



ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Denis SAUVAGET

Curiosités Lagrangiennes en dimension 4

Tome 54, n° 6 (2004), p. 1997-2020.

http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_6_1997_0

© Association des Annales de l'institut Fourier, 2004, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://aif.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://aif.cedram.org/legal/>). Toute reproduction en tout ou partie cet article sous quelque forme que ce soit pour tout usage autre que l'utilisation à fin strictement personnelle du copiste est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

CURIOSITÉS LAGRANGIENNES EN DIMENSION 4

par Denis SAUVAGET

Introduction.

En topologie symplectique, on rencontre dans de nombreux problèmes la notion plus ou moins bien définie de *rigidité symplectique*. On peut citer les capacités symplectiques, le problème du chameau symplectique [V2] et celui du chameau lagrangien [T]. Un exemple de capacité symplectique de lagrangiennes est le suivant : étant donné L une immersion lagrangienne compacte sans bord dans \mathbb{C}^n , $n \geq 2$, et B désignant la boule unité, existe-t-il pour tout $\lambda > 0$ un difféomorphisme symplectique ψ de \mathbb{C}^n tel que $\psi(L) \subset \lambda B$? Dans [V], C. Viterbo a montré que la réponse est négative pour les tores plongés, mais le cas général reste ouvert. On va se poser ici une autre question, voisine, dans le même esprit de recherche d'invariants symplectiques.

Rappelons d'abord qu'il existe une notion d'enlacement avec L : si $\mathbb{C}^n \cup \infty$ est le compactifié d'Alexandroff, on a par dualité d'Alexander

$$H_{n-1}((\mathbb{C}^n \cup \infty) - L, \mathbf{A}) \simeq H^n(L, \mathbf{A}),$$

où $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$ si L est orientable et $\mathbf{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sinon. Et si L est une immersion à croisements normaux de la variété V , on a (pour $n \geq 2$)

$$H^n(L, \mathbf{A}) \simeq H^n(V, \mathbf{A}).$$

Soit $T = D^2 \times \mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$, D^2 étant le disque unité, soit ψ un difféomorphisme symplectique à support compact de \mathbb{C}^n . Remarquons que pour tout $\lambda > 0$, $\psi(\lambda T)$ est une variété co-isotrope à bord lagrangien dont la réduction est un disque symplectique d'aire $\pi\lambda^2$.

On dira que $\psi(T)$ est *enlacé* à L si $\psi(T) \cap L = \emptyset$ et $\psi(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) \cup \infty$ est un cycle non trivial dans $H_{n-1}((\mathbb{C}^n \cup \infty) - L, \mathbf{A})$.

La question qu'on se pose ici est la suivante : pour tout $\lambda > 0$, existe-t-il une isotopie hamiltonienne ψ_t à support compact telle que $\psi_1(\lambda T)$ soit enlacé à L ? Si oui, on dira que L est à enlacement non borné. Cela s'apparente donc à une propriété de non-rigidité. Par ailleurs, il ne semble pas que le plongement standard du tore, ni les plongements de Viterbo-Givental [Gi] des surfaces non orientables, ou autres *immersions* de construction élémentaire, vérifient cette propriété. Il s'agirait alors bien sûr de rigidité. En ce qui concerne le tore, je conjecture et m'efforce de prouver cette rigidité. On peut aussi examiner d'autres notions d'enlacement plus restrictives et pour lesquelles les résultats seraient peut-être différents.

On démontre ici, dans le cas $n = 2$, les résultats suivants :

THÉORÈME 1. — 1) *Toute surface de caractéristique d'Euler paire admet une immersion lagrangienne à enlacement non borné.*

2) *Toute surface non orientable de caractéristique d'Euler $\chi = -4k$ ($k \geq 1$) admet un plongement lagrangien à enlacement non borné.*

Les immersions données dans le 1) peuvent être choisies exactes, et lorsque $\chi < 0$, on peut exiger en outre qu'elles aient moins de points doubles que les constructions classiques (voir remarques). À ce sujet, le théorème de Gromov [Gr] sur la non-existence de plongements exacts dans \mathbb{R}^{2n} , vu d'un point de vue « naïvement » topologique semble bien ressortir de la fameuse rigidité. Dans cette hypothèse, les immersions exactes qui suivent seraient donc « le moins rigide possible », mais un peu rigides quand même. Plus précisément :

THÉORÈME 2. — 1) *Toute surface orientable de caractéristique d'Euler $-2k$ ($k \geq 1$) admet une immersion exacte (à enlacement non borné) avec k points doubles transverses.*

2) *Pour $k \geq 0$, toute surface non orientable de caractéristique $-4k$ (resp. $-4k - 2$) admet une immersion exacte (à enlacement non borné) avec deux (resp. un) points doubles transverses.*

Remarques :

On peut exiger que la classe de Maslov soit triviale dans le cas orientable.

Dans tous les cas, il s'agit du minimum autorisé par le théorème de Gromov et par la théorie des points doubles d'immersions lagrangiennes (cf. [Au2]). Le caractère exact n'entraîne donc pas en général, d'inégalités plus fortes sur le nombre de points doubles (style Morse) comme, par exemple, celle conjecturée dans [CZ], déjà violée pour $k = 1$ (voir annexe). D'autre part sans l'hypothèse d'exactitude, les résultats du théorème 2 sont bien connus.

À partir des surfaces, il est facile de construire des exemples en dimensions supérieures, vérifiant des propriétés analogues.

On peut se demander si, dans le cas probable où il existerait des immersions exactes à enlacement borné, celles-ci ne vérifieraient pas des inégalités plus fortes pour le nombre de points doubles.

On va démontrer les théorèmes 1 et 2 en partant d'un cas particulier qui sera développé en détail dans la partie II : la surface orientable de genre 2 exacte avec un seul point double. La partie I met en place les techniques nécessaires à cette construction. Dans la partie III, les autres exemples seront dérivés du premier (sauf la sphère, le tore et la bouteille de Klein pour le théorème 1) et décrits plus sommairement.

Enfin, en annexe, on montre que la surface construite en II contredit la conjecture formulée dans [CZ].

I. Comment fabriquer des immersions lagrangiennes dans \mathbb{C}^2 .

I.1. Cinéma.

I.1.1. — Les coordonnées dans \mathbb{C}^2 sont notées $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$; $w = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$ est la forme symplectique standard.

Étant donnée L une surface lagrangienne immergée dans \mathbb{C}^2 , on appellera *cinéma* de L la famille $\{p(L \cap \{x_2 = t\})\}_{t \in \mathbb{R}}$ où p désigne la projection sur le premier facteur $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$.

Lorsque L est compacte (avec ou sans bord), $p(L \cap \{x_2 = t\})$, noté L_t est vide hors d'un intervalle $[t_0, t_1]$. Nous ne considérerons que le cas où $\partial L = L \cap (\{x_2 = t_0\} \cup \{x_2 = t_1\})$, avec l'intersection transverse; on parle alors de cobordisme lagrangien (cf. [Ar] et [Au1]).

I.1.2. — Conventions pour les dessins : lorsque la restriction de p à $L \cap \{x_2 = t\}$ a des points doubles, disons $(x_1, y_1, t, y_2) = M$ et

$(x_1, y_1, t, y'_2) = M'$, et si $y_2 > y'_2$, on dessinera M par-dessus M' (voir exemple figure 1). De plus, x_1 sera l'abscisse et y_1 l'ordonnée.

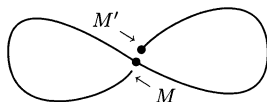


Figure 1

I.1.3. — Par des arguments de généricité, on peut faire les hypothèses suivantes :

Il existe $\Sigma \subset \mathbb{R}$ ensemble fini tel que, pour $t \notin \Sigma$, L_t soit une courbe immergée dans \mathbb{C} et tel que si $t \in \Sigma$, on passe de $L \cap \{x_2 = t - \varepsilon\}$ à $L \cap \{x_2 = t + \varepsilon\}$ par chirurgie d'indice 0, 1 ou 2.

Avec les contraintes lagrangiennes, les projections sur \mathbb{C} ont l'allure décrite en figure 2 (cf. [Ar]).

indice 0	\emptyset	•	
indice 1			
indice 2		•	\emptyset
	$t - \varepsilon$	t	$t + \varepsilon$

Figure 2

Il existe $\Sigma' \subset \mathbb{R} - \Sigma$, fini, tel que si $t \notin \Sigma'$, $\{x_2 = t\}$ ne contient pas de points doubles de L et, dans ce cas, les points doubles de L_t sont appelés croisements. Les points doubles de L sont transverses. Localement, un point double de L a l'allure décrite figure 3.

On peut supposer que les croisements sont transverses sauf pour $t \in \Sigma'' \subset \mathbb{R} - (\Sigma \cup \Sigma')$, ensemble fini des instants des naissances et des morts de paires de croisements (figure 4).

Remarques I.1.4.

Pour t entre deux valeurs de Σ (et même pour tout t si L est orientable), on peut orienter L_t de façon continue, ce qui permet de définir deux types de croisements (figure 5).



Figure 3

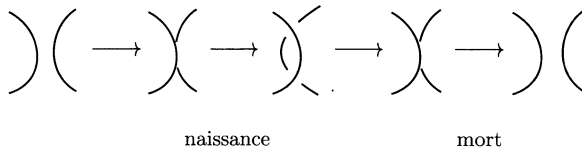


Figure 4

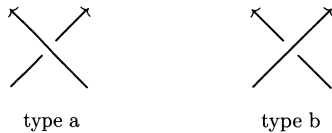


Figure 5

Le type ne change pas si on inverse l'orientation (de toutes les composantes).

Chaque croisement peut être suivi continûment sur un intervalle de temps ouvert, on peut donc lui donner un nom indépendant de t .

Un croisement peut naître : (i) lors d'une chirurgie d'indice 0 (il est alors de type a), ou d'indice 1; (ii) après un point double (figure 3); (iii) par paire, les deux étant de types opposés (figure 4).

Un croisement peut mourir : (i) lors d'une chirurgie d'indice 2, (type b), ou d'indice 1; (ii) avant un point double (figure 3), il est alors du type opposé à celui qui va naître juste après; (iii) par paire, les deux étant de types opposés (figure 4).

Si L est orientable, le type d'un croisement est le même de sa naissance à sa mort.

Si L n'est pas orientable, le type d'un croisement peut changer par chirurgie d'indice 1 impliquant un autre point; c'est le seul cas où cela se produit.

Pour $t \notin \Sigma \cup \Sigma'$, on note $m(t)$ la différence entre le nombre de croisements de type a , et le nombre de croisements de type b . On montre facilement que $m(t)$ augmente de 1 à chaque chirurgie d'indice 0 ou 2. Si L est orientable, $m(t)$ diminue de 1 à chaque chirurgie d'indice 1; si L n'est

pas orientable, la somme de $m(t)$ et des indices de Maslov de L_t diminue de 1 modulo 4 à chaque chirurgie d'indice 1. Tout ceci permet de retrouver les conditions nécessaires sur la caractéristique d'Euler pour plonger des surfaces lagrangiennes (voir [Au2]), sans évoquer la théorie des fibrés.

Pour $t \notin \Sigma$, l'aire entourée par la projection γ_t d'une composante connexe Γ_t de $L \cap \{x_2 = t\}$ est constante, c'est-à-dire

$$\int_{\gamma_t} x_1 dy_1 = \text{constante.}$$

Inversement, à partir d'un cinéma, on peut reconstituer une surface lagrangienne, si on tient compte de la notion suivante.

I.1.5 *Vitesse d'aire balayée.* — On considère une famille lisse de chemins Γ_t dans $L \cap \{x_2 = t\}$, de M_t à M'_t , $t \in]t_0, t_1[$. On pose

$$\begin{aligned} \gamma_t &= p \circ \Gamma_t H :]t_0, t_1[\times [0, 1] \longrightarrow L, & (t, u) &\longmapsto (t, \Gamma_t(u)), \\ h &:]t_0, t_1[\times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, & (t, u) &\longmapsto \gamma_t(u). \end{aligned}$$

On appelle *vitesse d'aire balayée* par γ_t la limite

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{[t, t+\Delta t] \times [0, 1]} h^*(dx_1 \wedge dy_1).$$

La propriété fondamentale est la suivante, connue sous le nom de loi des aires :

LEMME I.1.6. — *La vitesse d'aire balayée par γ_t vaut $y_2(M_t) - y_2(M'_t)$.*

Démonstration. — Notons $C = [t, t + \Delta t] \times [0, 1]$. Nous avons

$$0 = \int_C H^*(\omega) = \int_C H^*(dx_1 \wedge dy_1) + \int_C H^*(dx_2 \wedge dy_2).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \int_C h^*(dx_1 \wedge dy_1) &= \int_C H^*(dx_1 \wedge dy_1) = - \int_C H^*(dx_2 \wedge dy_2) \\ &= \int_{\partial(C)} H^*(y_2 dx_2) = \int_t^{t+\Delta t} (y_2(M_s) - y_2(M'_s)) ds. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (1/\Delta t) \int_C h^*(dx_1 \wedge dy_1) = y_2(M_t) - y_2(M'_t)$. □

I.1.7 - Supposons que L est exacte. Étant donné un croisement c de L_t , de préimages M et M' dans une composante de $L \cap \{x_2 = t\}$ avec $y_2(M) > y_2(M')$, on peut définir $\mathcal{A}(c, t)$ l'aire algébrique entourée au temps t par $\gamma_t = p \circ \Gamma_t$ où Γ_t désigne un chemin orienté d'origine M et d'extrémité M' dans $L \cap \{x_2 = t\}$. Alors, d'après le lemme précédent,

$$y_2(M) - y_2(M') = \frac{d}{dt} \int_{\gamma_t} x_1 dy_1 = \frac{d}{dt} \mathcal{A}(c, t) > 0.$$

Par exemple, lors d'une chirurgie d'indice 0 l'aire géométrique entourée par l'une des boucles délimitées par le croisement de type a augmente avec t en valeur absolue. Donnons une condition suffisante pour qu'une famille de courbes dans \mathbb{C} soit interprétable comme cinéma d'une immersion lagrangienne.

LEMME I.1.8. — Soit $\{j_t\}_{t \in [t_0, t_1]}$ une famille C^1 d'immersions $S^1 \rightarrow \mathbb{C}$, entourant une aire constante. Soit $\theta_0 \in S^1$. Alors il existe une unique application de classe C^1 , $f : S^1 \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\varphi : S^1 \times [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{C} \times [0, 1] \times \mathbb{R}$ définie par $(\theta, t) \mapsto (j_t(\theta), t, f(\theta, t))$ soit lagrangienne et que $f(\theta_0, t) = 0$ pour tout t .

Démonstration. — Pour $\theta \in S^1$ et γ chemin de θ à θ_0 , d'après le lemme I.1, $f(\theta, t)$ doit être la vitesse d'aire balayée par $p \circ j_t \circ \gamma$. \square

Remarque I.1.9. — Si $\{j_t\}$ vérifie l'hypothèse de transversalité des points doubles (dans \mathbb{C}), il suffit de vérifier que l'une des deux aires entourées définies pour chaque croisement est strictement monotone pour que φ soit un plongement.

I.2. Modèle fonctionnel.

I.2.1. — On appelle π la projection

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \longmapsto (x_1, x_2)$$

et on identifie $-i\mathbb{R}^2$ avec \mathbb{R}^{2*} , c'est-à-dire que, pour tout $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$(iy_1, iy_2) = -y_1 dx_1 - y_2 dx_2.$$

Ainsi la forme symplectique canonique de $T^*\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2*}$ coïncide avec $\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2$.

I.2.2. — On se donne V une surface à bord de \mathbb{R}^2 , compacte connexe.

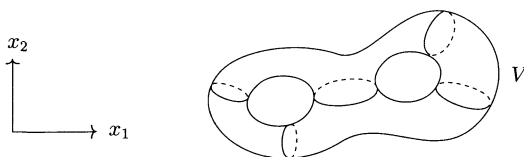


Figure 6

Soit $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de Morse nulle sur ∂V et vérifiant $dg(x_1, x_2) = 0$, pour tout $(x_1, x_2) \in \partial V$. Les graphes de $\pm dg$ sont des immersions lagrangiennes de V dans $T^*\mathbb{R}^2$. Appelons DV la surface obtenue en recollant deux exemplaires de V le long de leur bord par l'application identique. Cette surface est orientable et sans bord, avec une structure différentiable évidente.

LEMME I.2.3. — *Il existe un voisinage tubulaire T de ∂V dans V et une fonction $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :*

- (i) $G|_{V-T} = g|_{V-T}$.
- (ii) $G|_T$ et $g|_T$ sont sans points critiques à l'intérieur.
- (iii) La réunion des graphes de dG et $-dG$ forme une immersion lagrangienne exacte L de DV dans $T^*\mathbb{R}^2$.

Démonstration. — Soit C une composante connexe de ∂V . Puisque $g|_{\partial V} = 0$ et que dg n'est jamais nulle sur ∂V , g est de signe constant au voisinage de C , disons $g > 0$. La continuité de dg sur le compact ∂V entraîne que pour ε assez petit, une des composantes connexes de $g^{-1}([0, \varepsilon])$ est un voisinage tubulaire T_c de C dans V . Puisque g est de Morse, on peut supposer que T_c ne contient pas de points critiques de g .

Soit $T'_c = T_c \cap g^{-1}[0, \frac{1}{2}\varepsilon]$. On a un difféomorphisme

$$\psi_c : C \times [0, 1] \longrightarrow T'_c$$

tel que $\psi_c(x, 0) = x$, pour tout $x \in C$. On définit

$$\mu_c : T'_c \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mu_c \circ \psi_c(x, t) = \frac{1}{2}\varepsilon t^{\frac{3}{2}}.$$

On trouve ensuite une fonction $\nu_c : T_c \cap g^{-1}([\frac{1}{2}\varepsilon, \varepsilon]) \rightarrow \mathbb{R}$ valant $\frac{1}{2}\varepsilon$ (resp. ε) sur $T_c \cap g^{-1}(\frac{1}{2}\varepsilon)$ (resp. $g^{-1}(\varepsilon)$), sans points critiques, telle que

$$(d\nu_c)|_{g^{-1}(\varepsilon) \cap T_c} = (dg)|_{g^{-1}(\varepsilon) \cap T_c} \quad \text{et} \quad (d\nu_c)|_{g^{-1}(\varepsilon/2) \cap T_c} = (d\mu_c)|_{g^{-1}(\varepsilon/2) \cap T_c}.$$

On définit $G : V \rightarrow \mathbb{R}$ par $G|_{V-T_c} = g$, $G|_{T'_c} = \mu_c$ et $G|_{T_c-T'_c} = \nu_c$ pour chaque composante C . La fonction G est de Morse par construction.

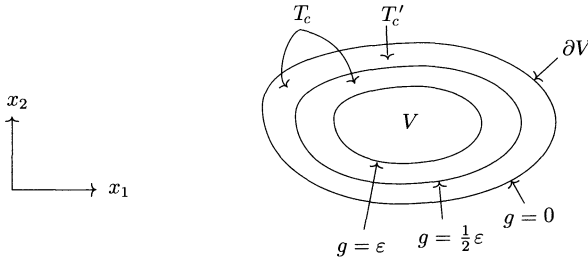


Figure 7

L'ensemble graphe $(dG) \cup \text{graphe}(-dG)$ est l'image d'une immersion lagrangienne car pour chaque composante, graphe $(d(\mu_c \circ \psi_c)) \cup \text{graphe}(-d(\mu_c \circ \psi_c))$ en est une dans $T^*(C \times [0, 1])$. En effet, on a

$$d(\mu_c \circ \psi_c) = \frac{3}{4} \varepsilon \sqrt{t} dt.$$

Donc graphe $(d(\mu_c \circ \psi_c)) \cup \text{graphe}(-d(\mu_c \circ \psi_c))$ est le produit de la section nulle de $T^*(C)$ par un morceau de parabole dans $T^*[0, 1]$ (figure 8).

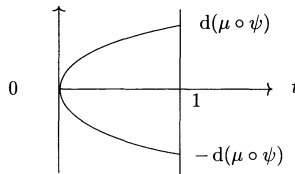


Figure 8

L'exactitude vient de $G|_{\partial V} = 0$. □

1.2.4. Propriétés immédiates de L .

(i) Les points doubles de L sont dans la section nulle de $T^*\mathbb{R}^2$ et sont les images des points critiques de G par l'application $\text{graphe}(dG)$.

(ii) Si $M \in \text{graphe}(dG)$, on a $y_i(M) = -\partial G / \partial x_i(\pi(M))$, $i = 1, 2$.

(iii) Soit $X \in V - \partial V$, $M = \pi^{-1}(X) \cap \text{graphe}(dG)$ et $M' = \pi^{-1}(X) \cap \text{graphe}(-dG)$. Si γ est un chemin de M' à M dans L , alors

$$\int_{\gamma} -y_1 dx_1 - y_2 dx_2 = 2G(X).$$

(iv) Dans la pratique on n'utilise cette construction que dans un domaine de la forme $t_0 \leq x_2 \leq t_1$ pour y produire une sous-variété lagrangienne à bord qui se recolle avec un modèle de type cinéma pour $x_2 = t_i$, $i = 0, 1$. Il suffit donc de se donner grossièrement les niveaux d'une

fonction g sur $V \cap \{t_0 \leq x_2 \leq t_1\}$. On donnera plutôt les niveaux de $2g$ pour que, en vertu de la propriété 3), les valeurs au bord soient les aires entourées par les boucles dans L_t .

I.3. Interface entre le cinéma et le modèle fonctionnel.

Soit L construite comme en I.2, soit $t \notin \Sigma \cup \Sigma'$. Alors :

LEMME I.3.1. — (i) Les croisements de $L_t = p(L \cap \{x_2 = t\})$ correspondent par π aux points critiques de $G|_{\{x_2=t\}}$. Soient M et M' les pré-images d'un croisement c de L_t , d'abscisse $x_1 = s$, avec $M \in \text{graphe}(dG)$ et $M' \in \text{graphe}(-dG)$; si Γ est un chemin de M' à M dans $L \cap \{x_2 = t\}$, alors l'aire entourée dans \mathbb{C} par $p(\gamma_t)$ vaut $2G(s, t)$.

(ii) Le croisement c est de type a (resp. b) si et seulement si au voisinage de (s, t) , les niveaux de G tournent leur concavité vers $x_2 = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. — (i) Cela résulte des propriétés (ii) et (iii) de I.2.4.

(ii) On peut supposer que la restriction de π au graphe de dG est de degré 1 et que sa restriction au graphe de $-dG$ est de degré -1 . Il en est alors de même pour les restrictions à $\{x_2 = t\}$ après projection sur l'axe des x_1 (figure 9). Quitte à changer G en $-G$, on peut supposer $\partial G/\partial x_2(s, t) < 0$, c'est-à-dire $y_2(M) > 0$.

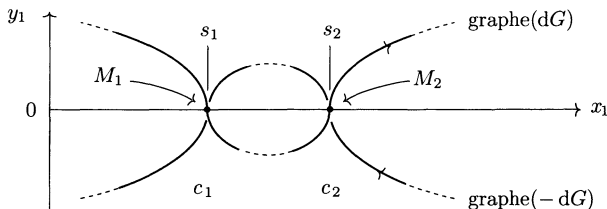


Figure 9

Sur la figure 9, c_1 et c_2 représentent les deux cas possibles pour c . On voit que c_1 est de type a et c_2 de type b . D'autre part, d'après la propriété (ii) de I.2.4, s_1 est un minimum local de $G|_{\{x_2=t\}}$, et s_2 un maximum local (figure 10). □

I.3.3. Modèles locaux de chirurgies lagrangiennes dans un cinéma. Soit $K = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2\}$, une couronne. Soit $h : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $h(x) = \sin(\pi(x - 1))$. Soit $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x_1, x_2) = h(x_1^2 + x_2^2)$. C'est une fonction radiale, nulle au bord avec

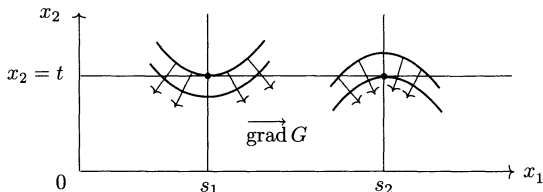


Figure 10

un cercle critique $Z = \{x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{2}\}$ qui réalise le maximum de g . En régularisant g au bord (au sens de I.2.3), on obtient G qui modélise un tore lagrangien exact T . Soient $E_1 = \mathbb{R} \times [\frac{7}{4}, +\infty[$, $E_2 = \mathbb{R} \times]-\infty, -\frac{7}{4}]$, $E_3 = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] \times [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$, $E_4 = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}] \times [-\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}]$ (voir figure 11).

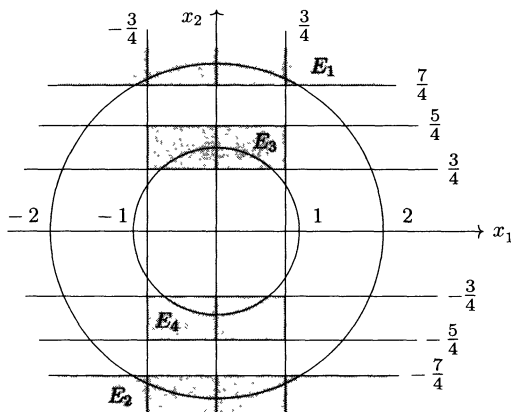


Figure 11

En prenant x_2 comme temps du cinéma, les intersections $\pi^{-1}(E_1) \cap T$ et $\pi^{-1}(E_2) \cap T$ fournissent respectivement des modèles locaux pour la chirurgie d'indice 2 et celle d'indice 0, tandis que $\pi^{-1}(E_3) \cap T$ et $\pi^{-1}(E_4) \cap T$ fournissent des modèles pour les chirurgies d'indice 1, respectivement apparition et disparition d'un croisement (voir I.1.3). Pour ces dernières, les figures du cinéma correspondant ne sont pas fermées (voir figure 2). Pour les compléter lagrangienement, il suffit :

- 1) d'avoir la constance des aires entourées par les courbes fermées immergées dans le plan (x_1, y_1) (voir I.1.8);
- 2) de s'assurer que les vitesses d'aire balayée par les deux arcs qui referment le modèle local sont compatibles avec la coordonnée y_2 de chacune des quatre extrémités du modèle.

On utilisera aussi comme modèles locaux les images des précédents par des transformations linéaires symplectiques préservant le feuilletage $x_2 = \text{constante}$. Pour une modélisation plus formelle, voir [Ar].

II. Construction de l'exemple 1 : une surface exacte de genre 2 avec un seul point double.

II.1. Vue d'ensemble.

II.1.1. — En fait, on construit ϕ_α , ($\alpha \in [\alpha_0, +\infty[$), une famille C^∞ d'immersions lagrangiennes exactes de S , la surface orientable de genre 2, avec les propriétés suivantes :

1) Pour tout α , l'immersion ϕ_α admet exactement un point double, qui est transverse, et dont les préimages sont notées M_α et M'_α .

2) Pour tout chemin Γ_α joignant M_α à M'_α dans S , l'aire entourée par le lacet $\phi_\alpha \circ \Gamma_\alpha$ est indépendante de α .

3) Au voisinage du point double, l'image $L(\alpha)$ de l'immersion est indépendante de α .

LEMME II.1.2. — *Pour tout $\alpha \geq \alpha_0$, $L(\alpha)$ s'obtient à partir de $L(\alpha_0)$ par isotopie hamiltonienne de \mathbb{C}^2 à support compact.*

Démonstration. — Soit $\alpha > \alpha_0$. Par transversalité, les ensembles $A = \{(M_\tau, \tau) \in S \times [\alpha_0, \alpha]; \alpha_0 \leq \tau \leq \alpha\}$ et $A' = \{(M'_\tau, \tau) \in S \times [\alpha_0, \alpha]; \alpha_0 \leq \tau \leq \alpha\}$ sont deux courbes plongées disjointes dans $S \times [\alpha_0, \alpha]$. Donc, quitte à composer ϕ_τ à droite par une isotopie de S , on peut supposer que pour tout τ , $M_\tau = M_{\alpha_0} = M$ et $M'_\tau = M'_{\alpha_0} = M'$. De même, on peut supposer que ϕ_τ est indépendante de $\tau \in [\alpha_0, \alpha]$ sur des voisinages U et U' de M et M' respectivement, disjoints et ouverts.

Pour tout τ , on définit le long de $L(\tau)$ le champ suivant :

$$\forall z \in S, \quad X_\tau(\phi_\tau(z)) = \frac{d}{d\tau} \phi_\tau(z).$$

Au point double X_τ est nul, donc bien défini. Posons $\mu_\tau = \omega(X_\tau, \cdot)$. Pour tout lacet γ dans S , paramétré par $[0,1]$, on a

$$\int_\gamma \phi_\tau^*(\mu_\tau) = \int_0^1 \omega(X_\tau, (\phi_\tau \circ \gamma)'(t)) dt = \frac{d}{d\tau} \mathcal{A}(\tau) = 0,$$

où $\mathcal{A}(\tau)$ désigne l'aire entourée par $\phi_\tau \circ \gamma$. En effet, l'immersion est exacte pour tout τ . Donc $\phi_\tau^*(\mu_\tau)$ est une forme exacte sur S . On étend ϕ_τ en Φ_τ ,

l'immersion d'un voisinage tubulaire W de S . On peut supposer que Φ_τ est indépendante de τ au-dessus de U et U' , et qu'il existe un disque $V \subset U$ et un disque $V' \subset U'$ tels que $V \times V'$ soit une carte d'un voisinage du point double (au but) de Φ_τ . La forme $\Phi_\tau^*(\mu_\tau)$ est une section de $T^*(W)|_S$, qui induit $\phi_\tau^*(\mu_\tau)$ dans T^*S . Il est facile d'étendre $\Phi_\tau^*(\mu_\tau)$ en une forme exacte sur W , nulle sur ∂W , et au-dessus de $B \cup B'$. Posons $\Phi_\tau^*(\mu_\tau) = dh_\tau$ avec $h_\tau : W \rightarrow \mathbb{R}$. On définit sans ambiguïté sur $\Phi_\tau(W)$ la forme $\beta_\tau = \Phi_{\tau*}(dh_\tau)$ qui est fermée. De plus, on a $h_\tau(M) = h_\tau(M')$ car si Γ est un chemin de M à M' , $\int_\Gamma dh_\tau$ est la dérivée par rapport à τ de l'aire entourée par le lacet $\phi_\tau \circ \Gamma$, c'est-à-dire 0. Donc β_τ est exacte sur son domaine de définition et nulle à la frontière de celui-ci; on peut donc la prolonger par 0 sur le complémentaire. Le hamiltonien cherché H_τ est une primitive à support compact de β_τ . \square

II.1.3. — Pour avoir la propriété d'enlacement non borné, il suffira alors de constater que $L(\alpha)$ est enlacée avec le produit d'un domaine \mathcal{D} de \mathbb{C} (difféomorphe à un disque) par l'axe des y_2 , l'aire de \mathcal{D} valant $\alpha - 1$. On sait par Moser que \mathcal{D} est hamiltonniennement isotope dans \mathbb{C} à un disque de centre 0 et d'aire $\alpha - 1$.

II.1.4. — Cette construction se subdivise en deux modèles fonctionnels (dont un dépend de α) et deux parties cinéma (dont une dépend de α).

En figure 12, on décrit à la fois les deux parties fonctionnelles et la manière dont toutes les parties se recollent. Le point double, situé dans la zone fonctionnelle $\{x_2 > 1\}$, fait partie de la région indépendante de α , il «entoure» donc bien une aire constante.

La partie fonctionnelle $\{x_2 < -1\}$ décrit une surface de genre 2 privée d'un disque dont la frontière est $L(\alpha) \cap \{x_2 = -1\}$. À difféomorphisme près et avant de tronquer le modèle par $\{x_2 \geq -1\}$, le domaine de définition est un disque privé de deux petits disques situés dans $\{x_2 < -1\}$. La fonction G_α choisie, nulle au bord, positive à l'intérieur, a comme il se doit un maximum et deux selles; ces points critiques sont situés dans la partie $\{x_2 > -1\}$ qui n'est pas conservée dans la construction. La restriction à $\{x_2 = -1\}$ de $2G_\alpha$ admet cinq points critiques ayant pour valeurs de gauche à droite 5, 1, $\alpha + 1$, 1, α , les concavités étant tournées vers le bas sauf pour $\alpha + 1$.

Les deux cinémas s'enchaînent en $x_2 = 0$. Leur réunion forme un cylindre qui occupe la région $\{-1 \leq x_2 \leq 1\}$. La partie fonctionnelle $\{x_2 > 1\}$ représente un disque modélisé par un demi-disque sur lequel est définie une fonction G indépendante de α , nulle sur le demi-cercle du

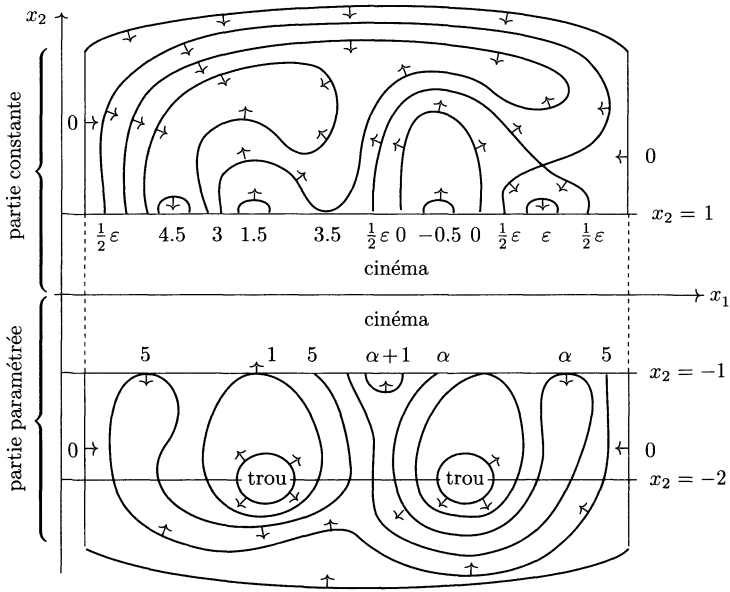


Figure 12

bord, avec un point selle à l'intérieur, de valeur $\frac{1}{2}\varepsilon$. La fonction $2G|_{\{x_2=1\}}$ admet de gauche à droite les valeurs critiques suivantes : 4.5, 1.5, 3, -0.5 , ε . La concavité des niveaux de $2G$ est tournée vers le haut au point critique de valeur 3 et les autres concavités sont tournées vers le bas. Le tout est bien une surface de genre 2. L'exactitude vient de ce que le modèle fonctionnel dans $\{x_2 \leq -1\}$ contient des générateurs du premier groupe d'homologie de S . Avec les valeurs numériques choisies, on supposera $\alpha_0 > 5$.

II.2. Partie cinéma.

II.2.1. — En général on n'indiquera pas l'instant exact de chaque figure, mais on supposera que l'intervalle de temps entre deux figures est toujours d'un même ordre de grandeur. Le texte justifiera les changements notables d'une figure à l'autre. Sur chacune se trouvent les valeurs absolues des aires des composantes de $C - L_t$, et une orientation de L_t . Pour chaque croisement on indique son type (a ou b) et on l'identifie par un numéro. Entre deux figures il y a des aires entourées qui varient peu (ordre de grandeur η), voire très peu (d'ordre $\varepsilon' < \varepsilon^2 \ll \varepsilon \ll \eta$), juste assez pour éviter les points doubles; on ne parlera des premières que lorsqu'il y aura à les comparer aux secondes.

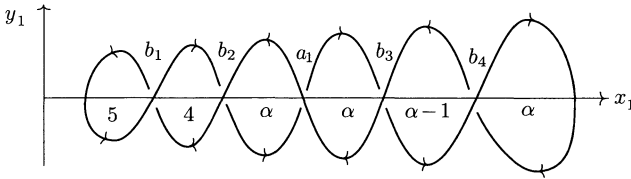


Figure 13

II.2.2. *Partie dépendant de α : $L \cap \{-1 \leq x_2 \leq 0\}$.* — D’après la correspondance établie en I.3, quand $t = -1$, L_t est décrite par la figure 13. Les cinq points critiques de $G|_{\{x_2=-1\}}$ donnent cinq croisements : de gauche à droite b_1, b_2, a_1, b_3, b_4 , délimitant six régions d’aires géométriques respectives $A_1 = 5, A_2 = 4, A_3 = \alpha, A_4 = \alpha, A_5 = \alpha - 1, A_6 = \alpha$. Avec l’orientation choisie, la boucle de gauche délimitée par b_1 est parcourue dans le sens trigonométrique. Remarquons tout de suite que le lobe de droite entoure une aire α , donc il contient un domaine \mathcal{D} d’aire $\alpha - 1$, hamiltoniennement isotope dans \mathbb{C} à un disque D de centre 0. Donc $\mathcal{D} \times \{x_2 = -1\} \times \mathbb{R}$ est enlacée avec L et hamiltoniennement isotope à $D \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

En considérant la formule I.1.7 fixant le sens de variation des aires entourées, on constate que lorsque t augmente les quantités suivantes sont décroissantes : A_1 et $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$, c’est-à-dire A_6 , et que les quantités suivantes sont croissantes : $A_1 - A_2, A_1 - A_2 + A_3$ et $A_1 - A_2 + A_3 - A_4$.

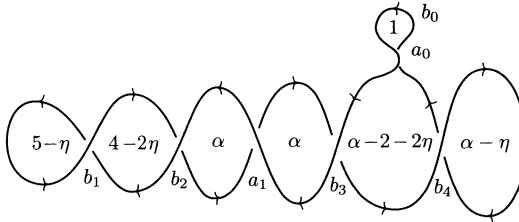


Figure 14

En figure 14, apparaît une paire de croisements $\{a_0, b_0\}$ sur l’arc simple orienté allant de b_4 à b_3 , et de façon que b_0 délimite une boucle d’aire algébrique positive (mais $\mathcal{A}(b_0, t) < 0$, avec la définition I.1.7). La quantité $\mathcal{A}(a_0, t)$ est la différence «aire du digone $\{a_0, b_0\}$ moins aire du monogone $\{b_0\}$ ». On peut faire croître $\mathcal{A}(a_0, t)$ de -1 (à la naissance de $\{a_0, b_0\}$), à $2 + 2\eta$ (figure 15).

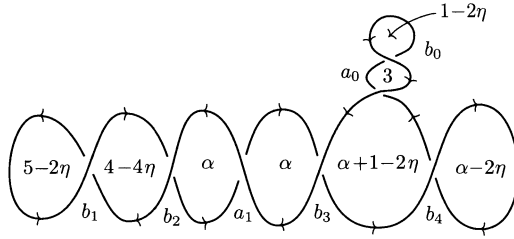


Figure 15

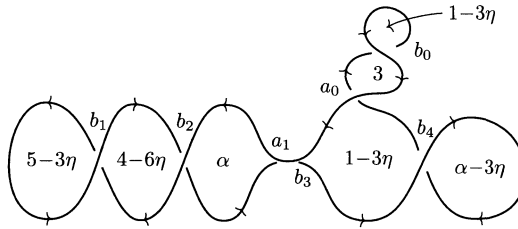


Figure 16

Le triangle $\{a_0, b_3, b_4\}$ entoure alors une aire $\alpha + 1 - 2\eta$. On fait ensuite augmenter $\mathcal{A}(b_3, t)$ jusqu'à élimination de la paire $\{a_1, b_3\}$ (figure 16). De 16 à 17, $\mathcal{A}(b_4, t)$ augmente de $3\eta - \alpha$ à $-2\varepsilon < 0$. Nous sommes à $\{t = 0\}$.

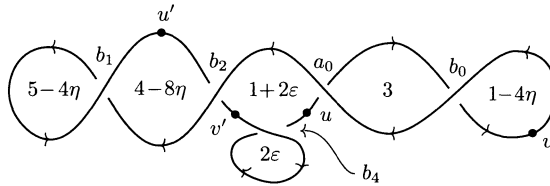


Figure 17. $t = 0, \varepsilon \ll \eta$

II.2.3. *Partie indépendante de $\alpha : L \cap \{0 \leq x_2 \leq 1\}$.* — Soit u un point de L_0 situé sur l'arc orienté joignant b_4 et a_0 , soit v situé sur la boucle délimitée par b_0 (à droite sur la figure 17), soit v' entre b_2 et b_4 , et soit u' un point sur l'arc supérieur reliant b_1 à b_2 . On suppose v' et u proches de b_4 .

Dans le mouvement de la figure 17 à la figure 19, les points u, v, u', v' sont suivis continûment et conservent leurs noms.

De la figure 17 à la figure 18, les arcs orientés $[u, v]$ et $[u', v']$ se déforment en arcs rectilignes contenus dans $\{y_1 = 0\}$. Soit U le point de $L \cap \{x_2 = t\}$ au-dessus de u ; on impose $y_2(U) = 0$.

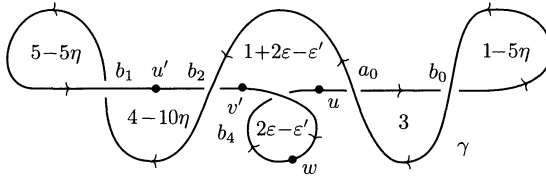


Figure 18. $\epsilon' < \epsilon^2$

Lorsque l'arc $[u, v]$ est dans $\{y_1 = 0\}$ (de la figure 18 à la figure 19), la loi des aires (I.1.6) implique que l'arc $[U, V]$ au-dessus de $[u, v]$ est dans $\{y_2 = 0\}$, et si on impose $d\mathcal{A}(b_4, t)/dt = \epsilon^2 =$ vitesse d'aire balayée par $[v', u]$, alors le segment $[U', V']$ est dans $\{y_1 = 0, y_2 = \epsilon^2\}$. On peut supposer que $d\mathcal{A}(b_0, t)/dt$ est constant; comme l'aire $\mathcal{A}(b_0, t)$ varie de la quantité η en un temps inférieur à 1, cette constante est $> \eta$. On impose de plus que l'arc simple orienté γ de L_t reliant b_0 à b_2 soit immobile. Dans ce cas l'arc Γ préimage par p de γ est dans la zone $\{y_2 \geq \eta\}$.

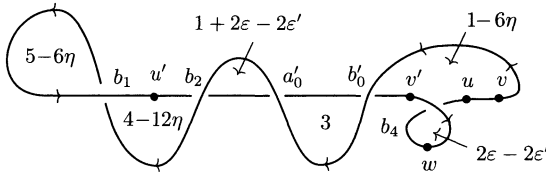


Figure 19

Si on fait subir une «translation» vers la droite au chemin orienté $[u', u]$, qui forme une boucle presque rigide dans le plan \mathbb{C} , on peut supposer que tous ses points se déplacent horizontalement et à une vitesse dx_1/dt très voisine d'une même constante. Soit W le point de $[U', U]$ avec y_1 , minimal et soit $w = p(W)$. La vitesse d'aire balayée par les arcs $[v', w]$ et $[w, u]$ est un $O(\sqrt{\epsilon})$, donc pour ϵ très petit devant η , le chemin $[U', U]$ reste dans la zone $\{y_2 < \eta\}$ de la figure 18 à la figure 19, ce qui garantit l'absence de points doubles pendant le mouvement de la petite boucle délimitée par b_4 . Les croisements a_0 et b_0 sont remplacés par des croisements a'_0 et b'_0 . En figure 18, on avait $\mathcal{A}(b_0, t) = -1 + 5\eta$, et en figure 19, on a $\mathcal{A}(b'_0, t) = -1 + 6\eta + 2\epsilon - 2\epsilon'$. Puis on se ramène à une situation symétrique par rapport à la section nulle (figure 20), pour arriver à $t = 1$. On vérifie le recollement avec le modèle fonctionnel de $\{x_2 \geq 1\}$. \square

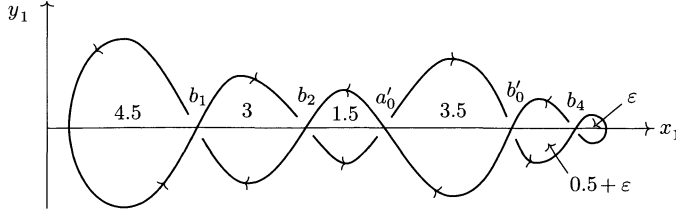


Figure 20

III. Construction des autres exemples.

III.1 Surface orientable de genre $g \geq 3$, exacte, à $g - 1$ points doubles et enlacement non borné.

La partie supérieure du modèle fonctionnel de l'exemple 1 est décrite par la figure 21. Pour augmenter de 1 le genre de la surface et le nombre de points critiques, il suffit de remplacer la figure 21 par la figure 22. Par récurrence, on obtient toutes les surfaces annoncées.

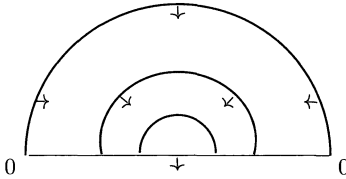


Figure 21

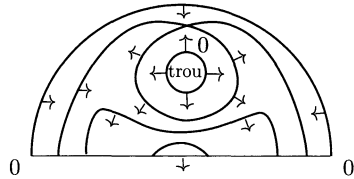


Figure 22

III.2. Surface non orientable de caractéristique $-2k$, ($k \geq 1$), exacte, avec un (resp. deux) point(s) double(s) si k est impair (resp. pair) et enlacement non borné.

III.2.1. Surface de caractéristique $\chi = -2$. — Dans l'exemple 1 (figure 12), la droite $\{x_2 = -2\}$ passe par les centres des trous du modèle fonctionnel construit dans la région $\{x_2 \leq -1\}$. Donc $L(\alpha) \cap \{x_2 = -2\}$ a trois composantes connexes, qui sont décrites en figure 23, en vertu des correspondances établies en I.3

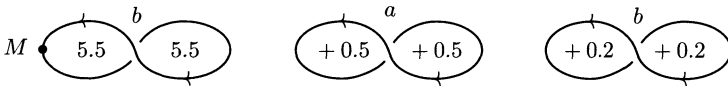


Figure 23

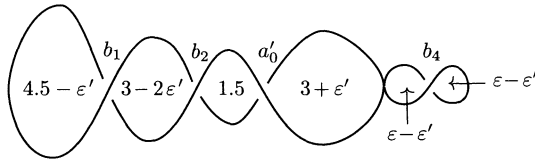


Figure 24

Soit M le point le plus à gauche de $L(\alpha) \cap \{x_2 = -2\}$: il se projette par π sur le bord du domaine. Pour $x_2 \in [-2, -1.8]$ on remplace le modèle fonctionnel de l'exemple 1 par un modèle de cinéma. Pour $x_2 = t$ entre -2 et -1.9 , on fait tourner la composante de gauche de $L_t(\alpha)$ d'un angle π autour du point M immobile (en première approximation cette composante est considérée comme un solide de \mathbb{C}).

Pendant ce temps, on impose $y_2(M) = y_1(M) = 0$, ce qui est le cas pour $t = -2$. Quand $x_2 = t$ varie de -1.9 à -1.8 on translate cette composante vers la droite en imposant toujours $y_2(M) = y_1(M) = 0$ jusqu'à faire coïncider la figure avec $L(\alpha) \cap \{x_2 = -1.8\}$. On voit que M se projette alors de nouveau sur le bord du modèle fonctionnel, ce qui correspond bien à $y_2(M) = y_1(M) = 0$. On a ainsi gardé l'exactitude de l'immersion, car la forme de Liouville $\lambda = -y_1 dx_1 - y_2 dx_2$ est nulle sur le trajet de M lorsque x_2 varie de -2 à -1.8 et par conséquent λ est exacte sur tout lacet qui emprunte ce trajet.

III.2.2. $\chi = -4$. — On garde le modèle de l'exemple 1 pour la partie $x_2 \leq 1$. On recolle avec le cinéma suivant : à partir de la figure 20, on fait croître $\mathcal{A}(b'_0, t)$ jusqu'à 0 et on fait alors disparaître b'_0 par chirurgie d'indice 1 (voir figure 24). On garde l'exactitude car tout lacet passant par le point de chirurgie entoure une aire nulle. Cette chirurgie est non-orientable. L'ordre de grandeur « ordinaire » de variation des aires est maintenant ε' de l'exemple 1 et non plus η .

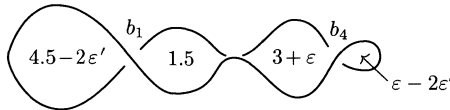


Figure 25

Ensuite on fait croître $\mathcal{A}(b_2, t)$ jusqu'à disparition de la paire $\{b_2, a'_0\}$ (figure 25).

On crée entre b_1 et b_4 un croisement a_2 par chirurgie d'indice 1 non-orientable, entourant une aire nulle (figure 26).

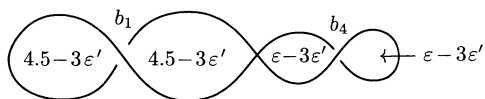


Figure 26

On passe ensuite à la figure 27, en $t = 4$, qui s'enchaîne avec le modèle fonctionnel de la figure 28. On a bien deux points doubles, correspondant à une selle et un minimum dans le demi-disque.

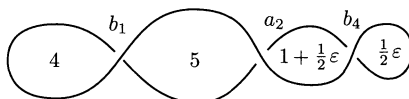


Figure 27

III.2.3 $\chi = -6$. — On garde le modèle précédent pour $x_2 \leq 4$. On reprend le cinéma à partir de la figure 27. On crée une paire $\{a_3, b_5\}$ sur l'arc plongé inférieur allant de b_1 à a_2 , de sorte que la surface délimitée par b_1 et a_2 soit déconnectée. A la naissance, b_5 entoure une boucle d'aire géométrique 2 (voir figure 29).

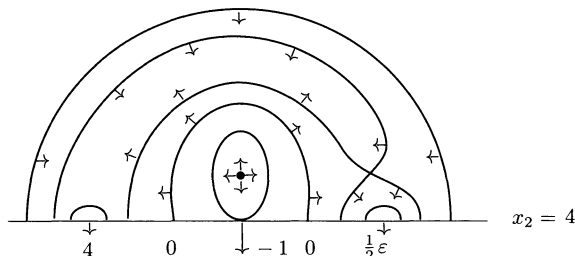


Figure 28

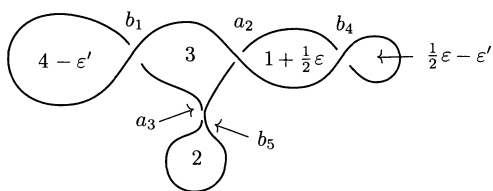


Figure 29

On fait croître $\mathcal{A}(a_3, t)$ de -2 à 0 . On fait alors disparaître a_3 par chirurgie d'indice 1 (figure 30). On a maintenant deux composantes connexes.

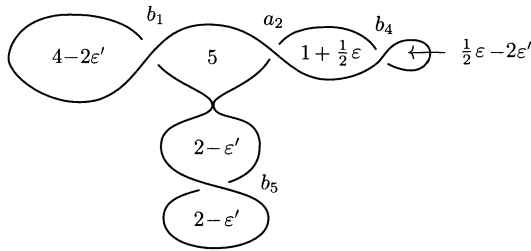


Figure 30

On augmente $\mathcal{A}(b_1, t)$ de $2\varepsilon' - 4$ à $-\varepsilon''$ (voir la figure 31), avec ε'' petit devant ε et ε' .

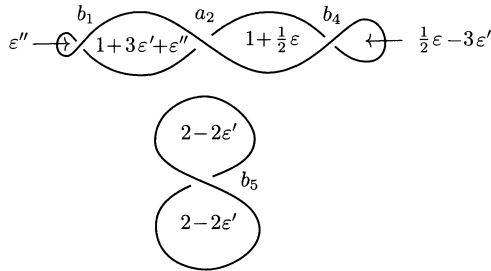


Figure 31

On recolle les deux composantes par chirurgie d'indice 1, ce qui crée un croisement b_6 (voir figure 32). En jouant sur la différence de hauteur y_2 entre les deux composantes on peut rendre la forme λ exacte sur cette nouvelle anse et on se retrouve dans une situation analogue à celle de la figure 17.

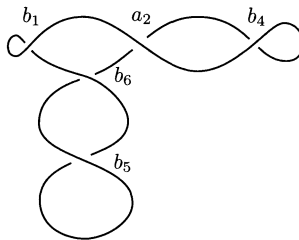


Figure 32

On finit donc comme dans l'exemple 1 à partir de la figure 17, mais avec des valeurs différentes. Il y a donc un point double.

III.2.4. $\chi = -2k$, ($k \geq 4$) : par récurrence à partir de ce qui précède.

III.3. Sphère, tore et bouteille de Klein exactes à enlacement non borné.

On commence par une partie commune (figure 33) : chirurgie d'indice 0, les deux boucles grandissent jusqu'à entourer une aire $\alpha+1$. Alors on crée une paire $\{a_2, b_1\}$ qui entoure à la naissance une aire géométrique $\alpha = -\mathcal{A}(b_1, t) = -\mathcal{A}(a_2, t)$. On a de gauche à droite les croisements a_1, a_2, b_1 . Sur l'arc inférieur joignant a_2 à b_1 on crée une autre paire $\{b_2, a_3\}$ entourant une aire 1 à la naissance. On fait croître $\mathcal{A}(a_2, t)$ jusqu'à 0, $\mathcal{A}(a_3, t)$ jusqu'à $8 + \varepsilon$, $\mathcal{A}(b_2, t)$ jusqu'à $1 - \varepsilon$ et $\mathcal{A}(b_1, t)$ jusqu'à $3 - \alpha$.

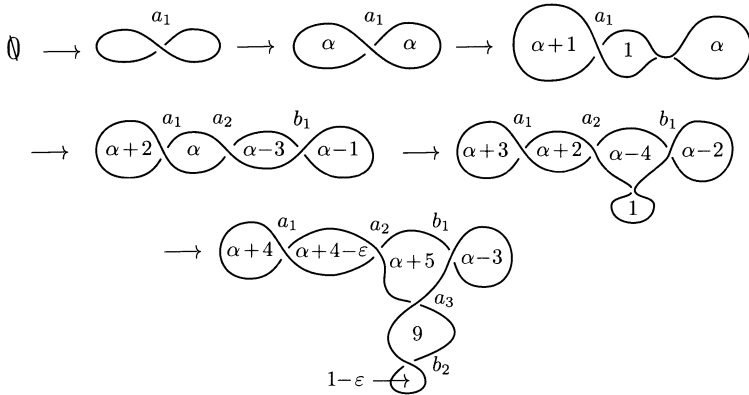


Figure 33

Dans les trois cas, on passe de la figure 33 à la figure 34, mais pas par le même chemin : pour la sphère, a_2 devient b_3 par point double, alors que pour le tore et bouteille de Klein, a_2 disparaît par chirurgie d'indice 1 et b_3 apparaît par chirurgie d'indice 1, les deux chirurgies entourant une aire nulle. Entre les deux chirurgies, il y a deux composantes connexes et dans le cas de la bouteille de Klein, on fait faire un demi-tour à l'une des deux.

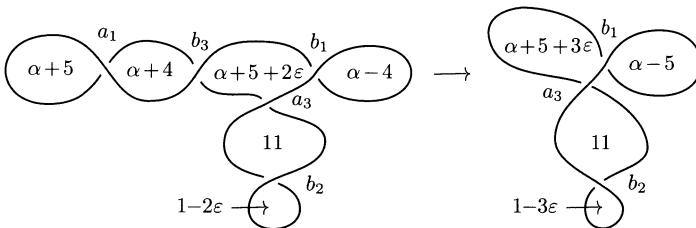


Figure 34

La paire $\{a_1, b_3\}$ s'élimine et on retrouve la situation de la figure 27, avec des valeurs différentes. On termine au prix de deux points doubles supplémentaires, par le modèle fonctionnel de la figure 28.

III.4 Plongements des surfaces non orientables de caractéristique $-4b$ ($b \geq 1$).

Ils s'obtiennent à partir des immersions des surfaces de caractéristique $-4k + 2$ en supprimant l'unique point double par chirurgie lagrangienne d'indice 1, mais cette fois-ci sur une surface (voir [P] pour plus de détails).

Annexe : conjecture de Chaperon-Zehnder [CZ].

Soit ϕ une immersion lagrangienne exacte, à points doubles transverses, d'une variété V compacte sans bord dans (\mathbb{C}^n, ω) . On note d le nombre de points doubles (au but) de ϕ et N le nombre minimal de points critiques isolés d'une fonction $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, antisymétrique, de Morse en dehors de la diagonale Δ et telle que df soit nulle sur Δ . Alors $2d \geq N$.

PROPOSITION. — Cette conjecture est fautive pour la surface orientable de genre 2 et les surfaces non-orientables de caractéristiques $\chi = -4k + 2$ ($k \geq 1$).

Démonstration (J.-C. Sikorav). — On a construit des immersions exactes de ces surfaces ayant un seul point double. Il suffit donc de montrer que $N \geq 3$. Soient x_1, \dots, x_N les points critiques, X un champ de gradient adapté à f et ϕ_t son flot. Si x n'appartient pas à Δ , l'un des x_i est limite de $\phi_t(x)$ soit pour $t \rightarrow +\infty$ soit pour $t \rightarrow -\infty$ car la diagonale est dans un niveau de f . Soit W un voisinage tubulaire ouvert de Δ . Alors il existe $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_N$, des modèles de Morse de x_1, \dots, x_N respectivement, ouverts et adaptés à X tels que $\mathcal{M}_1 \cup \dots \cup \mathcal{M}_N \cup W$ recouvre $V \times V$. Soit $\eta_0 \in H^2(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la classe fondamentale de V , soit $\eta_j = p_j^* \eta_0$, ($j = 1, 2$), p_j étant la projection de $V \times V$ sur le j -ième facteur. On a $\eta_1 - \eta_2 \in H^2(V \times V, \Delta, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, qui est isomorphe à $H^2(V \times V, W, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, l'isomorphisme étant induit par l'inclusion des paires.

Soient $\alpha, \alpha' \in H^1(V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ deux classes telles que $\alpha \cdot \alpha' = \eta_0$. On pose $\beta = p_1^* \alpha$ et $\beta' = p_1^* \alpha'$. On a $\beta \cdot \beta' = \eta_1$ et, dans $H^4(V \times V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$,

$$(\eta_1 - \eta_2) \cdot \beta \cdot \beta' = (\eta_1 - \eta_2) \cdot \eta_1 = -\eta_1 \cdot \eta_2 \neq 0.$$

Comme les \mathcal{M}_i sont contractiles, par l'inclusion $H^1(V \times V, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

est isomorphe à $H^1(V \times V, \mathcal{M}_i, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, ce qui permet de considérer $\beta \in H^1(V \times V, \mathcal{M}_1, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\beta' \in H^1(V \times V, \mathcal{M}_2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Donc

$$(\eta_1 - \eta_2) \cdot \beta \cdot \beta' \in H^4(V \times V, W \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Ce cocycle est non nul, donc $W \cup \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \neq V \times V$ et il y a au moins trois points critiques. \square

Remarque. — On n'utilise pas l'hypothèse d'antisymétrie mais seulement que f est nulle sur Δ .

BIBLIOGRAPHIE

- [Ar] V.I. ARNOLD, Cobordismes lagrangiens et legendriens I, II, *Funkts. Anal. ego Prilozh.*, 14 (1980), vol. 3, 1–130, vol. 4, 8–17.
- [Au1] M. AUDIN, Cobordismes d'immersions lagrangiennes et legendriennes, *Travaux en cours*, Hermann, Paris, 1987.
- [Au2] M. AUDIN, Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongements totalement réels, *Comment. Math. Helv.*, 63 (1988), 593–623.
- [CZ] M. CHAPERON, E. ZEHNDER, Quelques résultats globaux en géométrie symplectique, dans 'Géométrie symplectique et de contact : autour du théorème de Poincaré-Birkhoff' (P. Dazord, N. Désolneux-Moulis), p. 51–121, *Travaux en cours*, Hermann, 1984.
- [Gi] A.B. GIVENTAL, Plongements lagrangiens de surfaces et parapluies de Whitney déployés, *Funkts. Anal. ego Prilozh.*, 20-3 (1986), 35–41.
- [Gr] M. GROMOV, Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.*, 82 (1985), 307–347.
- [P] L. POLTEROVITCH, The surgery of Lagrange submanifolds, *Geom. Funct. Anal.*, 1 (1991), 198–210.
- [T] D. THÉRET, A lagrangian camel, *Comment. Math. Helv.*, 74 (1999), 591–614.
- [V] C. VITERBO, Plongements lagrangiens et capacité symplectique de tores dans \mathbb{R}^{2n} , *C. R. Acad. Sci. I*, 311 (1990), 487–490.
- [V2] C. VITERBO, Symplectic topology as the geometry of generating functions, *Math. Ann.*, 292 (1992), 685–710.

Manuscrit reçu le 18 janvier 1999,
révisé le 2 juillet 2003,
accepté le 8 avril 2004.

Denis SAUVAGET,
Université Paris 13
UMR 7539
Av. J.-B. Clément
93430 Villetaneuse (France).
sauvaget@math.univ-paris13.fr