordre de congruence de  $B$  le nombre

$$v(B) := \inf\{\text{ord}(b, b') ; b, b' \in B, b \neq b'\}$$

où

$$\text{ord}(b, b') = \begin{cases} v(b - b') & \text{si } v(b) \geq 0 \text{ et } v(b') \geq 0, \\ v(1/b - 1/b') & \text{si } v(b) \leq 0 \text{ et } v(b') \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**DÉFINITION 3.5.** — Soient  $X$  un modèle stabilisable et  $T$  l'arbre-gra-  
phe correspondant. On value chaque sommet  $\sigma_I$  par  $\theta(\sigma_I) := v(\{b_i\}_{i \in I})$ . La valuation  $\theta$  des sommets induit une valuation des arêtes, en posant  $\theta(t_I) := \theta(\sigma_I) - \theta(\sigma^0)$ , pour toute arête  $t_I : \sigma^0 \rightarrow \sigma_I$ .

Si  $t$  est une arête de  $T$ , on note  $e(t)$  l'épaisseur de la singularité  $x$  correspondant à  $t$  (i.e.  $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}} \simeq R[[t_1, t_2]]/(t_1 t_2 - \pi^{e(t)})$ ).

**PROPOSITION 3.6.** — Il existe un unique modèle stable  $X$  sur  $R$  de  $\mathbb{P}_K^1$  marqué par  $b_1, \dots, b_r$  (à isomorphisme unique près).

- L'ensemble des sommets de l'arbre  $T$  correspondant à  $X_v$  est l'ensemble  $\sigma_I$ , où  $I$  parcourt l'ensemble des paquets de coalescence des points  $b_1, \dots, b_r$  selon les puissances de  $\pi$ .

- Pour tout point double  $x_I$  de  $X_v$ , d'arête correspondante  $t_I$ , l'épaisseur  $e(x_I)$  de la singularité en  $x_I$  est égale à l'ordre d'intersection de  $\tilde{\mathbf{b}}$  avec le diviseur  $S^I$ . De plus, si  $T$  est valué par  $\theta$  (cf. la définition 3.6 ci-dessus), on a  $e(x_I) = \theta(t_I)$ .

Avant de prouver cette proposition, on introduit *l'embranchement de deux sommets*  $\sigma$  et  $\sigma'$  de  $T$ . Chacun de ces deux sommets est relié à la racine par un unique chemin. L'*embranchement*  $\sigma \vee \sigma'$  est le sommet où ces deux chemins bifurquent.

*Démonstration.* — Étant donné un modèle stabilisable, on peut diminuer le nombre  $m$  de points où des sections  $\tilde{b}_i$  se rencontrent, en effectuant des éclatements en un tel point, jusqu'à ce que les sections sur le nouveau modèle ne se rencontrent plus toutes en un même point de la fibre exceptionnelle ainsi créée. L'épaisseur du point double apparu est précisément le nombre d'éclatements que l'on a dû effectuer. Une récurrence sur  $m$  permet donc de prouver la première partie de cette proposition (l'unicité est conséquence de la stabilité du modèle).

Pour calculer l'ordre d'intersection, nous savons que les birapports constituent un système régulier de paramètres au voisinage de  $\bar{\mathbf{b}}$ . Soit  $x_I$  un point double de  $\bar{\mathbf{b}}$ , d'arête correspondante  $t_I$ . Nous allons montrer que pour tout quadruplet  $w \subseteq \underline{r}$  distinguant  $t_I$ , alors  $v(\lambda_w) = e(x_I)$ , ce qui nous donnera l'ordre d'intersection de la section  $\tilde{\mathbf{b}}$  avec  $S^I$ . Rappelons que si l'on note  $c_{w_i}$  la projection de  $b_{w_i}$  sur la composante médiane  $L_{(w_1, w_2, w_3)}$  ( $1 \leq i \leq 4$ ), on a

$$\lambda_w = [c_{w_1}, c_{w_2}, c_{w_3}, c_{w_4}].$$

On a donc  $v(\lambda_w) = v(c_{w_4} - c_{w_1}) - v(c_{w_4} - c_{w_2}) + v(c_{w_3} - c_{w_2}) - v(c_{w_3} - c_{w_1})$ .

On écrit  $\sigma_{t_I}^0 \rightarrow \sigma_{t_I}^1$  l'arête  $t_I$  en extension : il est clair que l'on peut supposer — quitte à échanger  $\{w_2, w_3\}$  et  $\{w_1, w_4\}$  — que  $\sigma_{w_1} \vee \sigma_{w_4} = \sigma_{t_I}^1$ . La composante médiane  $L_{(w_1, w_2, w_3)}$  correspond alors au sommet  $\sigma_{t_I}^0$ . Les points  $c_{w_1}$ ,  $c_{w_2}$  et  $c_{w_3}$  ne sont donc pas congrus modulo  $\pi$ . En revanche,  $c_{w_4}$  et  $c_{w_1}$  sont congrus modulo  $\pi$  et par construction,  $v(c_{w_4} - c_{w_1}) = e(t_I)$ . Enfin,  $c_{w_4}$  n'est pas congru à  $c_{w_2}$  modulo  $\pi$ .

On a donc la formule attendue :  $v(\lambda_w) = e(t_I)$ . □

*Exemple 4.* — Prenons  $\mathbf{b} := (0, 1, 4, 9, 28, 22)$ . Nous avons alors la situation suivante pour le nombre premier 3 : on a deux paquets de congruence modulo 3,  $\{b_1, b_4\}$  et  $\{b_2, b_3, b_5, b_6\}$ . On a ensuite quatre, cinq et six paquets de congruence modulo  $3^2$ ,  $3^3$ , et  $3^4$  respectivement. Les éclatements que l'on doit opérer sont représentés ci-dessous :

Ce point est à l'intersection de  $S^{\{1,4\}}$ ,  $S^{\{2,5\}}$ ,  $S^{\{3,6\}}$  et  $S^{\{2,3,5,6\}}$ . Les valuations des arêtes associées sont respectivement 2, 2, 1 et 1.

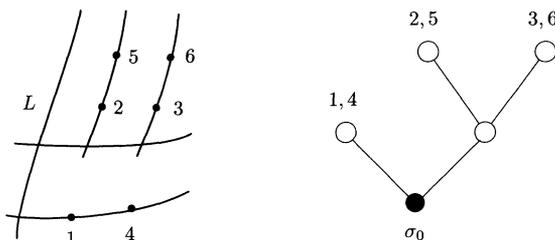


Figure 4. Les éclatements de l'exemple 4

### 3.3. Système cohérent de générateurs de l'inertie.

Les twists sarments vont nous permettre de donner un système cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de tout point de  $\bar{U}^r$ . Nous décrivons dans un premier temps (proposition 3.9) les *générateurs de l'inertie le long de  $S^I$  dans le groupe fondamental  $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$* . La proposition 3.10 permet de décrire la ramification de  $\bar{\pi}$  au-dessus de  $S^I$ . Nous proposons ensuite une procédure pour choisir des twists sarments fournissant un système cohérent de générateurs de l'inertie (proposition 3.14).

*3.3.1. Générateurs de l'inertie pour l'espace  $\bar{U}^r$ .* — Le groupe symétrique agit sur l'espace  $\bar{U}^r$  (algébriquement, et donc analytiquement sur  $\mathbb{C}$ ), en sorte que l'on peut se contenter de décrire les générateurs de l'inertie le long de  $S^k$  (avec  $2 \leq k \leq r$ ) dans  $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$ .

Si  $b$  est une tresse engendrant le groupe d'inertie le long d'une composante du bord de  $\bar{U}^r$ , et si  $\phi(b)$  est son image dans  $\Gamma_{0,r}$ , nous dirons par abus de langage que  $\phi(b)$  est un *générateur du groupe d'inertie* le long de cette composante.

Le résultat préliminaire suivant sera utilisé à plusieurs reprises dans la suite. On note  $\mathbf{D}$  le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbb{C}$ . On note  $U'_k$  le sous-ensemble de  $U^r(\mathbb{C})$  défini par :  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r) \in U'_k$  si et seulement si  $\mathbf{u} \in U^r(\mathbb{C})$  et

- $|u_i| < k + \frac{1}{2}$ , pour tout  $i \leq k$ ;
- $|u_j| > k + \frac{1}{2}$ , pour tout  $j \geq k + 1$ .

On définit l'immersion holomorphe  $\varphi_{\mathbf{u}} : \mathbf{D} - \{0\} \rightarrow U^r$  pour tout  $\mathbf{u} \in U'_k$  par

$$\varphi_{\mathbf{u}}(z) = (\varphi_i(z)) = (zu_1, \dots, zu_k, u_{k+1}, \dots, u_r).$$

Soit  $c$  le cercle de centre  $0$  et de rayon  $k + \frac{1}{2}$ , et  $\mathbf{u}$  un élément de  $U'_k$ . On note par  $b_{c,\mathbf{u}}$  la tresse de  $\pi_1(U^r, \mathbf{u})$  relevant le twist  $D_{[c]}$  en fixant  $\{u_{k+1}, \dots, u_r\}$ .

Enfin,  $S_0^k := S^k - \bigcup_I (S^k \cap S^I)$  désigne la composante du bord  $S^k$  privée de son intersection avec les autres composantes.

LEMME 3.7. — Soit  $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_r) \in U'_k$ . L'application  $\varphi_{\mathbf{u}}$  se prolonge par continuité en  $0$  en une immersion holomorphe fermée  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}} : \mathbf{D} \rightarrow \bar{U}^r$ . Le point  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}(0)$  est un point de  $S_0^k$ . Plus précisément, si  $x_e$  sur la composante exceptionnelle (resp.  $x_r$  sur la racine) est le point d'intersection de cette composante avec la racine (resp. avec la composante exceptionnelle), alors  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}(0)$  est l'unique point de  $S_0^k$  tel que :

- $x_r = 0$ , et la racine est pointée par les  $\phi_j := u_j$ , pour tout  $j \in \underline{r} - \underline{k}$ ;
- il existe un isomorphisme  $\mu$  de la composante exceptionnelle sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$  vérifiant  $\mu(\phi_i) = u_i$ , pour tout  $i \in \underline{k}$ , et  $\mu(x_e) = \infty$ .

De plus, tout chemin  $g$  sur  $U'_k$  induit via  $\tilde{\varphi}$  un chemin  $\bar{g}$  sur  $S_0^k$ , en posant  $\bar{g}(t) := \tilde{\varphi}_{g(t)}(0)$ , pour tout  $t \in [0; 1]$ . Deux chemins homotopes sur  $U'_k$  induisent deux chemins homotopes sur  $S_0^k$ .

L'application de  $\mathbf{D} \times [0; 1]$  dans  $\bar{U}^r$  définie par  $(z, t) \mapsto \tilde{\varphi}_{g(t)}(z)$  induit un voisinage cylindrique du chemin  $\bar{g}$  dans  $\bar{U}^r$ .

Réciproquement soient  $\mathbf{u}_0$  un point de  $U'_k$  et  $\mathbf{x}_0$  le point  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}_0}(0)$  de  $S_0^k$ . Tout élément  $[\gamma]$  de  $\pi_1(S_0^k, \mathbf{x}_0)$  se relève en une tresse de Hurwitz  $[\hat{\gamma}]$  du groupe  $\pi_1(U^r, \mathbf{u}_0)$ , au sens où

$$[\tilde{\varphi}_{\hat{\gamma}(\cdot)}(0)] = [\gamma].$$

Ce relevé est défini à une puissance de la tresse  $b_{c,\mathbf{u}_0}$  près (définie juste avant ce lemme). Cette opération de relèvement définit un isomorphisme

$$\text{Cen}(b_{c,\mathbf{u}_0}) / \langle b_{c,\mathbf{u}_0} \rangle \simeq \pi_1(S_0^k, \mathbf{x}_0)$$

où  $\text{Cen}(b_{c,\mathbf{u}_0})$  est le centralisateur de  $b_{c,\mathbf{u}_0}$  dans  $\pi_1(U^r, \mathbf{u}_0)$ .

Démonstration. — On se souvient que les birapports  $\lambda_w$  constituent un système régulier de paramètres au voisinage de tout point de  $\bar{U}^r$ . Or un calcul simple montre que le birapport

$$\lambda_w(\varphi_{\mathbf{u}}(z)) = [\varphi_{w_1}(z), \varphi_{w_2}(z), \varphi_{w_3}(z), \varphi_{w_4}(z)]$$

tend (lorsque  $z$  tend vers 0) vers une constante non nulle lorsque  $\{w_1, w_4\}$  et  $\{w_2, w_3\}$  ne sont pas de part et d'autre de  $k + \frac{1}{2}$ , et est équivalent à  $\alpha z$  (où  $\alpha$  est une constante non nulle) lorsqu'ils le sont.

Ceci prouve que l'application holomorphe  $\varphi_{\mathbf{u}}$  du disque épointé se prolonge par continuité en 0, et que  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}(0)$  est un point de  $S_0^k$ . L'application  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}$  est donc une immersion holomorphe.

Il est clair que  $x_r = 0$  et que la racine est pointée par  $\phi_j := u_j$ , pour tout  $j \in \underline{r - k}$ .

Soient  $\phi_{i_0}$  et  $\phi_{i_1}$  deux points de la composante exceptionnelle  $\mathcal{C}^e$ , et  $\mu$  l'unique isomorphisme de  $\mathcal{C}^e$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$  tel que  $\mu(\phi_{i_0}) = u_{i_0}$ ,  $\mu(\phi_{i_1}) = u_{i_1}$  et  $\mu(x_e) = \infty$ . Soit  $\phi_{i_2}$  un autre point marqué de  $\mathcal{C}^e$  (si il y en a). Soit  $j \in \{k + 1, \dots, r\}$  (s'il n'en existe pas, on marque la racine par 1 par exemple). On a

$$\begin{aligned} [\phi_{i_0}, \phi_{i_1}, x_e, \phi_{i_2}] &= \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_{(i_0, i_1, j, i_2)}(\varphi_{\mathbf{u}}(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} [u_{i_0}z, u_{i_1}z, u_j, u_{i_2}z] = [u_{i_0}, u_{i_1}, \infty, u_{i_2}] \end{aligned}$$

d'après les équivalences ci-dessus et

$$[\mu(\phi_{i_0}), \mu(\phi_{i_1}), \mu(x_e), \mu(\phi_{i_2})] = [u_{i_0}, u_{i_1}, \infty, \mu(\phi_{i_2})]$$

par choix de  $\mu(\phi_{i_0})$ ,  $\mu(\phi_{i_1})$  et  $\mu(x_e)$ .

Or le birapport est inchangé par  $\mu$  (le birapport de quatre points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  est indépendant de la carte de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  choisie) : on a donc  $\mu(\phi_{i_2}) = u_{i_2}$ .

Il ne reste qu'à prouver la dernière partie du lemme (la seconde étant immédiate). On se ramène au cas où  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{a} = (1, \dots, r)$  et  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{b} = \tilde{\varphi}_{\mathbf{a}}(0)$ . Nous allons établir une correspondance entre  $\text{Cen}(D_{[c]})/\langle D_{[c]} \rangle$  et  $\pi_1(S_0^k, \mathbf{b})$  (où  $\text{Cen}(D_{[c]})$  désigne le centralisateur de  $D_{[c]}$  dans  $\Gamma_{0,r}$ ).

Soit  $\delta \in \text{Cen}(D_{[c]})$  : on a  $D_{\delta[c]} = \delta D_{[c]} \delta^{-1} = D_{[c]}$ . Par conséquent,  $\delta[c] = [c]$ . Il existe un homéomorphisme  $d'$  représentant  $\delta$  et un chemin  $c'$ ,  $\mathbf{a}$ -isotope à  $c$  par une application  $t$ , tels que  $d'(c') = c$ . Si l'on pose  $d = d' \circ t(1, \cdot)$ , on obtient un autre représentant de la classe d'isotopie de  $\delta$ , tel que  $d|_c = \text{Id}_c$ . Soient  $\mathbf{D}_1 := \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}); |z| \leq k + \frac{1}{2}\}$  et  $\mathbf{D}_2 := \{z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}); |z| \geq k + \frac{1}{2}\}$ . On peut écrire de façon unique  $d = d_1 d_2$ , où  $d_1$  (resp.  $d_2$ ) restreint à  $\mathbf{D}_2$  (resp.  $\mathbf{D}_1$ ) est l'identité. Ces deux homéomorphismes induisent respectivement des éléments de  $\Gamma_{0,k+1}$  et  $\Gamma_{0,r-k+1}$ , la sphère étant respectivement pointée par  $1, \dots, k, \infty$

et par  $0, k + 1, \dots, r$ . On peut vérifier que l'élément de  $\Gamma_{0,k+1} \times \Gamma_{0,r-k+1}$  ainsi défini ne dépend pas du choix de  $d$ . Ceci définit en fait un isomorphisme

$$\text{Cen}(D_{[c]})/\langle D_{[c]} \rangle \simeq \Gamma_{0,k+1} \times \Gamma_{0,r-k+1}.$$

En effet, ce morphisme est surjectif car deux éléments quelconques de  $\Gamma_{0,k+1}$  et de  $\Gamma_{0,r-k+1}$  admettent des représentants fixant respectivement  $\mathbf{D}_2$  et  $\mathbf{D}_1$ . Il est injectif car les seuls éléments non triviaux du mapping class group de la sphère  $k$ -pointée (resp.  $(r - k)$ -pointée) et à un seul bord, induisant un élément trivial par pincement du bord, sont ceux engendrés par le twist  $D_\epsilon$ , où  $\epsilon$  est la classe d'isotopie d'un chemin fermé simple autour de ce bord.

Le groupe fondamental  $\pi_1(S_0^k, \mathbf{b})$  est canoniquement isomorphe au groupe  $\Gamma_{0,k+1} \times B^{(r-k+1)}$  où  $\Gamma_{0,k+1}$  est le sous-groupe du mapping class group de la sphère  $k + 1$ -pointée par  $1, \dots, k, \infty$ , et  $B^{(r-k+1)}$  est le groupe fondamental de  $U^{r-k+1}$  basé en  $(0, k + 1, \dots, r)$ . On a donc un morphisme naturel

$$\pi_1(S_0^k, \mathbf{b}) \longrightarrow \text{Cen}(D_{[c]})/\langle D_{[c]} \rangle$$

surjectif et de noyau  $\{(1, 1), (1, z_{r-k+1})\}$  (via l'isomorphisme canonique entre les groupes  $\pi_1(S_0^k, \mathbf{b})$  et  $\Gamma_{0,k+1} \times B^{(r-k+1)}$ ).

Le morphisme naturel  $B^r \mathbb{S}^2 \rightarrow \Gamma_{0,r}$  induit un morphisme

$$\psi : \text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}}) \longrightarrow \text{Cen}(D_{[c]}).$$

Le noyau du morphisme composé

$$\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}}) \longrightarrow \text{Cen}(D_{[c]}) \longrightarrow \text{Cen}(D_{[c]})/\langle D_{[c]} \rangle$$

est égal à  $\psi^{-1}(\langle D_{[c]} \rangle) = \langle b_{c,\mathbf{a}}, z_r \rangle$ .

Notons par  $z'_r b_{c,\mathbf{a}}^{-1}$  la tresse  $z_r b_{c,\mathbf{a}}^{-1}$ , et par  $\bar{z}'_{r-k+1}$  son image dans  $\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}})/\langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle$ . Le morphisme

$$\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}})/\langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle \longrightarrow \text{Cen}(D_{[c]})/\langle D_{[c]} \rangle$$

est donc surjectif, de noyau  $\{1, \bar{z}'_{r-k+1}\}$ , ce qui donne l'isomorphisme annoncé.  $\square$

On revient à la description des générateurs de l'inertie le long de  $S^k$  dans le groupe fondamental  $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$  :

LEMME 3.8. — *Soit  $c$  le cercle de centre 0 et de rayon  $k + \frac{1}{2}$ ; le twist de Dehn  $D_{[c]}$  est un générateur de l'inertie le long de  $S^k$  dans le groupe fondamental algébrique  $\widehat{\pi}_1(U^r, (1, \dots, r))$  (complété profini du*

groupe fondamental  $B^r S^2$ ). Les autres générateurs sont de la forme  $D_{[c']}^m$ , où  $[c']$  est la classe d'isotopie d'un chemin séparant  $\underline{k}$  de son complémentaire (i.e. séparant les points  $a_i, i \in \underline{k}$  des points  $a_j, j \in \underline{r} - \underline{k}$ ) et  $m \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ .

*Démonstration.* — Considérons la flèche  $f^0 : \mathbf{D} - 0 \rightarrow U^r$  qui à  $z$  fait correspondre  $(z, 2z, \dots, kz, (k + 1), \dots, r)$ . C'est une immersion holomorphe. Le lemme 3.7 prouve que  $f^0$  se prolonge en une immersion fermée  $f : \mathbf{D} \rightarrow \bar{U}^r$ , que  $\mathbf{b} := f(0)$  appartient à  $S^{\underline{k}}$  et à aucune autre composante du bord de  $\bar{U}^r$ .

Il existe un paramétrage  $\Lambda$  de  $U^r$  au voisinage de  $\mathbf{b}$  qui comporte  $\lambda$ , où  $\lambda = 0$  est une équation locale de  $S^{\underline{k}}$ . On peut toujours supposer (cf. la preuve du lemme) que, si  $\Lambda(f(z)) = (\lambda_1(z), \dots, \lambda_N(z))$ , on a  $\lambda_1(z) \simeq uz$ , où  $u$  est une constante positive et, pour tout  $j$  différent de 1, le birapport  $\lambda_j(f(z))$  tend (en 0) vers une constante non nulle. Cela prouve que la section  $f$  est transverse à  $S^{\underline{k}}$  en  $\mathbf{b}$  (i.e. l'image de  $\mathbf{D}$  par  $f$  n'est pas tangente à  $S_0^{\underline{k}}$ ). On peut donc en conclure que la restriction à  $\mathbf{D}$  d'un revêtement de  $U^r(\mathbb{C})$  ramifié le long des  $S^I$  est un revêtement de  $\mathbf{D}$  ramifié en 0 et que les indices de ramification de ce dernier revêtement sont égaux aux indices de ramification du revêtement initial le long des différentes composantes du diviseur de ramification qui se projettent sur  $S^I$ .

L'inertie le long de  $S^{\underline{k}}$  dans  $\widehat{\pi}_1(U^r, (1, \dots, r))$  est engendrée par le lacet  $s \mapsto f(e^{2i\pi s})$  de  $U^r$ . Ce lacet représente une tresse qui se relève en  $D_{[c]}$  : cette tresse est un générateur de l'inertie le long de  $S^{\underline{k}}$  dans  $\pi_1(U^r, (1, \dots, r))$ , et son action sur  $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$  coïncide avec celle de  $D_{[c]}$ .

Les autres générateurs du groupe engendré par  $D_{[c]}$  sont de la forme  $D_{[c]}^m$ , où  $m \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$ . Les groupes d'inertie étant définis à conjugaison près, tout autre générateur est donc de la forme  $(\alpha D_{[c]} \alpha^{-1})^m$  où  $m \in \widehat{\mathbb{Z}}^\times$  et  $\alpha \in \Gamma_{0,r}$ . On se souvient (cf. la remarque 2.3) que  $\alpha D_{[c]} \alpha^{-1} = D_{\alpha([c])}$  ; on remarque enfin que  $\alpha([c])$  parcourt les classes d'isotopie de chemins fermés séparant  $\underline{k}$  de son complémentaire. En effet, si  $c'$  est un tel chemin, il est isotope à  $c$  en ne se permettant de bouger que  $\underline{k}$  (mais pas  $\{(k + 1), \dots, r\}$ ). Une telle isotopie définit un homéomorphisme  $\nu$  de la sphère laissant  $(k + 1), \dots, r$  fixes, tel que  $\nu(c') = c$  et tel que  $\nu(i)$  appartienne au disque de centre 0 et de rayon  $k + \frac{1}{2}$ . Il ne reste plus qu'à utiliser la  $k$ -transitivité du groupe des homéomorphismes du disque sur l'ensemble des points intérieurs à ce disque pour obtenir le résultat souhaité. □

On déduit du lemme et des remarques préliminaires sur l'action du groupe symétrique l'énoncé suivant.

PROPOSITION 3.9. — Soit  $[c]$  la classe de  $\mathbf{a}$ -isotopie (cf. le début du paragraphe 2.1) d'un chemin séparant  $I$  de son complémentaire  $J$  (i.e. séparant les points  $a_i, i \in I$  des points  $a_j, j \in J$ ). Alors le twist de Dehn  $D_{[c]}$  est un générateur de l'inertie autour de  $S^I$  dans le revêtement  $\bar{\pi} : \bar{H}^r \rightarrow \bar{U}^r$ . En particulier,  $S^I$  et  $S^J$  ont les mêmes générateurs de l'inertie.

Notons par  $\Delta^I$  le diviseur  $\bar{\pi}^{-1}(S^I)$  du bord de  $\bar{H}^r$ . On définit de plus les sous-ensembles  $S_0^I := S^I - \bigcup_{J \neq I, |J| \geq 2} (S^I \cap S^J)$  et  $\Delta_0^I := \bar{\pi}^{-1}(S_0^I)$  (ces ensembles interviendront dans la preuve de la proposition 3.10).

La proposition précédente décrit la ramification au-dessus d'un point de  $S_0^I$ . La proposition 3.10 précise ce résultat en décrivant la ramification des composantes irréductibles de  $\Delta^I$  (en déterminant quels points de  $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{b})$  appartiennent à une même composante de  $\Delta^I$ ).

Stefan Wewers a montré des résultats analogues dans le cas des points de branchement non ordonnés. Les preuves qui suivent sont d'ailleurs inspirées de [W1]. D'autre part, Malle et Matzat ont formulé et démontré un cas particulier des propositions suivantes, précisément le cas où  $|I| = 2$  (cf. [MM], chap. III, th. 8.3).

PROPOSITION 3.10. — Soit  $c$  un chemin fermé simple séparant  $I$  de son complémentaire  $J$ . Les composantes irréductibles de  $\Delta^I$  sont en bijection avec les orbites des  $D_{[c]}$ -orbites de  $SNi^*(G)$  sous l'action du centralisateur de  $D_{[c]}$ . De plus, l'indice de ramification d'une telle composante est égal au cardinal de n'importe quelle  $D_{[c]}$ -orbite la représentant.

Démonstration. — On note  $\mathbf{a} = (1, \dots, r) \in U^r$ . On se ramène comme on l'a fait précédemment à prouver ce résultat dans le cas où  $\mathbf{a}$  est le point base du groupe des tresses pures de Hurwitz, où  $I = \underline{k}$ , et où le chemin  $c$  parcourt le cercle de centre 0 et de rayon  $k + \frac{1}{2}$ .

Nous avons (cf. 3.8) une immersion holomorphe  $f$  de  $\mathbf{D}$  dans  $\bar{U}^r$  :

$$f(z) = (z, \dots, zk, k+1, \dots, r).$$

L'immersion  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbf{b} := f(0) \in \underline{k}$  ;
- $f(z) \in U^r$ , pour tout élément non nul  $z$  de  $\mathbf{D}$  ;
- l'immersion  $f$  est transverse à  $S^I$  ;
- $s \mapsto f(e^{2i\pi s})$  représente une tresse relevant  $D_{[c]}$ .

Soit  $\beta_1, \dots, \beta_\ell$  les points de la fibre  $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{b})$ . On peut associer à chacun de ces  $\beta_i$  une immersion  $f_i : \mathbf{D} \hookrightarrow \bar{H}'$  (pas nécessairement de façon unique), et un entier  $e_i \geq 1$ , tels que  $f_i(0) = \beta_i$ , et tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{D} & \xrightarrow{f_i} & \bar{H}' \\ z \mapsto z^{e_i} \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ \mathbf{D} & \xrightarrow{f} & \bar{U}^r. \end{array}$$

Par construction de  $f$ , les points  $\alpha_i := f_i(1)$  représentent les différentes  $D_{[c]}$ -orbites de  $\bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$ . Ceci donne donc une bijection entre la fibre de  $\bar{\pi}$  en  $\mathbf{b}$ , et les  $D_{[c]}$ -orbites de  $SNi^*(G)$ . De plus, l'indice de ramification de la composante irréductible de  $\Delta^k$  contenant  $\beta_i$  au-dessus de  $S^k$  est égal à  $e_i$ , mais aussi au cardinal de la  $D_{[c]}$ -orbite de la classe de Nielsen correspondant à  $\alpha_i$ .

L'idée consiste maintenant à se ramener à des considérations topologiques (et même de connexité), en remarquant, en suivant ce qu'a fait S. Wewers dans [W1], prop. 4.3.2, que les composantes irréductibles de  $\Delta^k$  correspondent de manière canonique aux composantes connexes de  $\Delta_0^k$ .

Nous allons prouver que l'isomorphisme entre  $\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}})/\langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle$  et le groupe fondamental  $\pi_1(S_0^I, \mathbf{b})$ , introduit dans la preuve du lemme 3.7, est compatible avec les actions respectives de ces groupes sur les ensembles  $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_\ell\} = b_{c,\mathbf{a}} \setminus \bar{\pi}^{-1}(\mathbf{a})$  et sur  $\{\beta_1, \dots, \beta_\ell\} = \bar{\pi}^{-1}(\mathbf{b})$ .

Nous allons pour cela définir comme dans [W1] — et en nous appuyant sur le lemme 3.7 — une déformation continue d'un chemin dans  $U^r$  allant de  $\alpha_i$  à  $\alpha_j$ , en un chemin dans  $\Delta_0^I$  allant de  $\beta_i$  à  $\beta_j$ , et réciproquement.

Soit  $[\tilde{g}]$  un élément de  $\text{Cen}(b_{c,\mathbf{a}})/\langle b_{c,\mathbf{a}} \rangle$  tel que  $[\tilde{g}] \cdot \tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_j$ . On peut supposer, quitte à multiplier  $g$  par une puissance adéquate de  $b_{c,\mathbf{a}}$ , que

$$[g] \cdot \alpha_i = \alpha_j.$$

L'application continue  $h : [0; 1]^2 \rightarrow \bar{U}^r$ , définie par  $h(s, t) = \tilde{\varphi}_{g(t)}(s)$  vérifie  $h(\cdot, 0) = h(\cdot, 1) = f$  et  $h(1, \cdot) = g$ . Elle se relève de façon unique en une application continue  $\tilde{h} : [0; 1]^2 \rightarrow \bar{H}'$  si l'on impose que, pour tout  $s \in [0; 1]$ , on ait  $\tilde{h}(s, 0) = f_i(s)$ . Le chemin  $\tilde{h}(1, \cdot)$  dans  $H'$  relie  $\alpha_i$  à  $\alpha_j$ , et le chemin  $\tilde{h}(\cdot, 0)$  (resp.  $\tilde{h}(\cdot, 1)$ ) de  $\bar{H}'$  relie  $\alpha_i$  à  $\beta_i$  (resp.  $\alpha_j$  à  $\beta_j$ ) : le chemin  $\tilde{h}(c, \cdot)$  sur  $\Delta_0^I$  relie donc  $\beta_i$  à  $\beta_j$ .

Donnons-nous réciproquement un élément  $[\gamma]$  de  $\pi_1(S_0^I, \mathbf{b})$ , tel que

$$[\gamma] \cdot \beta_i = \beta_j.$$

Il existe un lacet  $\hat{\gamma}$  sur  $U'_k$  partant de  $\mathbf{a}$ , tel que  $[\tilde{\varphi}_{\hat{\gamma}(\cdot)}(0)] = [\gamma]$ . On définit, comme dans le cas réciproque, une application continue  $h : [0; 1]^2 \rightarrow \bar{U}^r$ , avec

$$h(s, t) = \tilde{\varphi}_{\hat{\gamma}(t)}(s).$$

On définit aussi l'unique relevé  $\tilde{h}$  de  $h$  dans  $\bar{H}'$ , vérifiant  $\tilde{h}(\cdot, 0) = f_i$ . On peut supposer, quitte à multiplier  $\hat{\gamma}$  par une puissance de  $b_{c, \mathbf{a}}$ , que  $\tilde{h}(\cdot, 1) = f_j$ . Le chemin  $\tilde{h}(1, \cdot)$  relie donc  $\alpha_i$  à  $\alpha_j$ .  $\square$

*3.3.2. Choix cohérent de générateurs de l'inertie.* — Nous souhaitons appliquer les résultats de [F3] en un point du bord de l'espace de Hurwitz, à l'intersection de plusieurs composantes  $S^I$  : il nous faut donc prendre un voisinage étale du point considéré, où le revêtement est localement kummérien généralisé (voir le paragraphe 3.1). En particulier, les générateurs de l'inertie le long des différentes composantes commutent.

On propose ici une procédure de construction de twists sarments engendrant l'inertie et commutant deux à deux ; dans un deuxième temps, on montrera que ces twists forment en fait un choix cohérent.

On se ramène facilement au problème suivant : pour tout arbre stable  $r$ -pointé  $T$  préalablement fixé, trouver, pour toute arête  $t_I$  de  $T$ , un choix de twist entourant  $I$  de sorte que les twists ainsi choisis commutent deux à deux. On introduit pour cela un ordre de construction.

On appelle *arête de  $i$ -ème niveau* toute arête  $t_I$  de  $T$  dont le sommet  $\sigma_I$  est relié à la racine par un chemin constitué de  $i$  arêtes (ainsi, une arête de premier niveau est une arête partant de la racine).

On définit deux relations binaires sur l'ensemble des arêtes de  $T$  ;  $t_I \leq t_J$  si  $I \subset J$  et  $t_I \ll t_J$  si  $\min I < \min J$ . La relation  $\leq$  est un ordre, la relation  $\ll$  est un ordre pour l'ensemble des arêtes de niveau donné.

*Procédure.* — Supposons les twists sarments pour les arêtes de niveau  $i$  déjà construits. Soit  $t_J$  de niveau  $i$  ; l'ensemble des arêtes de niveau  $i + 1$  qui sont inférieures pour la relation  $\leq$  à  $t_J$  est ordonnable pour la relation  $\ll$ .

De manière informelle, on construit les twists sarments pour les arêtes de niveau  $i + 1$  dans l'ordre décroissant pour  $\ll$  en imposant

- que chaque twist ainsi construit commute avec ses prédécesseurs ;
- que l'on passe *le plus au « Sud » possible*.

Pour toute arête  $t_I$ , on note par  $D_I^T$  le twist sarment ainsi construit. C'est un élément de  $\Gamma_{0, r}$  qui se relève en deux tresses de  $B^r S^2$ , chacune

étant un générateur topologique de l'inertie autour de  $S^I$ . On prouve au paragraphe suivant que ces tresses fournissent un choix cohérent analytique de générateurs de l'inertie, dont on déduira ensuite un choix cohérent algébrique (voir le chapitre 3.1 rappelant les résultats de [F3]).

*Exemple 5.* — Les twists construits dans l'exemple 4 sont justement ceux de l'exemple 2. Les lacets sont construits dans l'ordre suivant :  $c_{2,3,5,6}$ ,  $c_{1,4}$ ,  $c_{3,6}$ ,  $c_{2,5}$ .

*3.3.3. Cohérence du système  $(D_I^T)$  des générateurs de l'inertie.* — On montre dans ce paragraphe que le choix des  $D_I^T$  fournit un choix cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage d'un point complexe du bord de  $\bar{U}^r$ . Cela résulte d'une généralisation du lemme 3.7, dans lequel nous décrivons un voisinage « tubulaire » d'un tel point se trouvant à l'intersection de plusieurs diviseurs  $S^I$ .

Posons  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_r) = (1, \dots, r)$  et soit  $T$  un arbre-graphe stable à  $r$  points marqués (et à racine distinguée) tel que ses arêtes  $t_{I_1}, \dots, t_{I_m}$  soient indexées par des sous-ensembles pleins (i.e. constitués d'entiers consécutifs). On se fixe une carte affine de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{S}^2$ . Pour toute arête  $t_I$  de  $T$ , on pose

$$a_I := \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} a_i = \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} i.$$

On fixe des rayons  $r_I > 0$  tels que les cercles  $\mathcal{C}_I := \mathcal{C}(a_I, r_I)$  soient disjoints et chaque cercle  $\mathcal{C}_I$  entoure les points  $a_i$ ,  $i \in I$  (un tel choix de rayons existe toujours). Pour toute arête  $t_I$  de  $T$ , on note  $\mathbf{D}_I$  le disque ouvert de centre  $a_I$  et de rayon  $r_I$ .

Dénotons par  $U^T$  le sous-ensemble de  $U^r(\mathbb{C})$  constitué des points  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_r)$  tels que, pour tout  $I \in \{I_1, \dots, I_m\}$ , pour tout  $i$  appartenant à  $I$ ,  $u_i$  appartienne au disque  $\mathbf{D}_I$  si et seulement si  $i \in I$ .

Pour tout élément  $\mathbf{u}$  de  $U^T$ , on définit l'application holomorphe

$$\varphi_{\mathbf{u}}^T : (\mathbf{D} - \{0\})^m \longrightarrow U^r, \quad \mathbf{z} = (z_{I_1}, \dots, z_{I_m}) \mapsto (\varphi_{\mathbf{u},i}^T(z_{I_1}, \dots, z_{I_m}))_{1 \leq i \leq r}$$

par la formule suivante : pour tout  $i \in \underline{r}$ , soit  $I_i^0 \supset I_i^1 \supset \dots \supset I_i^{\ell_i}$  les paquets contenant  $i$ , rangés par ordre décroissant ; on pose

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{u},i}^T(\mathbf{z}) = & a_{I_i^0} + (a_{I_i^1} - a_{I_i^0})z_{I_i^0} + (a_{I_i^2} - a_{I_i^1})z_{I_i^0}z_{I_i^1} \\ & + \dots + (a_{I_i^{\ell_i}} - a_{I_i^{\ell_i-1}})z_{I_i^0}z_{I_i^1} \cdots z_{I_i^{\ell_i-1}} + (u_i - a_{I_i^{\ell_i}})z_{I_i^0}z_{I_i^1} \cdots z_{I_i^{\ell_i}}. \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.11. — Pour tout arbre-graphe stable  $T'$  (à  $r$  points marqués et à racine distinguée), on introduit le diviseur  $S^{T'}$ , intersection des diviseurs  $S^I$  pour lesquels  $t_I$  est une arête de  $T'$ , et on note par  $S_0^{T'}$  l'ensemble des points de  $S^{T'}$  n'appartenant à aucun autre diviseur  $S^J$ .

On est maintenant en mesure d'énoncer le

LEMME 3.12. — Pour tout  $\mathbf{u} \in U^T$ , l'application  $\varphi_{\mathbf{u}}^T$  se prolonge de manière unique en une application holomorphe

$$\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}^T : \mathbf{D}^m \longrightarrow \bar{U}^r.$$

Soient  $\mathbf{z} \in \mathbf{D}^m$  et  $S^{T'}$  l'intersection des  $S^I$ , pour lesquels  $z_I$  est nul. Alors le point  $\tilde{\varphi}_{\mathbf{u}}^T(\mathbf{z})$  appartient à  $S_0^{T'}$ .

En particulier, le point  $\varphi_{\mathbf{u}}^T(0)$  est un point de  $S_0^T$ . Plus précisément, ce dernier point est l'arbre stable  $(C, \phi)$  de droites projectives à racine distinguée, de type combinatoire  $T$ , tel que, pour chaque composante  $C_I$ , il existe un isomorphisme  $\mu_I$  de cette composante sur  $\mathbb{P}^1(C)$ , tel que

- si  $i$  marque  $t_I$ , alors  $\mu_I(\phi_i) = u_i$ ;
- si  $x_{C_I}$  est la projection de la composante mère de  $C_I$  sur  $C_I$ , alors  $\mu_I(x_{C_I}) = \infty$ ;
- si  $x_{I'}$  est la projection d'une composante fille  $C_{I'}$  sur  $C_I$ , alors  $\mu_I(x_{I'}) = a_{I'}$ .

Enfin, tout chemin  $\gamma = (\gamma_{I_i})_{1 \leq i \leq m}$  dans  $U^T$  induit un voisinage « tubulaire » d'un point de  $S_0^T$  dans  $\bar{U}^r$ .

Démonstration. — Pour simplifier la preuve, on peut supposer que les  $z_I$  ne tendant pas vers 0 sont égaux à 1. Il est alors facile de vérifier que  $\varphi_{\mathbf{u}}^T$  coïncide avec  $\varphi_{\mathbf{u}}^{T'}$ , où  $T'$  est l'unique arbre stable tel que  $t'_I$  est une arête de  $T'$  si et seulement si  $t_I$  est une arête de  $T$ , et que  $z_I = 0$  (dans le langage de [GHP], on a contracté les arêtes  $t_I$  telles que  $z_I = 1$ ). On est donc ramené à prouver le résultat lorsque tous les  $z_I$  tendent vers 0.

On montre qu'un birapport  $\lambda_w$  tend vers 0 (lorsque les  $z_I$  tendent vers 0) si et seulement si  $w$  sépare au moins une arête de  $T$ .

Soit  $i$  et  $j$  deux éléments de  $\underline{r}$ . Soit  $\sigma_k^0$  l'embranchement des deux sommets  $\sigma_{I_i}$  et  $\sigma_{I_j}$ . Alors on a l'équivalence suivante (lorsque les  $z_I$  tendent vers 0) :

$$\varphi_{\mathbf{u},i}^T(\mathbf{z}) - \varphi_{\mathbf{u},j}^T(\mathbf{z}) \sim z_{I_1}^0 \cdots z_{I_k}^0 (a_{I_{k+1,i}}^0 - a_{I_{k+1,j}}^0)$$

où  $I_{k+1,i}^0$  et  $I_{k+1,j}^0$  désignent le paquet de coalescence suivant  $I_k^0$ , contenant respectivement  $i$  et  $j$ .

Si le quadruplet  $w$  n'est séparé par aucune arête de  $T$ , on peut supposer que  $\sigma_{w_4} \vee \sigma_{w_2} = \sigma_{w_4} \vee \sigma_{w_3}$  et que  $\sigma_{w_1} \vee \sigma_{w_2} = \sigma_{w_1} \vee \sigma_{w_3}$  (il suffit en effet de considérer l'embranchement des quatre sommets  $\sigma_{w_i}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ ). Le birapport tend donc vers une constante non nulle.

Si au contraire le quadruplet  $w$  est séparé par au moins une arête  $t_I$ , le birapport est équivalent à un multiple de  $z_I$  (par une constante non nulle, et éventuellement par d'autres variables  $z_{I'}$ ). En effet, le sommet final de  $t_I$  n'est l'embranchement que d'une seule paire de sommets  $\sigma_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . En tout état de cause, ce birapport tend vers 0.

Si on considère un quadruplet *distinguant* une arête  $t_I$  (cf. la proposition 3.2), le birapport est équivalent à un multiple de  $z_I$  (par une constante non nulle). Des calculs identiques à ceux effectués dans la preuve du lemme 3.7 permettent la description annoncée du point du bord obtenu. □

Dans un voisinage tubulaire défini à l'aide de ce lemme, on définit, pour toute arête  $t_I$  de  $T$ , le lacet

$$c_{I_j} : [0; 1] \longrightarrow U^r, \quad \theta \longmapsto \varphi_{\mathbf{a}}^T(1, \dots, 1, e^{2i\pi\theta}, 1, \dots, 1).$$

C'est un générateur de l'inertie autour de  $S^{I_j}$  (le seul point non fixe,  $a_i$ , parcourt le cercle de centre 0 et de rayon  $i$ ). Ce lacet représente une tresse qui se relève en le twist  $D_{[I_j, \theta, \emptyset]}$ . Le résultat suivant permettra de conclure que ces twists forment un choix cohérent :

LEMME 3.13. — *Soit  $\Lambda$  un revêtement kummérien:*

$$\Lambda : \text{Spec}(\mathbb{C}[V_1, \dots, V_m]/(V_j^{e_j} - U_j)_{1 \leq j \leq m}) \longrightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[U_1, \dots, U_m]).$$

*Alors les lacets  $\theta \mapsto (U_1, \dots, U_{j-1}, e^{2i\pi\theta}U_j, U_{j+1}, \dots, U_r)$  définissent un choix cohérent de générateurs de l'inertie dans le revêtement  $\Lambda$ .*

Le lemme 3.12, ajouté à ce dernier lemme, et au fait que le birapport  $\lambda_I$  est égal à  $z_I$  (à un facteur non nul près, voir la preuve du lemme 3.12), prouve que les twists rectangles  $D_{I_j}$  forment un choix cohérent au voisinage d'un point de  $S_0^T$ .

Pour un autre point du bord de  $\bar{U}^r$ , associé à un arbre de coalescence quelconque, nous avons défini un choix de twists sarments commutant deux à deux. Il existe un choix de lacets définissant ces twists, ne se rencontrant

pas. On se ramène alors au cas précédemment traité, en conjuguant la sphère de Riemann par un homéomorphisme (laissant l'ensemble  $A = \{a_1, \dots, a_r\}$  globalement invariant) envoyant chacun de ces lacets sur un cercle du type  $C_I$ .

On a donc obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION 3.14. — *Pour tout arbre-graphe  $T$ , les twists  $D_I^T$  forment un système local cohérent de générateurs de l'inertie autour de tout point complexe du bord de  $\bar{U}^r$ .*

Remarque 3.15. — La preuve de la cohérence de ces twists se déduit de la géométrie de  $\bar{U}^r$ , et ne dépend pas de l'espace le revêtant. En conséquence, ces twists fournissent un système cohérent unifié, même si le revêtement de Hurwitz complété se scinde en plusieurs revêtements kummériens généralisés (localement pour la topologie étale).

Comme nous l'avons dit au chapitre 3.1, ce résultat et la proposition 3.1 de [F3] donnent un système cohérent de générateurs de l'inertie sur  $\bar{U}^r$  défini sur un corps de caractéristique positive (par le biais du théorème de spécialisation de Grothendieck, cf. [E2]).

## 4. Application à la ramification dans le corps des modules.

Fixons deux entiers  $d$  et  $r$ , un groupe fini  $G \hookrightarrow S_d$  et un  $r$ -uplet de classes de conjugaison  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$  d'éléments de  $G$ . Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $(G)$ -revêtements de la droite projective, de degré  $d$ , de monodromie  $G \hookrightarrow S_d$ , à  $r$  points de branchement (ordonnés) et d'inertie  $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_r)$ .

On se donne un corps de nombres  $K$  sur lequel chaque classe  $C_i$  est rationnelle, ainsi que  $r$  points distincts  $b_1, \dots, b_r$  de  $\mathbb{P}_K^1$ .

Notons par  $[f_1], \dots, [f_\ell]$  les différentes classes d'isomorphie de revêtements de  $\mathcal{C}$  ramifiés en  $b_1, \dots, b_r$ . Soit  $M_i$  le corps des modules de  $f_i$  relativement à  $K$ .

### 4.1. Mauvaises places ne divisant pas l'ordre de $G$ .

Supposons que les points de branchement coalescent en une mauvaise place  $v$  ne divisant pas  $|G|$  : l'arbre de coalescence  $T_v$  des points de

branchement en  $v$  n'est pas réduit à la racine. Rappelons que cet arbre est muni d'une valuation  $\theta$ , dépendant des ordres de coalescence des points de branchement (cf. la définition 3.5).

Soit  $H'$  l'espace de Hurwitz associé à la catégorie  $\mathcal{C}$ , soit  $\pi$  le revêtement naturel  $H' \rightarrow U^r$ , et  $SNi^*(\mathbf{C})$  l'ensemble des classes de Nielsen associé. Posons  $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_r)$ . La fibre  $\pi^{-1}(\mathbf{b})$  est en bijection avec l'ensemble  $\{[f_1], \dots, [f_\ell]\}$ . De plus, le corps de rationalité de chacun de ces points est le corps des modules correspondant.

Soit  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers de  $K$ , et  $\mathcal{O}_{K_v}$  le localisé de  $\mathcal{O}_K$  en  $v$ ; on note par  $\pi_v$  une uniformisante de cet anneau et  $\mathfrak{m}_v$  son idéal maximal. Le point  $\mathbf{b}$  de  $U^r$  s'étend en une section

$$\tilde{\mathbf{b}} : \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \longrightarrow \bar{U}^r$$

dont l'image de la fibre spéciale appartient au bord de  $\bar{U}^r$ . La place  $v$  ne divisant pas l'ordre de  $G$ , tout point  $h$  de  $H'$  au-dessus de  $\mathbf{b}$  s'étend en une section sur  $\bar{H}'$  dominant  $\tilde{\mathbf{b}}$  ( $\bar{H}'$  est propre sur  $\text{Spec}(\mathcal{O}_K[1/|G|])$ , cf. [W1] et 1.3).

On souhaite appliquer le théorème 2.4 de [F3] à la restriction de  $\bar{\pi}$  à  $\tilde{\mathbf{b}}$  (voir le chapitre 3.1) :

- Les ordres d'intersection de  $\tilde{\mathbf{b}}$  sont donnés par la valuation  $\theta$  des arêtes de  $T_v$  (cf. la définition 3.5 et la proposition 3.6).
- Nous avons donné en 3.3.2 un système cohérent de générateurs de l'inertie, les  $D_I^T$ .

THÉORÈME PRINCIPAL 4.1. — Soit  $v$  une place ne divisant pas  $|G|$ . Soit

$$\omega := \prod_I (D_I^T)^{\theta(t_I)},$$

élément du mapping class group  $\Gamma_{0,r}$  (ce produit n'est pas ambigu car les  $D_I^T$  commutent). L'ensemble des places au-dessus de  $v$  dans les différents corps des modules  $M_i$  est en bijection avec l'ensemble des  $\omega$ -orbites de  $SNi^*(\mathbf{C})$  (l'action étant celle du chapitre 2.3). De plus, l'indice de ramification de chacune de ces places est égal au cardinal de la  $\omega$ -orbite lui correspondant.

*Démonstration.* — Soit  $\bar{x}$  le point du bord de  $\bar{U}^r$ , image du point spécial de  $\text{Spec}(R)$  par  $\tilde{\mathbf{b}}$ . Ce point se prolonge en un point sur  $\text{Spec}(R)$ ,

tel que le point  $x_\eta$  de la fibre générique soit à l'intersection des mêmes diviseurs, avec le même graphe d'intersection. Notons par  $x_{\eta, \mathbb{C}}$  le point complexe correspondant.

Les  $D_I^T$  forment un système cohérent topologique de l'inertie au voisinage de  $x_{\eta, \mathbb{C}}$  (proposition 3.14). La monodromie de ces revêtements est donnée par les formules du chapitre 2.3 (on identifie les actions de  $\Gamma_{0,r}$  et de  $B^r S^2$ ). La proposition 3.1 de [F3] montre que ce système induit un système cohérent de générateurs de l'inertie au voisinage de  $\bar{x}$ .

Le normalisé du morphisme tiré par  $\tilde{\mathbf{b}}$

$$\tilde{\mathbf{b}}^*(\pi) : \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v}) \times_{\bar{U}_r} \bar{H}' \longrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{K_v})$$

est la restriction de  $\bar{\pi}$  à  $\tilde{\mathbf{b}}$ .

Toujours au voisinage de  $\bar{x}$ , le théorème d'Abhyankar prouve que le revêtement  $\bar{\pi}$  est l'union disjointe de plusieurs revêtements kummériens généralisés.

Pour chacun de ces revêtements, l'inertie de chaque point au-dessus de  $\mathfrak{m}_v$  dans le revêtement restreint à  $\tilde{\mathbf{b}}$  est engendré par l'image de  $\omega$  dans ce groupe de monodromie (théorème 2.4 de [F3]; voir aussi la remarque 3.15). Les groupes d'inertie des différents points au-dessus de  $\mathfrak{m}$  dans ce revêtement restreint sont donc en bijection avec les  $\omega$ -orbites de  $SNi^*(\mathbf{C})$ , les ordres des groupes correspondant aux cardinaux des  $\omega$ -orbites.

Par ailleurs, en revenant au lien entre corps des modules et espaces de Hurwitz (fait 1.2), la fibre  $\pi^{-1}(\mathbf{b})$  est le spectre de la  $K$ -algèbre finie  $\prod_{i \in I} M_i$ . La fibre générique de  $\tilde{\mathbf{b}}^*(\pi)$ , qui est la fibre tirée de  $\pi^{-1}(\mathbf{b})$  par le morphisme  $\text{Spec}(K_v) \rightarrow \text{Spec}(K)$ , est le spectre de la  $K$ -algèbre étale  $\prod_{i \in I} \prod_{w_{i,j} | v} M_{i,w_{i,j}}$ , où les  $w_{i,j}$  parcourent les places de  $M_i$  divisant  $v$  et  $M_{i,w_{i,j}}$  désignant le complété de  $M_i$  en la place  $w_{i,j}$ .

On a donc bien la correspondance annoncée.  $\square$

*Remarque 4.2.* — La démonstration de ce résultat s'appuie sur les constructions des espaces et des revêtements de Hurwitz (théorèmes 1.2 et 1.4), où l'on voit clairement apparaître la condition «  $v$  ne divise pas  $|G|$  ». L'auteur ne sait pas si ces résultats subsistent pour une place  $v$  divisant  $|G|$ , mais où l'on suppose la ramification modérée.

## 4.2. Calcul des $\omega$ -orbites.

La formule donnée dans la proposition 2.8 se généralise pour calculer l'action de  $\omega$  sur les classes de Nielsen. Montrons comment calculer cette

action, en nous limitant à l'exemple 4 (ici encore, on pourra trouver les formules générales dans [F2]). Dans cet exemple,

$$\omega := (D_{[c_{1,4}]})^2(D_{[c_{2,3,5,6}]})(D_{[c_{3,6}]})(D_{[c_{2,5}]})^2.$$

Remarquons que  $D_{[c_{1,4}]} = D_{[c_{2,3,5,6}]}$ , et donc que

$$\omega = (D_{[c_{1,4}]})^3(D_{[c_{3,6}]})(D_{[c_{2,5}]})^2.$$

Analysons la méthode utilisée dans la preuve de la proposition 2.8 : nous avons « tiré » — et, si besoin était, à deux reprises —, le chemin définissant le twist derrière le point  $a_0$ , de telle sorte que  $D_{\beta_i}$  et le twist nouvellement formé commutent. Pour trouver une formule de l'action de plusieurs twists, il suffit de suivre attentivement *l'ordre de déformation* des lacets.

Ici, pour calculer par exemple l'action de  $\omega$  sur  $q_4$ , nous tirons d'abord les deux branches de  $c_{3,6}$ , puis celles de  $c_{2,5}$ , et enfin la branche « Sud » de  $c_{1,4}$  (voir la figure de l'exemple 2). Ceci nous donne la formule suivante :

$$\begin{aligned} \omega^n \cdot \mathbf{g} = & \left( (g_1 g_2 g_3 g_4 g_3^{-1} g_2^{-1})^{3n} g_1, (g_2 g_3 g_5 g_3^{-1})^{2n} g_2, (g_3 g_6)^n g_3, \right. \\ & (g_3 g_6)^n (g_3^{-1} g_6^{-1})^n (g_3^{-1} g_2 g_3 g_5)^{2n} (g_3^{-1} g_2^{-1} g_3 g_5^{-1})^{2n} (g_3^{-1} g_2^{-1} g_1 g_2 g_3 g_4)^{3n} g_4, \\ & \left. (g_3 g_6)^n (g_3^{-1} g_6^{-1})^n (g_3^{-1} g_2 g_3 g_5)^{2n} g_5, (g_3 g_6)^n g_6 \right). \end{aligned}$$

### 4.3. Faire disparaître la ramification.

Nous étudions dans cette dernière partie la possibilité de limiter la ramification dans le corps des modules aux seules mauvaises places *divisant* l'ordre du groupe de monodromie. Nous allons montrer comment cette étude conduit à considérer des familles de systèmes d'équations diophantiennes, en nous concentrant sur le cas particulier des groupes diédraux.

4.3.1. *Remarques générales.* — Le théorème 4.1 donne une condition nécessaire et suffisante pour que  $v$  ne se ramifie dans aucun des corps des modules  $M_i$  :

**COROLLAIRE 4.3.** — *La place  $v$  ne divisant pas l'ordre de  $|G|$  ne se ramifie dans aucun des corps des modules  $M_i$  si et seulement si l'action du mot  $\prod_I (D_I^T)^{\theta(t_I)}$  sur  $SNi^*(\mathbf{C})$  est triviale.*

Le cas particulier suivant donne une condition suffisante évidente pour que la place  $v$  ne se ramifie dans aucun des  $M_i$ .

**COROLLAIRE 4.4.** — *Pour tout  $I$ , soit  $n_I$  le plus petit commun multiple des indices de ramification des composantes de  $\Delta_I$  au-dessus de  $S^I$  (c'est aussi l'ordre de l'action de  $D_I^T$  sur l'ensemble des classes de Nielsen). L'arbre de coalescence  $T_v$  des points  $a_1, \dots, a_r$  en  $v$  est valué par  $\theta$  (définition 3.5). Si, pour tout arête  $t_I$  de l'arbre  $T_v$ , le nombre  $n_I$  divise  $\theta(t_I)$ , alors la place  $v$  n'est ramifiée dans aucune extension  $M_i/K$  ( $i \in \mathbb{I}$ ).*

Remarquons que si un des revêtements kummériens généralisés décrivant localement  $\pi$  en  $\mathbf{a}$  est kummérien de groupe  $\oplus_I (\mathbb{Z}/e_I \mathbb{Z})$ , cette condition est en fait nécessaire. En effet, pour un revêtement kummérien (non généralisé), l'indice de ramification de chaque composante irréductible du revêtement restreint est égal à  $E$ , où

$$E = \text{ppcm}_I \left( \frac{n_I}{(n_I, \theta(t_I))} \right)$$

( $I$  parcourant les paquets de coalescence des points de branchement).

On pourrait aussi chercher à faire tomber la ramification en tenant compte d'éventuelles relations dans  $\Gamma_{0,r}$  : par exemple un twist est trivial si le lacet qui le définit entoure au moins  $r - 1$  points. Ou encore, si deux paquets de congruence sont complémentaires dans  $\mathcal{L}$ , alors les twists associés sont égaux (dans notre exemple,  $D_{[c_{1,4}]} = D_{[c_{2,3,5,6}]}$ ).

Cependant, une analyse de l'action de  $\Gamma_{0,r}$  sur l'ensemble des classes de Nielsen associées aux groupes diédraux prouve que toute autre relation se déduit de celles citées (voir l'appendice B de [F2]). On ne peut donc beaucoup jouer sur la ramification au moyen de relations dans  $\Gamma_{0,r}$ . La seule possibilité pour que le mot considéré ait une action triviale est d'ajuster les ordres d'intersections. Il s'agit donc d'un problème de théorie des nombres : trouver un bon choix de lieu de branchement, i.e. des nombres dont les différences ont des ordres de congruence imposés, pour tout nombre premier  $p$  ne divisant pas  $|G|$ .

Soit  $v$  une mauvaise place ne divisant pas  $|G|$ . Le corollaire précédent prouve qu'il est aisé de trouver un choix de  $\mathbf{b}$  pour lequel  $v$  ne se ramifie pas dans les corps des modules, alors que le lieu de branchement devient singulier par réduction en  $v$ .

Faire disparaître la ramification en toutes les mauvaises places ne divisant pas  $|G|$  est autrement plus difficile, car la conciliation des contraintes imposées par chaque place nécessite la compatibilité des arbres de coalescence de tous les premiers ne divisant pas  $|G|$ , ce qui conduit à la résolution de systèmes d'équations diophantiennes.

Bien sûr, dans le cas de trois points de branchement, la ramification est automatiquement confinée aux places divisant  $|G|$ . En effet, on peut toujours se ramener au cas où  $\mathbf{b} = (0, 1, \infty)$ , pour lequel il n'y a aucune coalescence (alternativement, on aurait pu remarquer que le mapping class group de la sphère 3-pointée est trivial).

4.3.2. *Le cas des groupes diédraux.* — Les résultats de ce paragraphe dépendent tous de la conjecture ABC, que nous rappelons :

CONJECTURE ABC. — Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe une constante positive  $K(\epsilon)$  telle que pour tout triplet  $(a, b, c)$  de nombres entiers non nuls, premiers entre eux deux à deux et de somme nulle (i.e. le triplet vérifie une relation ABC), on ait

$$\max(a, b, c) < K(\epsilon) \cdot \text{rad}(abc)^{1+\epsilon}$$

(le radical  $\text{rad}(n)$  d'un nombre entier  $n$  est le produit de ses diviseurs premiers)

Dans tout ce paragraphe, on suppose que la conjecture ABC est vraie.

Nous considérons les classes de Nielsen associées aux groupes diédraux  $D_p$ , avec  $p$  premier impair, et où chaque classe de conjugaison de l'invariant d'inertie est la classe des involutions. En particulier, le nombre de points de branchement doit être pair. L'espace de Hurwitz générique associé à ces invariants, noté  $H'_{2r,p}$  est une variété irréductible sur  $\mathbb{Q}$ , et comme le centre d'un groupe diédral  $D_p$  est trivial, les points  $\mathbb{Q}$ -rationnels de  $H'_{2r,p}$  induisent une réalisation du groupe  $D_p$  avec ces invariants (cf. par exemple la proposition 2.8 de [CH]), appelée *réalisation par involutions* dans [DF].

Cette étude est motivée par le résultat 5.1 de [DF], qui stipule que, pour  $p > 7$ , les groupes diédraux  $D_p$  ne sont pas réalisables avec quatre points de branchement, et par la conjecture 5.2 du même article (voir plus bas).

DÉFINITION 4.5. — Un lieu de branchement  $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^{2r}$  est dit admissible s'il existe un nombre premier  $p$  pour lequel tous les corps de rationalité des points de  $H'_{2r,p}$  au-dessus de  $\mathbf{b}$  ne sont ramifiés qu'en 2 ou  $p$ .

4.3.2.1. *Le cas de quatre points de branchement.* — La qualité d'être admissible est invariante par transformation birationnelle, et tout lieu de branchement rationnel est birationnellement équivalent à un 4-uplet de la forme  $(0, b_2, b_3, \infty)$ , où  $b_2$  et  $b_3$  sont des entiers premiers entre eux. On se ramène donc au cas où  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$  est de ce type.

Les seuls paquets de coalescence possibles sont les paires  $\{b_1, b_2\}$ ,  $\{b_1, b_3\}$  et  $\{b_2, b_3\}$ . Par exemple, supposons que  $q^\ell$  divise exactement  $b_2$  ( $q \neq 2, p$ ), de sorte que  $\omega = D_{1,2}^\ell$  pour le nombre premier  $q$ . Comme le produit de deux involutions est une rotation s'il n'est pas trivial,  $\omega$  agit trivialement sur l'ensemble des classes de Nielsen (autrement dit,  $q$  ne se ramifie pas dans les corps des modules) si et seulement si  $p$  divise  $\ell$ . Imposer que les premiers différents de 2 et de  $p$  ne se ramifient pas est donc une condition très forte. La proposition suivante précise cette remarque.

PROPOSITION 4.6. — *Tous les lieux de branchement admissibles, sauf un nombre fini, sont birationnellement équivalents à  $(0, 1, 2, \infty)$  ou à  $(0, \pm 1, p, \infty)$ , pour un nombre premier  $p$  de Fermat ou de Mersenne.*

Démonstration. — Supposons que  $b_2, b_3$ , ou  $b_3 - b_2$  possède au moins un diviseur premier  $q_0$  différent de 2 et de  $p$ . L'exposant de  $q_0$  est par hypothèse un multiple de  $p$ . La conjecture ABC, pour  $\epsilon = 1$  par exemple, induit l'inégalité

$$p \sum_{q|b_2, b_3, b_3-b_2} \log(q) \leq K + 6 \log(p) + 2 \sum_{q|b_2, b_3, b_3-b_2} \log(q)$$

(où  $K$  est une constante). Cette inégalité borne donc les valeurs de  $p$  possibles. À  $p$  fixé, elle borne aussi les valeurs possibles des premiers  $q$  où il y a coalescence. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels points.

Le cas restant, où  $b_2, b_3$  et  $b_2 - b_3$  n'ont pas d'autres diviseurs premiers que 2 et  $p$ , entraîne une relation du type

$$p^m - 2^n = \pm 1.$$

Si  $m = 1$ , on sait classiquement que  $p$  est un nombre de Fermat ou de Mersenne. Si  $m \geq 2$ , on a une relation de Catalan, ce qui nous laisse comme unique choix valide  $p = 3$ , voir [Mi] (sans faire appel à la preuve de Mihăilescu, la conjecture ABC bornait déjà l'ensemble des solutions).  $\square$

4.3.2.2. *Le cas de six points de branchement ou plus.* — À la suite de leur résultat pour quatre points de branchement, P. Dèbes et M. Fried formulent la conjecture suivante :

CONJECTURE 4.7 (Dèbes, Fried). — *Si l'on borne le nombre de points de branchement, on ne peut réaliser par involutions qu'un nombre fini de groupes diédraux  $D_p$ .*

*Remarque 4.8.* — Comme la seule classe de conjugaison rationnelle est la classe des involutions, et à l'aide du « branch cycle argument » (voir [Fr]), on obtient une conjecture équivalente si l'on supprime la mention « par involutions ».

Comme pour le cas de quatre points de branchement, on peut se ramener à l'étude des lieux de branchement de la forme  $\mathbf{b} := (b_1, b_2, \dots, b_{2r})$  où  $b_1 = 0 < b_2 < \dots < b_{2r-1} < b_{2r} = \infty$ , et où les  $b_i$  sont des entiers premiers entre eux. On suppose maintenant que  $r \geq 3$ .

La grande différence avec le cas de quatre points de branchement est que l'on peut avoir des *paquets de coalescence de cardinal impair* pour un tel lieu de branchement. Or le produit d'un nombre impair d'involutions de  $D_p$  est une involution. Par exemple, si  $q$  est un premier pour lequel l'unique paquet de coalescence non trivial est un triplet, alors  $q$  ne se ramifie pas dans les corps des modules si et seulement si l'ordre de  $q$ -coalescence  $\ell_q$  de ce triplet est pair ( $\ell_q$  est égal à la valuation  $\theta(t)$  de l'unique arête  $t$  de l'arbre de coalescence associé à  $q$ ). Lorsque  $\ell_q = 2$ , la conjecture ABC ne permet donc pas de répondre de manière aussi lapidaire que pour le cas de quatre points de branchement.

Toutefois, la proposition 4.10 suivant cette définition étend la proposition 4.6 :

**DÉFINITION 4.9.** — Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de nombres premiers, contenant 2. Un  $\mathcal{P}$ -nombre est un nombre dont les diviseurs premiers appartiennent à  $\mathcal{P}$ . Par convention,  $\infty$  est un  $\mathcal{P}$ -nombre.

Le produit d'un  $\mathcal{P}'$ -nombre et d'une puissance  $p$ -ième, où  $p$  est un nombre premier et  $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \cup p$ , est appelé un  $(\mathcal{P} + 1)$ -nombre.

Ces définitions s'étendent naturellement à des uplets de nombres.

**PROPOSITION 4.10.** — Soit  $\mathcal{P}$  un ensemble fini de nombres premiers, contenant 2. Alors l'ensemble des  $(\mathcal{P} + 1)$ -lieux de branchement admissibles est fini.

Avant de prouver ce résultat, on énonce un lemme préliminaire très simple, auquel on fera référence plusieurs fois dans la preuve de la proposition :

**LEMME 4.11.** — Soit  $\mathcal{P}'$  un ensemble fini de nombres premiers. Alors il y a un nombre fini de triplets de  $\mathcal{P}'$ -nombres  $a, b, c$  de somme nulle, premiers entre eux. L'ensemble des  $\mathcal{P}'$ -lieux de branchement admissibles est fini.

*Démonstration.* — Les radicaux des trois nombres  $a, b$  et  $c$  sont bornés. La conjecture ABC (pour  $\epsilon = 1$  par exemple) majore donc  $\max(|a|, |b|, |c|)$ .

Pour la seconde assertion, on se ramène au cas où le  $r$ -uplet est rangé par ordre croissant et où il commence par 0. Lorsque l'on a trois coordonnées  $b_i, b_j$  et  $b_k$ , différentes de  $\infty$ , on a la relation ABC suivante (entre trois  $\mathcal{P}'$ -nombres)

$$(b_i - b_j)/\Delta + (b_j - b_k)/\Delta + (b_k - b_i)/\Delta = 0$$

où  $\Delta = \text{pgcd}(b_i - b_j, b_j - b_k, b_k - b_i)$ .

Chacun de ces triplets vérifie donc une relation ABC, à prendre dans un ensemble fini, d'après la première partie du lemme. Pour  $r$  fixé, la donnée de ces relations ABC détermine le  $r$ -uplet (car les nombres sont premiers entre eux) et le choix de  $r$ -uplets de  $\mathcal{P}'$ -nombres premiers entre eux est donc fini. En outre, si  $r$  est assez grand, il existe deux points de branchement distincts  $b_i$  et  $b_j$ , qui donnent la même relation ABC avec  $b_1 = 0$  et  $b_{r-1}$ , ce qui conduit au fait, écarté par hypothèse, que  $b_i = b_j$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.10.* — D'après le lemme précédent, il n'y a qu'un nombre fini de lieux de branchement universels (i.e. valables quelque soit  $p$ ).

Fixons un nombre premier  $p$ . Comme pour le cas de quatre points de branchement, l'ensemble des premiers qui apparaissent comme des puissances  $p$ -ièmes est fini. Le lemme précédent permet donc d'affirmer qu'il n'existe qu'un nombre fini de  $(\mathcal{P} + 1)$ -lieux de branchement admissibles.

Prouvons maintenant qu'il n'y a qu'un nombre fini de premiers  $p$  possibles pour les lieux de branchement non universels, ce qui conclura la preuve. Nous séparons la preuve en plusieurs cas :

- *Cas 1 : il apparaît dans  $\mathbf{b}$  une puissance  $p$ -ième au moins.* La conjecture ABC prouve que seul un nombre fini de nombres premiers  $p$  conviennent, exactement comme dans le cas de quatre points de branchement.

- *Cas 2 : il n'apparaît pas de puissance  $p$ -ième.* En particulier, tout paquet de coalescence est de cardinal impair, sauf peut-être pour 2 et  $p$ .

▷ *Cas 2.1 : deux points de branchement  $b_i$  et  $b_j$  sont congrus modulo  $p^2$ .* Soit  $b_k$  un point de branchement (fini) non congru à  $b_i$  modulo  $p$ . Alors la conjecture ABC avec  $\epsilon = \frac{1}{2}$  pour ce triplet limite encore  $p$  :

$$p \leq (K(\mathcal{P}))^2$$

où  $K(\mathcal{P})$  est une constante (dépendant de  $\mathcal{P}$ ).

▷ *Cas 2.2* : chaque fois que deux points de branchement  $b_i$  et  $b_j$  sont congrus modulo  $p$ , alors  $p$  divise exactement  $b_i - b_j$ . Lorsque trois points de branchement sont dans un même paquet ou dans trois paquets distincts de  $p$ -coalescence, alors la relation ABC obtenue pour ces trois points fait intervenir des  $\mathcal{P}$ -nombres. On a donc un choix fini de possibilités pour ces relations ABC. Ceci limite le nombre possible de points de branchement. Fixons donc un nombre  $2r$  de points de branchement, et donnons-nous une relation ABC pour chacun des triplets de points de branchement de ce type, et montrons que seul un nombre fini de  $(\mathcal{P} + 1)$ -lieux de branchement admissibles les respectent.

▷▷ *Cas 2.2.1* : il existe au moins trois paquets de congruence modulo  $p$ . On montre que dans ce cas, si  $b_i$  et  $b_j$  ne sont pas congrus modulo  $p$ , alors  $b_i - b_j$  est connu, ce qui détermine bien sûr  $p$ . Tout d'abord, il existe un point de branchement  $b_k$  tel que  $v_q(b_i - b_j) = v_q(b_i - b_k) = v_q(b_j - b_k) = \ell_q$ . En effet, si tel n'était pas le cas, l'ensemble des points de branchement congrus à  $b_i$  modulo  $q^{\ell_q}$  se séparerait en deux ensembles de congruence modulo  $q^{\ell_q+1}$ . Ceci contredit le fait que tout paquet de  $q^n$ -congruence ( $n \geq 1$ ) est de cardinal impair. Il existe au moins un point de branchement fini  $b_\ell$ , non  $q$ -congru à  $b_i$ . Si  $b_\ell$  n'est pas  $p$ -congru à au moins deux des trois points de branchement  $b_i, b_j, b_k$ , mettons à  $b_i$  et  $b_j$ , alors la relation ABC pour  $b_i, b_j, b_\ell$  donne  $\ell_q$ . Sinon, on peut supposer, par exemple, que  $b_\ell, b_j$  et  $b_k$  sont  $p$ -congrus, et la relation ABC pour ce triplet donne encore  $\ell_q$ .

▷▷ *Cas 2.2.2* : les points de branchement finis donnent exactement deux paquets modulo  $p$ . On note par  $A_1$  celui associé à  $b_1 (= 0)$  et  $A_2$  l'autre.

Remarquons tout d'abord que si  $A_2$  est réduit à un singleton ou à une paire, on a un choix fini pour ces points de branchement (comme pour le cas 2.2.1, on montre que la différence de deux points de branchement non congrus modulo  $p$  est connue).

On est ramené à la situation où  $A_1$  et  $A_2$  contiennent au moins trois éléments. Comme l'union de ces ensembles disjoints est de cardinal impair, on peut toujours supposer que  $A_2$  comporte au moins quatre éléments. Nous allons montrer que l'on a toujours une équation du type

$$2p\alpha^2 = \beta^2 - \gamma^2$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des  $\mathcal{P}$ -nombres premiers entre eux. Cette équation force  $\beta + \gamma$  ou  $\beta - \gamma$  à être un  $\mathcal{P}$ -nombre, et limite donc les choix de  $\beta$  et de  $\gamma$  d'après le lemme, ce qui à son tour borne les valeurs possibles de  $p$ .

Soit  $P$  (resp.  $I$ ) l'ensemble des nombres pairs (resp. impairs). On dit qu'un point de branchement est de type  $(A_1, P)$  s'il appartient à  $A_1 \cap P$ . De même, on définit les types  $(A_1, I)$ ,  $(A_2, P)$ ,  $(A_2, I)$ . On dit que les deux types  $(A_1, P)$  et  $(A_2, I)$  d'une part, et  $(A_1, I)$  et  $(A_2, P)$  d'autre part, sont *opposés*.

Le point clé est le suivant :

FAIT. — *S'il existe deux points de branchement de même type et tous deux supérieurs (ou inférieurs) à un point de branchement de type opposé, alors on a une équation de la forme annoncée.*

On montre par l'absurde que l'on a toujours une telle configuration. On suppose donc qu'aucun triplet ne donne cette configuration. On a bien sûr  $b_1 \in A_1 \cap P$ . Par conséquent, au plus un point de branchement est de type  $(A_2, I)$ . Comme  $|A_2| \geq 4$ , au moins trois points sont de type  $(A_2, P)$ , donc aucun point n'est de type  $(A_1, I)$ . Comme  $|A_1| \geq 3$ , au moins trois points sont de type  $(A_1, P)$ , donc aucun n'est de type  $(A_2, I)$ . Tous les points de branchement finis sont donc pairs, ce qui est absurde.  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [Be] S. BECKMANN, Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves, *J. Algebra*, 125 (1989), 236–255.
- [Bi] J. BIRMAN, Braids, links, and mapping class groups, *Annals of Math. Studies*, vol. 82, Princeton Univ. Press, 1974.
- [CH] K. COOMBES, D. HARBATER, Hurwitz families and arithmetic Galois groups, *Duke Math. J.*, 52 (1985), 821–839.
- [Co] J.-M. COUVEIGNES, Calcul et rationalité de fonctions de Belyi en genre 0, *Ann. Inst. Fourier*, 44-1 (1994), 1–38.
- [CG] J.-M. COUVEIGNES, L. GRANBOULAN, Dessins from a geometric point of view, in 'The Grothendieck theory of dessins d'enfants', Leila Schneps ed., Cambridge University Press, 1995, pp. 79–113.
- [D1] P. DÉBES, Groupes de Galois sur  $K(T)$ , *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 2 (1990), 229–243.
- [D2] P. DÉBES, Covers of  $\mathbb{P}^1$  over the  $p$ -adics, *Contemp. Math.*, 186 (1995), 217–238.
- [DD] P. DÉBES, J.-C. DOUAI, Algebraic covers : Field of moduli versus field of definition, *Ann. Sci. École Normale Sup.*, 30 (1997), 303–338.

- [DF] P. DÈBES, M. FRIED, Nonrigid constructions in Galois theory, *Pacific J. Math.*, 56 (1990), 81–122.
- [E1] M. EMSALEM, On reduction of covers of arithmetic surfaces, *Contemp. Math.*, 245 (1999), 117–132.
- [E2] M. EMSALEM, Sur les espaces de Hurwitz, *Séminaires et congrès*, 5 (2001), 69–99.
- [F1] S. FLON, Bonnes places et corps des modules, *Séminaires et congrès*, 5 (2001), 101–117.
- [F2] S. FLON, Mauvaises places ramifiées dans le corps des modules d’un revêtement, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.
- [F3] S. FLON, Restriction de revêtements, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2002.
- [Fr] M. FRIED, Fields of definition of function fields and Hurwitz families. Groups as Galois groups, *Comm. in Alg.*, 1 (1977), 17–82.
- [FV] M. FRIED, H. VÖLKLEIN, The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces, *Math. Ann.*, 290 (1991), 771–800.
- [Fu] W. FULTON, Hurwitz schemes and the irreducibility of the moduli of algebraic curves, *Ann. Math.*, 90 (1969), 542–575.
- [Ge] S. GERVAIS, Presentation and central extensions of mapping class groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348-8 (1996), 3097–3132.
- [GHP] L. GERRITZEN, F. HERRLICH, M. VAN DER PUT, Stable  $n$ -pointed trees of projective lines, *Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 91 (1988), 131–163.
- [GM] A. GROTHENDIECK, J.P. MURRE, The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme, vol. 208, Springer-Verlag, 1971.
- [Hu] A. HURWITZ, Über Riemann’sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, *Math. Ann.*, 39 (1891), 1–61.
- [Lu] F. LUO, A presentation of the mapping class group, *Math. Res. Lett.*, 4 (1997), 735–739.
- [MM] G. MALLE, B.H. MATZAT, *Inverse Galois theory*, Springer-Verlag, 1999.
- [Mi] P. MIHĂILESCU, Primary units and a proof of Catalan’s conjecture, soumis au *Journal de Crelle* (2003).
- [W1] S. WEWERS, Construction of Hurwitz spaces, Thèse, Université d’Essen, 1998.
- [W2] S. WEWERS, Deformation of tame admissible covers of curves, Institut für Experimentelle Mathematik Essen, 1998.

Manuscrit reçu le 2 décembre 2002,  
révisé le 11 juillet 2003,  
accepté le 13 janvier 2004.

Stéphane FLON,  
Université Lille 1  
UFR de Mathématiques, Bât. M2  
Cité scientifique  
59655 Villeneuve d’Ascq Cedex (France).  
Stephane.Flon@math.univ-lille1.fr