ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Julien DUVAL

# Un théorème de Green presque complexe

Tome 54, nº 7 (2004), p. 2357-2367.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2004__54_7_2357_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
**54**, 7 (2004), 2357–2367

# UN THÉORÈME DE GREEN PRESQUE COMPLEXE

**par Julien DUVAL**

## 0. Introduction.

Soit $X$ une variété de dimension $2n$ munie d'une structure presque complexe, i.e. d'un automorphisme $J$ de $TX$ tel que $J^2 = -Id$. Quand $J$ n'est pas intégrable (non localement équivalente à la structure complexe $i$ de $\mathbb{C}^n$), la variété $X$ manque en général d'objets holomorphes. Elle possède cependant des courbes J-holomorphes, i.e. des surfaces dont le plan tangent en tout point est une droite complexe pour $J$.

En particulier elle a beaucoup de J-disques non constants (voir l'article de J.-C. Sikorav dans [1]). Un *J-disque* est une application $f : (D, i) \to (X, J)$ du disque unité $D$ de $\mathbb{C}$ vers $X$, qui est J-holomorphe : elle vérifie $df \circ i = J \circ df$. À la suite de Kruglikov et Overholt [8], on définit donc la pseudométrique de Kobayashi-Royden $K$ sur $TX$ comme en complexe par :

$$K(p, v) = \mathrm{Inf}\{1/r > 0 \;/\; \text{il existe un J-disque avec } f(0) = p \text{ et } d_0 f(\partial/\partial x) = rv\},$$

où $p$ est un point de $X$ et $v$ un vecteur de $T_p(X)$.

La variété $X$ est dite *hyperbolique* lorsque $K$ est une vraie métrique. Au contraire, sa dégénérescence se traduit par l'existence de J-disques arbitrairement grands dans $X$ passant par un point dans une direction

*Mots-clés* : Hyperbolicité – Théorèmes de type Picard – Courbes pseudoholomorphes.
*Classification math.* : 32H25 – 32Q45 – 32Q60.

donnée. On s'attend alors, au moins quand $X$ est compacte, à la présence de courbes entières dans la variété.

Précisément, appelons *courbe de Brody* une application $f : (\mathbb{C}, i) \to (X, J)$ non constante, J-holomorphe et de dérivée bornée.

Comme en complexe (voir Brody [3]), l'hyperbolicité se caractérise ainsi [8] :

CRITÈRE. — *Soit $(X, J)$ une variété presque complexe compacte. Alors $X$ est hyperbolique si et seulement si elle ne contient pas de courbe de Brody.*

Dans le cas complexe, on étudie plus aisément l'hyperbolicité des complémentaires de diviseurs que celle des variétés compactes. Le critère précédent demeure souvent valide. Ainsi, l'exemple de base dû à Green [5], l'hyperbolicité du complémentaire de $2n+1$ hyperplans en position générale dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, se réduit à l'absence de courbe de Brody dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ évitant ces hyperplans. Il remonte donc essentiellement à Picard en dimension complexe 1 et à Borel en dimension supérieure.

À la suite de S. Ivashkovich, il est tentant d'explorer cet exemple en presque complexe. Ceci n'a de sens qu'en dimension réelle 4 : en effet toute structure presque complexe est intégrable en dimension 2, alors que l'on manque d'hypersurfaces J-holomorphes en dimension supérieure à 4.

On se donne donc un *plan projectif presque complexe*. Autrement dit, fixons une structure presque complexe $J$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ positive par rapport à la forme de Fubini-Study $\omega$ : $\omega(\cdot, J\cdot) > 0$. Appelons *J-droite* de notre plan l'analogue presque complexe d'une droite projective, donc une courbe J-holomorphe plongée dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$, difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et de degré 1 en homologie.

D'après Gromov [6] (voir aussi [10]), un tel plan presque complexe possède beaucoup de J-droites. Ainsi l'espace de ces J-droites est difféomorphe à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Elles vérifient de plus les relations d'incidence usuelles : par deux points distincts passe une unique J-droite; deux J-droites distinctes se coupent transversalement en un point unique; les J-droites passant par un point $p$ forment un pinceau difféomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donnant une projection centrale $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit $C$ une réunion de cinq J-droites en position générale (i.e. sans point triple) de ce plan presque complexe. Voici notre résultat :

THÉORÈME. — *Le plan projectif presque complexe* $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ *ne contient pas de courbe de Brody évitant la configuration* $C$.

COROLLAIRE. — *Le complémentaire* $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C, J)$ *est hyperbolique.*

Dans cette direction, Debalme et Ivashkovich [4] avaient auparavant remarqué que l'hyperbolicité de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C, J)$ était une propriété ouverte dans l'espace des configurations $(C, J)$.

Le théorème se montre par l'absurde. Considérons une courbe de Brody $f$ évitant la configuration $C$. La remarque principale est que son adhérence $F$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est "feuilletée" par des limites de $f$. Par positivité d'intersection, une telle feuille évite une droite de $C$ ou y est contenue. Or, par un analogue du théorème de Liouville, $F$ doit rencontrer chaque droite de la configuration. Donc $F$ contient $C$ par propagation le long des feuilles. La contradiction est atteinte à un point double de $C$ puisque la feuille y passant ne peut être contenue à la fois dans les deux droites correspondantes. Le feuilletage de $F$ s'obtient par un argument de famille normale en analysant la courbe de Brody $f$ sous les projections centrales $\pi$ à partir des points doubles de $C$. Le point crucial est que $\pi \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est quasiconforme et d'ordre fini, donc essentiellement un revêtement.

Notons que ce schéma géométrique est intéressant même dans le cas complexe. Il réduit le théorème de Green à un fait analytique élémentaire de théorie de distribution des valeurs : une fonction entière ne s'annulant pas et d'ordre fini est une exponentielle de polynôme (comparer avec [2]).

Afin de préciser ceci, débutons par des préliminaires sur les suites de J-disques et les projections centrales dans un plan projectif presque complexe $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$.

## 1. Préliminaires.

Les objets considérés dans la suite sont de classe $C^\infty$ sauf mention du contraire, les convergences de suites d'applications étant localement uniformes.

### a) Positivité d'intersection.

Soient deux J-disques non constants $f, g : (D, i) \to (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. Supposons-les d'images distinctes et s'intersectant en $f(0) = g(0) = p$. Alors cette intersection est isolée et l'intersection homologique des deux disques en $p$ est strictement positive ([6], voir aussi l'article de D. McDuff dans [1]). Ceci entraîne le :

FAIT. — *Soit $(f_n)$ une suite de J-disques convergeant vers un J-disque $f$. On suppose que $f_n(D)$ évite une J-droite $L$ du plan presque complexe. Alors $f(D)$ évite encore $L$ ou y est contenu.*

Sinon le disque $f(D)$ couperait positivement la droite $L$. On trouverait donc une courbe fermée dans $f(D)$ enlaçant localement $L$. Ce serait encore le cas pour $f_n(D)$ pour $n$ assez grand, contredisant le fait que $f_n(D)$ évite $L$.

**b) Familles normales.**

Remarquons d'abord que, si une suite $(f_n)$ de J-disques converge vers une application continue $f : D \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, alors celle-ci est de classe $C^\infty$ et on a convergence des dérivées successives. La limite $f$ est donc un J-disque. Ceci résulte de la régularité elliptique de l'équation des courbes J-holomorphes (voir l'article de J.-C. Sikorav dans [1]).

Une suite de J-disques est *normale* si de toute sous-suite on peut extraire une suite convergente. La remarque précédente et le théorème d'Ascoli donnent le :

CRITÈRE. — *Une suite $(f_n)$ de J-disques est normale si et seulement si la suite $(\|df_n\|)$ des normes de ses dérivées est localement uniformément bornée.*

Ici $\|df_n\|$ est mesurée dans les métriques standard de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Une suite non normale de J-disques produit, quant à elle, une courbe de Brody par reparamétrage (cf. [3] et [8]) :

LEMME DE BRODY. — *Soit $(f_n)$ une suite non normale de J-disques. Alors il existe une suite de contractions affines $(r_n)$ de $\mathbb{C}$ convergeant vers un point de $D$ telle que $(f_n \circ r_n)$ converge vers une courbe de Brody après extraction.*

Rappelons que cette courbe de Brody est une application non constante $f : (\mathbb{C}, i) \to (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$, J-holomorphe et de dérivée bornée ($\|df\| \leqslant$ constante).

À ce stade, voyons comment le corollaire découle du théorème.

Soit $C$ une configuration de cinq J-droites en position générale dans

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Si $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus C, J)$ n'est pas hyperbolique, on obtient une suite de J-disques dont les dérivées en l'origine explosent, donc une suite non normale évitant $C$. Celle-ci produit une courbe de Brody dans $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$. Elle doit éviter $C$, contredisant le théorème : sinon cette courbe de Brody rencontrerait une droite de la configuration $C$; par le a) elle y serait contenue tout en évitant les quatre autres droites; on obtiendrait ainsi une courbe entière non constante dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{4 \text{ points}\}$, ce qui est impossible par le théorème de Picard. □

### c) Éclatement presque complexe.

Soit $p$ un point de notre plan presque complexe. D'après [6] (voir aussi [10]) passe par $p$ un pinceau de J-droites paramétré par $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, donnant une projection centrale $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Redressons localement ce pinceau sur le pinceau linéaire des droites complexes de $\mathbb{C}^2$ en 0. On construit pour cela un difféomorphisme $\Phi$ près de $p$, en projetant chaque J-droite $L$ du pinceau sur sa tangente $T_pL$ parallèlement à $T_pL^\perp$. Ce difféomorphisme est de classe $C^\infty$ hors de $p$ mais seulement $C^{1+Lip}$ en $p$. La structure presque complexe transportée par $\Phi$, encore notée $J$, sera donc de classe $C^\infty$ hors de 0 et Lipschitz en 0. On peut toujours supposer que $J(0) = i$.

Définissons alors l'*éclaté* $X$ de $(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ en $p$ comme l'éclaté complexe usuel $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ en 0 via $\Phi$.

Par construction, la projection centrale $\pi$ se relève en une fibration $\widetilde{\pi} : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La structure $J$ donne par relèvement une structure presque complexe $\widetilde{J}$ sur $X \setminus E$ où $E$ est le diviseur exceptionnel de $X$. Les fibres de $\widetilde{\pi}$ sont $\widetilde{J}$-holomorphes hors de $E$.

LEMME. — *La structure presque complexe $\widetilde{J}$ admet un prolongement Lipschitz au diviseur exceptionnel $E$.*

*Démonstration.* — On le vérifie via $\Phi$. Notons $q$ la projection de $\widetilde{\mathbb{C}^2}$ sur $\mathbb{C}^2$. On a, dans une des deux cartes de l'éclaté usuel, $q(x,t) = (x, tx)$. Hors du diviseur exceptionnel $E = (x = 0)$, la structure relevée s'obtient par $\widetilde{J} = (dq)^{-1} \circ J \circ dq$. Les horizontales ($t =$ constante) étant $\widetilde{J}$-holomorphes, la structure $\widetilde{J}$ est de la forme

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} l & m \\ 0 & j \end{pmatrix}$$

où $j$, $l$ et $m$ sont, en chaque point, des $\mathbb{R}$-endomorphismes de $\mathbb{C}$. En posant de la même manière $J = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en explicitant la différentielle $dq$, on obtient les formules suivantes pour $\widetilde{J}$ au point $(x,t)$ :

$$l = a \circ q + (b \circ q)t, \quad m = (b \circ q)x, \quad j = -x^{-1}t(b \circ q)x + x^{-1}(d \circ q)x.$$

Comme $J(z) = i + O(|z|)$, on vérifie bien que $\widetilde{J}(x,t) = i + O(|x|)$. □

### d) Projections quasiconformes.

Comme dans le paragraphe précédent, on se fixe $\pi$ une projection centrale associée au pinceau de J-droites en $p$. Celle-ci n'est pas en général holomorphe. Cependant elle reste quasiconforme en restriction aux J-disques du plan presque complexe.

Précisons ceci. On suppose que $\pi$ envoie l'orientation transverse du pinceau venant de $J$ sur celle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soit $0 \leqslant k < 1$. Une application $g : D \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est dite *$k$-quasiconforme* si $||\bar{\partial} g|| \leqslant k||\partial g||$. Ici $\partial g$ et $\bar{\partial} g$ désignent respectivement les composantes $\mathbb{C}$-linéaire et $\mathbb{C}$-antilinéaire de la dérivée de $g$ pour les structures complexes de $D$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons que $g$ reste quasiconforme (pour une autre constante) si on la compose par un difféomorphisme préservant l'orientation de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

PROPOSITION. — *Il existe une constante $k < 1$ telle que $\pi \circ f$ soit $k$-quasiconforme pour tout J-disque $f$ évitant $p$.*

*Démonstration.* — Relevons le J-disque $f$ à $X$ l'éclaté presque complexe en $p$, en un $\widetilde{J}$-disque $\tilde{f}$. On veut voir que $\widetilde{\pi} \circ \tilde{f}$ est quasiconforme. L'énoncé étant de nature locale, on peut supposer le disque $\tilde{f}(D)$ contenu dans un ouvert de carte $U$ de $X$ trivialisant la fibration. L'ouvert $U$ est donc difféomorphe au bidisque $D \times D$, $\widetilde{\pi}$ devenant la projection sur le deuxième facteur. La structure $\widetilde{J}$ dans cette carte est alors de la forme

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} l & m \\ 0 & j \end{pmatrix}.$$

Comme on peut toujours supposer que $\widetilde{J}(0) = i$, la structure $j$ sera une petite perturbation $i + \epsilon$ de la structure complexe de $D$ quitte à rétrécir $U$. Ceci n'utilise que la continuité de $\widetilde{J}$ (voir c)).

Ainsi $\widetilde{\pi} \circ \tilde{f}$ se lit dans la carte comme la deuxième projection $g : D \to D$ du $\widetilde{J}$-disque. D'après la forme de $\widetilde{J}$, elle satisfait l'équation $dg \circ i = j(\tilde{f}) \circ dg = i \circ dg + \epsilon(\tilde{f}) \circ dg$. On en déduit la quasiconformalité de $g$

puisque $\epsilon$ est petit. L'application $\widetilde{\pi} \circ \tilde{f}$ est donc $k_U$-quasiconforme pour une constante ne dépendant que de la carte. En recouvrant $X$ par un nombre fini de tels ouverts $U$, on peut prendre pour $k$ le maximum des constantes $k_U$ en question. □

*Remarque.* — D'après le dernier chapitre de la monographie de Lehto et Virtanen [9], une application k-quasiconforme peut toujours s'écrire comme composée $h \circ \phi$ d'une fonction holomorphe $h$ et d'un homéomorphisme quasiconforme $\phi$ grâce au théorème d'Ahlfors-Bers. Nous renvoyons à [9] pour les définitions analytique et géométrique des *homéomorphismes* quasiconformes, et leurs propriétés.

On en déduit déjà cet analogue du théorème de Liouville :

COROLLAIRE. — *Soit $f : (\mathbb{C}, i) \to (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ une courbe entière J-holomorphe. On suppose que l'adhérence de son image évite une J-droite $L$. Alors $f$ est constante.*

*Démonstration.* — Plongeons $L$ dans un pinceau de J-droites. On suppose que la projection centrale $\pi$ envoie $L$ sur le point à l'infini de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Notons $g$ la composée $\pi \circ f$. Comme $\overline{f(\mathbb{C})}$ évite $L$, $\overline{g(\mathbb{C})}$ évite l'infini. Autrement dit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est bornée. Par la proposition et la remarque, $g$ s'écrit comme une composée $h \circ \phi$ où $h$ est une fonction entière bornée et $\phi$ un homéomorphisme de $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, $h$ et donc $g$ sont constantes. Ainsi la courbe $f(\mathbb{C})$ est contenue dans une J-droite $L'$ du pinceau. Or l'adhérence $\overline{f(\mathbb{C})}$ évite le point de rencontre de $L$ et $L'$ que l'on identifie au point à l'infini de $L'$. Donc $f$ est constante par une nouvelle application du théorème de Liouville. □

Abordons maintenant la démonstration proprement dite du théorème.

## 2. Démonstration.

Rappelons que l'on raisonne par l'absurde. Soit $f : (\mathbb{C}, i) \to (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ une courbe de Brody évitant une configuration $C = \cup L_i$ de cinq J-droites en position générale. Notons $F = \overline{f(\mathbb{C})}$ l'adhérence de son image dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. On a le :

LEMME GÉOMÉTRIQUE. — *Le compact $F$ est réunion de J-disques $\Delta$ non constants obtenus comme limites de disques de $f(\mathbb{C})$.*

Admettons provisoirement ce lemme. Voici comment en découle la contradiction. Remarquons déjà que les disques $\Delta$ satisfont l'alternative suivante vis-à-vis de $C$ (cf. 1.a)) : ou $\Delta$ évite $C$, ou $\Delta$ est contenu dans l'une des droites de $C$ en évitant les autres. En particulier, $F$ doit éviter les points doubles de la configuration $C$. Cependant, par l'analogue du théorème de Liouville (cf. 1.d)), $F$ rencontre chaque droite $L_i$ de $C$. De plus l'intersection $F \cap L_i$, qui est fermée dans $L_i$, y est aussi ouverte : le disque $\Delta$ passant par un point de $F \cap L_i$ est nécessairement contenu dans $L_i$. Donc $F$ contient toute la configuration. Contradiction. □

*Démonstration du lemme géométrique.* — Elle repose sur l'analyse de $F$ sous les projections centrales issues des points doubles de la configuration. Soit $p$ un tel point double, par exemple le point de rencontre de $L_1$ et $L_2$. Notons $\pi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la projection correspondante. On suppose que les droites $L_1$ et $L_2$ s'envoient par $\pi$ sur l'origine et l'infini de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. La restriction de $\pi$ à la courbe de Brody $f$ est donc à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Le point crucial est que $\pi \circ f$ est presque un revêtement :

LEMME ANALYTIQUE. — *La composée $g = \pi \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est de la forme $e^{P \circ \phi}$ où $P$ est un polynôme non constant et $\phi$ un homéomorphisme de $\mathbb{C}$.*

En particulier, soit $\delta$ un disque dans $\mathbb{C}^*$; alors $g^{-1}(\delta) = U \cup \bigcup D_n$ où $U$ et les disques $D_n$ sont disjoints, $g|_U$ de degré fini et $g|_{D_n}$ un homéomorphisme sur $\delta$.

Admettons pour l'instant ce résultat. Voici comment il entraîne le lemme géométrique.

Soit $z$ un point de $F \setminus f(\mathbb{C})$. Quitte à permuter les droites, supposons que $L_1$ et $L_2$ évitent $z$. Notons $t = \pi(z)$ et $\delta$ un disque centré en $t$ dans $\mathbb{C}^*$. Par hypothèse, $z$ est limite d'une suite de points distincts $(z_n)$ de $f(\mathbb{C})$. Par la remarque suivant le lemme analytique on trouve, pour $n$ assez grand, un disque $\Delta_n$ contenu dans la courbe de Brody passant par $z_n$ tel que $\pi : \Delta_n \to \delta$ soit un homéomorphisme.

Il suffit de voir que $(\Delta_n)$ forme une famille normale pour conclure. Pour cela reparamétrons conformément les disques $\Delta_n$ par $f_n : (D, i) \to (\mathbb{P}^2(\mathbb{C}), J)$ avec $\pi \circ f_n(0) = t$. Les projections $g_n = \pi \circ f_n : D \to \delta$ sont ainsi des difféomorphismes k-quasiconformes (cf. 1.d)) envoyant l'origine sur $t$. Quitte à extraire, on peut donc supposer que $(g_n)$ converge vers un homéomorphisme $\gamma$ de $D$ sur $\delta$ [9].

On en déduit bien que la suite de J-disques $(f_n)$ est normale. Sinon, par le lemme de Brody (cf. 1.b)), on trouverait une suite de contractions affines $(r_n)$ de $\mathbb{C}$ convergeant vers un point $a$ de $D$ telle que $(f_n \circ r_n)$ converge vers une courbe de Brody $h$ quitte à extraire. Ainsi $(g_n \circ r_n)$ aurait pour limite $\gamma(a)$. Autrement dit, la courbe $h$ serait contenue dans la fibre de $\pi$ au-dessus de $\gamma(a)$, donc dans une J-droite $L$ du pinceau en $p$. Par ailleurs cette courbe de Brody éviterait encore $C$ comme limite d'une suite de J-disques hors de $C$ (cf. 1.b)). Or $L \cap C$ contient au moins trois points. On obtiendrait donc une courbe entière non constante dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{3 \text{ points}\}$, contredisant le théorème de Picard. □

*Démonstration du lemme analytique.* — Elle repose sur le fait que la courbe de Brody $f$ est d'ordre fini, ainsi que sa projection $g = \pi \circ f$. Comme $g$ est quasiconforme, on l'écrira comme composée $h \circ \phi$ d'une fonction entière $h$ d'ordre fini et d'un homéomorphisme. Or on sait bien qu'une fonction entière ne s'annulant pas et d'ordre fini est une exponentielle de polynôme (cf. par exemple [2]).

Détaillons ceci. Notons $D_r$ le disque centré en l'origine de rayon $r$ dans $\mathbb{C}$. Rappelons que $\omega$ désigne la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, celle de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ étant notée $\omega'$. Définissons, comme Nevanlinna et Ahlfors (voir [7]), les *caractéristiques* de $f$ et $g$ par :

$$T(f)(r) = \int_0^r \Big(\int_{D_\rho} f^*\omega\Big)\frac{d\rho}{\rho},$$
$$T(g)(r) = \int_0^r \Big(\int_{D_\rho} g^*\omega'\Big)\frac{d\rho}{\rho} = \int_0^r \Big(\int_{D_\rho} f^*\pi^*\omega'\Big)\frac{d\rho}{\rho}.$$

Les applications $f$ ou $g$ sont *d'ordre fini* si leur caractéristique croît au plus polynomialement en $r$. C'est le cas pour $f$ : en effet sa dérivée est bornée, donc $f^*\omega$ est une 2-forme bornée sur $\mathbb{C}$ et $T(f)$ croît quadratiquement.

Pour passer à $g$, on va comparer la forme singulière (le courant) $\pi^*\omega'$ à $\omega$. Leur différence n'est plus tout à fait, comme en complexe, le $dd^c$ d'un potentiel à singularité logarithmique en $p$ :

FAIT. — *Il existe une fonction négative $u$ et une 1-forme bornée $\alpha$ sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{p\}$ telles que $\pi^*\omega' = \omega + dd^c_J u + d\alpha$ en dehors de $p$, avec la notation $d^c_J u = -du \circ J$.*

En effet, comme $\omega$ et $\pi^*\omega'$ sont cohomologues, il s'agit d'un problème local près de $p$ : écrire $\pi^*\omega'$ comme somme du $dd^c_J$ d'un potentiel négatif et d'une différentielle d'une 1-forme bornée. Or, après redressement du pinceau en $p$ par $\Phi$ (cf. 1.c), on a $\pi^*\omega' = dd^c \log|z| = dd^c_J \log|z| + d\beta$ où $\beta = d\log|z| \circ (J - i)$. Cette 1-forme est bien bornée près de 0 car $J(z) - i = O(|z|)$ ($\Phi$ est $C^{1+Lip}$ en $p$).

Puisque $f$ est J-holomorphe, on peut maintenant comparer $T(g)$ et $T(f)$ :

$$T(g)(r) = T(f)(r) + \int_0^r \Big(\int_{D_\rho} dd^c(u \circ f)\Big)\frac{d\rho}{\rho} + \int_0^r \Big(\int_{\partial D_\rho} f^*\alpha\Big)\frac{d\rho}{\rho}.$$

Classiquement [7] la première intégrale vaut $\int_0^{2\pi} u \circ f(re^{i\theta})d\theta - 2\pi u \circ f(0)$. Elle reste donc majorée puisque $u$ est négative. La seconde croît linéairement : en effet, la 1-forme $f^*\alpha$ est bornée sur $\mathbb{C}$ car la dérivée de $f$ et $\alpha$ le sont. Donc $g$ est, comme $f$, d'ordre fini.

Écrivons maintenant $g$ comme composée $g = h \circ \phi$ d'une fonction entière $h$ et d'un homéomorphisme quasiconforme $\phi$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ fixant l'infini (cf. 1.d) et le dernier chapitre de [9]). Notons que l'homéomorphisme $\phi$ est Hölder pour la métrique de Fubini-Study de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ [9]. Puisqu'il fixe l'infini, son inverse croît polynomialement pour la métrique usuelle de $\mathbb{C}$ : on aura $\phi^{-1}(D_r) \subset D_{r^d}$ pour un certain entier $d$ et $r$ assez grand. Ceci entraîne que $h$ est, comme $g$, d'ordre fini : $T(h)(r)$ vaut en effet par définition

$$\begin{aligned}\int_0^r \mathrm{Aire}_{\omega'}(g(\phi^{-1}(D_\rho)))\frac{d\rho}{\rho} &\leqslant \int_0^r \mathrm{Aire}_{\omega'}(g(D_{\rho^d}))\frac{d\rho}{\rho} + O(1)\\ &= d^{-1}T(g)(r^d) + O(1).\end{aligned}$$

Rappelons enfin brièvement pourquoi $h$ est une exponentielle de polynôme. Comme $h$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, elle a un logarithme $k$. Montrons que c'est un polynôme. Notons pour cela que, dans $\mathbb{C}$, $\omega' = dd^c\log(1+|z|^2)$. Donc :

$$\begin{aligned}T(h)(r) &= \int_0^r \Big(\int_{D_\rho} dd^c \log(1+|h|^2)\Big)\frac{d\rho}{\rho}\\ &= \int_0^{2\pi} \log(|h| + |h|^{-1})(re^{i\theta})d\theta + O(1).\end{aligned}$$

La deuxième égalité résulte du fait que $\log|h|$ est harmonique. Ainsi les moyennes sur les cercles de centre 0 et de rayon $r$ de $\big|\log|h|\big| = |\mathrm{Re}(k)|$ ont une croissance polynomiale. Or le développement en série entière de $k$ à l'origine donne :

$$k^{(n)}(0) = \pi^{-1} n!\, r^{-n} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(k)(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta.$$

En faisant tendre $r$ vers l'infini, on obtient bien que $k^{(n)}(0) = 0$ pour $n$ grand. □

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. AUDIN and J. LAFONTAINE ed., Holomorphic curves in symplectic geometry, Progress in Math., 117, Birkhäuser, (1994), Basel.

[2] F. BERTELOOT et J. DUVAL, Sur l'hyperbolicité de certains complémentaires, Ens. Math., 47 (2001), 253–267.

[3] R. BRODY, Compact manifolds and hyperbolicity, Trans. Amer. Math. Soc., 235 (1978), 213–219.

[4] R. DEBALME and S. IVASHKOVICH, Complete hyperbolic neighborhoods in almost-complex surfaces, Int. J. of Math., 12 (2001), 211–221.

[5] M. GREEN, Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties, Amer. J. Math., 97 (1975), 43–75.

[6] M. GROMOV, Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math., 82 (1985), 307–347.

[7] S. KOBAYASHI, Hyperbolic complex spaces, Grund. der math. Wiss., 318, Springer (1998), Berlin.

[8] B. KRUGLIKOV and M. OVERHOLT, Pseudoholomorphic mappings and Kobayashi hyperbolicity, Diff. Geom. Appl., 11 (1999), 265–277.

[9] O. LEHTO and K.I. VIRTANEN, Quasiconformal mappings in the plane, Grund. der math. Wiss., 126, Springer (1973), Berlin.

[10] J.-C. SIKORAV, Dual elliptic planes, preprint 2000, `arXiv math.SG/0008234`.



Manuscrit reçu le 14 janvier 2004,
accepté le 30 mars 2004.



Julien DUVAL,
Université Paul Sabatier
Laboratoire Émile Picard
UMR CNRS 5580
31062 Toulouse Cedex 4 (France).
duval@picard.ups-tlse.fr