ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Bernard MALGRANGE

Déformations isomonodromiques, forme de Liouville, fonction τ

Tome 54, nº 5 (2004), p. 1371-1392.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_5_1371_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
54, 5 (2004), 1371–1392

DÉFORMATIONS ISOMONODROMIQUES, FORME DE LIOUVILLE, FONCTION τ

par **Bernard MALGRANGE**

Pour Louis.

1. Introduction.

Cet article est un commentaire et une amélioration de mon article [Mal] sur les déformations isomonodromiques, en particulier de la fin de cet article, consacrée à la "fonction τ". La dérivée logarithmique de cette fonction, notée ici σ, possède deux propriétés qui en apparence n'ont rien à voir l'une avec l'autre.

D'une part, elle représente les pôles des solutions de l'équation de Schlesinger, solutions qui jouissent de la "propriété de Painlevé", *i.e.* n'admettent que des singularités polaires hors des singularités de l'équation; pour ces résultats, voir l'article de Miwa [Mi], et [Mal].

D'autre part, σ est l'hamiltonien des équations de Schlesinger pour une structure de Poisson naturelle : voir à ce sujet [J-M-M-S], appendice 5; ce résultat est étudié dans [H] en relation avec la structure symplectique d'Atiyah-Bott sur les connexions.

Mots-clés : Déformations isomonodromiques – Propriété de Painlevé – Groupe de lacets – Fonctions τ.
Classification math. : 34M55.

Cette identité "$\sigma = \sigma$" m'avait intrigué; j'en propose ici une interprétation systématique, en montrant que cette forme provient naturellement par une image inverse, dans les équations de Schlesinger, de la forme de Liouville du cotangent de l'extension centrale du groupe des lacets.

Cette identité "$\sigma = \sigma$" a d'abord été obtenue par Okamoto [Ok1] dans le cas des équations de Painlevé. Il me paraît probable que l'interprétation que j'en donne ici dans le cas des équations de Schlesinger (donc, en particulier, de $P6$), s'étend aux autres équations de Painlevé; plus généralement, tout ceci devrait s'étendre aux déformations isomonodromiques à singularités irrégulières.

2. Groupes de lacets.

Je reprends ici avec des notations un peu différentes une situation analogue à celle de [Ma1], §6. Soient D'_μ, $(1 \leqslant \mu \leqslant m)$ des disques fermés disjoints de $\mathbb{C}$, définis par $|x - b_\mu| \leqslant r_\mu$ $(r_\mu > 0)$. On note Γ_μ le bord de D'_μ et l'on pose $D' = \cup D'_\mu$, $\Gamma = \cup \Gamma_\mu$, D'' = le complémentaire dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de $\overset{\circ}{D}{}'$, l'intérieur de D'.

Soit G_μ le groupe des fonctions holomorphes sur (= au voisinage de) Γ_μ, à valeurs dans $Gl(p, \mathbb{C})$, p un entier fixé. On pose $\widetilde{G} = G_1 \times \cdots \times G_m$; la donnée d'un $g = (g_\mu) \in \widetilde{G}$ définit un fibré vectoriel E_g de rang p sur $\mathbb{P}$, avec la convention suivante : E_g est identifié au fibré trivial $\mathcal{O}^p$ sur D' et sur D'' ($\mathcal{O} = \mathcal{O}_\mathbb{P}$, le faisceau des fonctions holomorphes sur $\mathbb{P}$); on recolle une section F'_μ sur D'_μ et une section F'' sur D'' par $F'' = g_\mu F'_\mu$ sur Γ_μ; le fibré est trivial s'il existe h'' et h'_μ holomorphes respectivement sur D'' et D'_μ, à valeurs dans $Gl(p, \mathbb{C})$, tels qu'on ait sur Γ_μ : $g_\mu = h'' h'^{-1}_\mu$; j'écrirai en abrégé $g'' = h'' h'^{-1}$ sur Γ (cette assertion résulte d'un fait général : un 1-cocycle, commutatif ou non, d'un recouvrement d'un espace topologique quelconque est un cobord de ce recouvrement si et seulement s'il est un cobord d'un recouvrement plus fin). De plus, si l'on impose $h''(\infty) = \mathrm{id}$, h' et h'', s'ils existent, sont uniques.

On munit l'espace $\mathcal{O}(\Gamma)$ des fonctions holomorphes sur Γ de la topologie usuelle, limite inductive des espaces de fonctions holomorphes sur les voisinages ouverts de Γ, ces derniers étant munis de la topologie usuelle (convergence uniforme sur les compacts). On munit $\widetilde{G}$ de la topologie induite de celle de $\mathcal{O}(\Gamma)^{p^2}$ par le plongement évident $Gl(p, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{p^2}$. D'autre part, pour éviter des définitions fastidieuses en dimension infinie, je ferai la convention suivante, implicite dans [Ma1] : si S est une variété analytique complexe (lisse, cela suffit ici), on appelle application analytique de S dans $\widetilde{G}$ une application analytique de $S \times \Gamma \subset S \times \mathbb{P}$ dans $Gl(p, \mathbb{C})$; on appellera alors "analytique" une fonction continue sur $\widetilde{G}$ dont l'image réciproque sur n'importe quel S par n'importe quelle application analytique $S \to \widetilde{G}$ est analytique sur S. Avec la même convention la famille $g \mapsto E_g$ définit un fibré analytique sur $\widetilde{G}$.

Soit G la composante connexe de l'identité dans $\widetilde{G}$; c'est aussi l'ensemble des $g = (g_\mu)$ tels que, pour $\mu = 1, \ldots, m$, $\text{dét}\, g_\mu$ soit d'indice nul. Il est connu qu'il existe une hypersurface fermée $\Theta \subset G$ telle que $U = G - \Theta$ soit exactement l'ensemble des $g \in G$ avec E_g trivial. Je rappelle rapidement comment ce résultat classique est établi dans [Ma1], en suivant la méthode donnée par Boutet de Monvel dans [B]. On considère l'espace $H = L^2(\Gamma, d\theta)^p$, avec $x = b_\mu + r_\mu e^{i\theta}$ sur Γ_μ ; on a une décomposition $H = H' \oplus H''$, avec $H' = \oplus H'_\mu$, H'_μ les fonctions holomorphes sur $\mathring{D}'_\mu$, L^2 au bord, à valeurs dans $\mathbb{C}^p$, et H'' les fonctions holomorphes sur $\mathring{D}''$, L^2 au bord, nulles à l'infini, et à valeurs dans $\mathbb{C}^p$.

Soit $L(H)$ l'espace des opérateurs linéaires continus $H \to H$; pour $A \in L(H)$ on écrit, à partir de la décomposition précédente $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ et on pose $\alpha = T_A$ (T pour Toeplitz). En particulier, tout $g \in \widetilde{G}$ définit de façon évidente un opérateur de $L(H)$, qu'on note encore g; dans ce cas $\alpha = T_g$ et δ sont à indice; β et γ sont compacts et même traçables. On démontre alors les résultats suivants (loc. cit.) :

i) E_g est trivial si et seulement si T_g est inversible;

ii) E_g est de degré 0 si et seulement si T_g est d'indice nul.

L'existence de Θ s'établit alors ainsi : soit $g \in G$ tel que T_g ne soit pas inversible, et soit $a \in Gl(H')$ tel que $a - T_g$ soit de rang fini (son existence résulte immédiatement du fait que T_g est d'indice nul, l'indice de T_g étant constant sur les composantes connexes de $\widetilde{G}$). Pour g' voisin de g, posons $a' = a - T_g + T_{g'}$; alors a' est inversible, $a' - T_{g'}$ est de rang fini, et le déterminant de Fredholm $\text{dét}(a'^{-1}T_{g'})$ est bien défini; au voisinage de g, $\Theta = \{g' \in G \ ; \ E_{g'} \text{ non trivial}\}$ est défini par $\text{dét}(a'^{-1}T_{g'}) = 0$. Donc, près de g, Θ est, soit une hypersurface, soit un voisinage de g; un argument de prolongement analytique, joint à la connexité de G montre que le second cas est exclu. On vérifie aussi facilement que, si l'on modifie a, on ne change pas l'équation de Θ à un facteur inversible près; ceci fait de Θ un diviseur de G.

En suivant Segal-Wilson [S-W], on introduit maintenant le fibré inversible L sur G défini ainsi : on prend les triplets (g,a,μ), $g\in G$, $a\in Gl(H')$, $\mu\in\mathbb{C}$, avec $a-T_g$ de rang fini (ou traçable), et l'identification suivante : $(g,a,\mu)\sim(g,b,\nu)$ si $\nu=\mu\,\mathrm{dét}(ab^{-1})$. Ce fibré est encore le fibré défini par Θ (*i.e.* ses sections sont les fonctions méromorphes locales h sur G telles que fh soit holomorphe, f une équation locale de Θ) ; la vérification est immédiate, et laissée au lecteur. On peut voir aussi que c'est le fibré déterminant de $R\pi_*E(-1)$, π la projection $G\times\mathbb{P}\to G$, au sens des géomètres algébristes; je signale en passant ce fait, que je n'utiliserai pas.

Le fibré principal $\widehat{G}$ de L est défini de même par les triplets (g,a,μ), avec ici $\mu\in\mathbb{C}^*$, et la même identification que ci-dessus. Ce fibré est muni d'une structure de groupe, extension centrale de G par $\mathbb{C}^*$; la loi de groupe est donnée par $(g,a,\mu)(g',a',\mu')=(gg',aa',\mu\mu')$.

Le fibré n'est pas trivial, et $\widehat{G}$ ne peut pas être défini par un cocycle; sur "le gros ouvert" U, on peut identifier $\widehat{G}$ à $U\times\mathbb{C}^*$ en prenant $a=T_g$; la loi de groupe est alors la suivante :

$$(2.1)\quad (g,\mu)(g',\mu')=(gg',\mu\mu'\ c(g,g')),\quad \text{avec}\quad c(g,g')=\mathrm{dét}(T_gT_{g'}T_{gg'}^{-1}).$$

Cette dernière fonction est méromorphe sur $U\times U$, avec pôles sur $\{(g,g')\mid gg'\in\Theta\}$.

3. La forme de Liouville de $\widehat{G}$.

Si H est une variété différentiable ou analytique, notons λ sa forme de Liouville, *i.e.* la 1-forme canonique sur T^*H ; lorsque H est un groupe de Lie, λ est bi-invariante. Il sera commode de l'écrire ainsi; si $\mathfrak{h}=T_0H$ est l'algèbre de Lie de H, on l'identifie aux vecteurs invariants à gauche, et on identifie T^*H à $H\times\mathfrak{h}^*$ par les translations à gauche; alors λ s'écrit $\langle h^{-1}dh,\gamma\rangle$, $\gamma\in\mathfrak{h}^*$, $h^{-1}dh$ la forme de Maurer-Cartan; l'invariance de λ se lit ainsi : les translations à gauche agissent trivialement sur $\mathfrak{h}^*$; la translation à droite $h\mapsto ha$ agit sur $\mathfrak{h}^*$ par $\mathrm{ad}^\vee a=\mathrm{ad}^*(a^{-1})$, "ad" l'action adjointe $\xi\to a\xi a^{-1}$ sur $\mathfrak{h}$.

Je vais appliquer sans commentaires ces formules à $\widehat{G}$, l'extension centrale du groupe des lacets définie au §2, et à son "cotangent restreint" que je vais maintenant définir.

Tout d'abord, par translation à gauche, on a $T_gG=T_0G=\mathfrak{g}$, l'espace des fonctions holomorphes sur Γ à valeurs dans $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})$; on définit son dual restreint $\mathfrak{g}^*$ comme l'espace des 1-formes sur Γ à valeurs dans $\mathfrak{g}$ (*i.e.* les ηdx, $\eta \in \mathfrak{g}$) ; on envoie $\mathfrak{g}^*$ dans le dual de $\mathfrak{g}$ par

$$(3.1)\quad \langle \xi, \alpha\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \operatorname{tr}(\xi\alpha),\quad \text{avec } \xi \in \mathfrak{g},\ \ \alpha \in \mathfrak{g}^*,\quad \int_\Gamma = \sum \int_{\Gamma_\mu},\ \ \Gamma_\mu$$

orienté comme le bord de D'_μ ; le signe $-$ sera justifié plus loin.

Un élément ξ de $\mathfrak{g}$ définit de façon évidente un opérateur de $L(H)$; d'où un opérateur $T_\xi \in L(H')$, comme au paragraphe précédent ; je rappelle que, pour $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$, $T_{\xi\eta} - T_\xi T_\eta$ est traçable et qu'on a

$$(3.2)\qquad \operatorname{Tr}(T_{\xi\eta} - T_\xi T_\eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \operatorname{tr}\Big(\frac{d\xi'}{dx}\eta\Big)dx = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \operatorname{tr}\Big(\frac{d\xi}{dx}\eta''\Big)dx$$

avec $\xi = \xi' + \xi''$, ξ' holomorphe dans D', ξ'' holomorphe dans D'' et nul à l'infini et de même pour η (voir par exemple [Ma1]).

On a alors les formules suivantes, dont je rappelle rapidement la démonstration (pour les détails, voir [P-S], où le cas $m = 1$ est traité ; le cas général est identique).

Soit $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\widehat{G}$; on a $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$, avec le crochet

$$(3.3)\qquad \big[(\xi,\mu),(\eta,\nu)\big] = \big([\xi,\eta],\delta(\xi,\eta)\big)$$

avec $\delta(\xi,\eta) = \operatorname{Tr}([T_\xi, T_\eta] - T_{[\xi,\eta]}) = \langle \eta, d_x\xi\rangle$, d_x la différentielle de ξ, considéré comme fonction sur Γ ; la première égalité se déduit facilement de (2.1) ; la seconde résulte de (3.2).

Soit d'autre part p la projection $\widehat{G} \to G$; alors l'action adjointe de $\hat{g} \in \widehat{G}$ sur $\widehat{\mathfrak{g}}$ ne dépend que de $g = p\hat{g}$; on écrit $\operatorname{ad} g$ pour $\operatorname{ad}\hat{g}$, et l'on a

$$(3.4)\qquad \operatorname{ad} g(\xi,\mu) = \big(g\xi g^{-1}, \mu + \gamma(g,\xi)\big)$$

avec $\gamma(g,\xi) = \operatorname{Tr}(T_h^{-1}T_\xi T_h - T_{h^{-1}\xi h}) = \langle \xi, g^{-1}d_x g\rangle$, $\ h = g^{-1}$.

La première égalité se déduit de (2.1) (je laisse le calcul en exercice) ; la seconde est moins évidente : on vérifie que $\gamma(g,\xi)$ et $\langle \xi, g^{-1}d_xg\rangle$ sont des cocycles pour l'action adjointe de g ; on conclut en constatant que leurs dérivées en $g = \mathrm{id}$ sont égales par (3.3) ; *cf.* [P-S]. Une autre méthode consiste à remarquer ceci : il suffit d'établir le résultat pour $g = g' \in G'$ et $g = g'' \in G''$, G' (resp. G'') désignant l'ensemble des $g \in G$ qui sont holomorphes inversibles dans D' (resp. D'', avec $g(\infty) = \mathrm{id}$) ; en effet "presque tout" $g \in G$ s'écrit $g''g'$. Maintenant dans les deux cas le résultat est facile, à partir de la remarque suivante : pour $g'' \in G''$ et $h \in G$, on a $T_{g''}^{-1} = T_{g''^{-1}}$, et $T_{g''h} = T_{g''}T_h$ (en effet, dans la décomposition suivante $H' \oplus H''$, g'' donne une matrice triangulaire inférieure). De même, on a $T_{hg'} = T_hT_{g'}$, $T_{g'}^{-1} = T_{g'^{-1}}$.

Incidemment, je ne sais pas si l'égalité (3.4) est vraie ou non pour tout $g \in \widetilde{G}$ (aucune des deux méthodes ci-dessus ne marche).

On prend alors $\widehat{\mathfrak{g}}^* = \mathfrak{g}^* \oplus \mathbb{C}$; en transposant la formule précédente, on trouve

(3.5)

$$\mathrm{ad}^\vee g(\alpha,\beta) = (\mathrm{ad}^\vee g\alpha - \beta d_x g g^{-1}, \beta)\ ;\ \alpha \in g^*,\ \beta \in \mathbb{C},\ \mathrm{ad}^\vee g = \mathrm{ad}^*(g^{-1}).$$

En particulier, on voit que la formule précédente permet d'identifier $\overline{\mathfrak{g}}^* = (\mathfrak{g}^*, 1)$ aux connexions sur le fibré trivial de rang p sur Γ. Si l'on avait pris le signe + dans (3.1), il aurait fallu prendre ici $\overline{\mathfrak{g}}^* = (\mathfrak{g}^*, -1)$. Cette identification est l'une des clefs de l'égalité "$\sigma = \sigma$" dont il est question dans l'introduction; elle jouera un rôle essentiel dans la suite.

Maintenant, on définit le cotangent restreint $T^*\widehat{G}$ par son isomorphisme avec $\widehat{G} \times \widehat{\mathfrak{g}}^*$, et on considère la forme de Liouville comme 1-forme sur $\widehat{G} \times \widehat{\mathfrak{g}}^*$; seule sa restriction à $\widehat{G} \times \overline{\mathfrak{g}}^*$, notée dans la suite $\hat{\lambda}$, nous intéressera.

Sur $(U \times \mathbb{C}^*) \times \overline{\mathfrak{g}}^*$, $\hat{\lambda}$ s'écrit de la manière qu'on va expliquer maintenant. Il faut d'abord écrire la forme de Maurer-Cartan; pour distinguer la différentielle sur G de la différentielle en $x \in \mathbb{P}$, on notera la seconde d_x comme plus haut, et la première d_s ou en abrégé ∂ (penser à l'interprétation "G est le foncteur $\mathrm{Hom}(S, G)$" : si l'on a une flèche $S \to G$, elle définit une fonction $g(s,x)$ sur $S \times \Gamma$; d'où les deux différentielles d_s et d_x). Avec ces notations, la forme de Maurer-Cartan s'écrit ainsi sur $U \times \mathbb{C}^*$.

PROPOSITION 3.6. — *On a* $(g,\mu)^{-1}\partial(g,\mu) = (g^{-1}\partial g, \mu^{-1}d\mu + \omega)$, *avec* $\omega = \mathrm{Tr}(T_g^{-1}T_{\partial g} - T_{g^{-1}\partial g})$ *(la trace est prise dans les opérateurs de* H_+*).*

Pour faire ce calcul, on supposera qu'on a aussi $g^{-1} \in U$; par passage à la limite, le résultat sera vrai pour tout $g \in U$. Il faut écrire le terme en ε dans la famille $(g,\mu)^{-1}(g + \varepsilon\partial g, \mu + \varepsilon d\mu)$. Tout d'abord, par (2.1), on a $(g,\mu)^{-1} = (g^{-1}, \nu)$, avec $\mu\nu\ c(g, g^{-1}) = 1$, $c(g,g^{-1}) = \mathrm{dét}(T_g T_{g^{-1}})$; puis, encore par (2.1)

$$(g,\mu)^{-1}(g+\varepsilon\partial g, \mu + \varepsilon\ d\mu) = \big(\mathrm{id} + \varepsilon g^{-1}\partial g, \nu(\mu + \varepsilon\ d\mu)\ c(g^{-1}, g + \varepsilon\partial g)\big).$$

Le second terme du second membre vaut, $\mathrm{mod}\,\varepsilon^2$

$$\begin{aligned}\varepsilon\nu\ d\mu\ c(g^{-1},g) + \nu\mu c(g^{-1}, g+\varepsilon\partial g)&\\ = \varepsilon\mu^{-1}\ d\mu + \mathrm{dét}(T_g T_{g^{-1}})^{-1}\,\mathrm{dét}\big(T_{g^{-1}}T_{g+\varepsilon\partial g}T_\alpha^{-1}\big)&\end{aligned}$$

avec $\alpha = \mathrm{id} + \varepsilon g^{-1}\partial g$; d'où $T_\alpha^{-1} = \mathrm{id} - \varepsilon T_{g^{-1}\partial g} (\mathrm{mod}\,\varepsilon^2)$.

En utilisant la formule $\text{dét}\, a^{-1}\, \text{dét}\, b = \text{dét}(a^{-1}b)$, le dernier terme s'écrit encore

$$\text{dét}\big[T_g^{-1}T_{g+\varepsilon\partial g}(\mathrm{id} - \varepsilon T_{g^{-1}\partial g})\big] = \text{dét}\big[\mathrm{id} + \varepsilon(T_g^{-1}T_{\partial g} - T_{g^{-1}\partial g})\big] \pmod{\varepsilon^2}$$

d'où le résultat, par la formule $\text{dét}(\mathrm{id} + \varepsilon a) = 1 + \varepsilon \operatorname{Tr} a \pmod{\varepsilon^2}$.

De la proposition précédente, on déduit immédiatement la valeur de $\hat{\lambda}$, avec $(g, \mu) \in U$ et $(\alpha, 1) \in \bar{\mathfrak{g}}^*$

$$\hat{\lambda} = \langle g^{-1}\partial g, \alpha\rangle + \mu^{-1} d\mu + \omega. \tag{3.7}$$

Le dernier terme est celui qui avait été introduit (un peu au hasard!) dans [Ma1]. La forme $\omega + \mu^{-1}\, d\mu$, ou par abus de langage, la forme ω, s'étend en une forme de connexion sur $\widehat{G}$; d'après la définition de L et de $\widehat{G}$ il suffit, en effet, de voir ceci : au voisinage de $g \in \Theta$, ω s'écrit $\frac{df}{f} + \pi$, f une équation locale de Θ, π holomorphe; ceci se vérifie immédiatement, *cf.* loc. cit. (dans [Ma2], on trouvera une autre construction).

Il résulte de là que $\hat{\lambda}$ est une forme de connexion sur $\widehat{G} \times \bar{g}^*$ considéré comme fibré principal sur $G \times \bar{g}^*$: en effet $\hat{\lambda}$ est la somme de l'image réciproque par $\widehat{G} \times \bar{g}^* \to \widehat{G}$ de la connexion précédente et de la forme holomorphe $\langle g^{-1}\partial g, \alpha\rangle$. On peut aussi démontrer directement ce résultat sans passer par (3.5); je laisse la question au lecteur. L'un des intérêts de considérer la connexion $\hat{\lambda}$, et pas seulement la connexion définie par ω, est que l'on a ainsi de bien meilleures propriétés d'invariance.

Par ailleurs, on a $\partial\omega = -\frac{1}{2}\delta(g^{-1}\partial g, g^{-1}\partial g)$, avec δ défini par (3.3); *cf.* [Ma1]; ceci montre que $\partial\omega$ définit une structure symplectique sur G. De même, on peut voir que $\partial\hat{\lambda}$ définit une structure symplectique sur $G \times \bar{\mathfrak{g}}^*$; je laisse le lecteur vérifier ce point (ceci peut, par exemple, se voir à partir de la forme symplectique de $T^*\widehat{G}$, par réduction symplectique par rapport au champ vertical $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$).

4. Déformations isomonodromiques.

Je vais rappeler rapidement le début de [Ma1], en précisant la dépendance par rapport aux conditions initiales.

4.1. — Soient X une variété analytique complexe (lisse) $Y \subset X$ une hypersurface fermée lisse, et E un fibré vectoriel sur X; une connexion plate (= sans courbure) ∇ sur $E \mid X - Y$ est dite "à pôle logarithmique" sur Y si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

i) Dans un système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$, avec $Y = \{x_1 = 0\}$, et une trivialisation locale $E \simeq \mathcal{O}_X^p$, la connexion s'écrit $\nabla F = dF + \Omega F$, avec $\Omega = M_1 \frac{dx_1}{x_1} + \sum_2^n M_i\, dx_i$, les M_i étant holomorphes.

ii) Localement sur Y, si ξ est un champ de vecteurs tangent à Y, et F une section holomorphe de E, $\nabla_\xi F = \langle \xi, \nabla F \rangle$ est holomorphe.

La condition ii) montre que cette définition est indépendante des coordonnées et de la trivialisation de E. Si $i : X' \to X$ est un morphisme de variétés complexes lisses, et si i est transverse à Y, l'image réciproque $(i^*E, i^*\nabla)$ est définie de manière évidente (prendre, par exemple, l'image réciproque de la matrice de connexion); elle est encore à pôles logarithmiques.

D'autre part, si l'on a une équation $\{f = 0\}$ de Y, on peut déduire de ∇ une connexion plate sans pôle $\nabla \mid Y$ sur $E \mid Y$ de la manière suivante : on prend un système de coordonnées locales au voisinage de Y, avec $f = x_1$, et une trivialisation de E; la forme de $\nabla \mid Y$ est par définition $\sum_2^n M_i(0, x_2, \ldots, x_n)\ dx_i$; on vérifie qu'elle ne dépend pas du choix des coordonnées, sous la restriction $f = x_1$ (en fait, il suffit d'avoir $f = x_1 \pmod{x_1^2}$; *i.e.* il suffit d'avoir une trivialisation du fibré normal $N_Y X$). Moyennant cette condition qui sera sous-entendue, on appellera $\nabla \mid Y$ la “restriction de ∇ à Y”.

J'aurai besoin aussi d'une situation un peu plus générale; soient S une autre variété analytique complexe et E un fibré vectoriel sur $X \times S$; une “connexion sur E relativement à S” est une famille ∇_s de connexions sur les fibrés E_s, $s \in S$, dépendant analytiquement de s. Si l'on a une telle connexion relative sur $(X - Y) \times S$, on dira qu'elle a un pôle logarithmique sur $Y \times S$ si la condition i) ci-dessus est satisfaite, avec les M_i fonctions analytiques des x_i et de s.

4.2. — Soient $(a_1^0, \ldots, a_m^0)$, m points distincts de $\mathbb{C}$ (qu'on plonge dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par l'adjonction d'un point à l'infini). Supposons donnés :

a) un fibré vectoriel E^0 sur $\mathbb{P}$;

b) une connexion ∇^0 sur E^0 au-dessus de $\mathbb{P} - \{a_1^0, \ldots, a_m^0, \infty\}$, à pôles logarithmiques en ces points. On définit alors une “déformation universelle” ∇ de ∇^0 de la manière qui suit; soit Δ la “diagonale” de $\mathbb{C}^m$, *i.e.* la réunion des ensembles $\{a_\mu = a_\nu\}$, $\mu, \nu = 1, \ldots, m$; posons $Z = \mathbb{C}^m - \Delta$, et soit $\widetilde{Z}$ le revêtement universel de Z de point-base $z^0 = (a_1^0, \ldots, a_m^0)$. L'espace $\mathbb{P} \times \widetilde{Z}$ est muni de $m + 1$ hypersurfaces lisses $Y_1, \ldots, Y_m, Y_\infty$ d'équations

$\{x = a_\mu\}$, $\mu = 1, \ldots, m$, et $\{x = \infty\}$. Notons i l'injection $\mathbb{P} = \mathbb{P} \times \widetilde{Z}$ définie par $i(x) = (x, z^0)$; alors la déformation ∇ est définie par le théorème suivant :

THÉORÈME 4.3. — *Il existe un fibré vectoriel E sur $\mathbb{P} \times \widetilde{Z}$, muni d'une connexion ∇ à pôles logarithmiques sur $Y_1, \ldots, Y_m, Y_\infty$ et d'un isomorphisme $i^*(E, \nabla) \xrightarrow[\sim]{j} (E^0, \nabla^0)$. De plus, l'ensemble (E, ∇, j) est unique (= à isomorphisme unique près).*

Pour la démonstration, je renvoie à [Ma1]; je rappelle seulement le principe de la construction : tout d'abord, on fabrique (E, ∇) sur $\mathbb{P} \times \widetilde{Z} - \{Y_1, \ldots, Y_m, Y_\infty\}$ en utilisant le fait que i est une équivalence d'homotopie de cet espace avec $\mathbb{P} - \{a_1^0, \ldots, a_m^0, \infty\}$ (propriété classique du groupe des tresses). On montre ensuite qu'on peut prolonger ∇ de façon essentiellement unique en une connexion à pôles logarithmiques sur les Y_μ et Y_∞.

4.4. — Dans la suite, on s'intéressera au cas particulier où E^0 est trivial; en choisissant une trivialisation, la forme de ∇^0 s'écrit $\Omega = \sum A_\mu^0 \frac{dx}{x - a_\mu^0}$, $A_\mu^0 \in \mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})$.

Notons S l'espace $\mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})^m$ des données initiales A_μ^0 (les a_μ^0 sont ici fixés) ; pour chaque $s \in S$ on a, par le théorème précédent , un fibré vectoriel E_s sur $\mathbb{P} \times \widetilde{Z}$ muni d'une connexion ∇_s. J'aurai besoin ici du résultat plus précis suivant, dans lequel $\tilde{\imath} = (i, id_S)$, $\widetilde{E}^0 = E^0 \times S$ et $\widetilde{\nabla}^0$ est la connexion relative à S, $\sum A_\mu^0 \frac{dx}{x - a_\mu^0}$:

THÉORÈME 4.5. — *Il existe un fibré vectoriel $\widetilde{E}$ sur $\mathbb{P} \times \widetilde{Z} \times S$, muni d'une connexion $\widetilde{\nabla}$ relativement à S, à pôles logarithmiques sur $Y_1 \times S, \ldots, Y_m \times S$, $Y_\infty \times S$ et d'un isomorphisme $\tilde{\imath}^*(\widetilde{E}, \widetilde{\nabla}) \xrightarrow[\sim]{j} (\widetilde{E}^0, \widetilde{\nabla}^0)$. De plus, l'ensemble $(\widetilde{E}, \widetilde{\nabla}, j)$ est unique.*

Ce théorème se démontre exactement comme 4.3, à ceci près qu'il faut faire attention à la dépendance par rapport aux conditions initiales; ce point ne présente pas de difficulté et je l'omets.

4.6. — La situation est maintenant la suivante : au-dessus de $\mathbb{P} \times \widetilde{Z} \times S$, on a un fibré vectoriel dont la restriction à $\mathbb{P} \times (z^0, s)$ est triviale pour $s \in S$. Localement sur $\widetilde{Z} \times S$, ce fibré peut être représenté par une application de $\widetilde{Z} \times S$ dans un groupe de lacets; on en déduit qu'il existe une hypersurface fermée $\theta \subset \widetilde{Z} \times S$ telle que, pour $(s,z) \notin \theta$, $\widetilde{E}$ est trivial sur $\mathbb{P} \times (z,s)$ et même au voisinage de $\mathbb{P} \times (z,s)$. De plus, le diviseur associé à θ est bien défini (ceci demande un peu plus de soin : il faut vérifier que le diviseur obtenu par des représentations dans des groupes de lacets différents ne dépend pas de ces représentations; j'omets les détails).

Le fibré inversible sur $\widetilde{Z} \times S$ correspondant à ce diviseur sera noté $L(\theta)$, pour le distinguer du fibré L considéré aux paragraphes précédents.

On a de plus le résultat suivant, particulier à la situation considérée ici :

PROPOSITION 4.7. — *Au-dessus de $\mathbb{P} \times (\widetilde{Z} \times S - \theta)$, le fibré $\widetilde{E}$ est trivial.*

Ceci se fait comme dans [Mal]; il suffit de remarquer que $\widetilde{E}$ se trivialise canoniquement sur $\{\infty\} \times \widetilde{Z} \times S$: pour chaque $s \in S$, on a une trivialisation sur $\{\infty\} \times Z$ par transport parallèle de la base initiale en z^0 suivant la connexion restriction de ∇ à Y_∞ ; le théorème de dépendance des conditions initiales montre que cette trivialisation dépend holomorphiquement de $s \in S$.

Dans la trivialisation qui vient d'être indiquée, hors de θ, la forme de la connexion $\widetilde{\nabla}$ s'écrit $\Omega = \sum A_\mu \frac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu}$, les A_μ dépendant analytiquement de $z = (a_1, \ldots, a_\mu) \in \widetilde{Z}$ et de $s = (A_1^0, \ldots, A_m^0)$ (*cf.* [Mal]; si l'on n'avait pas trivialisé à l'infini comme indiqué, il faudrait ajouter des termes $\sum B_\mu da_\mu$).

Comme dans loc. cit., on démontre le théorème suivant :

THÉORÈME 4.8. — *Les A_μ sont méromorphes sur $\widetilde{Z} \times S$ avec pôles sur θ.*

Par ailleurs, les A_μ sont solutions de l'équation de Schlesinger obtenue en écrivant la nullité de la courbure $d\Omega + \Omega \wedge \Omega$,

$$dA_\mu = \sum_{\nu \neq \mu} [A_\mu, A_\nu] \frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu}. \tag{4.9}$$

(N.B. Dans [Mal], le signe est incorrect.) Les A_μ sont exactement les solutions de ce système qui vérifient $A_\mu(z^0; A_\nu^0) = A_\mu^0$. Le théorème 4.8 exprime donc la *propriété de Painlevé* pour l'équation de Schlesinger.

Remarque 4.10. — L'équation (4.9) admet l'interprétation suivante, *a priori* un peu surprenante : elle exprime que A_μ est horizontale sous l'action adjointe de $\nabla \mid Y_\mu$. En effet, on vérifie facilement que, dans les coordonnées $(a_1, \ldots, a_\mu)$, la restriction $\nabla \mid Y_\mu$ a pour forme $\Omega_\mu = \sum_{\nu\neq\mu} A_\nu \frac{d(a_\mu - a_\nu)}{(a_\mu - a_\nu)}$ (pour le voir, faire par exemple, le changement de variables $y = x - a_\mu$, $b_\mu = a_\mu$, $b_\nu = a_\nu - a_\mu$, $\nu \neq \mu$). Cette remarque servira au prochain paragraphe.

Remarque 4.11. — On pourrait penser à agrandir l'espace des conditions initiales en faisant aussi varier z^0 ; il faudrait alors mettre une relation d'équivalence entre les (z, A_μ) qui définissent la même solution des équations de Schlesinger. Inutile de dire que je n'ai pas la moindre idée du genre d'espaces que l'on peut obtenir ainsi. Dans cet ordre d'idées, voir toutefois les travaux d'Okamoto [Ok2] sur "l'espace des conditions initiales" des équations de Painlevé.

5. Structure hamiltonienne et fonction τ.

Les équations de Schlesinger peuvent être écrites sous forme hamiltonienne, de plusieurs manières.

5.1. — Une première manière ([J-M-M-S], [H]) consiste à considérer les A_μ comme des éléments de $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})^*$, qu'on identifie à $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})$ par $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$. On considère alors la *structure de Poisson* de $\mathfrak{gl}(p,\mathbb{C})^*$ (sur ce point, voir par exemple [W]) ; on note σ la forme différentielle définie par

$$\sigma = \frac{1}{2}\sum_{\mu\neq\nu} \mathrm{tr}(A_\mu A_\nu)\frac{d(a_\mu - a_\nu)}{a_\mu - a_\nu}. \tag{5.2}$$

On vérifie alors ceci : avec le signe convenable pour le crochet de Poisson $\{\cdot,\cdot\}$, (4.9) peut s'écrire $dA_\mu = \{\sigma, A_\mu\}$.

5.2. — J'utiliserai une manière plus précise d'écrire ces équations, qui se trouve dans [J-M-M-S], appendice 5. Auparavant, j'ai besoin d'un rappel de géométrie symplectique; soit ω une 2-forme holomorphe fermée sur une variété analytique complexe X ; à ω est associé un feuilletage avec singularités, défini par les champs de vecteurs ξ qui vérifient $i_\xi\omega = 0$, i le produit intérieur [en effet, on a d'abord $L_\xi\omega = di_\xi\omega = 0$, L la dérivée de Lie; puis, si l'on prend un second champ η, avec $i_\eta\omega = 0$, on a $0 = L_\xi i_\eta\omega = i_{[\xi,\eta]}\omega + i_\eta L_\xi\omega$, d'où $i_{[\xi,\eta]}\omega = 0$]. Si ω est partout "de rang r", *i.e.* $\omega^r \neq 0$ en tout point, et $\omega^{r+1} = 0$, localement (Darboux) il existe des coordonnées $x_1, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_r; z_1, \ldots, z_m$, $m = \dim X - 2r$ telles qu'on ait $\omega = \sum dy_i \wedge dx_i$. À l'aide de la forme normale précédente, pour ω de rang r, on vérifie ceci

i) Les formes orthogonales au feuilletage sont localement de la forme $i_\xi \omega$, ξ un champ de vecteur, et réciproquement.

ii) La restriction de ω à une transversale est invariante par holonomie, et définit donc une *structure symplectique transverse* au feuilletage.

J'utiliserai cela dans le cas particulier suivant : X est un ouvert de $\mathbb{C}^{2r+m}$, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_r; a_1, \ldots, a_m)$; on se donne m fonctions $H_1, \ldots, H_m$ sur X, et on pose $\alpha = \sum y_i dx_i + \sum H_\mu da_\mu$, $\omega = d\alpha$. On a évidemment $\omega^r \neq 0$; on a la proposition suivante :

PROPOSITION 5.4. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\omega^{r+1} = 0$ *(donc ω est de rang r).*

ii) *On a* $\frac{\partial H_\nu}{\partial a_\mu} - \frac{\partial H_\mu}{\partial a_\nu} + \{H_\mu, H_\nu\} = 0$, *avec* $\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$.

De plus, sous les hypothèses précédentes, on a les résultats suivants :

iii) *Le système différentiel* $\left\{ dx_i + \sum_\mu \frac{\partial H_\mu}{\partial y_i} da_\mu,\ dy_i - \sum \frac{\partial H_\mu}{\partial x_i} da_\mu \right\}$ *est intégrable au sens de Frobenius.*

iv) *Les champs de vecteurs* $\xi_\mu = \frac{\partial}{\partial a_\mu} + \sum_i \left(\frac{\partial H_\mu}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial H_\mu}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$ *commutent.*

Les formes $i_{\partial/\partial x_i}\omega$, $i_{\partial/\partial y_i}\omega$ (qui sont écrites en iii)) sont linéairement indépendantes ; donc, si ω est de rang r elles engendrent les $i_\xi \omega$ (et réciproquement) ; en écrivant que les $i_{\partial/\partial a_\mu}\omega$ en sont combinaisons linéaires, on trouve ii). Les dernières assertions sont alors immédiates.

On peut prendre en particulier comme transversales les sections $a_\mu = \mathrm{c^{te}}$, $\mu = 1, \ldots, m$; le fait qu'on ait une structure symplectique transverse signifie ici que la forme $\sum dy_i \wedge dx_i$ est fixe sous le flot $\exp(\sum t_\nu \xi_\nu)$. Par contre, α lui-même ne définit pas une structure transverse : si ξ vérifie $i_\xi \omega = 0$, on a seulement $L_\xi \alpha = i_\xi d\alpha + id\langle \xi, \alpha \rangle = d\langle \xi, \alpha \rangle$; donc le flot fixe α à une forme exacte près.

Remarque 5.5. — Supposons (ce qui sera le cas ici) que les H_μ soient homogènes de degré 2 en les y_i ; alors, sur une feuille F du feuilletage, on a

$\alpha = -\sum H_\mu da_\mu$; en particulier $\sum H_\mu da_\mu \mid F$ est fermé (puisque $\alpha \mid F$ est évidemment fermé).

Il suffit en effet de vérifier cette identité sur les champs ξ_μ ; or, on a $\langle \alpha, \xi_\mu \rangle = H_\mu - \sum y_i \frac{\partial H_\mu}{\partial y_i} = -H_\mu$.

5.6. — Suivant loc. cit., on va écrire les équations de Schlesinger en les relevant de $\mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})^*$ à $T^*G\ell(p, \mathbb{C})$; du point de vue symplectique, ceci est le relèvement d'une structure de Poisson en une structure symplectique (pour ce genre de considérations, voir [W]).

On considère donc les A_μ comme des formes *invariantes à droite* sur $G\ell(p, \mathbb{C})$, et on écrit $A_\mu = Q_\mu P_\mu$, Q_μ (resp. (Q_μ, P_μ)) un point de $G\ell(p, \mathbb{C})$ (resp. $T^*G\ell(p, \mathbb{C})$) ; tenant compte de la remarque 4.10, les équations de Schlesinger s'écrivent alors

$$(5.7) \qquad dQ_\mu + \Omega_\mu Q_\mu = 0, \quad dP_\mu - P_\mu \Omega_\mu = 0, \quad \text{avec } \Omega_\mu \text{ comme en 4.10.}$$

Ceci s'écrit sous la forme hamiltonienne 5.4 et prenant ici pour α la forme ℓ définie par

$$(5.8) \qquad \ell = \mathrm{tr}\big(\sum P_\mu dQ_\mu\big) + \sigma, \quad \text{avec } \sigma \text{ donné par 5.2}$$

En passant aux coordonnées $p_{ij\mu}$ (resp $q_{ij\mu}$), composantes de P_μ (resp. Q_μ), on vérifie en effet qu'on a ici, avec les notations de 5.4 : $\frac{\partial H_\mu}{\partial a_\nu} - \frac{\partial H_\nu}{\partial a_\mu} = 0$, et $\{H_\mu, H_\nu\} = 0$.

On a d'autre part les intégrales premières $P_\mu Q_\mu = \mathrm{c^{te}}$, qui montrent que, au cours du mouvement, la classe de conjugaison des A_μ est fixe, et aussi l'intégrale première évidente $\sum A_\mu = \mathrm{c^{te}}$.

5.9. — On a maintenant agrandi l'espace S des conditions initiales en $\widehat{S} = [T^*G\ell(p, \mathbb{C})]^m$; S est ici identifié à $[\mathfrak{gl}(p, \mathbb{C})^*]^m$; la projection $\pi : \widehat{S} \to S$ est donnée par $(Q_\mu, P_\mu) \mapsto A_\mu = Q_\mu P_\mu$ (on peut aussi prendre comme coordonnées les (Q_μ, A_μ) si l'on préfère) ; notons encore π la projection $\widetilde{Z} \times \widehat{S} \to \widetilde{Z} \times S$, et posons, avec les notations de 4.6, $\widehat{\theta} = \pi^{-1}\theta$, $L(\widehat{\theta}) = \pi^* L(\theta)$ ($L(\widehat{\theta})$ est donc le fibré défini par $\widehat{\theta}$). Le théorème 4.8 est encore vrai ici, sous la forme suivante :

PROPOSITION 5.10. — *Les solutions de (5.7) sont méromorphes sur $\widetilde{Z} \times \widehat{S}$, avec pôles sur $\widehat{\theta}$.*

Ceci se voit de la manière suivante : on écrit les équations dans la trivialisation le long d'un Y_μ (μ fixé) ; le long de cette trivialisation Q_μ est constant; le passage de cette trivialisation à celle qu'on a considéré en 4.7 le long de Y_∞ est donné par des matrices méromorphes le long de $\widehat{\theta}$, comme dans [Ma1].

5.11. — Dans la suite, je noterai Φ le flot de source z^0, *i.e.* l'application $(z,\hat{s}^0) \mapsto (z,\hat{s})$, défini sur $\widetilde{Z} \times \widehat{S} - \widehat{\theta}$, qui donne la valeur $\hat{s}$ en z de la solution de (5.7) de conditions initiales $\hat{s}^0$ en z^0.

D'autre part, je me limiterai au sous-ensemble S' de S formé des matrices A_μ^0 dont les valeurs propres ne diffèrent pas d'un entier; il revient au même de dire que la monodromie locale en $x = a_\mu^0$ de la connexion $\sum A_\mu^0 \frac{dx}{x-a_\mu^0}$ a ses valeurs propres distinctes; le complémentaire Δ de S' dans S est donc l'hypersurface définie par $\Delta_1 \cdots \Delta_m = 0$, Δ_μ le discriminant de l'équation caractérisque de $\exp(-2\pi i A_\mu^0)$. Comme la classe de conjugaison de A_μ est constante le long des solutions de (4.9) (ou (5.7)), cette condition ne dépend pas du point z^0 où l'on a choisi les conditions initiales.

Posons $\widehat{S}' = \pi^{-1}S'$; au-dessus de $\widehat{S}' - \widehat{\theta}$, le fibré $L(\widehat{\theta})$ est trivial, et même canoniquement trivialisé. La forme $-\Phi^*(\ell)$ définit donc une connexion sur ce fibré (plus précisément, la forme de cette connexion sur le fibré principal correspondant $(\widehat{S}' - \widehat{\theta}) \times \mathbb{C}^*$ est $-\Phi^*(\ell) + \mu^{-1}d\mu$, μ la coordonnée de $\mathbb{C}^*$). Le résultat principal de cet article, sous une forme affaiblie, est le résultat suivant, du type "Riemann-Roch local".

THÉORÈME 5.12. — *La connexion précédente s'étend en une connexion sur $L(\widehat{\theta})$ au-dessus de $\widetilde{Z} \times \widehat{S}'$.*

Si l'on se restreint à une condition initiale fixe $\hat{s}^0 \in \widehat{S}'$, et à la solution correspondante, on aura d'une part un diviseur θ_0 de $\widetilde{Z}$, restriction de $\widehat{\theta}$ à $\widetilde{Z} \times \hat{s}^0$, d'autre part les restrictions ℓ_0 et σ_0 de ℓ et σ à la dite solution. On a $\ell_0 = -\sigma_0$ d'après la remarque 5.5 (ceci se vérifie aussi immédiatement sur les équations (5.7)); cette forme est fermée; par définition de $L(\widehat{\theta})$, le théorème 5.12 dit alors ceci : on a $\sigma_0 = d\log\tau$, τ une section holomorphe inversible du fibré dual $L(\theta_0)^*$, *i.e.* une fonction holomorphe sur $\widetilde{Z}$ de diviseur θ_0.

Ce résultat, dû à Miwa [Mi], est redémontré dans [Ma1]; on notera toutefois que le théorème 5.12 est plus précis, puisqu'il concerne le diviseur θ tout entier, et pas seulement sa restriction à une solution; sa démonstration fait l'objet du prochain paragraphe.

6. Suite du précédent.

Il suffit de démontrer le théorème 5.12 localement au voisinage d'un point $(z, \hat{s}^0)$ de $\widehat{\theta}$; prenant un point $(z^1, \hat{s}^0) \notin \widehat{\theta}$, avec z^1 voisin de z, on peut remplacer les conditions initiales $(z^0, \hat{s}^0)$ par $(z^1, \hat{s}^1) = \Phi(z^1, \hat{s}^0)$, Φ le flot défini en 5.11. Toujours avec le même point z^1, on peut faire de même en partant de conditions initiales voisines de $\hat{s}^0$.

En changeant les notations, ceci nous montre qu'il suffit de démontrer le théorème dans la situation suivante : on fixe $z^0 = (a^0_\mu)$; on choisit des disques fermés disjoints D'_μ, avec $a^0_\mu \in D'^0_\mu$ (l'intérieur de D'_μ), et on se limite à faire varier a_μ dans D'^0_μ; on posera $Z' = D'^0_1 \times \cdots \times D'^0_m$; on a $Z' \subset Z$ (ou si l'on veut, $Z' \subset \widetilde{Z}$ en prenant pour $\widetilde{Z}$ le revêtement universel de point-base z^0).

Notons encore $\hat{s}^0 = (Q^0_\mu, A^0_\mu)$ les conditions initiales en z^0, en supposant $\hat{s}^0 \in \widehat{S}'$ (*cf.* 5.11). On pose aussi $A^0_\mu = Q^0_\mu P^0_\mu$, $B_\mu = P^0_\mu Q^0_\mu = (Q^0_\mu)^{-1} A^0_\mu Q^0_\mu$; les B_μ sont des constantes du mouvement.

On pose aussi $\Omega^0 = \sum A^0_\mu \frac{dx}{x-a^0_\mu}$, $\Omega'^0_\mu = B_\mu \frac{dx}{x-a^0_\mu}$, $\Omega'_\mu = B_\mu \frac{dx}{x-a_\mu}$, $\widetilde{\Omega}'_\mu = B_\mu \frac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu}$.

La forme $\widetilde{\Omega}'_\mu$ est une forme de connexion en (x, a_μ), Ω'_μ sa "forme relative en dx seulement" (*i.e.* modulo les da_μ). Quant aux a^0_μ, ils sont considérés comme fixes; suivant le contexte, Ω^0 et Ω'^0_μ seront considérés comme des formes en (dx, da_μ), ou seulement en dx.

En se limitant, comme indiqué ci-dessus, à faire varier a_μ dans D^0_μ, on va écrire la déformation isomonodromique "explicitement", en terme de fibrés, de la manière suivante :

i) Dans D'', on garde la forme Ω^0;

ii) Dans D'_μ, on la remplace par $\widetilde{\Omega}'_\mu$.

Je note pour abréger $\widetilde{\Omega}'$ la famille des $\widetilde{\Omega}'_\mu$. Sur $\Gamma = (\Gamma_\mu)$, il faut écrire la matrice de passage $g = (g_\mu)$, fonction des a_μ à valeurs dans G, qui transforme $\widetilde{\Omega}'$ en Ω^0, *i.e.* qui vérifie $\Omega^0 = g[\widetilde{\Omega}']$, le second membre étant par définition $g\widetilde{\Omega}' g^{-1} - dg \cdot g^{-1}$, dg la différentielle en x et les a_μ (on écrira aussi plus loin $\Omega^0 = g[\Omega'] = g\Omega' g^{-1} - d_x g \cdot g^{-1}$, d_x la différentielle en x seul).

On prend $g = g'g''$, avec les conditions suivantes :

i) On choisit g'' pour avoir $\Omega'^0 = g''[\widetilde{\Omega}']$; on prendra $g''_\mu = \left(\frac{x-a_\mu}{x-a^0_\mu}\right)^{B_\mu}$; c'est une fonction holomorphe de $x \in \mathbb{P} - D'^0_\mu$, $a_\mu \in D'^0_\mu$ et B_μ, égale à l'identité pour $x = \infty$ (et c'est la seule à vérifier toutes ces propriétés).

ii) On prend g'_μ vérifiant les conditions suivantes : c'est une fonction holomorphe de $x \in D'_\mu$ et (Q^0_μ, A^0_μ) vérifiant $g'_\mu(a^0_\mu) = Q^0_\mu$, et $\Omega^0 = g'_\mu[\Omega'^0_\mu]$ (l'hypothèse fait en 5.11 sur les A^0_μ implique classiquement que ces conditions admettent une solution et une seule; il aurait même suffi pour cela de l'hypothèse un peu plus faible suivante : les valeurs propres *distinctes* de A^0_μ ne diffèrent pas d'un entier).

Hors de $\widehat{\theta}$, les équations (5.7) "se résolvent" de la manière suivante : on écrit, avec les notations de (3.4) $g = h''^{-1}h'$; on a alors $h''[\Omega^0] = h'[\widetilde{\Omega}']$ sur Γ; le premier membre est holomorphe dans D'', le second dans D' (avec dépendance analytique de z et $\hat{s}^0$); on vérifie que leur valeur commune est la forme voulue $\sum A_\mu \frac{d(x-a_\mu)}{x-a_\mu}$ (*cf.* [Mal], lemme 6.5). On vérifie aussi qu'on a $Q_\mu = h'(a_\mu)$; je laisse ce point en exercice (utiliser le fait suivant : la restriction de $\widetilde{\Omega}'_\mu$ à $x = a_\mu$ est triviale; donc Q_μ est constant sous l'action de $\widetilde{\Omega}'_\mu$).

La donnée de g et Ω' définit une application $(g, \Omega') : Z' \times \widehat{S} \to G \times \overline{\mathfrak{g}}^*$ (voir les définitions au §3). L'image réciproque de Θ est $\widehat{\theta}$, et celle de $L \times \overline{\mathfrak{g}}^*$ est $L(\widehat{\theta})$. On peut donc considérer la connexion sur $L(\widehat{\theta})$, image réciproque par (g, Ω') de $\hat{\lambda}$. Au-dessus de $U \times \mathbb{C}^* \times \bar{g}^*$, $\hat{\lambda}$ est donné par (3.7); notons λ sa restriction à $\mu = 1$, considérée comme 1-forme sur $U \times \overline{\mathfrak{g}}^*$.

D'autre part, l'application (g, Ω') se restreint en une application $Z' \times \widehat{S}' - \widehat{\theta} \to U \times \overline{\mathfrak{g}}^*$; le théorème 5.12 est alors conséquence du résultat plus précis suivant, où ℓ est défini en (5.8) et Φ en 5.11.

THÉORÈME 6.1. — *Sur $Z' \times \widehat{S}' - \theta$, on a $(g, \Omega')^*\lambda = -\Phi^*\ell$.*

Le théorème est conséquence des deux assertions suivantes :

6.2. — *La forme $(g, \Omega')^*\lambda$ est inchangée par transport des conditions initiales.*

6.3. — *La formule est vraie en $z = z^0$.*

Démonstration de 6.2. — Précisons d'abord ce que veut dire l'énoncé. Soit $z^1 \in Z'$; pour $\hat{s}^1 = (Q^1_\mu, P^1_\mu) \in \widehat{S}'$, construisons $g^1(z, \hat{s}^1)$ à partir de

$(z^1,\hat{z}^1)$ comme on a construit g à partir de $(z^0,\hat{s}^0)$. Soit Φ_{z^1} l'application $\widehat{S}^1 \to \widehat{S}'$ (définie pour $(z^1,\hat{s}^0) \notin \widehat{\theta})$ définie par $\hat{s}^1 = \Phi_{z_1}(\hat{s}^0)$, avec $(z^1,\hat{s}^1) = \Phi(z^1,\hat{s}^0)$, *i.e.* l'application "transport parallèle de z^0 à z^1" suivant les équations de Schlesinger (5.7). Dans ce transport parallèle, Ω' est inchangé; il s'agit de démontrer que $\Phi^*_{z^1}$ transforme $(g^1,\Omega')^*\lambda$ en $(g,\Omega')^*\lambda$.

Cet énoncé se traduit pratiquement de la manière suivante : écrivons $g(z_1) = h''^{-1}h'$, avec $g(z^1)$ (resp. h'', resp. h') élément de G (resp. G'', resp. G'), dépendant holomorphiquement de $\hat{s}^0$; alors Ω^0 est remplacé par $\Omega^1 = h''[\Omega^0]$; on en déduit qu'on a $g^1 = h''g$ et il s'agit de démontrer qu'on a $(h''g,\Omega')^*\lambda = (g,\Omega')^*\lambda$.

Le premier membre s'écrit $\langle (h''g)^{-1}\partial(h''g),\Omega'\rangle + \omega\circ(h''g)$, ∂ la différentielle en z et $\hat{s}^0$. Calculons les deux termes

i) On a $\langle (h''g)^{-1}\partial(h''g),\Omega'\rangle = \langle g^{-1}\partial g,\Omega'\rangle + \langle g^{-1}h''^{-1}\partial h"g,\Omega'\rangle$. Le premier terme est égal au terme correspondant dans $(g,\Omega')^*\lambda$. Le second terme s'écrit aussi $\langle h''^{-1}\partial h'', g\Omega' g^{-1}\rangle = \langle h''^{-1}\partial'' h, \Omega^0 + d_x g\cdot g^{-1}\rangle$. On a $\langle h''^{-1}\partial'' h,\Omega^0\rangle = 0$ car, dans D'', Ω^0 a un pôle simple à l'infini, et $h''^{-1}\partial'' h(\infty) = 0$ (puisque $h''(\infty) = \mathrm{id}$). Il reste donc finalement

$$\langle (h''g)^{-1}\partial(h''g),\Omega'\rangle = \langle g^{-1}\partial g,\Omega'\rangle + \langle h''^{-1}\partial'' h, d_x g\cdot g^{-1}\rangle.$$

ii) On a $\omega\circ(h''g) = \mathrm{Tr}(T^{-1}_{h''g}T_{\partial(h''g)} - T_{(h''g)^{-1}\partial(h''g)})$; en utilisant $T^{-1}_{h''g} = T^{-1}_g T''^{-1}_h = T^{-1}_g T_{h''^{-1}}$ et les formules analogues avec $T_{\partial h''g}$ et $T_{h''\partial g}$ (cf. (3.4)), on trouve

$$\omega\circ(h''g) = \mathrm{Tr}(T^{-1}_g T_{\partial g} - T_{g^{-1}\partial g}) + \mathrm{Tr}(T^{-1}_g T_{h''^{-1}\partial h''}T_g - T_{g^{-1}h''^{-1}\partial h'' g}).$$

Le premier terme est égal au terme correspondant de $(g,\Omega)^*\lambda$; d'après (3.4), le second vaut $\gamma(g^{-1},h''^{-1}\partial h'') = -\langle h''^{-1}\partial h'', d_x g\cdot g^{-1}\rangle$.

En regroupant les deux résultats, on trouve l'égalité cherchée.

Démonstration de 6.3. — On a $(g,\Omega')^*\lambda = \langle g^{-1}\partial g,\Omega'\rangle + \omega\circ g$; ici encore, calculons séparément les deux termes, avec ici $z = z^0$; on a $g = g'g''$, avec $g''(z^0) = \mathrm{id}$, $\Omega' = \Omega'^0$.

i) On a $g^{-1}\partial g = (g'g'')^{-1}\partial(g'g'') = g''^{-1}g'^{-1}\partial g' g'' + g''^{-1}\partial g'' = g'^{-1}\partial g' + g''^{-1}\partial g''$. D'une part, on a $\langle g''^{-1}\partial g'',\Omega'^0\rangle = 0$ car, dans D'', Ω'^0 a un pôle simple à l'infini et $g''^{-1}\partial g''(\infty) = 0$. D'autre part, on a $\Omega'^0_\mu = \frac{B_\mu dx}{x-a^0_\mu}$, et $g'(a^0_\mu) = Q^0_\mu$; d'où

$$\langle g'^{-1}\partial g',\Omega'^0_\mu\rangle = -\mathrm{Tr}(Q^{0-1}_\mu dQ^0_\mu B^0_\mu) = -\mathrm{Tr}(P^0_\mu dQ^0_\mu).$$

Il faut exprimer ceci en termes de P_μ, Q_μ; en z^0, on a $P_\mu = P^0_\mu$; d'autre part $Q_\mu(z^0,Q^0_\mu,P^0_\mu) = Q^0_\mu$; donc $dQ_\mu = dQ^0_\mu + \frac{\partial Q_\mu}{\partial z}dz$; le deuxième terme est la restriction de dQ_μ aux solutions de l'équation de Schlesinger; d'après 5.5, ou la remarque suivant 5.12, on a, en z^0, $\sum \mathrm{tr}(P_\mu dQ_\mu) = \sum \mathrm{tr}(P_\mu^0 dQ_\mu^0) - 2\sigma$; d'où finalement

$$\langle g^{-1}\partial g, \Omega'^0\rangle = -\sum \mathrm{tr}(P_\mu dQ_\mu) - 2\sigma.$$

ii) Calculons pour terminer $\omega \circ g$ en z^0. Le calcul est ici analogue à celui de [S-M-J], §1.6, ou de [Mal], §6. En utilisant encore $g''(z^0) = \mathrm{id}$, et les remarques suivant (3.4), on trouve

$$\begin{aligned}\omega \circ g &= \mathrm{Tr}(T^{-1}_{g'g''} T_{\partial(g'g'')} - T_{(g'g'')^{-1}\partial(g'g'')})\\ &= \mathrm{Tr}(T_{g'^{-1}} T_{g'\partial g''} - T_{\partial g''})\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathrm{tr}(\partial g'' g'^{-1} d_x g') \ \text{ par 3.2.}\end{aligned}$$

D'une part, on a $\partial g''_\mu = \frac{-B_\mu da_\mu}{x - a^0_\mu}$ (la dérivée en $\frac{\partial}{\partial B_\mu}$ est nulle en $a_\mu = a^0_\mu$); posons d'autre part, au voisinage de $x = a^0_\mu$,

$$\Omega^0 = \Big[\frac{A_\mu}{x - a^0_\mu} + C_\mu + 0(x - a^0_\mu)\Big]dx,$$

avec $C_\mu = \sum_{\nu\neq\mu} \frac{A_\nu}{a_\mu - a_\nu}$. On a $\Omega^0 = g'_\mu[\Omega'^0_\mu]$; d'où $\frac{d}{dx} g'_\mu = g'_\mu \Omega'^0_\mu - \Omega^0 g'_\mu$; écrivons

$$g'_\mu = Q^0_\mu(1 + (x - a^0_\mu)R_\mu) + 0(x - a^0_\mu)^2 \ ;$$

prenant les termes constants dans les deux membres de l'égalité précédente, il vient :

$$R_\mu = R_\mu B_\mu - (Q^0_\mu)^{-1} A^0_\mu Q_\mu R_\mu - (Q^0_\mu)^{-1} C_\mu Q^0_\mu = [R_\mu, B_\mu] - (Q^0_\mu)^{-1} C_\mu Q^0_\mu$$

d'où, en z^0,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\mu} \mathrm{tr}(\partial g''_\mu g'^{-1}_\mu d_x g'_\mu) = -\,\mathrm{tr}(R_\mu B_\mu) = \mathrm{tr}(C_\mu A_\mu).$$

et finalement, compte-tenu de la valeur de C_μ : $\omega \circ g = \sigma$.

En regroupant ce résultat et celui de i), on trouve le résultat cherché. Ceci termine la démonstration du théorème.

Remarque 6.4. — Le long des solutions, on a $\langle g^{-1}\partial g, \Omega'\rangle = 0$. En effet on a $\partial g' = 0$ (g' ne dépend que des conditions initiales); d'où $g^{-1}\partial g = g''^{-1}\partial g''$. On a $\langle g''^{-1}\partial g'', \Omega'\rangle = 0$ car Ω' est méromorphe dans D'', avec pôle simple à l'infini, et $g''^{-1}\partial g''(\infty) = 0$.

Comme d'autre part, le long des solutions, on a $\ell = -\sigma$, la formule 6.1 s'écrit ici $\omega \circ g = \sigma$, ce qui redonne le résultat de [Mal], tout au moins sous l'hypothèse $s = (A_\mu) \in S'$ (*cf.* 5.11).

Remarque 6.5. — On dispose ici d'une équation de $\widehat{\theta}$, à savoir $\tau = \text{dét}(T_{g''}^{-1}T_{g'}^{-1}T_{g'g''})$; avec les notations de 2.1, ceci vaut $c(g',g'')^{-1}$.

Pour calculer sa dérivée logarithmique, il est commode de se placer dans $\widehat{G}$, au-dessus de U. On a $(g',\lambda)(g'',\mu) = (g,\nu)$, avec $g = g'g''$, $\nu = \lambda\mu c(g',g'')$, *cf.* (2.1).

D'une part, on a

$$\big[(g',\lambda)(g'',\mu)\big]^{-1}\partial\big[(g',\lambda)(g'',\mu)\big] = (g'',\mu)^{-1}\partial(g'',\mu) + \operatorname{ad} g''^{-1}\big[(g',\lambda)^{-1}\partial(g',\lambda)\big].$$

Le premier terme vaut $(g''^{-1}\partial g'', \mu^{-1}d\mu)$ (utiliser 3.6 et $\omega \circ g'' = 0$). Le second vaut $\operatorname{ad} g''^{-1}(g'^{-1}\partial g', \lambda^{-1}d\lambda) = \big(\operatorname{ad} g''^{-1}(g'^{-1}\partial g'), \lambda^{-1}d\lambda + \gamma(g''^{-1}, g'^{-1}\partial g')\big)$ avec γ défini en (3.4).

D'autre part, on a $(g,\nu)^{-1}\partial(g,\nu) = (g^{-1}\partial g, \nu^{-1}d\nu + \omega\circ g)$.

En comparant, on trouve

$$\tau^{-1}d\tau = \omega\circ g - \gamma(g''^{-1}, g'^{-1}\partial g') = \omega\circ g + \langle g'^{-1}\partial g', d_x g'' g''^{-1}\rangle$$

le dernier terme est holomorphe sur $\widehat{\theta}$, et on revérifie que $\omega\circ g$ a bien le pôle voulu.

Par ailleurs, sur les solutions, on a $\partial g' = 0$, d'où $\tau^{-1}d\tau = \omega\circ g = \sigma$, comme il se doit.

7. Questions et remarques diverses.

7.1. — Le théorème 5.12 est encore vrai sans l'hypothèse $(A_\mu^0) \in S'$; on pourrait probablement le voir par des calculs analogues à ceux de [Ma1], §6, où cette hypothèse n'intervient pas. Mais il est plus simple de remarquer que $\widehat{\theta}$ et le diviseur $\widetilde{Z}\times\Delta$ de $\widetilde{Z}\times\widehat{S}$ (*cf.* 5.11) se coupent en codimension 2 : en effet, si ce n'était pas le cas, $\widehat{\theta}$ contiendrait une composante irréductible de $\widetilde{Z}\times\Delta$, *i.e.* un $\widetilde{Z}\times\Delta'$, Δ' une composante irréductible de Δ ; mais ceci est impossible puisque $\widehat{\theta}$ ne rencontre pas $\{z^0\}\times\widehat{S}$.

Le théorème résulte alors de 5.12 et du "théorème de Hartogs" (une fonction holomorphe en dehors d'un ensemble analytique de codimension $\geqslant 2$ se prolonge). Soit en effet a un point de $\widehat{\theta}$, et f une équation locale de $\widehat{\theta}$ en a ; au voisinage de a, la forme $-\Phi^*(\ell) - \frac{df}{f}$ est holomorphe sauf sur un ensemble de codimension 2, donc partout ; ceci démontre le résultat cherché.

7.2. — Les résultats précédents devraient pouvoir s'étendre au cas des singularités irrégulières. Dans le cas habituel, où l'on suppose que la partie la plus polaire de la matrice de connexion a ses valeurs propres distinctes, les résultats de Hitchin ont été étendus par Boalch ([Bo1], [Bo2]); d'autre part, la méthode de [Ma1] pour étudier le diviseur θ a été étendue par Palmer [Pa]. Une extension des présents résultats consisterait, au fond, à "mettre ensemble" leurs résultats.

Par ailleurs, je profite de l'occasion pour redire une chose que j'ai déjà dit souvent : il me semble qu'on devrait pouvoir faire la théorie sous des hypothèses plus faibles que "valeurs propres distinctes", en particulier, sous l'hypothèse suivante : la partie la plus polaire est régulière (*i.e.* polynôme caractéristique = polynôme minimal); voir dans [Ma3] et [Ma4] des remarques sur ce sujet.

7.3. — Il me semble qu'une bonne partie des résultats devraient s'étendre aux déformations isomonodromiques sur une surface de Riemann compacte X de genre $g \geqslant 1$. Il faudrait probablement, au lieu du fibré $E(-1)$, avec E de degré 0, considérer les fibrés vérifiant $\deg E = (g-1)\,\mathrm{rg}\, E$, dont l'indice est nul; le complémentaire de Θ ici correspondrait à ceux de ces fibrés qui vérifient $H^0(X,E)) = H^1(X,E) = 0$.

7.4. — Voici encore un autre problème, probablement beaucoup plus difficile que les précédents, à savoir l'étude de la théorie de Galois différentielle, au sens de [Ma5] et [Ma6] de l'équation de Schlesinger.

Pour les définitions précises, je renvoie à loc. cit., et je me contente de quelques commentaires.

i) Pour avoir un problème "intéressant", il faut se placer dans une situation algébrique, ou alors compactifier la situation. Dans le cas présent, il faudrait prendre $(a_1, \ldots, a_n)$ dans une compactification de $Z \subset \mathbb{C}^m$, par exemple $P^m(\mathbb{C})$ (ou $P^1(\mathbb{C})^m$, peu importe) et aussi plonger les $T^*G\ell(p,\mathbb{C})$ dans des compactifications, par exemple $\mathbb{P}^N$, $N = 2p^2$.

ii) Les équations de Schlesinger donnent alors un feuilletage avec singularités sur $\mathbb{P}^1 \times$ (compactifié de Z) $\times$ compactifié de $[T^*G\ell(p,\mathbb{C})]^m$. Il s'agit de trouver le groupoïde de Galois différentiel. La réponse probable est la suivante : c'est le groupoïde donné par la structure transverse évidente, *i.e.* la structure symplectique transverse donnée par $d\ell$ (*cf.* 5.8), plus les intégrales premières $B_\mu = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$, $\sum A_\mu = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$, et enfin la compatibilité avec la projection $(Q_\mu, P_\mu) \mapsto (A_\mu)$, avec $A_\mu = Q_\mu P_\mu$, et enfin la compatibilité avec la projection $(Q_\mu, P_\mu) \mapsto A_\mu = Q_\mu P_\mu$.

[À noter que ces intégrales premières relèvent du schéma général suivant : soit α une 1-forme sur une variété X, et soit $(\mathcal{F})$ le feuilletage avec singularité, associé à $d\alpha$, *cf.* §5; soit ξ un champ de vecteurs vérifiant $L_\xi \alpha = 0$; alors ("théorème de Noether") $\langle \xi, \alpha \rangle$ est une intégrale première; en effet, $L_\xi \alpha = i_\xi d\alpha + d\langle \xi, \alpha \rangle$, et $i_\xi d\alpha$ est nul sur les feuilles de $(\mathcal{F})$. Ici les intégrales premières résultent de l'action de $G\ell(p, \mathbb{C})^{m+1}$, qui fait agir $(g_0, \ldots, g_m)$ sur les P_μ, Q_μ par $(Q_\mu, P_\mu) \to (g_0 Q_\mu g_\mu, g_\mu^{-1} P_\mu g_0^{-1})$. Noter par ailleurs que la "constance de la monodromie" ne donne pas d'intégrales premières au sens considéré ici, *i.e.* des fonctions méromorphes sur l'espace total considéré].

Si l'on se restreint à un sous-ensemble convenable de valeurs des intégrales premières, ou a une valeur particulière, on pourra avoir dans certains cas une structure plus riche, ce qui restreindra le groupoïde de Galois. Les nombreux travaux sur les solutions élémentaires (par exemple algébriques) me semblent rentrer plus ou moins dans ce cadre.

Il faut aussi noter que Painlevé s'était déjà posé ce type de problèmes, par exemple à propos de l'équation P1; voir [Pa]. Malheureusement, pour autant que je sache, personne à ce jour n'a réellement compris ses arguments.

BIBLIOGRAPHIE

[B] L. Boutet de Monvel, Problème de Riemann-Hilbert, III, exposé n° 5, Séminaire ENS 1979-80, Progress in math., 37, Birkhäuser (1983).

[Bo1] P. Boalch, Symplectic manifolds and isomonodromic deformations, Adv. in Math., 163 (2001), 137–205.

[Bo2] P. Boalch, Stokes matrices, Poisson Lie groups and Frobenius manifolds, Inv. Math., 146 (2001), 479–506.

[H] N. J. Hitchin, Frobenius manifolds (notes by D. Calderbank), In Gauge theory and symplectic geometry, J. Hurtubise and F. Lalonde ed., Nato ASI series C: Math. & Phys., vol. 488, Kluwer (1995).

[J-M-M-S] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori, M. Sato, Density matrix of an impenetrable Base gas and the fifth Painlevé transcendant, Physica 1D, 80–158 (1980).

[Ma1] B. Malgrange, Sur les déformations isomonodromiques, I : singularités régulières, in Séminaire ENS, Progress in Math., 37, Birkhäuser (1983).

[Ma2] B. Malgrange, Déformations isomonodromiques et fonction τ (extrait d'une lettre à J. Bost) (1986), non publié.

[Ma3] B. Malgrange, Connexions méromorphes, 2 : le réseau canonique, Inv. Math., 124 (1996), 367–387.

[Ma4] B. Malgrange, Deformations of differential systems, 2, J. Ramanujan Math. Soc., 1 (1987), 3–15.

[Ma5] B. Malgrange, Le groupoïde de Galois d'un feuilletage, Monographies de l'Enseignement mathématique, 38 (2001), 465–501.

[Ma6] B. Malgrange, On non-linear differential Galois theory, Chinese Ann. of Math., 23B-2 (2002), 219–226.

[Mi] T. Miwa, Painlevé property of monodromy preserving equations and the analyticity of τ function, Publ. RIMS, Kyoto University, 17-2 (1981), 709–721.

[Ok1] K. Okamoto, On the τ-function of the Painlevé equations, Physica, 2D (1981), 525–535.

[Ok2] K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé, Jap. J. Math., 5 (1979), 1–79.

[P] J. Palmer, Zeroes of the Jimbo-Miwa-Ueno tau function, J. Math. Phys., 40-12 (1999), 6638–6681.

[Pa] P. Painlevé, Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y'' = 6y^2 + x$, C. R. Acad. Sc. Paris, 135 (1902), 642–647.

[P-S] A. Pressley, G. Segal, Loop groups, Oxford Math. Monographs, Oxford (1986).

[S-M-J] M. Sato, T. Miwa, M. Jimbo, Aspects of holonomic quantum fields, Springer Lect. Notes in Physics, 126 (1980), 429–491.

[S-W] G. Segal, G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, Publ. Math. I.H.É.S., 61 (1985), 5–65.

[W] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds, J. Diff. Geometry, 18 (1983), 523–557.

Bernard MALGRANGE,
Université de Grenoble I
UMR 5582 du CNRS
Institut Fourier
BP 74
38402 St Martin d'Hères Cedex (France).