ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Donghua JIANG

Un 3-polyGEM de cohomologie modulo 2 nilpotente

Tome 54, nº 4 (2004), p. 1053-1072.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_4_1053_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
54, 4 (2004), 1053–1072

UN 3-POLYGEM DE COHOMOLOGIE MODULO 2 NILPOTENTE

par Donghua JIANG

1. Introduction.

Par convention dans cet article, la cohomologie modulo 2, i.e., sur le corps $\mathbb{F}_2$ sera notée H^*X, et la cohomologie réduite modulo 2 sera notée $\tilde{\mathrm{H}}^*X$. J.-P. Serre a démontré en 1953 le théorème suivant :

Théorème 1 (Serre, [12]). — *Soit X un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose que :*

– la cohomologie $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ est non triviale;

– les groupes H^nX sont nuls pour tout n assez grand.

Alors, pour une infinité d'entiers n, la multiplication par 2 du groupe π_nX dans lui-même n'est pas un isomorphisme.

Convention. — On dira qu'un espace X est *de type fini en 2*, si sa cohomologie (modulo 2) est de dimension finie en chaque degré.

Tous les espaces que l'on considérera auront cette propriété.

Serre conjecturait que sous les hypothèses du théorème, il existe une infinité d'entiers n tels que le groupe π_nX contient un élément non trivial d'ordre 2.

Mots-clés : PolyGEM – Espaces de Milgram – Suite spectrale d'Eilenberg-More.
Classification math. : 55N99 – 55S45 – 57T35 – 55R20 – 55T20.

Cette conjecture a été démontrée par C. McGibbon et J. Neisendorfer [9] en 1983, puis une autre preuve a été donnée par J. Lannes et L. Schwartz [7] en 1985. Depuis, plusieurs généralisations du théorème de Serre ont été données par Y. Félix, S. Halperin, J.-M. Lemaire et J.-C. Thomas [4] en 1987, et par J. Lannes et L. Schwartz [8] en 1988. Avant de donner ces énoncés, rappelons quelques définitions.

DÉFINITION 1. — *On dira qu'un espace possède une* tour de Postnikov finie en $p = 2$ *si la multiplication par 2 du groupe* $\pi_n X$ *dans lui-même est un isomorphisme pour tout* n *assez grand.*

DÉFINITION 2. — *L'ensemble des* polyGEMs *ou* systèmes de Postnikov *(resp.* polyGEMs stables*) est défini récursivement comme suit :*

- *les* 1*-polyGEMs sont les espaces*

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant i_m, m\in\mathbb{N}} \mathrm{K}(\mathrm{k}_{i,m}, m),$$

  où $\mathrm{k}_{i,m} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2^l, l = 1, 2, \cdots, \infty\}$ *et* $i_m \in \mathbb{N}$ *pour tout* $m \geqslant 1$*, les* 1*-polyGEMs sont tous stables ;*
- *les* n*-polyGEMs (resp. les* n*-polyGEMs stables, qui sont des H-espaces) sont obtenus comme fibres homotopiques d'une application* $f : E \to B$ *telle que* E *est un* $(n-1)$*-polyGEM (resp.* $(n-1)$*-polyGEM stable) et que* B *est un* 1*-polyGEM (dans le cas stable,* f *est un morphisme de H-espaces).*

Remarques. — 1. Dans la suite, on dira «polyGEM» pour «k-polyGEM» s'il n'y a pas lieu de spécifier l'entier k.

2. La définition ci-dessus n'est pas la plus générale (voir [3]), on pourrait définir un 1-polyGEM par la condition que c'est un produit (infini) d'espaces d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(G_n, n)$, $n = 1, 2, \cdots$. Puis procéder itérativement comme plus haut, modulo quelques hypothèses tout polyGEM est homotopiquement équivalent à 2-complétion près à un de ceux dans la définition 2.

On a :

THÉORÈME 2 (Lannes et Schwartz, [8], 0.1). — *Soit* X *un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose que :*

– *la cohomologie* $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ *est non triviale;*

– *la cohomologie* $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ *est nilpotente (i.e., tout élément de* $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ *est nilpotent).*

Alors, pour une infinité d'entiers n*, la multiplication par 2 du groupe* $\pi_n X$ *dans lui-même n'est pas un isomorphisme. Autrement dit,* X *n'a pas de tour de Postnikov finie en* $p = 2$.

Remarque. — Si on suppose, dans la définition des polyGEMs, que les i_m sont égaux à zéro dès que m est assez grand, on obtient des espaces que l'on appellera les *polyGEMs finis* (en $p = 2$), ce sont des espaces dont la tour de Postnikov est finie en 2. Alors le théorème 2 est équivalent à dire que la cohomologie réduite des polyGEMs finis simplement connexes est soit triviale, soit non nilpotente.

On a aussi :

THÉORÈME 3 (Félix, Halperin, Lemaire et Thomas, [4], 5.1). — *Soit* X *un espace simplement connexe de type fini en 2. On suppose que :*

– *la cohomologie* $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ *est non triviale;*

– $\mathrm{cat}X$ *est fini (i.e.,* X *possède un recouvrement fini par des espaces contractiles et on note par* $\mathrm{cat}X$ *le nombre minimum d'espaces pour un tel recouvrement).*

Alors, X *n'est pas un polyGEM.*

De plus, d'après J. Grodal :

THÉORÈME 4 (Grodal, [5], 6.5). — *Soit* X *un polyGEM simplement connexe de type fini en 2. Si la cohomologie* $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ *est non triviale, alors elle n'est pas localement finie en tant que module sur l'algèbre de Steenrod.*

Voici quelques précisions sur cet énoncé.

– Un $\mathcal{A}_2$−module est *localement fini* si et seulement si le sous-module sur l'algèbre de Steenrod engendré par tout élément est fini.

– Si un $\mathcal{A}_2$−module n'est pas nilpotent, il n'est pas localement fini non plus. Au contraire, un $\mathcal{A}_2$−module qui n'est pas localement fini peut être nilpotent, voir par exemple la $\mathcal{A}_2$−algèbre $\mathcal{E}(n)$ définie dans la prochaine section.

Dans son article [5], Grodal propose :

Conjecture 1 (Grodal, [5], 6.1). — *La cohomologie réduite des polyGEMs simplement connexes de type fini en 2 est soit triviale, soit non nilpotente.*

Cette conjecture semble raisonnable, étant donnés les résultats précédents. Mais si cet énoncé est faux, en particulier pour les polyGEMs stables, alors il existe un polyGEM stable X dont la cohomologie $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ est non triviale et nilpotente. Le théorème 2 dit que pour une infinité d'entiers n, la multiplication par 2 du groupe $\pi_n X$ dans lui-même n'est pas un isomorphisme, et le théorème 3 dit que $\mathrm{cat} X = +\infty$, enfin celui de 4 affirme que la cohomologie n'est pas localement finie.

L'objectif de cet article est de donner un contre-exemple à cette conjecture. Etant donné un entier $l \geqslant 2$, on va construire un 3-polyGEM stable $(2l-1)$–connexe X dont la cohomologie $\tilde{\mathrm{H}}^*X$ est non triviale et nilpotente.

Le plan de cet article est le suivant : la section 2 contient des préliminaires, i.e., des travaux de J. Milgram et de L. Smith. On construit les espaces X_n dans la section 3 dont la «limite» X_∞ est le contre-exemple cherché. En revanche dans la dernière section, on montre que la conjecture 1 est vraie pour les 2-polyGEMs stables simplement connexes.

2. Préliminaires.

Cette section rappelle des travaux de J. Milgram et de L. Smith. Le travail de Milgram donne la structure de la cohomologie d'un certain 2-polyGEM en tant qu'algèbre de Hopf, avec des informations sur la structure de module instable. Celui de Smith donne essentiellement la structure d'algèbre, à filtration près, pour tous les polyGEMs stables.

Rappelons que :

- *le module* $\mathrm{F}(n)$ est le module instable libre sur l'algèbre de Steenrod engendré par un générateur ι_n de degré n, une base sur le corps $\mathbb{F}_2$, à suspension n-ième près, est donnée par l'ensemble des opérations de Steenrod d'excès inférieur ou égal à n ;
- *l'opération* Sq_0 est définie sur un module instable M par $Sq_0 x = Sq^{|x|}x$ pour tout $x \in M$, où $|x|$ désigne le degré de x. En particulier,

l'ensemble Sq_0M est un sous-module instable de M :

$$Sq_0M = \{Sq_0x \mid x \in M\}$$

et $Sq_0\mathrm{F}(n)$ s'identifie au $\mathbb{F}_2$−espace vectoriel gradué engendré par les $Sq^I\iota_n$, $\mathrm{ex}(I) = n$;

- et *le foncteur* U *de Steenrod-Epstein* [14] est le foncteur qui associe à tout module instable M l'algèbre (instable) enveloppante

$$\mathrm{U}(M) = S^*(M)/(Sq_0x - x^2, x \in M),$$

  où, x^2 désigne le carré dans l'algèbre symétrique. C'est l'adjoint à gauche du foncteur *oubli* de la catégorie des algèbres instables vers celle des modules instables, $\mathrm{U}(M)$ est une algèbre de Hopf primitivement engendrée [11];

- la cohomologie $\mathrm{H}^*(\mathrm{K}(\mathbb{F}_2, n))$ est isomorphe à $\mathrm{U}(\mathrm{F}(n))$ en tant qu'algèbre de Hopf. Comme algèbre polynômiale sur le corps $\mathbb{F}_2$ elle est engendrée par les classes $Sq^I\iota_n$ avec I suite admissible d'excès $< n$.

Définition 3 (Milgram, [10], 1.1.1). — *Soit E_n la fibre homotopique de l'application $\mathrm{K}(\mathbb{F}_2, n) \to \mathrm{K}(\mathbb{F}_2, 2n)$ qui correspond au cup-carré de la classe (primitive) $\iota_n \in \mathrm{H}^n(\mathrm{K}(\mathbb{F}_2, n))$. L'espace E_n est un 2-polyGEM stable et donc un H-espace, H^*E_n est une algèbre de Hopf.*

Remarque. — Comme remarqué par F. Cohen [2], ces espaces étaient d'abord étudiés par L. Kristensen [6], et puis par E.H. Brown et F.P. Peterson [1] lorsqu'ils calculaient les cup-produits en bas degré qui permettent de construire des opérations cohomologiques instables secondaires détectant le produit de Whitehead (sur les sphères de dimension différente de $2^k - 1$).

Convention. — On appellera l'espace E_n un *espace de Milgram* dans la suite.

Notations. — 1. $\bar{\iota}_n$ désignera un élément de degré n tel que, pour toute suite admissible I d'excès $< n$ les éléments $Sq^I\bar{\iota}_n$ sont linéairement indépendants, et que $\bar{\iota}_n^2 = 0$. Le $\mathcal{A}_2$−module engendré est donc le quotient $\mathrm{F}(n)/Sq_0\mathrm{F}(n)$.

2. λ désignera génériquement un $\mathcal{A}_2$−générateur primitif (d'une $\mathcal{A}_2$−algèbre de Hopf); τ désignera génériquement un $\mathcal{A}_2$−générateur non primitif (d'une $\mathcal{A}_2$−algèbre de Hopf).

Par définition l'algèbre instable $\mathcal{E}(n)$ est $\mathrm{U}(\mathrm{F}(n)/Sq_0\mathrm{F}(n))$. En tant qu'algèbre c'est l'algèbre extérieure engendrée par les $Sq^I\bar{\iota}_n$, I suite admissible d'excès strictement inférieur à n.

Soit $\mathcal{I}_{2n-1}$ le sous-module de $\mathrm{F}(2n-1)$ engendré par les $Sq^K\iota_{2n-1}$ où $K=(k_1,\cdots,k_r)$ est une suite admissible (d'excès strictement inférieur à $2n$) telle qu'il existe un k_i impair, $1\leqslant i\leqslant r$. Par définition $\mathcal{P}(n)=\mathrm{U}(\mathcal{I}_{2n-1})$. Notons que ι_{2n-1} n'est pas dans $\mathcal{I}_{2n-1}$.

Le théorème de Milgram dit que la cohomologie (modulo 2) de E_n est isomorphe à $\mathcal{E}(n)\otimes\mathcal{P}(n)$ en tant qu'algèbre. Il précise la diagonale.

Théorème 5 (Milgram, [10], 1.2.1, 1.3.3). — *On a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathrm{H}^*E_n\cong\mathcal{E}(n)\otimes\mathcal{P}(n).$$

– *pour n pair, en tant que $\mathcal{A}_2-$algèbre, H^*E_n possède les générateurs $\bar{\iota}_n$, τ_1, λ_2, $\cdots$, λ_k dont $\bar{\iota}_n$, λ_2, $\cdots$, λ_k sont primitifs et*

$$\Delta(\tau_1)=\tau_1\otimes 1+\bar{\iota}_n\otimes\bar{\iota}_n+1\otimes\tau_1;$$

– *pour n impair, en tant que $\mathcal{A}_2-$algèbre, H^*E_n possède les générateurs $\bar{\iota}_n$, λ_1, τ_2, $\cdots$, τ_k dont $\bar{\iota}_n$, λ_1 sont primitifs et pour $i=2,\cdots,k$,*

$$\Delta(\tau_i)=\tau_i\otimes 1+Sq^{2^{i-1}-1}\bar{\iota}_n\otimes Sq^{2^{i-1}-1}\bar{\iota}_n+1\otimes\tau_i.$$

Où, k est l'unique entier tel que $2^{k-1}\leqslant n<2^k$, et $|\tau_i|=|\lambda_i|=2(n+2^{i-1}-1)$, $\forall\ i=1,\cdots,k$.

Remarques. — 1. Les $\bar{\iota}_n$, τ_i^2 et λ_j, $i,j=1,\cdots,k$, sont primitifs.

2. Dans le même papier, Milgram donne la structure de module sur l'algèbre de Steenrod pour un autre système de générateurs, équivalent à celui dans l'énoncé. Et il précise le lien entre ces deux systèmes de générateurs.

On rappelle maintenant les travaux de Smith [13]. En fait le résultat de Milgram se déduit pour partie au moins de ceux-ci. Plus précisément, on va calculer, à l'aide de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore, la cohomologie de la fibre F associée à une fibration $\pi: E\to B$, où B est un 1-polyGEM

1-connexe et E est un H-espace. On a un carré cartésien :

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
E \arrow[r, "\pi"] & B
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

Comme dans [13], on suppose que π est un morphisme de H-espaces pour les structures de H-espace de E et de B, et que H^*E est une algèbre de Hopf cocommutative. On remarque que par ces hypothèses, $\ker(\pi^*)$ est un idéal de Hopf dans H^*B.

Notation. — $\{\mathrm{E}_r, d_r\}$ désignera la suite spectrale d'Eilenberg-Moore associée au carré cartésien (1) vérifiant les hypothèses dans le paragraphe précédent.

Théorème 6 (Smith, [13], 1.5). — *Soient* Γ, A *deux algèbres de Hopf cocommutatives et soit* $\varphi : \Gamma \to A$ *un morphisme d'algèbres de Hopf. Soit* $\Lambda = \text{sub-ker}(\varphi)$, *la sous-algèbre de Hopf de* Γ *qui engendre* $\ker(\varphi)$. *Alors il y a un isomorphisme d'algèbres de Hopf :*

$$\mathrm{Tor}_\Gamma(A, \mathbb{F}_2) \cong A//\varphi \otimes \mathrm{Tor}_\Lambda(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2).$$

Corollaire 1 (cf. [13], 2.1). — *On a un isomorphisme d'algèbres :*

$$\mathrm{E}_2 \cong \mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(\pi^*) \otimes \mathrm{Tor}^*_{\text{sub-ker}(\pi^*)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2).$$

Démonstration. — Par hypothèse, π^* est un morphisme d'algèbres de Hopf et H^*E est une algèbre de Hopf cocommutative. D'autre part, le calcul de Serre (voir [12]) dit que H^*B est une algèbre de Hopf cocommutative. Donc, on peut établir le résultat d'après le théorème 6.

Proposition 1 (cf. [13], 2.2). — $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_\infty$.

Démonstration. — Le calcul de Serre (voir [12]) dit que $\mathrm{H}^*B = \mathrm{P}[V]$, i.e., une algèbre polynômiale en certain espace vectoriel gradué V. Comme $\text{sub-ker}(\pi^*)$ est une sous-$\mathcal{A}_2$-algèbre de Hopf de $\mathrm{P}[V]$, le théorème de Borel (voir [11], 7.11) sur la structure des algèbres de Hopf sur le corps $\mathbb{F}_2$ dit que c'est aussi une algèbre polynômiale, i.e., $\text{sub-ker}(\pi^*) = \mathrm{P}[x_1, \cdots, x_n, \cdots]$. Plus précisément elle s'identifie à $\mathrm{U}(P)$, où P est le sous-module instable des éléments primitifs de la sous-algèbre de Hopf $\text{sub-ker}(\pi^*)$.

A l'aide du complexe de Koszul, on obtient :

$$\mathrm{Tor}^*_{\mathrm{U}(P)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) = \mathrm{E}[(P/Sq_0(P))].$$

Soit, comme espace vectoriel gradué, la base u_i, $i \in I$, du module instable $P/Sq_0(P)$ qui correspond à la base monomiale des x_i de P. En tant qu'algèbre, on a avec un petit abus de notation :

$$\mathrm{E}_2 \cong \mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(\pi^*) \otimes \mathrm{E}[u_1, \cdots, u_n, \cdots].$$

Dans ces formules $\mathrm{E}[\cdots]$ désigne l'algèbre extérieure, soit sur l'espace vectoriel gradué $P/Sq_0(P)$ en degré cohomologique -1, soit sur les générateurs u_i en bidegré $(-1, |x_i|)$.

Donc E_2 est une algèbre engendrée par $\mathrm{E}_2^{0,*}$ et $\mathrm{E}_2^{-1,*}$.

Or la différentielle d_r agit comme une dérivation, et pour $p = 0$ ou 1, $r \geqslant 2$, on a

$$d_r : \mathrm{E}_2^{-p,*} \to \mathrm{E}_2^{-p+r,*} = 0.$$

Donc pour des raisons de degré, $d_r = 0$, $\forall\, r \geqslant 2$ et $\mathrm{E}_2 = \mathrm{E}_\infty$.

Etant donnée une fibration $\pi : E \to B$ de fibre F, la cohomologie H^*F a une filtration décroissante par des modules instables $F_s = F_s(\mathrm{H}^*F)$, $s \leqslant 0$ et F_0 est l'image de H^*E. De plus le produit envoie $F_s \otimes F_t$ vers F_{s+t}, l'objet gradué associé $\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}^*F$ a donc une structure d'algèbre et de module instable et :

Corollaire 2. — *Etant donnée une fibration $\pi : E \to B$ de fibre F, où B est un 1-polyGEM 1-connexe, π est un morphisme de H-espaces et H^*E est une algèbre de Hopf cocommutative. On a un isomorphisme de $\mathcal{A}_2$-algèbres graduées :*

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}^*F \cong \mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(\pi^*) \otimes \mathrm{E}[u_1, \cdots, u_n, \cdots].$$

Remarques. — 1. Dans la formule ci-dessus le degré de u_i considéré comme classe dans $\mathrm{Gr}\ \mathrm{H}^*F$ est $|x_i| - 1$.

2. Ce corollaire résulte du corollaire 1 et de la proposition 1. En effet, on utilise l'idée de Smith (voir [13], §2).

3. Un moment de réflexion montre que ceci restitue le résultat de Milgram pour la partie multiplicative.

Précisons un peu le résultat, en tant que module instable on a :

$$\Sigma^{-s}F_s/F_{s+1} \cong \mathrm{E}_\infty^{s,*}.$$

Donc dans notre cas :

$$\Sigma^{-s}F_s/F_{s+1} \cong \mathrm{E}_2^{s,*},$$

et

$$\Sigma^{-s}F_s/F_{s+1} \cong \mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(\pi^*) \otimes E_i,$$

où E_i est la i-ème puissance extérieure de $\Sigma^{-1}P/Sq_0(P)$, donc est engendrée par les monômes $u_{a_1} \cdots u_{a_i}$.

Exemple 1.— Pour mieux comprendre que le morphisme dans le corollaire 2 n'est pas un isomorphisme d'algèbres en général, on étudie la fibration

$$F \longrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$$

avec $B = \mathrm{K}(\mathbb{F}_2, 2)$, $E = \mathrm{P}B \cong *$ et $F = \Omega B \cong \mathrm{B}\mathbb{F}_2$. Comme $\tilde{\mathrm{H}}^*E = \{0\}$ et $\ker(\pi^*) = \mathrm{H}^*B$ est une algèbre de Hopf, on a donc

$$\begin{aligned}\text{sub-ker}(\pi^*) &= \ker(\pi^*)\\ &= \mathrm{H}^*B\\ &= \mathrm{P}[Sq^{2^{i-1}} \cdots Sq^2Sq^1\iota_2, i = 0, 1, \cdots]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(\pi^*) \otimes \mathrm{E}[u_1, \cdots, u_n, \cdots]\\ &\qquad\qquad \cong \mathrm{E}[\Sigma^{-1}\{Sq^{2^{i-1}} \cdots Sq^2Sq^1\iota_2, i = 0, 1, \cdots\}]\end{aligned}$$

est une algèbre extérieure (graduée). Or $\mathrm{H}^*F = \mathbb{F}_2[\iota_1]$ est une algèbre polynômiale, le morphisme en question n'est donc pas un isomorphisme d'algèbres.

Avant de terminer cette section on énonce un lemme qui sera utile dans la suite. Il donne des informations sur les générateurs polynômiaux de la cohomologie de la fibre F d'une application de H-espaces $\pi : E \to B$, où B est un 1-polyGEM 1-connexe. La cohomologie de E est supposée cocommutative.

LEMME 1.— *Supposons que le noyau de π^*, en tant qu'algèbre de Hopf, soit engendré par des cup-carrés. Alors pour tout élément non-nilpotent x de H^*F, il existe un entier positif k tel que $Sq_0^k(x)$ soit dans l'image de H^*E.*

Démonstration. — Soit, comme plus haut, P l'ensemble des éléments primitifs dans le noyau de π^*. Alors les résultats de Smith, en particulier le corollaire 2 (rappelons que B est un 1-polyGEM 1-connexe), disent qu'un gradué comme module instable de H^*F est isomorphe à :

$$\mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(\pi^*) \otimes \mathrm{E}[\Sigma^{-1}P/Sq_0(P)].$$

Par hypothèse, $P \cong Sq_0 M$ pour certain module instable M. Par conséquent, le module $\Sigma^{-1}P/Sq_0(P)$ est une suspension.

Soit x un élément non nilpotent de H^*F. Tous les éléments en degré strictement positif de $\mathrm{E}[\Sigma^{-1}P/Sq_0(P)]$ sont nilpotents. Supposons que la classe $\bar{x} \neq 0$ de x dans le gradué soit de la forme $\sum_\ell p_\ell \otimes y_\ell \neq 0$, y_ℓ appartenant à la i-ème puissance extérieure pour un entier $i > 0$. La classe x est donc dans le terme $F_{-\imath}$ de la filtration de H^*F mais pas dans F_{-i+1}. Il existe $d > 0$ tel que $Sq_0^d(y_\ell) = 0$ pour tout ℓ. Donc

$$Sq_0^d(\bar{x}) = \sum_\ell Sq_0^d(p_\ell) \otimes Sq_0^d(y_\ell) = 0,$$

i.e., la classe de $Sq_0^d(x)$ est au moins dans le terme $F_{-\imath+1}$ de la filtration. Par itération on obtient que $Sq_0^k(x) \in \mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(\pi^*)$ pour certain entier $k > 0$, l'affirmation suit.

3. La construction du contre-exemple.

Dans cette section, on va établir le résultat principal de l'article :

Théorème 7. — *Etant donné un entier $l \geqslant 2$, il existe un 3-polyGEM stable $(2l-1)-$connexe dont la cohomologie réduite modulo 2 est non triviale et nilpotente.*

Pour établir ce résultat, on va procéder en plusieurs étapes. Plus précisément, on donne d'abord la construction des espaces X_n dont la «limite» X_∞ est l'espace cherché. Ceci est fait dans la première sous-section. Dans la seconde on établit les propriétés de cette construction. Dans la dernière on montre que l'espace X_∞ est un bon candidat qui permet d'établir le théorème 7.

3.1. La construction des espaces X_n.

On va donc construire un 3−polyGEM stable dont la cohomologie réduite modulo 2 est nilpotente. Pour ce faire, on construit des 2-polyGEMs stables finis P_n (qui sont des produits d'espaces E_i de Milgram) et X_n est la fibre homotopique d'une application de P_n dans un 1-polyGEM G_n :

$$X_n \xrightarrow{i_n} P_n \xrightarrow{f_n} G_n$$

telle que le noyau (en tant qu'algèbre de Hopf) soit engendré par des cup-carrés. Par construction on aura des applications $p_{n+1} : X_{n+1} \to X_n$, telles que

$$p_{n+1}^* : \mathrm{H}^i X_n \to \mathrm{H}^i X_{n+1}$$

soit un isomorphisme pour tout entier $i \leqslant 4n+2$. Ces applications induiront des applications $q_n : X_\infty \to X_n$, telles que

$$q_n^* : \mathrm{H}^i X_n \to \mathrm{H}^i X_\infty$$

soit un isomorphisme pour tout entier $i \leqslant 4n+2$, de plus les images dans $\mathrm{H}^* X_\infty$ par q_n^* de tous les générateurs (en tant qu'algèbre) de $\tilde{\mathrm{H}}^* X_n$ seront nilpotentes.

L'espace cherché est obtenu pour $n = \infty$, la condition cherchée (la nilpotence de tout élément en degré strictement positif) sera conséquence de calculs dans la suite spectrale d'Eilenberg-Moore. Les espaces E_i de Milgram sont les briques élémentaires de cette construction. On va procéder par récurrence sur n pour construire l'espace X_n, l'idée est de rendre nilpotents les générateurs (en tant qu'algèbre) par récurrence sur le degré. La procédure standard pour ce faire produit une tour (et donc un système) de Postnikov infinie, avec les espaces E_i on s'affranchit de cette contrainte.

La construction de X_1. — Pour $n = 1$, la construction est la suivante : soit $l \geqslant 2$, définissons $X_1 = E_{2l}$, $P_1 = E_{2l}$ et $G_1 = *$. On a la fibration triviale :

$$X_1 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} G_1 = *,$$

où $\ker(f_1^*) = \{0\}$ et où X_1 est $(2l-1)$−connexe.

Supposons la construction faite pour l'entier n.

L'hypothèse de récurrence. — On va supposer que :

(1) $p_n^* : \mathrm{H}^* X_{n-1} \to \mathrm{H}^* X_n$ est un isomorphisme en degré inférieur ou égal à $4n-2$;

(2) P_n est le produit de P_{n-1} par des espaces de Milgram, et les images des générateurs (en tant qu'algèbre) de $\tilde{\mathrm{H}}^* P_{n-1}$ en degré n via $p_n^* \circ i_{n-1}^*$ dans $\tilde{\mathrm{H}}^* X_n$ sont nilpotentes;

(3) $(f_n^*)^{-1}(Sq_0(\mathrm{PH}^* P_n)) \subset Sq_0(\mathrm{PH}^* G_n)$, ce qui implique que le noyau (en tant qu'algèbre de Hopf) est engendré par des cup-carrés.

Remarques. — 1. L'ensemble de ces conditions (pour tous les entiers n) impliquera que les images par q_{n-1}^* dans $\tilde{\mathrm{H}}^* X_\infty$ de tous les générateurs en tant qu'algèbre de $\tilde{\mathrm{H}}^* X_{n-1}$ sont nilpotentes. Par conséquent et à cause de la stabilité tout élément de degré strictement positif de $\mathrm{H}^* X_\infty$ est nilpotent. En fait l'image de $x \in \mathrm{H}^* X_{n-1}$, $|x| > 0$, est nilpotente dans $\mathrm{H}^* X_{n+k}$ dès que k est assez grand.

2. Dans la condition (3) et dans la suite f_n^* désignera aussi l'application restreinte aux a, le contexte fera qu'il n'y aura pas d'ambiguïtés.

3. La condition (1) est trivialement réalisée pour $n = 1$.

La construction de X_{n+1}. — On suppose X_n construit, on passe à X_{n+1}.

Si tous les générateurs de $\tilde{\mathrm{H}}^* X_n$ en degré $n+1$ provenant de $\tilde{\mathrm{H}}^* P_n$ sont nilpotents, on définit $X_{n+1} = X_n$, $P_{n+1} = P_n$, $G_{n+1} = G_n$, $f_{n+1} = f_n$.

En particulier, et étant donnée la structure de $\mathrm{H}^* E_{2l}$, on a

$$X_1 = X_2 = \cdots = X_{4l-1} = E_{2l}.$$

Dans le cas contraire P_{n+1} sera un produit de la forme :

$$P_n \times E = P_n \times E_{2n+2}^{\times \alpha}$$

pour un certain entier α. De même G_{n+1} sera un produit :

$$G_n \times G = G_n \times K_{2n+2}^{\times \alpha}$$

pour le même entier α, avec $K_{2n+2} = \mathrm{K}(\mathbb{F}_2, 2n+2)$.

Par exemple X_{4l} sera la fibre de l'application de H-espaces :

$$E_{2l} \times E_{8l} \to K_{8l}$$

déterminée comme suit. La cohomologie de E_{2l} a un générateur polynômial τ en degré $4l$. Ce générateur τ n'est pas primitif mais son carré l'est. On considère alors l'application donnée par la classe primitive $\tau^2 + \bar{\iota}_{8l}$. Comme $\bar{\iota}_{8l}$ est de carré nul l'image de τ dans la cohomologie de la fibre homotopique X_{4l} est de puissance quatrième nulle.

Il faut systématiser cette construction. L'application

$$f_{n+1} : P_n \times E \to G_n \times G$$

sera de la forme :

$$f_{n+1}(\alpha, \beta) = (f_n(\alpha), h_n(\alpha, \beta)).$$

On aura donc un diagramme commutatif de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} X_{n+1} & \longrightarrow & P_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & G_{n+1} \\ {\scriptstyle p_{n+1}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{f_n} & G_n \end{array} \tag{2}$$

Les deux applications verticales ne portant pas de nom sont les projections évidentes.

La construction de h_n. — Si le noyau de chaque application f_n^* est constitué de cup-carrés, pour garantir la nilpotence il suffit, grâce au lemme 1 et à la stabilité, de rendre nilpotente les images des générateurs polynômiaux de $\tilde{\mathrm{H}}^* P_n$ dans $\mathrm{H}^* X_n$. On va donc faire une construction qui rend nilpotente les images dans $\mathrm{H}^* X_n$, en degré $n+1$, des générateurs polynômiaux de $\mathrm{H}^* P_n$ (dans le même degré). Nous aurons à distinguer deux cas selon qu'ils sont (en tant qu'élément de $\mathrm{H}^* P_n$) primitifs ou non. Rappelons que l'on a distingué dans $\mathrm{H}^* E_m$ des éléments de type τ ou λ. On notera donc dans $\mathrm{H}^* P_n$

- $x_1, \cdots, x_k$ pour les générateurs primitifs;
- $y_1, \cdots, y_h$ pour ceux qui ne le sont pas,

dans ce dernier cas selon Milgram leurs cup-carrés le sont.

Posons alors

$$\begin{aligned} E &= E_{2n+2}^{\times(k+h)} \\ G &= K_{2n+2}^{\times(k+h)} \end{aligned}$$

et f_{n+1} est défini par la formule suivante :

$$\begin{array}{rccc} f_{n+1}: & P_n \times E & \to & G_n \times G \\ & (\alpha,\beta) & \mapsto & (f_n(\alpha), h_n(\alpha,\beta)) \end{array}$$

où il faut définir $h_n : P_n \times E \to G$, mais comme

$$[P_n \times E, G] \cong \left(\mathrm{H}^{2n+2}(P_n \times E)\right)^{\times(k+h)},$$

il suffit de donner $k+h$ classes de cohomologie, ce seront les

$$x_1^2 + \bar{\iota}_{2n+2,1}, \cdots, x_k^2 + \bar{\iota}_{2n+2,k}$$

et

$$y_1^2 + \bar{\iota}_{2n+2,k+1}, \cdots, y_h^2 + \bar{\iota}_{2n+2,k+h}$$

qui sont toutes primitives, et donc h_n est une application de H-espaces ($\bar{\iota}_{2n+2,i}$ désigne le générateur correspondant à la $i-$ème copie de E_{2n+2}).

3.2. Les propriétés de la construction.

Vérifions maintenant les hypothèses de récurrence pour le cas $n+1$.

Propriété 1.— *Du diagramme (2) on déduit un diagramme de fibrations*

$$(3) \qquad \begin{array}{ccccc} F_{n+1} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & P_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & G_{n+1} \\ {\scriptstyle p_{n+1}}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_n & \xrightarrow{i_n} & P_n & \xrightarrow{f_n} & G_n \end{array}$$

De la définition de f_{n+1} on déduit que $F_{n+1} \cong K_{4n+3}^{\times(k+h)}$, donc est $(4n+2)-$connexe et donc $p_{n+1}^* : \mathrm{H}^*X_n \to \mathrm{H}^*X_{n+1}$ est un isomorphisme en degré inférieur ou égal à $4n+2$.

Propriété 2.— *Si on note par $z_\imath$ l'élément $x_\imath$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et l'élément $y_{\imath-k}$ pour $k+1 \leqslant i \leqslant k+h$, on a $f_{n+1}^*(\iota_{2n+2,\imath}) = \bar{\iota}_{2n+2,i} + z_i^2$.*

Donc $f_{n+1}^*(\iota_{2n+2,i}^2) = z_i^4$. *Donc l'image de* z_i *dans* $\mathrm{H}^* X_{n+1}$ *est de puissance quatrième nulle.*

Ces calculs montrent que tous les générateurs de $\tilde{\mathrm{H}}^* X_n$ *en degré inférieur ou égal à* $n+1$ *provenant de* $\mathrm{H}^* P_n$ *sont d'image nilpotente dans* $\tilde{\mathrm{H}}^* X_{n+1}$. *De plus, à cause de la connectivité de la fibre* F_{n+1} *on n'a pas rajouté de générateurs en degré inférieur ou égal à* $4n+2$.

Il reste à vérifier la propriété (3).

On considère le noyau du morphisme d'algèbres de Hopf :

$$f_{n+1}^* : \mathrm{H}^* G_{n+1} \to \mathrm{H}^* P_{n+1}.$$

Par l'hypothèse de récurrence pour n, on a

$$(f_n^*)^{-1}(Sq_0(\mathrm{PH}^* P_n)) \subset Sq_0(\mathrm{PH}^* G_n),$$

ce qui implique que le noyau (en tant qu'algèbre de Hopf) de f_n^* est engendré par des cup-carrés. Il faut montrer la même propriété pour f_{n+1}^*.

PROPRIÉTÉ 3. — *On a :*

$$(f_{n+1}^*)^{-1}(Sq_0(\mathrm{PH}^* P_{n+1})) \subset Sq_0(\mathrm{PH}^* G_{n+1}).$$

Démonstration. — Considérant la flèche sur les primitifs qui peut s'écrire comme :

$$f_{n+1}^* : \oplus_1^{k+h} \mathrm{F}(2n+2) \bigoplus \mathrm{PH}^* G_n \to \oplus_1^{k+h} \mathrm{PH}^* E_{2n+2} \bigoplus \mathrm{PH}^* P_n,$$

et qu'on écrira matriciellement

$$\begin{pmatrix} h & 0 \\ k & f_n^* \end{pmatrix}.$$

Dans cette notation h désigne l'application de modules instables qui envoie $\iota_{2n+2,i}$ vers $\bar{\iota}_{2n+2,i} \in \mathrm{H}^* E_{2n+2}$ et k désigne l'application de modules instables qui envoie $\iota_{2n+2,i}$ vers z_i^2. Soit $u_1 \in \oplus_1^{k+h} \mathrm{F}(2n+2) = \mathrm{PH}^* K_{2n+2}^{\times(k+h)}$ tel que $h(u_1) \in \oplus_1^{k+h} \mathrm{PH}^* E_{2n+2}$ soit de la forme $Sq_0 v_1$. On veut montrer que $u_1 = Sq_0 w_1$. En tant que combinaison linéaire d'éléments primitifs, on observe que

$$u_1 = \sum_{1 \leqslant t \leqslant k+h, s} Sq^{I_{t,s}} \iota_{2n+2,t}$$

est envoyée sur

$$h(u_1) = \sum_{1 \leqslant t \leqslant k+h, s} Sq^{I_{t,s}} \bar{\iota}_{2n+2,t}$$

et que par les propriétés de $\bar{\iota}_{2n+2}$, cette combinaison est cup-carré d'un élément si et seulement si elle s'annule. Par conséquent, pour tous t, s, $\mathrm{ex}(I_{t,s}) = 2n + 2$, c'est-à-dire,

$$Sq^{I_{t.s}} \iota_{2n+2,t} = Sq_0(Sq^{I'_{t,s}} \iota_{2n+2,t})$$

avec $I_{t,s} = (i_1, I'_{t,s})$. Donc on a $u_1 = Sq_0 w_1$ pour

$$w_1 = \sum_{1 \leqslant t \leqslant k+h} Sq^{I'_{t,s}} \iota_{2n+2,t}.$$

Soit $(u_1, u_2) \in \oplus_1^{k+h} \mathrm{F}(2n+2) \bigoplus \mathrm{PH}^* G_n$ tel que $f_{n+1}^*(u_1, u_2) \in \oplus_1^{k+h} \mathrm{PH}^* E_{2n+2} \bigoplus \mathrm{PH}^* P_n$ soit de la forme $(Sq_0 v_1, Sq_0 v_2)$. On a donc

$$\begin{aligned} f_{n+1}^*(u_1, u_2) &= (h(u_1), k(u_1) + f_n^*(u_2)) \\ &= (Sq_0 v_1, Sq_0 v_2). \end{aligned}$$

Comme $h(u_1) = Sq_0 v_1$, on a $u_1 = Sq_0 w_1$. Donc

$$f_n^*(u_2) = k(u_1) + Sq_0 v_2 = Sq_0(k(w_1) + v_2)$$

et le résultat découle de l'hypothèse de récurrence.

3.3. La cohomologie de X_∞.

Ci-dessus, on a construit les espaces X_n et chaque X_n est la fibre homotopique d'une application $f_n : P_n \to G_n$. Par construction, on a les propriétés suivantes

- le noyau (en tant qu'algèbre de Hopf) de f_n^* est engendré par des cup-carrés ;
- $p_n^* : \mathrm{H}^* X_{n-1} \to \mathrm{H}^* X_n$ est un isomorphisme en degré inférieur ou égal à $4n - 2$;
- pour tout générateur (en tant qu'algèbre), et donc pour tout élément, x de $\tilde{\mathrm{H}}^* P_{n-1}$ en degré inférieur ou égal à n, soit $\bar{x} = i_{n-1}^*(x)$ son image dans $\tilde{\mathrm{H}}^* X_{n-1}$, alors $p_n^*(\bar{x}) \in \tilde{\mathrm{H}}^* X_n$ est nilpotent.

Remarquons que les éléments non-nilpotents dans H^*X_n peuvent ne pas provenir de H^*P_n. Soit z un tel élément, dans ce cas le lemme 1 nous garantit que l'une de ses puissances provient de H^*P_n. Cette puissance peut alors s'exprimer, modulo un terme nilpotent, comme un polynôme en les images des générateurs polynômiaux de H^*P_n. La construction garantit alors que pour k assez grand l'image de z dans H^*X_{n+k} est nilpotente.

Par conséquent, tout élément de

$$\tilde{\mathrm{H}}^*X_\infty = \mathrm{colim}_n \tilde{\mathrm{H}}^*X_n$$

est nilpotent, i.e., $\tilde{\mathrm{H}}^*X_\infty$ est nilpotente.

4. Les 2-polyGEMs stables.

Dans cette section, on donne une démonstration de la conjecture 1 pour les 2-polyGEMs stables simplement connexes. Soit X un 2-polyGEM stable qui est la fibre homotopique d'un morphisme de H-espaces $f : E \to F$ dont E, F sont des 1-polyGEMs. On va procéder à la démonstration en plusieurs étapes selon E et F. Rappelons d'abord que d'après les résultats de Smith, on a

$$\mathrm{H}^*X \cong \mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(f^*) \otimes \mathrm{Tor}^*_{\text{sub-ker}(f^*)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2). \tag{4}$$

Cas 1. — On considère d'abord le cas où E, F sont des produits d'espaces d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathbb{F}_2, n)$. Soit donc $F = \prod_\alpha \mathrm{K}(\mathbb{F}_2, n_\alpha)$ et $E = \prod_\beta \mathrm{K}(\mathbb{F}_2, m_\beta)$. Soit $M = \oplus_\alpha \mathrm{F}(n_\alpha)$ (resp. $L = \oplus_\beta \mathrm{F}(m_\beta)$) l'ensemble des éléments primitifs de H^*F (resp. H^*E), le morphisme $f^* : \mathrm{H}^*F \to \mathrm{H}^*E$ induit une application (notée abusivement) $f^* : M \to L$. Si on note $Q(M) = M/\bar{\mathcal{A}}_2 M$ et $Q(L) = L/\bar{\mathcal{A}}_2 L$, on a une application induite

$$Q(f^*) : Q(M) \to Q(L).$$

Cas 1.a. — Si $Q(f^*)$ est injective, on sait que M est un facteur direct dans L. Donc L/M est une somme directe de $\mathrm{F}(k)$ et

$$\mathrm{H}^*E//\mathrm{im}(f^*) \cong \mathcal{U}(L)//\mathcal{U}(M) \cong \mathcal{U}(L/M)$$

contient des éléments non-nilpotents dès que $L \neq M$, ce qui affirme la conjecture 1 dans ce cas d'après la formule (4).

Cas 1.b. — Si $Q(f^*)$ n'est pas injective, alors on peut trouver (quitte à changer la base de $Q(M)$) un élément $\iota_n \in M$ tel que

$$f^*(\iota_n) = \sum_{|I|>0} Sq^I \iota_{n-|I|},$$

où $\mathrm{ex}(I) \leqslant n - |I|$.

Notons $Q_\imath$ les dérivations de Milnor. Rappelons que *l'opération* Sq_1 est définie sur un module instable M par $Sq_1 x = Sq^{|x|-1}x$ pour tout $x \in M$.

Lemme 2. — *1. Pour tout $y \in \mathcal{A}_2(Q_0Q_1\cdots Q_{n-1}\iota_n)$ on a $f^*(y) = 0$.*

2. Soit $\omega = Q_0Q_1\cdots Q_{n-2}\iota_n$, on a $f^*(\omega) = 0$ et si $n \geqslant 2$, $(Sq_1)^r\omega \neq 0$ pour tout $r \geqslant 0$.

Le sous-module $\mathcal{A}_2(Q_0Q_1\cdots Q_{n-1}\iota_n)$ est isomorphe à $\bigwedge^n(\mathrm{F}(1))$, où $\mathrm{F}(1) \cong \mathcal{A}_2 u \subset \mathbb{F}_2[u] = \mathrm{H}^*\mathrm{B}\mathbb{F}_2$ (voir [14]). Le lemme implique que $\omega \in$ sub-ker(f^*), puisque pour tout morphisme φ d'algèbres de Hopf réduites primitivement engendrées, sub-ker(φ) est l'algèbre de Hopf engendrée par les éléments primitifs du noyau de φ.

Grâce au complexe de Koszul, on sait que pour que $\mathrm{Tor}^*_{\text{sub-ker}(f^*)}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)$ contienne des éléments non-nilpotents, il suffit d'avoir un élément dans sub-ker(f^*) sur lequel l'opération $(Sq_1)^r$ ne s'annule pas pour tout $r \geqslant 0$. Comme $\omega \in$ sub-ker(f^*), le lemme montre que $\mathrm{Tor}^*_{\text{sub-ker}(f^*)}(\mathbb{F}_2,\mathbb{F}_2)$, donc H^*X contient des éléments non-nilpotents.

Démonstration du lemme 2. — En effet, identifiant la classe ι_t $(t = n-|I|)$ avec $x_1\cdots x_t \in \mathbb{F}_2[x_1,\cdots,x_t]$ (voir [14]), comme $n-1 \geqslant t$ le produit de n dérivations de Milnor s'annule sur $\mathbb{F}_2[x_1,\cdots,x_t]$ et on a

$$\begin{aligned} & f^*(Q_0Q_1\cdots Q_{n-1}\iota_n) \\ &= \sum_{|I|>0} Q_0Q_1\cdots Q_{n-1}Sq^I\iota_{n-|I|} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus,

$$Sq_0(Q_0Q_1\cdots Q_{n-2}\iota_n) = Q_0Q_1\cdots Q_{n-1}\iota_n$$

et l'application Sq_0 est injective dans L. Il en résulte que

$$f^*(Q_0Q_1\cdots Q_{n-2}\iota_n) = 0.$$

Comme $\omega = Q_0Q_1 \cdots Q_{n-2}\iota_n$ s'identifie à $u \wedge u^2 \wedge \cdots \wedge u^{2^{n-1}} \in \bigwedge^n(\mathrm{F}(1))$, on a pour tout $r \geqslant 0$, $(Sq_1)^r\omega \neq 0$.

Cas 2. — On considère le cas général où E, F sont des produits d'espaces d'Eilenberg-MacLane $\mathrm{K}(\mathbb{F}_2, n)$, $\mathrm{K}(\mathbb{Z}, n)$ et $\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2^h, n)$ $(h, n > 1)$. On remarque d'abord que si on note $\mathrm{F}'(n+1) = \mathcal{A}_2(Sq^1\iota_n)$ le sous-$\mathcal{A}_2$-module de $\mathrm{F}(n)$ engendré par $Sq^1\iota_n$, on a le

LEMME 3. — *1.* $\mathrm{H}^*(\mathrm{K}(\mathbb{Z}, n)) = \mathcal{U}(\mathrm{F}'(n))$ *et* $\mathrm{H}^*(\mathrm{K}(\mathbb{Z}/2^h, n)) = \mathcal{U}(\mathrm{F}'(n)) \otimes \mathcal{U}(\mathrm{F}'(n+1))$, $h > 1$.

2. $\mathrm{F}'(n)$ *est le module instable librement engendré par une classe* ι'_n *de degré* n *tel que* $Sq^1\iota'_n = 0$.

Démonstration. — La première partie est due à J.-P. Serre [12]. La deuxième partie est une conséquence du fait que l'ensemble des opérations qui s'annulent sur Sq^1 est $\mathcal{A}_2Sq^1$.

Soit $M = \oplus_\alpha \mathrm{F}(n_\alpha) \bigoplus \oplus_\gamma \mathrm{F}'(n_\gamma)$ (resp. $L = \oplus_\beta \mathrm{F}(m_\beta) \bigoplus \oplus_\delta \mathrm{F}'(m_\delta)$) l'ensemble des éléments primitifs de H^*F (resp. H^*E). Le morphisme $f^* : \mathrm{H}^*F \to \mathrm{H}^*E$ induit une application (notée abusivement) $f^* : M \to L$, et donc une application

$$Q(f^*) : Q(M) \to Q(L).$$

Cas 2.a. — Si $Q(f^*)$ est injective, la conjecture 1 est vraie dès que $L \neq M$. La démonstration se passe comme dans le cas 1.a, on notera cependant qu'on peut avoir une situation (quitte à changer la base) du type

$$Q(f^*)(\iota'_n) = \iota_n,$$

où le conoyau est $\mathrm{F}'(n+1)$ qui crée des éléments non-nilpotents.

Cas 2.b. — Si $Q(f^*)$ n'est pas injective, on peut supposer $Q(f^*)$ restreinte à $Q(\oplus_\alpha \mathrm{F}(n_\alpha))$ injective, sinon on est ramené au cas traité plus haut. Alors on peut se ramener à une situation où $M = \oplus_\gamma \mathrm{F}'(n_\gamma)$ et trouver (quitte à changer la base de $Q(M)$) un élément $\iota'_n \in M$ tel que $Q(f^*)(\iota'_n) = 0$. Il est clair que $f^*(\iota'_n)$ ne contient aucun terme ι_n car $Sq^1\iota'_n = 0$ et $Sq^1\iota_n \neq 0$.

Deux cas peuvent se présenter, soit $f^*(\iota'_n)$ contient un terme $Sq^1\iota_{n-1}$ et dans ce cas le conoyau de $f^* : M \to L$ aura un quotient isomorphe à $\mathrm{F}'(n-1)$. On trouve alors un élément non-nilpotent dans le conoyau dès que $n \geqslant 3$. Si $f^*(\iota'_n)$ ne contient pas un tel terme, un raisonnement analogue à celui donné plus haut permet de conclure, et de trouver un élément non-nilpotent dans $\mathrm{Tor}^*_{\text{sub-ker}(f^*)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier Lionel Schwartz pour des discussions très importantes sur la formulation de cet article et aussi pour sa direction.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E.H. Brown and F.P. Peterson, Whitehead products and cohomology operations, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2), 15 (1964), 116-120.

[2] F. Cohen, Communication privée, 2003.

[3] E. Dror Farjoun, Cellular spaces, null spaces and homotopy localization, Lecture Notes in Mathematics, 1622. Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[4] Y. Félix, S. Halperin, J.-M. Lemaire and J.-C. Thomas, Mod p loop space homology, Invent. Math. 95 (1989), no. 2, 247-262.

[5] J. Grodal, The transcendence degree of the mod p cohomology of finite Postnikov systems, Stable and unstable homotopy, Toronto, Fields Inst. (1996), 111-130.

[6] L. Kristensen, On secondary cohomology operations, Math. Scand. 12 (1963), 57-82.

[7] J. Lannes et L. Schwartz, À propos de conjectures de Serre et Sullivan, Invent. Math. 83 (1986), no. 3, 593-603.

[8] J. Lannes et L. Schwartz, Sur les groupes d'homotopie des espaces dont la cohomologie modulo 2 est nilpotente, Israel J. Math. 66 (1989), no. 1-3, 260-273.

[9] C.A. McGibbon and J.A. Neisendorfer, On the homotopy groups of a finite-dimensional space, Comment. Math. Helv. 59 (1984), no. 2, 253-257.

[10] J. Milgram, The structure over the Steenrod algebra of some 2-stage Postnikov systems, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2), 20 (1969), 161-169.

[11] J.W. Milnor and J.C. Moore, On the structure of Hopf algebras, Annals of Mathematics(2), 81 (1965), 211-264.

[12] J.-P. Serre, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane, Comment. Math. Helv. 27 (1953), 198-232.

[13] L. Smith, The cohomology of stable two stage Postnikov systems, Illinois J. Math. 11 (1967), 310-329.

[14] N.E. Steenrod, Cohomology operations, Lectures by N.E. Steenrod written and revised by D.B.A. Epstein, Annals of Mathematics Studies, no. 50, Princeton University Press, Princeton, (1962).

Manuscrit reçu le 12 novembre 2003,
accepté le 22 avril 2004.

Donghua JIANG,
Université Paris Nord
Institut Galilée, LAGA
93430 Villetaneuse (France).

donghua.jiang@polytechnique.org