ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Patrice TAUVEL & Rupert W.T. YU

**Sur l'indice de certaines algèbres de lie**

Tome 54, nº 6 (2004), p. 1793-1810.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_6_1793_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**54**, 6 (2004), 1793–1810

# SUR L'INDICE DE CERTAINES ALGÈBRES DE LIE

par Patrice TAUVEL & Rupert W.T. YU

---

## 1. Notations et rappels.

**1.1.** Dans la suite, $\mathbb{K}$ est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle. Les algèbres de Lie considérées sont définies et de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Si $V$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on le munit de la topologie de Zariski. On renvoie à [2], [4] et [9] pour les concepts généraux utilisés.

**1.2.** Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ son dual. L'algèbre $\mathfrak{g}$ opère dans $\mathfrak{g}^*$ au moyen de la représentation coadjointe. Ainsi, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$, on a :

$$(X.f)(Y) = f([Y, X]).$$

Avec les notations précédentes, on définit une forme bilinéaire alternée $\Phi_f$ sur $\mathfrak{g}$ en posant :

$$\Phi_f(X, Y) = f([X, Y]).$$

Le noyau de $\Phi_f$ est noté $\mathfrak{g}^{(f)}$. L'entier $\chi(\mathfrak{g}) = \inf\{\dim \mathfrak{g}^{(f)};\ f \in \mathfrak{g}^*\}$ est appelé l'indice de $\mathfrak{g}$. On dit que $f$ est régulier si $\dim \mathfrak{g}^{(f)} = \chi(\mathfrak{g})$ ; l'ensemble $\mathfrak{g}_r^*$ des éléments réguliers de $\mathfrak{g}^*$ est un ouvert non vide de $\mathfrak{g}^*$.

**1.3.** Dans la suite, on suppose que $\mathfrak{g}$ est semi-simple, de forme de Killing $\kappa$. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, et on note $R$ le système

---

*Mots-clés* : Algèbres de Lie semi-simples – Sous-algèbres spéciales – Indice.
*Classification math.* : 17B05 – 17B20.

de racines du couple $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. Pour $\alpha \in R$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est l'espace radiciel associé à $\alpha$. On désigne par $H_\alpha$ l'unique élément de $[\mathfrak{g}^\alpha,\mathfrak{g}^{-\alpha}]$ tel que $\alpha(H_\alpha)=2$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on écrit $\langle \lambda, \alpha^\vee\rangle$ pour $\lambda(H_\alpha)$. Si $P$ est une partie de $R$, on pose :

$$\mathfrak{g}^P = \sum_{\alpha\in P} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Soient $\Pi$ une base de $R$ et $R_+$ (resp. $R_-$) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) correspondant. On désigne par $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}_-$ les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ définies par :

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}^{R_+}\ ,\ \mathfrak{b}_- = \mathfrak{h}\oplus\mathfrak{g}^{R_-}.$$

Pour toute partie $S$ de $\Pi$, on note $\mathbb{Z}S$ (resp. $\mathbb{N}S$) l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients entiers (resp. à coefficients entiers positifs) des éléments de $S$, et on pose :

$$R^S = R\cap\mathbb{Z}S\ ,\ R_+^S = R_+\cap\mathbb{Z}S = R\cap\mathbb{N}S\ ,\ R_-^S = R^S\setminus R_+^S.$$

L'ensemble $R^S$ est un système de racines dans le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}^*$ qu'il engendre, $S$ est une base de $R^S$, et $R_+^S$ (resp. $R_-^S$) est l'ensemble des racines positives (resp. négatives) associé. Si $S$ est une partie connexe de $\Pi$, le système $R^S$ est irréductible, et on note $\varepsilon_S$ sa plus grande racine (relativement à $S$).

**1.4**. Soit $S$ une partie connexe de $\Pi$. Pour tout racine $\alpha\in R_+^S\setminus\{\varepsilon_S\}$, on sait que $\langle\alpha,\varepsilon_S^\vee\rangle \in \{0,1\}$. Si $R_0^S$ est l'ensemble des $\alpha\in R^S$ vérifiant $\langle\alpha,\varepsilon_S^\vee\rangle = 0$, on a $R_0^S = R^T$, où $T = S\cap R_0^S$. D'autre part, si $\alpha\in R_+\cap R_0^S$, on a $\alpha+\varepsilon_S\notin R$, et comme $\langle\alpha,\varepsilon_S^\vee\rangle=0$, la $\varepsilon_S$-chaîne de $\alpha$ est réduite à $\{\alpha\}$ ([1], Proposition 9, p. 149). D'où $\alpha\pm\varepsilon_S\notin R$ . Par conséquent, si $\alpha\neq\varepsilon_S$, les racines $\alpha$ et $\varepsilon_S$ sont fortement orthogonales.

**1.5**. Rappelons une construction et quelques propriétés d'un certain ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales ([6] et [7]).

Soit $S$ une partie de $\Pi$. Par récurrence sur le cardinal de $S$, on définit un sous-ensemble $\mathcal{K}(S)$ de parties de $S$ de la manière suivante :

a) $\mathcal{K}(\emptyset)=\emptyset$.

b) Si $S_1,\dots,S_r$ sont les composantes connexes de $S$, alors :

$$\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(S_1)\cup\cdots\cup\mathcal{K}(S_r).$$

c) Si $S$ est connexe, on a :

$$\mathcal{K}(S) = \{S\}\cup\mathcal{K}(\{\alpha\in S;\ \langle\alpha,\varepsilon_S^\vee\rangle = 0\}).$$

**1.6**. Il est clair que le cardinal de $\mathcal{K}(\Pi)$ ne dépend que de $\mathfrak{g}$, mais pas de $\mathfrak{h}$ et $\Pi$. On note cet entier $k_{\mathfrak{g}}$. On donne dans le tableau suivant la valeur de $k_{\mathfrak{g}}$ pour les différents types d'algèbres de Lie simples. On a noté $[r]$ la partie entière d'un nombre rationnel $r$.

| | $A_\ell, \ell \geqslant 1$ | $B_\ell, \ell \geqslant 2$ | $C_\ell, \ell \geqslant 3$ | $D_\ell, \ell \geqslant 4$ | $E_6$ | $E_7$ | $E_8$ | $F_4$ | $G_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k_{\mathfrak{g}}$ | $\left[\frac{\ell+1}{2}\right]$ | $\ell$ | $\ell$ | $2\left[\frac{\ell}{2}\right]$ | 4 | 7 | 8 | 4 | 2 |

1.7. Lemme. — *Soient $S$ une partie de $\Pi$ et $K, K' \in \mathcal{K}(S)$. Alors :*

(i) *$K$ est une partie connexe de $\Pi$.*

(ii) *On a ou $K \subset K'$, ou $K' \subset K$, ou $K$ et $K'$ sont des parties disjointes de $S$ telles que $\alpha + \beta \notin R$ pour $\alpha \in R^K$ et $\beta \in R^{K'}$.*

(iii) *Si $K \neq K'$, $\varepsilon_K$ et $\varepsilon_{K'}$ sont fortement orthogonales. Par conséquent, $\{\varepsilon_K;\ K \in \mathcal{K}(S)\}$ est un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales de $R$.*

**1.8**. Si $S$ est une partie de $\Pi$ et si $K \in \mathcal{K}(S)$, on pose :

$$\Gamma^K = \{\alpha \in R^K;\ \langle \alpha, \varepsilon_K^\vee \rangle > 0\},\ \Gamma_0^K = \Gamma_K \backslash \{\varepsilon_K\},\ \mathfrak{a}_K = \sum_{\alpha \in \Gamma^K} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Lemme. — *Soient $K, K' \in \mathcal{K}(S)$, $\alpha, \beta \in \Gamma^K$, et $\gamma \in \Gamma^{K'}$.*

(i) *On a $\Gamma^K = R_+^K \backslash \{\delta \in R_+^K;\ \langle \delta, \varepsilon_K^\vee \rangle = 0\}$.*

(ii) *L'ensemble $R_+^S$ est la réunion disjointe des $\Gamma^{K''}$ pour $K'' \in \mathcal{K}(S)$, et $\mathfrak{a}_K$ est une algèbre de Heisenberg de centre $\mathfrak{g}^{\varepsilon_K}$.*

(iii) *Si $\alpha + \beta \in R$, alors $\alpha + \beta = \varepsilon_K$.*

(iv) *Si $\alpha + \gamma \in R$, alors ou $K \subset K'$ et $\alpha + \gamma \in \Gamma^{K'}$, ou $K' \subset K$ et $\alpha + \gamma \in \Gamma^K$.*

## 2. Sous-algèbres spéciales.

**2.1.** On désigne toujours par $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, et on note $G$ son groupe adjoint. La définition suivante est due à D. Panyushev.

DÉFINITION. — (i) *On dit que deux sous-algèbres paraboliques* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{p}'$ *de* $\mathfrak{g}$ *sont faiblement opposées si* $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{g}$.

(ii) *On appelle sous-algèbre spéciale de* $\mathfrak{g}$ *toute sous-algèbre de Lie* $\mathfrak{q}$ *de* $\mathfrak{g}$ *de la forme* $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$, *où* $\mathfrak{p}$ *et* $\mathfrak{p}'$ *sont des sous-algèbres paraboliques faiblement opposées de* $\mathfrak{g}$.

**2.2**. Soient $S, T$ des parties de $\Pi$. On vérifie facilement que $R_+^S \cup R_-^T$ est une partie close de $R$. Posons :

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}^{R_+^S} \oplus \mathfrak{b}_-, \ \mathfrak{p}' = \mathfrak{g}^{R_-^T} \oplus \mathfrak{b}.$$

Alors $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont des sous-algèbres paraboliques faiblement opposées de $\mathfrak{g}$, et

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{R_+^S} \oplus \mathfrak{g}^{R_-^T}$$

est une sous-algèbre spéciale de $\mathfrak{g}$.

Réciproquement, soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ vérifiant $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{b}_- \subset \mathfrak{p}'$. On a $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{g}$, et il est immédiat qu'il existe des parties $S$ et $T$ de $\Pi$ telles que $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}' = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{R_+^S} \oplus \mathfrak{g}^{R_-^T}$.

On dira qu'une sous-algèbre spéciale $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$ est standard (relativement à $\mathfrak{h}$ et $\Pi$) si elle s'écrit $\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{R_+^S} \oplus \mathfrak{g}^{R_-^T}$, où $S$ et $T$ sont des parties de $\Pi$.

**2.3**. Le résultat suivant est signalé dans [8], page 226. Nous en donnons une preuve pour la commodité du lecteur.

PROPOSITION. — *Soit* $\mathfrak{q}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{q}$ *est une sous-algèbre spéciale de* $\mathfrak{g}$.

(ii) $\mathfrak{q}$ *est G-conjuguée à une sous-algèbre spéciale standard de* $\mathfrak{g}$.

*Preuve.* — L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est claire. Supposons (i) vérifié, et prouvons (ii).

Ecrivons $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{p}'$, où $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ sont des sous-algèbres paraboliques faiblement opposées de $\mathfrak{g}$. On sait qu'il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{q}$. Notons $R'$ le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. Ecrivons $\mathfrak{p} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}^P$, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{g}^Q$, où $P$ et $Q$ sont des parties paraboliques de $R'$. D'après les hypothèses, il vient :

$$P \cup (-P) = Q \cup (-Q) = P \cup Q = R'.$$

On a donc aussi $(-P) \cup (-Q) = R'$. Soit $T = P \cap (-Q)$; c'est une partie close de $R'$. On va montrer qu'elle est parabolique, c'est-à-dire que $T \cup (-T) = R'$.

Soit $\alpha \in R' \backslash T$. Distinguons plusieurs cas :

a) Si $\alpha \notin P$ et $\alpha \notin -Q$, alors $\alpha \in -P$ et $\alpha \in Q$, donc $\alpha \in -T$.

b) Si $\alpha \in P$ et $\alpha \notin -Q$, on a $\alpha \in -P$ et $\alpha \in Q$, car $(-P) \cup (-Q) = R'$.

c) Si $\alpha \notin P$ et $\alpha \in -Q$, il vient $\alpha \in -P$ et $\alpha \in Q$, car $P \cup Q = R'$.

Dans tous les cas, on a obtenu $\alpha \in -T$, ce qui fournit le résultat. L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est alors immédiate. □

## 3. Majoration de l'indice.

**3.1.** On suppose toujours que $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple. On note $\ell = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$ son rang, et on conserve les notations de 1.3.

On fixe une base $\{H_1, \ldots, H_\ell\}$ de $\mathfrak{h}$. Si $\alpha \in R$, on désigne par $X_\alpha$ un élément non nul de $\mathfrak{g}^\alpha$. Alors $\{H_i ; 1 \leqslant i \leqslant \ell\} \cup \{X_\alpha ; \alpha \in R\}$ est une base de $\mathfrak{g}$, dont on note $\{H_i^* ; 1 \leqslant i \leqslant \ell\} \cup \{X_\alpha^* ; \alpha \in R\}$ la base duale.

**3.2**. Dans toute la suite de l'article, $S$ et $T$ sont des parties de $\Pi$. On pose :

$$\mathfrak{g}_{S,T} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in R_+^S} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \sum_{\alpha \in R_-^T} \mathfrak{g}^\alpha .$$

Ainsi, $\mathfrak{g}_{S,T}$ est une sous-algèbre spéciale standard de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{h}$ et $\Pi$.

Un des objectifs de ce travail est de majorer l'indice $\chi(\mathfrak{g}_{S,T})$ de $\mathfrak{g}_{S,T}$. Cela fera intervenir les sous-espaces $E_S$, $E_T$, et $E_{S,T}$ de $\mathfrak{h}^*$ définis par :

$$E_S = \sum_{K \in \mathcal{K}(S)} \mathbb{K}\varepsilon_K ,\ E_T = \sum_{L \in \mathcal{K}(T)} \mathbb{K}\varepsilon_L \ ,\ E_{S,T} = E_S + E_T .$$

Nous obtiendrons la majoration en utilisant des formes linéaires de la forme

$$f = \sum_{K \in \mathcal{K}(S)} a_K X_{\varepsilon_K}^* + \sum_{L \in \mathcal{K}(T)} b_L X_{-\varepsilon_L}^* \in \mathfrak{g}_{S,T}^* ,$$

où les $a_K$ et les $b_L$ sont des scalaires non nuls.

3.3. LEMME. — *Soit* $f \in \mathfrak{g}_{S,T}^*$ *comme précédemment. Alors* $\mathfrak{g}_{S,T}^{(f)}$ *contient une sous-algèbre commutative de* $\mathfrak{g}$*, formée d'éléments semi-simples, et de dimension :*

$$\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) - \dim E_{S,T} + \mathrm{card}\,\big(\mathcal{K}(S) \cap \mathcal{K}(T)\big).$$

*Preuve.* — Rappelons que $\kappa$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $f(X) = \kappa(X, X_{S,T})$, avec

$$X_{S,T} = \sum_{K \in \mathcal{K}(S)} a'_K X_{-\varepsilon_K} + \sum_{L \in \mathcal{K}(T)} b'_L X_{\varepsilon_L},$$

où

$$a'_K = \frac{a_K}{\kappa(X_{\varepsilon_K}, X_{-\varepsilon_K})}\ b'_L = \frac{b_L}{\kappa(X_{\varepsilon_L}, X_{-\varepsilon_L})}.$$

Il en résulte que $\{X \in \mathfrak{g}_{S,T}; [X, X_{S,T}] = 0\} \subset \mathfrak{g}_{S,T}^{(f)}$. Par suite, l'orthogonal de $E_{S,T}$ dans $\mathfrak{h}$, qui est de dimension $\mathrm{rg}(\mathfrak{g}) - \dim E_{S,T}$, est contenu dans $\mathfrak{g}_{S,T}^{(f)}$.

Pour $K \in \mathcal{K}(S) \cap \mathcal{K}(T)$, soit $Y_K = a'_K X_{\varepsilon_K} + b'_K X_{-\varepsilon_K} \in \mathfrak{g}_{S,T}$. Il est bien connu que $Y_K$ est un élément semi-simple de $\mathfrak{g}$. D'autre part, l'assertion (iii) du lemme 1.7 montre que les $Y_K$ sont linéairement indépendants et que $[Y_K, X_{S,T}] = 0$, donc $Y_K \in \mathfrak{g}_{S,T}^{(f)}$.

Le résultat du lemme est alors clair d'après ces remarques. □

**3.4**. Une majoration de l'indice de $\mathfrak{g}_{S,T}$ va faire intervenir les couples $(\alpha, \beta)$ de racines tels que $[X_\alpha, X_\beta]$ soit colinéaire à $X_{\varepsilon_K}$, avec $K \in \mathcal{K}(S)$, ou à $X_{-\varepsilon_L}$, avec $L \in \mathcal{K}(T)$. Nous allons tout d'abord décrire l'ensemble de ces couples.

On conserve les notations $\Gamma_K$ et $\Gamma_0^K$ de 1.8, et on fixe un ordre total sur $R_+$. Si $K \in \mathcal{K}(S)$ et $L \in \mathcal{K}(T)$, on adopte les notations suivantes :

• $\mathcal{H}_1(K)$ est l'ensemble des couples $(\alpha, \varepsilon_K - \alpha)$, avec $\alpha \in \Gamma_0^K$ et $\alpha < \varepsilon_K - \alpha$.

• $\mathcal{H}_2(L)$ est l'ensemble des couples $(-\beta, -\varepsilon_L + \beta)$, avec $\beta \in \Gamma_0^L$ et $\beta < \varepsilon_L - \beta$.

• $\mathcal{I}_1(K, L)$ est l'ensemble des couples $(-\beta, \varepsilon_K)$, avec $\beta \in \Gamma_0^L$, et pour lesquels il existe $L' \in \mathcal{K}(T)$ vérifiant $\varepsilon_K - \beta = -\varepsilon_{L'}$.

• $\mathcal{I}_2(K, L)$ est l'ensemble des couples $(\alpha, -\varepsilon_L)$, avec $\alpha \in \Gamma_0^K$, et pour lesquels il existe $K' \in \mathcal{K}(T)$ vérifiant $\alpha - \varepsilon_L = \varepsilon_{K'}$.

• $\mathcal{J}_1(K,L)$ est l'ensemble des couples $(\alpha,-\beta)$, avec $\alpha\in\Gamma_0^K$ et $\beta\in\Gamma_0^L$, et pour lesquels il existe $K'\in\mathcal{K}(S)$ vérifiant $\alpha-\beta=\varepsilon_{K'}$.

• $\mathcal{J}_2(K,L)$ est l'ensemble des couples $(\alpha,-\beta)$, avec $\alpha\in\Gamma_0^K$ et $\beta\in\Gamma_0^L$, et pour lesquels il existe $L'\in\mathcal{K}(T)$ vérifiant $\alpha-\beta=-\varepsilon_{L'}$.

On pose :

$$\mathcal{H}_1=\bigcup_{K\in\mathcal{K}(S)}\mathcal{H}_1(K),\quad \mathcal{H}_2=\bigcup_{L\in\mathcal{K}(T)}\mathcal{H}_2(L),\quad \mathcal{H}=\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2,$$

$$\mathcal{I}_1=\bigcup_{(K,L)\in\mathcal{K}(S)\times\mathcal{K}(T)}\mathcal{I}_1(K,L),\quad \mathcal{I}_2=\bigcup_{(K,L)\in\mathcal{K}(S)\times\mathcal{K}(T)}\mathcal{I}_2(K,L),$$

$$\mathcal{J}=\Big(\bigcup_{(K,L)\in\mathcal{K}(S)\times\mathcal{K}(T)}\mathcal{J}_1(K,L)\Big)\cup\Big(\bigcup_{(K,L)\in\mathcal{K}(S)\times\mathcal{K}(T)}\mathcal{J}_2(K,L)\Big),$$

$$\mathcal{Z}=\mathcal{H}\cup\mathcal{I}_1\cup\mathcal{I}_2\cup\mathcal{J}.$$

3.5. Lemme. — *Soient $K\in\mathcal{K}(S)$ et $L\in\mathcal{K}(T)$. Alors :*

(i) *Si $(-\beta,\varepsilon_K)\in\mathcal{I}_1(K,L)$ vérifie $\varepsilon_K-\beta=-\varepsilon_{L'}$, on a $L'\subsetneq L$ et $\varepsilon_K\in\Gamma_0^L$.*

(ii) *Si $(\alpha,-\varepsilon_L)\in\mathcal{I}_2(K,L)$ vérifie $\alpha-\varepsilon_L=\varepsilon_{K'}$, on a $K'\subsetneq K$ et $\varepsilon_L\in\Gamma_0^K$.*

(iii) *Si $(\alpha,-\beta)\in\mathcal{J}_1(K,L)$ vérifie $\alpha-\beta=\varepsilon_{K'}$, on a $K'\subsetneq K$ et $\beta\in\Gamma_0^K$.*

(iv) *Si $(\alpha,-\beta)\in\mathcal{J}_2(K,L)$ vérifie $\alpha-\beta=-\varepsilon_{L'}$, on a $L'\subsetneq L$ et $\alpha\in\Gamma_0^L$.*

*Preuve.* — C'est immédiat d'après les Lemmes 1.7 et 1.8. □

**3.6**. Si $K\in\mathcal{K}(S)$ et $L\in\mathcal{K}(T)$, on note :

$$\mathfrak{a}_K^\bullet=\sum_{\alpha\in\Gamma_0^K}\mathfrak{g}^\alpha,\quad \mathfrak{b}_L^\bullet=\sum_{\alpha\in\Gamma_0^L}\mathfrak{g}^{-\alpha},$$

$$\mathfrak{a}_K=\mathbb{K}X_{\varepsilon_K}+\mathfrak{a}_K^\bullet,\quad \mathfrak{b}_L=\mathbb{K}X_{-\varepsilon_L}+\mathfrak{b}_L^\bullet,$$

$$\mathfrak{u}=\sum_{K\in\mathcal{K}(S)}\mathbb{K}X_{\varepsilon_K}+\sum_{L\in\mathcal{K}(T)}\mathbb{K}X_{-\varepsilon_L},\quad \mathfrak{v}=\sum_{K\in\mathcal{K}(S)}\mathfrak{a}_K^\bullet+\sum_{L\in\mathcal{K}(T)}\mathfrak{b}_L^\bullet.$$

D'après 1.8, $\mathfrak{a}_K$ et $\mathfrak{b}_L$ sont des algèbres de Heisenberg, de centres respectifs $\mathbb{K}X_{\varepsilon_K}$ et $\mathbb{K}X_{-\varepsilon_L}$.

La dimension de $\mathfrak{a}_K^\bullet$ (resp. $\mathfrak{b}_L^\bullet$) est un entier pair $2n_K$ (resp. $2n_L$). Si $\mathcal{H}$ a la même signification qu'en 3.4, et si l'on note $r = \operatorname{card}\mathcal{H}$, il vient :

$$r = \sum_{K\in\mathcal{K}(S)} n_K + \sum_{L\in\mathcal{K}(T)} n_L.$$

On identifie $\mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{u}^*$ et $\mathfrak{v}^*$ à des sous-espaces de $\mathfrak{q}^*$ au moyen de la décomposition $\mathfrak{q} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$.

**3.7**. Avant de poursuivre notre étude, nous allons donner un exemple permettant au lecteur d'illustrer les différentes notations introduites jusqu'ici. On prend pour $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_7(\mathbb{K})$ des $(7 \times 7)$-matrices de trace nulle à éléments dans $\mathbb{K}$, et $\mathfrak{h}$ est la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ formée des matrices diagonales. Ainsi, $\mathfrak{g}$ est de type $A_6$, avec $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_6\}$, la numérotation des racines étant celle de [2]. Si $1 \leqslant i, j \leqslant 7$, $e_{ij}$ est la matrice dont le seul élément non nul est celui de la ligne $i$ et de la colonne $j$, cet élément étant égal à 1.

Soient $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$ et $T = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$. L'algèbre $\mathfrak{g}_{S,T}$ est alors constituée des matrices de $\mathfrak{g}$ de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix}
\times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\
\times & \times & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \times & \times & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\
0 & 0 & \times & \times & \times & \times & \times \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \times
\end{pmatrix}$$

On a alors $\mathcal{K}(S) = \{K_1, K_2, K_3\}$, $\mathcal{K}(T) = \{L_1, L_2, L_3\}$, avec :

$$K_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},\ K_2 = \{\alpha_2\},\ K_3 = \{\alpha_5, \alpha_6\},$$
$$L_1 = \{\alpha_1\},\ L_2 = \{\alpha_3\},\ L_3 = \{\alpha_4, \alpha_5\}.$$

Il vient :

$$\mathfrak{a}_{K_1} = \mathbb{K}e_{12} + \mathbb{K}e_{13} + \mathbb{K}e_{14} + \mathbb{K}e_{24} + \mathbb{K}e_{34},\ \mathfrak{a}_{K_2} = \mathbb{K}e_{23},$$
$$\mathfrak{a}_{K_3} = \mathbb{K}e_{56} + \mathbb{K}e_{57} + \mathbb{K}e_{67},$$
$$\mathfrak{b}_{L_1} = \mathbb{K}e_{21},\ \mathfrak{b}_{L_2} = \mathbb{K}e_{43} + \mathbb{K}e_{53} + \mathbb{K}e_{63} + \mathbb{K}e_{64} + \mathbb{K}e_{65},\ \mathfrak{b}_{L_3} = \mathbb{K}e_{54}.$$

On en déduit :

$$\mathfrak{u} = \mathbb{K}e_{14} + \mathbb{K}e_{23} + \mathbb{K}e_{57} + \mathbb{K}e_{21} + \mathbb{K}e_{54} + \mathbb{K}e_{63},$$

$$\mathfrak{v} = \mathbb{K}e_{12} + \mathbb{K}e_{13} + \mathbb{K}e_{24} + \mathbb{K}e_{34} + \mathbb{K}e_{54} + \mathbb{K}e_{67} + \mathbb{K}e_{43} + \mathbb{K}e_{53} + \mathbb{K}e_{64} + \mathbb{K}e_{65}$$

**3.8**. Avec les notations de 3.1 et 3.4, pour $z = (\alpha, \beta) \in \mathcal{Z}$, on pose :

$$v_z = X_\alpha^* \wedge X_\beta^* \in \bigwedge^2 \mathfrak{q}^*.$$

Soient $K, K' \in \mathcal{K}(S)$, $L, L' \in \mathcal{K}(T)$, $\alpha \in \Gamma_0^K$, et $\beta \in \Gamma_0^L$. Compte tenu des Lemmes 1.7 et 1.8, on a les résultats suivants :

- $\varepsilon_K - \varepsilon_L \notin \{\varepsilon_{K'}, -\varepsilon_{L'}\}$.
- $\alpha - \varepsilon_L \neq -\varepsilon_{L'}$.
- $\varepsilon_K - \beta \neq \varepsilon_{K'}$.

Il en résulte que, si l'on identifie la forme bilinéaire alternée $\Phi_f$ sur $\mathfrak{q}$ à un élément de $\bigwedge^2 \mathfrak{q}^*$, alors

$$\Phi_f = \Psi_f + \Theta_f,$$

avec $\Theta_f \in E_{S,T} \bigwedge \mathfrak{u}^*$ et

$$\Psi_f = \sum_{z \in \mathcal{Z}} \lambda_z v_z,$$

avec $\lambda_z \in \mathbb{K}$ pour tout $z \in \mathcal{Z}$.

Si $z = (\alpha, \beta) \in \mathcal{Z}$, on a $\Theta_f(X_\alpha, X_\beta) = 0$. D'autre part, ou $[X_\alpha, X_\beta] = \mu_z X_{\varepsilon_K}$, avec $K \in \mathcal{K}(S)$, ou $[X_\alpha, X_\beta] = \mu_z X_{-\varepsilon_L}$, avec $L \in \mathcal{K}(T)$, le scalaire $\mu_z$ étant non nul. Par conséquent :

$$\lambda_z = \Phi_f(X_\alpha, X_\beta) = f([X_\alpha, X_\beta]) = \begin{cases} \mu_z a_K & \text{si } [X_\alpha, X_\beta] = \mu_z X_{\varepsilon_K}, \\ \mu_z b_L & \text{si } [X_\alpha, X_\beta] = \mu_z X_{-\varepsilon_L}. \end{cases}$$

On voit donc que $\lambda_z$ est non nul.

**3.9**. Dans la suite, on note :

$$m_S = \operatorname{card}\big(\mathcal{K}(S)\big), \quad m_T = \operatorname{card}\big(\mathcal{K}(T)\big), \quad m = m_S + m_T.$$

Rappelons que l'on a fixé un ordre total sur $R_+$. A $f \in \mathfrak{g}_{S,T}^*$ comme en 3.2, on associe

$$\Omega_f = (a_{K_1}, \ldots, a_{K_{m_S}}, b_{L_1}, \ldots, b_{L_{m_T}}) \in (\mathbb{K} \backslash \{0\})^m,$$

avec $\varepsilon_{K_1} < \cdots < \varepsilon_{K_{m_S}}$ et $\varepsilon_{L_1} < \cdots < \varepsilon_{L_{m_T}}$. On dit que $\Omega_f$ défini $f$.

LEMME. — *On pose $s = \dim E_{S,T}$. On rappelle que $r$ est le cardinal de $\mathcal{H}$, qui est défini en 3.4, et on conserve les notations de 3.8.*

(i) *On a* $\wedge^s\Theta_f \neq 0$ *et* $\wedge^{s+1}\Theta_f = 0$.

(ii) *Il existe un ouvert non vide* $U$ *de* $(\mathbb{K}\backslash\{0\})^m$ *tel que* $\wedge^r\Psi_f \neq 0$ *dès que* $\Omega_f \in U$.

(iii) *Si* $\Omega_f \in U$, *alors* $\wedge^{r+s}\Phi_f \neq 0$.

*Preuve.* — (i) Si $k, l$ sont des entiers strictement positifs, on note $\mathfrak{M}_{k,l}$ l'ensemble des matrices à $k$ lignes et $l$ colonnes à éléments dans $\mathbb{K}$. Si $A \in \mathfrak{M}_{k,l}$, ${}^tA$ désigne la transposée de $A$.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ une base de $E_{S,T}$ telle que $\alpha_i = \varepsilon_{K_i}$ si $1 \leqslant i \leqslant p$, et $\alpha_i = -\varepsilon_{L_i}$ si $p+1 \leqslant i \leqslant s$, les $K_i$ étant des éléments de $\mathcal{K}(S)$ et les $L_i$ des éléments de $\mathcal{K}(T)$. Complétons cette base en une base $\mathcal{B}' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ de $\mathfrak{h}^*$, et soit $\mathcal{B} = (h_1, \ldots, h_\ell)$ la base de $\mathfrak{h}$ duale de $\mathcal{B}'$. De même, complétons le système libre $(X_{\varepsilon_{K_1}}, \ldots, X_{\varepsilon_{K_p}}, X_{-\varepsilon_{L_{p+1}}}, \ldots, X_{-\varepsilon_{L_s}})$ en une base $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{u}$. Alors $\mathcal{D} = \mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ est une base de $\mathfrak{h} + \mathfrak{u}$. Si $s+1 \leqslant k \leqslant \ell$, on a $[h, \mathfrak{u}] = \{0\}$.

Avec les notations usuelles, les racines $\varepsilon_K$ (resp. $\varepsilon_L$) sont fortement orthogonales, et $\varepsilon_K - \varepsilon_L \notin \mathcal{K}(S) \cup \mathcal{K}(T)$. Il en résulte que, dans la base $\mathcal{D}$, la restriction de la forme bilinéaire $\Phi_f$ (qui est aussi la restriction de $\Theta_f$) a une matrice de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & D & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -{}^tD & 0 & 0 & 0 \\ -{}^tA & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathfrak{M}_{s,m-s}$ ($m$ est défini en 3.3), et où $D \in \mathfrak{M}_{s,s}$ est diagonale, sa diagonale étant :

$$(a_{K_1}, \ldots, a_{K_p}, b_{L_{p+1}}, \ldots, b_{L_s}).$$

On en déduit que $M$ est de rang $2s$. Il est alors bien connu que que $\wedge^s\Theta_f \neq 0$ et que $\wedge^{s+1}\Theta_f = 0$.

(ii) Rappelons que les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{Z}$ on été définis en 3.4. Pour tout $z = (\alpha, \beta) \in Z$, on note $\widetilde{z} = \{\alpha, \beta\}$ l'ensemble sous-jacent à $z$.

Soient $z_1, \ldots, z_n$ les éléments de $\mathcal{Z}$, en convenant que $z_1, \ldots, z_r$ sont ceux de $\mathcal{H}$. Afin de simplifier les notations, on écrira $\lambda_i v_i$ pour $\lambda_{z_i} v_{z_i}$ et $\mu_i$ pour $\mu_{z_i}$.

Si $z, z' \in \mathcal{Z}$, on a $z \wedge z' = z' \wedge z$ et $z \wedge z = 0$. Par conséquent :

$$\wedge^r\Psi_f = r! \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_r} v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_r}.$$

Dans la somme précédente, le coefficient de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$ est :

$$\prod_{K\in\mathcal{K}(S)} a_K^{n_K}\Big(\prod_{z\in\mathcal{H}_1(K)}\mu_z\Big)\prod_{L\in\mathcal{K}(T)} b_L^{n_L}\Big(\prod_{z\in\mathcal{H}_2(L)}\mu_z\Big).$$

Supposons que $v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_r} = \lambda v_1\wedge\cdots\wedge v_r$, avec $\lambda\in\mathbb{K}\backslash\{0\}$, où $i_1<\cdots<i_r$ et $(i_1,\dots,i_r)\neq(1,\dots,r)$. L'ensemble $\mathcal{S}=\widetilde{z}_1\cup\cdots\cup\widetilde{z}_r$ est alors la réunion disjointe des ensembles $\widetilde{z_{i_t}}$ pour $1\leqslant t\leqslant r$. On en déduit que, si $z_{i_t}\notin\mathcal{H}$, on a $z_{i_t}\in\mathcal{J}$, et il existe donc $K\in\mathcal{K}(S)$ et $L\in\mathcal{K}(T)$ tels que $\Gamma_0^K\cap\widetilde{z_{i_t}}\neq\emptyset$ et $(-\Gamma_0^L)\cap\widetilde{z_{i_t}}\neq\emptyset$. Notons $z_{j_1},\dots,z_{j_k}$ les éléments $z_{i_t}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}$.

Fixons $K_0\in\mathcal{K}(S)$ maximal pour l'inclusion parmi les éléments $K$ de $\mathcal{K}(S)$ vérifiant :

$$\Gamma_0^K\cap(\widetilde{z_{j_1}}\cup\cdots\cup\widetilde{z_{j_k}})\neq\emptyset.$$

Il existe $t\in\{1,\dots,k\}$ tel que, si $z=z_{j_t}$, on ait $\Gamma_0^{K_0}\cap\widetilde{z}\neq\emptyset$. Soit $\alpha\in\Gamma_0^{K_0}\cap\widetilde{z}$.

Il en résulte que $z\in\mathcal{J}$ et on a $(\alpha,\varepsilon_{K_0}-\alpha)\neq z_{i_l}$ pour $1\leqslant l\leqslant r$. D'après la fin de 3.8 et le Lemme 3.5, il vient ou $\lambda_z=\mu_z a_K$, avec $K\in\mathcal{K}(S)$ et $K\neq K_0$, ou $\lambda_z=\mu_z b_L$, avec $L\in\mathcal{K}(T)$.

On déduit de ceci que le coefficient de $v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_r}$ dans la somme donnant $\wedge^r\Psi_f$ est de la forme

$$\mu_{i_1}\cdots\mu_{i_r}\prod_{K\in\mathcal{K}(S)} a_K^{m_K}\prod_{L\in\mathcal{K}(T)} b_L^{m_L},$$

avec $m_{K_0}<n_{K_0}$.

Il est alors clair qu'il existe un ouvert non vide $U$ de $(\mathbb{K}\backslash\{0\})^m$ vérifiant $\wedge^r\Psi_f\neq 0$ si $\Omega_f\in U$.

(iii) On a :

$$\wedge^{r+s}\Phi_f=\sum_{k=0}^{r+s}\binom{r+s}{k}(\wedge^k\Psi_f)\wedge(\wedge^{r+s-k}\Theta_f).$$

Comme $\wedge^j\Theta_f\in(\bigwedge^j E_{S,T})\bigwedge(\bigwedge^j\mathfrak{u}^*)$, pour montrer que $\wedge^{r+s}\Phi_f\neq 0$, il suffit de prouver que $(\wedge^r\Psi_f)\wedge(\wedge^s\Theta_f)\neq 0$.

Conservons les notations $v_1,\dots,v_r$ et $\mathcal{S}$ de (ii). On a vu que, si $\Omega_f\in U$,

$$\wedge^r\Psi_f=\lambda v_1\wedge\cdots\wedge v_r+w,$$

où $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ et où $w$ est une combinaison linéaire de termes $v_{z_{i_1}} \wedge \cdots \wedge v_{z_{i_r}}$, avec $\widetilde{z_{i_1}} \cup \cdots \cup \widetilde{z_{i_r}} \neq \mathcal{S}$. Il est donc immédiat que $(\wedge^r \Psi_f) \wedge (\wedge^s \Theta_f) \neq 0$ si $\Omega_f \in U$. □

*Remarque.* — On voit facilement que la preuve précédente montre que, pour $\Omega_f \in U$, la restriction de $\Phi_f$ à $\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}$ est non dégénérée.

3.10. THÉORÈME. — *Soient $S, T$ des parties de $\Pi$ et $E_{S,T}$ le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ engendré par les $\varepsilon_M$, pour $M \in \mathcal{K}(S) \cup \mathcal{K}(T)$. Alors :*

$$\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) \leqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g}) + \operatorname{card}\big(\mathcal{K}(S)\big) + \operatorname{card}\big(\mathcal{K}(T)\big) - 2\dim E_{S,T}.$$

*Preuve.* — De $\mathfrak{g}_{S,T} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$, on déduit que :

$$\dim \mathfrak{g}_{S,T} = \dim \mathfrak{h} + \operatorname{card} \mathcal{K}(S) + \operatorname{card} \mathcal{K}(T) + 2r.$$

Si $\Omega_f \in U$, le fait que $\wedge^{r+s} \Phi_f \neq 0$ signifie que $\operatorname{rg}(\Phi_f) \geqslant 2(r+s)$, c'est-à-dire :

$$\dim \mathfrak{g}_{S,T}^{(f)} \leqslant \dim \mathfrak{g} - 2(r+s).$$

Il vient donc :

$$\dim \mathfrak{q}_{S,T}^{(f)} \leqslant \dim \mathfrak{h} + \operatorname{card} \mathcal{K}(S) + \operatorname{card} \mathcal{K}(T) - 2s.$$

D'où le résultat. □

**3.11. Remarque**. On a $\operatorname{card} \mathcal{K}(S) = \dim E_S$, $\operatorname{card} \mathcal{K}(T) = E_T$, ainsi que $E_{S,T} = E_S + E_T$. L'inégalité précédente s'écrit donc encore :

$$\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) \leqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g}) + \dim E_S + \dim E_T - 2\dim(E_S + E_T).$$

3.12. COROLLAIRE. — *Soit $\mathfrak{q}$ une sous-algèbre spéciale de $\mathfrak{g}$. Alors :*

(i) *On a $\chi(\mathfrak{q}) \leqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.*

(ii) *Dire que $\chi(\mathfrak{q}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$ signifie que $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$.*

*Preuve.* — La proposition 2.3 montre que l'on peut supposer $\mathfrak{q} = \mathfrak{g}_{S,T}$.

(i) D'après 3.11, on a $\chi(\mathfrak{q}) \leqslant \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.

(ii) Si $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$, il est bien connu que $\chi(\mathfrak{q}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g})$.

Supposons $\chi(\mathfrak{q}) = \mathrm{rg}(\mathfrak{g})$. D'après 3.11, il vient $E_S = E_T$. Soit $L$ une composante connexe de $T$. On a $\varepsilon_L \in E_T = E_S \subset \mathbb{Z}S$. Comme $\varepsilon_L$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers strictement positifs de toutes les racines de $L$ et que $\Pi$ est une base de $\mathfrak{h}^*$, on obtient $L \subset S$. Par suite $T \subset S$, et $S = T$ en échangeant les rôles de $S$ et de $T$. Ainsi, $\mathfrak{q}$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{g}$. □

*Remarque.* — Le corollaire 3.12 est une réponse positive à une conjecture de D. Panyushev formulée dans [8].

3.13. Corollaire. — *Si l'ensemble des $\varepsilon_M$, avec $M \in \mathcal{K}(S) \cup \mathcal{K}(T)$, est une base de $\mathfrak{h}^*$, alors $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) = 0$.*

*Preuve.* — Si les hypothèses du corollaire sont vérifiées, l'inégalité de 3.11 montre que $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) \leqslant 0$. □

## 4. Étude de cas particuliers et une conjecture.

**4.1.** Avec les notations du paragraphe 3, on pose :

$$\begin{aligned} d_{S,T} &= \mathrm{rg}(\mathfrak{g}) + \mathrm{card}\,\mathcal{K}(S) + \mathrm{card}\,\mathcal{K}(T) - 2\dim E_{S,T} \\ &= \mathrm{rg}(\mathfrak{g}) + \dim E_S + \dim E_T - 2\dim(E_S + E_T). \end{aligned}$$

D'après 3.10 et 3.11, on a $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) \leqslant d_{S,T}$. On va montrer que, dans certains cas, on peut affirmer que $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) = d_{S,T}$.

4.2. Proposition. — *Si $d_{S,T} \in \{0,1\}$, alors $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) = d_{S,T}$.*

*Preuve.* — Le cas $d_{S,T} = 0$ est clair d'après 3.9. Supposons $d_{S,T} = 1$.

On a $\dim \mathfrak{g}_{S,T} - d_{S,T} = 2(r+s)$. Comme $\dim \mathfrak{g}_{S,T} - \chi(\mathfrak{g}_{S,T})$ est un entier pair (c'est le rang d'une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}_{S,T}$), on voit que $d_{S,T}$ et $\chi(\mathfrak{g}_{S,T})$ ont même parité. D'où $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) = 1$. □

**4.3**. Soit $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{g}$, $A$ son groupe adjoint, et $g \in \mathfrak{a}^*$. On dit que $g$ est stable s'il existe un ouvert $U$ de $\mathfrak{a}^*$ contenant $g$ tel que $\mathfrak{a}^{(g)}$ et $\mathfrak{a}^{(h)}$ soient $A$-conjugués pour tout $h \in U$. Il est clair qu'un élément stable est régulier.

Le résultat suivant est prouvé dans [10] :

PROPOSITION. — *Soient $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{g}$ et $g \in \mathfrak{a}^*$. Si $\mathfrak{a}^{(g)}$ est commutative et composée d'éléments semi-simples de $\mathfrak{g}$, $g$ est un élément stable de $\mathfrak{g}$.*

**4.4.** L'énoncé suivant généralise notre énoncé initial; il nous a été suggéré par le referee.

PROPOSITION. — *Soient $S$ et $T$ des parties de $\Pi$. On suppose que l'ensemble $\{\varepsilon_M ; M \in \mathcal{K}(S) \cup \mathcal{K}(T)\}$ est constitué d'éléments linéairement indépendants. Alors, tout élément de $U$ est un élément stable de $\mathfrak{g}_{S,T}^*$, et $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) = d_{S,T}$.*

*Preuve.* — D'après les hypothèses, on a :

$$d_{S,T} = \operatorname{card}\big(\mathcal{K}(S) \cup \mathcal{K}(T)\big).$$

Par définition de $d_{S,T}$, il vient alors :

$$d_{S,T} = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}) - \dim E_{S,T} + \operatorname{card}\Big(\mathcal{K}(S) \cap \mathcal{K}(T)\Big).$$

Soit $f \in \mathfrak{g}_{S,T}^*$ tel que $\Omega_f \in U$. Ce qui précède et 3.3 montrent que $\mathfrak{g}_{S,T}^{(f)}$ contient une sous-algèbre commutative de dimension $d_{S,T}$ formée d'éléments semi-simples. D'autre part, la preuve de 3.10 fournit $\dim \mathfrak{g}_{S,T}^{(f)} \leqslant d_{S,T}$. On a donc le résultat d'après 4.3. $\square$

*Remarques.* — 1) La propriété de 4.4 est vérifiée si $S$ et $T$ satisfont à l'une ou l'autre des conditions suivantes : $\mathcal{K}(S) \subset \mathcal{K}(T)$, ou $\mathcal{K}(T) \subset \mathcal{K}(S)$, ou $S \cap T = \emptyset$.

2) En prenant $S = \Pi$ et $T = \emptyset$, la proposition précédente permet de retrouver le résultat suivant de [1], [10], ou [11] : il existe une forme linéaire stable dans $\mathfrak{b}^*$, et on a :

$$\chi(\mathfrak{b}) = \operatorname{rg}(\mathfrak{g}) - \operatorname{card} \mathcal{K}(\Pi).$$

**4.5.** Dans la suite, on va utiliser le résultat suivant ([4],Lemma 1.12.2):

LEMME. — *Soient $V$ un espace vectoriel de dimension finie, $V'$ un hyperplan de $V$, $\Phi$ une forme bilinéaire alternée sur $V$, et $\Phi'$ la restriction de $\Phi$ à $V'$. On note $N$ et $N'$ les noyaux de $\Phi$ et $\Phi'$.*

(i) *Si $N \subset N'$, alors $N$ est un hyperplan de $N'$.*

(ii) *Si $N \not\subset N'$, on a $N' = N \cap V'$, et $N'$ est un hyperplan de $N$.*

4.6. Proposition. — *On suppose que* $\mathrm{card}(S) = 1$ *ou que* $\mathrm{card}(T) = 1$. *Alors* $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) = d_{S,T}$.

*Preuve.* — Si $X \in \mathfrak{g}$ et si $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, on note $\varphi_{\mathfrak{a}}^X$ l'élément de $\mathfrak{a}^*$ défini, pour tout $Y \in \mathfrak{a}$, par $\varphi_{\mathfrak{a}}(Y) = \kappa(X,Y)$, où $\kappa$ est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

Traitons le cas où $\mathrm{card}(T) = 1$, soit $T = \{\alpha\}$. D'après 4.4, on peut supposer $\alpha \in S$, $\{\alpha\} \notin \mathcal{K}(S)$, et $\alpha \in E_S$. Posons :

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g}_{S,\emptyset} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}^{R_+^S}.$$

Soient

$$U = \sum_{K \in \mathcal{K}(S)} a_K X_{-\varepsilon_K},\ V = X_\alpha + U,\ f = \varphi_{\mathfrak{a}}^U,\ g = \varphi_{\mathfrak{g}_{S,T}}^V,$$

où les coefficients $a_K$ sont choisis pour que $f$ soit un élément stable de $\mathfrak{a}^*$ (c'est possible d'après 4.4). La restriction de $\Phi_g$ à $\mathfrak{a}$ est $\Phi_f$. La preuve de 3.3 montre que :

$$\mathfrak{a}^{(f)} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(S)} \ker \varepsilon_K.$$

De $\alpha \in E_S$, on déduit que $[X_\alpha, \mathfrak{a}^{(f)}] = \{0\}$, soit $\mathfrak{a}^{(f)} \subset \mathfrak{q}^{(g)}$. D'après le lemme 4.5, il vient alors

$$\mathfrak{q}^{(f)} = \mathbb{K}X \oplus \mathfrak{a}^{(f)},$$

avec $X = X_{-\alpha} + Y$, où $Y \in \mathfrak{a}$.

Comme $\mathfrak{a}^{(f)} \subset \mathfrak{h}$, on a $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{(f)}] \cap \mathfrak{a}^{(f)} = \{0\}$, puis $[X, \mathfrak{a}^{(f)}] = \{0\}$. Par conséquent, l'algèbre de Lie $\mathfrak{q}^{(g)}$ est commutative.

Soient $G$ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ et $A$ le plus petit sous-groupe algébrique de $G$ d'algèbre de Lie $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, \mathfrak{a}$. L'ensemble des restrictions des éléments de $A$ à $\mathfrak{a}$ s'identifie au groupe adjoint de $\mathfrak{a}$.

L'ensemble des éléments stables de $\mathfrak{a}^*$ est un ouvert non vide $A$-invariant. On en déduit qu'il existe $h \in \mathfrak{q}^*$ régulier tel que $\lambda = h|\mathfrak{a}$ soit stable. Si $\theta \in A$, on a $\theta(h)|\mathfrak{a} = \theta(\lambda)$. Par conséquent, on peut supposer que :

$$\mathfrak{a}^{(\lambda)} = \mathfrak{a}^{(f)} = \bigcap_{K \in \mathcal{K}(S)} \ker \varepsilon_K \subset \mathfrak{h}.$$

On a $h([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^{(\lambda)}]) = \{0\}$. D'autre part, $X_{-\alpha}$ commute à $\mathfrak{a}^{(f)} = \mathfrak{a}^{(\lambda)}$. On a donc $h([X_{-\alpha}, \mathfrak{a}^{(\lambda)}]) = \{0\}$. Par suite, $h([\mathfrak{q}, \mathfrak{a}^{(\lambda)}]) = \{0\}$ et $\mathfrak{a}^{(\lambda)} \subset \mathfrak{q}^{(h)}$.

D'après 4.5, on obtient $\dim \mathfrak{q}^{(h)} = 1 + \dim \mathfrak{a}^{(\lambda)}$, d'où $\chi(\mathfrak{q}) = 1 + \chi(\mathfrak{a})$.

On a ici $E_{S,T} = E_{S,\emptyset}$, $\operatorname{card} \mathcal{K}(T) = 1$, et $\chi(\mathfrak{a}) = d_{S,\emptyset}$. On en déduit que $\chi(\mathfrak{q}) = d_{S,T}$. □

*Remarque.* — Il est donné dans [10] un exemple d'algèbre de Lie vérifiant les conditions de 4.6, mais ne possédant aucune forme linéaire stable.

**4.7**. Compte tenu des exemples traités précédemment, nous énoncerons l'assertion suivante :

*Conjecture.* — Si $S$ et $T$ sont des parties de $\Pi$, on a $\chi(\mathfrak{g}_{S,T}) = d_{S,T}$.

**4.8**. Faisons quelques remarques.

1) Supposons $\mathfrak{g}$ de type $A$. L'indice d'une sous-algèbre spéciale de $\mathfrak{g}$ est calculé dans [3] au moyen d'une formule combinatoire. On peut vérifier qu'elle confirme la conjecture 4.7.

2) Pour $\mathfrak{g}$ de type $A, B, C$ ou $D$, des formules de récurrence reliant l'indice des sous-algèbres spéciales de $\mathfrak{g}$ sont établies dans [8]. Ces formules sont compatibles avec 4.7.

3) Des calculs effectués par D. Panyushev et R. Ushirobira lorsque $\mathfrak{g}$ est de type $F_4$ ou $G_2$ confirment la conjecture 4.7.

4) D'après 4.2, 4.4, et 4.6, la conjecture 4.7 est vérifiée si $\operatorname{rg}(\mathfrak{g}) \leqslant 2$.

## 5. Sur l'indice des sous-algèbres paraboliques.

5.1. LEMME. — *Soient $S$ une partie de $\Pi$ et $n = \operatorname{card} \mathcal{K}(S)$. Il existe des parties $S_1, \ldots, S_n$ de $\Pi$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n = S$.

(ii) $\mathcal{K}(S_1) \subset \mathcal{K}(S_2) \subset \cdots \subset \mathcal{K}(S_n)$.

(iii) $\operatorname{card} \mathcal{K}(S_i) = i$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant n$.

*Preuve.* — Soient $K$ une composante connexe de $S$ et $K'$ l'ensemble des $\alpha \in K$ qui vérifient $\langle \alpha, \varepsilon_K^\vee \rangle = 0$. Si $S_{n-1} = S \backslash (K \backslash K')$, il est clair, d'après 1.5, que $\operatorname{card}\mathcal{K}(S_{n-1}) = n-1$ et que $\mathcal{K}(S_{n-1}) \subset \mathcal{K}(S)$. Le lemme est alors immédiat. □

5.2. THÉORÈME. — *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre semi-simple de rang $\ell$. Pour tout entier $i$ vérifiant $0 \leqslant i \leqslant \ell$, il existe une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\chi(\mathfrak{p}) = i$.*

*Preuve.* — Il est clair que l'on peut supposer $\mathfrak{g}$ simple. Soit $n = \operatorname{card}\mathcal{K}(\Pi)$. On pose $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ en utilisant la numérotation des systèmes de racines de [2], pp. 250 à 275.

Il existe des parties $S_0, S_1, \ldots, S_n$ de $\Pi$, où $S_0 = \emptyset$ et $S_n = \Pi$, telles que $S_1, \ldots, S_n$ vérifient les conditions du Lemme 5.1.

D'après la Proposition 4.4, pour $0 \leqslant i \leqslant n$, on a :

$$\chi(\mathfrak{g}_{\Pi,S_i}) = \ell + i - n.$$

Le théorème est donc établi si $\mathfrak{g}$ est de l'un des types $B_k$, $C_k$, $D_{2k}$, $E_7$, $E_8$, $F_4$ ou $G_2$ car, dans ces cas, $n = \ell$ d'après le tableau 1.6.

1) Supposons $\mathfrak{g}$ de type $D_{2k+1}$. Alors $\operatorname{card}\mathcal{K}(\Pi) = 2k$ et, si $1 \leqslant i \leqslant \ell$, ce qui précède montre qu'il existe une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ dont l'indice est égal à $i$. D'autre part, on voit facilement que $\alpha_{2k} \notin E_\Pi$. Compte tenu de l'assertion (iii) de 4.4, il vient $\chi(\mathfrak{g}_{\Pi,\{\alpha_{2k}\}}) = 0$.

2) Si $\mathfrak{g}$ est de type $E_6$, on a $\operatorname{card}\mathcal{K}(\Pi) = 4$. Pour $2 \leqslant i \leqslant 6$, il existe donc une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ dont l'indice est égal à $i$.

On vérifie aisément que $\{\alpha_1, \alpha_5\} \cup \{\varepsilon_K \,;\, K \in \mathcal{K}(\Pi)\}$ est une base de $\mathfrak{h}^*$. À nouveau d'après 4.4, on obtient :

$$\chi(\mathfrak{g}_{\Pi,\{\alpha_1\}}) = 1, \quad \chi(\mathfrak{g}_{\Pi,\{\alpha_1,\alpha_5\}}) = 0.$$

3) Supposons $\mathfrak{g}$ de type $A_\ell$, et soit $\rho$ la partie entière de $\frac{\ell+1}{2}$. D'après 1.6, $\rho$ est le cardinal de $\mathcal{K}(\Pi)$. Si $\ell' = \ell - \rho$, il nous faut prouver l'existence d'une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ d'indice $0, 1, \ldots, \ell' - 1$.

Si $\ell = 2t$ est pair, on a

$$\mathcal{K}(\Pi) = \{\{\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{2t-j}\} \,;\; 0 \leqslant j \leqslant t-1\}$$

et, si $\ell = 2t+1$ est impair, alors :

$$\mathcal{K}(\Pi) = \{\{\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{2t+1-j}\} \,;\; 0 \leqslant j \leqslant t\}.$$

Posons $T_0 = \emptyset$, et définissons $T_k$, pour $1 \leqslant k \leqslant \ell'$, par :

$$T_k = \begin{cases} T_{k-1} \cup \{\alpha_k\} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ T_{k-1} \cup \{\alpha_{\ell+1-k}\} & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

On vérifie facilement que les $\varepsilon_M$, pour $M \in \mathcal{K}(\Pi) \cup \mathcal{K}(T_k)$ forment une famille libre. Compte tenu de 4.4, il vient $\chi(\mathfrak{g}_{\Pi,T_k}) = \ell' - k$ si $0 \leqslant k \leqslant \ell'$. Comme $\mathfrak{g}_{\Pi,T_k}$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, on a obtenu le résultat. □

*Remarque.* — Le théorème 5.2 est énoncé sans démonstration dans [5].

*Remerciements.* Les auteurs expriment leur reconnaissance au referee pour ses remarques et suggestions concernant ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] D.V. Alekseevsky, M. Perolomov 1, Poisson and symplectic structures on Lie algebras. I, J. Geom. Phys., 22 (1987), 191–211.

[2] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4,5,6, Masson, 1981.

[3] V. Dergachev, A. Kirillov, Index of Lie algebras of seaweed type, J. of Lie Theory, 10 (2000), 331–343.

[4] J. Dixmier, Enveloping algebras in : Graduate Studies in Math., 11, AMS, 1996.

[5] A.G. Elashvili, On the index of parabolic subalgebras of semisimple Lie algebras, Preprint, 1990.

[6] J.C. Jantzen, Einhüllenden Algebren halbeinfacher Lie-Algebren, in : Ergebnisse der Mathematik and iher Grenzgebiete, 3, Springer-Verlag, 1983.

[7] A. Joseph, A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra, J. of Algebra, 48 (1977), 241–289.

[8] D. Panysushev, Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras, Moscow Math. Journal, 1 (2001), 221–241.

[9] P. Tauvel, Introduction à la théorie des algèbres de Lie, Diderot, 1998.

[10] P. Tauvel, R.W.T. Yu, Indice et formes linéaires stables dans les algèbres de Lie, J. of Algebra, 273 (2004), 507–516.

[11] V.V. Trofimov, Semi-invariants of the coadjoint representation of Borel subalgebras of semisimple Lie algebras, Selecta Math. Sovietica, 8 (1989), 31–56.

Manuscrit reçu le 20 novembre 2003,
accepté le 9 mars 2004.

Patrice TAUVEL & Rupert W.T. YU,
Université de Poitiers
UMR 6086 du CNRS
Département de Mathématiques
Boulevard Marie et Pierre Curie – BP 30179
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex (France).
tauvel@math.univ-poitiers.fr
yuyu@math.univ-poitiers.fr