ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jérémie SZEFTEL

Propagation et réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger non linéaire

Tome 55, nº 2 (2005), p. 573-671.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2005__55_2_573_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
55, 2 (2005), 573–671

PROPAGATION ET RÉFLEXION DES SINGULARITÉS POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE

par Jérémie SZEFTEL

1. Introduction.

Les premiers travaux sur la propagation des singularités pour l'équation de Schrödinger remontent à R. Lascar [10] et L. Boutet de Monvel [3]. Ils introduisent un front d'onde parabolique qui se propage suivant les géodésiques du Laplacien à t fixé. Les estimations sont obtenues dans une algèbre pseudodifférentielle où la dérivation en temps compte double par rapport aux dérivations en espace pour tenir compte de l'inhomogénéité de l'opérateur de Schrödinger. Pour l'équation de Schrödinger dans un ouvert, l'auteur défini un front d'onde parabolique au bord grâce à cette algèbre, et montre que ce front d'onde parabolique se propage suivant le flot brisé du Laplacien à t fixé [14].

Pour étudier la propagation des singularités pour des équations aux dérivées partielles non linéaires, J. M. Bony introduit l'algèbre des opérateurs paradifférentiels. Il montre que la solution de l'équation non linéaire est également solution d'une équation linéaire avec un second membre plus régulier que la solution. L'opérateur linéaire en question est un opérateur

Mots-clés : équation de Schrödinger non linéaire, calcul paradifférentiel, propagation et réflexion des singularités, opérateur de Dirichlet-Neumann.
Classification math. : 35Q55, 35S50, 35A21.

paradifférentiel, et les estimations obtenues dans cette algèbre fournissent le résultat de propagation des singularités. De même, A. Alabidi [1] et M. Sablé-Tougeron [13] développent un calcul paradifférentiel tangentiel qui leur permet d'obtenir des théorèmes de réflexion des singularités pour des problèmes aux limites non linéaires respectivement d'ordre 2 et d'ordre quelconque.

Dans [14], le théorème de réflexion des singularités permet de justifier le calcul de l'opérateur de Neumann obtenu à l'aide d'une factorisation pseudodifférentielle. Ceci est une première étape en vue d'obtenir des conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Schrödinger linéaire [15].

Notre but est de développer un calcul paradifférentiel adapté à l'inhomogénéité de l'opérateur de Schrödinger ainsi que sa version tangentielle afin d'étendre les résultats de propagation et de réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger linéaire (voir [10], [3] et [14]) à l'équation de Schrödinger non linéaire. Nous voulons également utiliser le théorème de réflexion des singularités obtenu pour justifier le calcul de l'opérateur de Dirichlet-Neumann afin de dériver des conditions aux limites absorbantes pour l'équation de Schrödinger non linéaire.

Ce travail consiste en huit parties, la première étant un rappel de résultats déja connus et les sept autres constituant des résultats originaux :

- Nous commençons par rappeler les propriétés de l'algèbre pseudodifférentielle inhomogène S^m_{Sch} qui sont utiles pour la suite.
- Nous introduisons une analyse de Littlewood Paley tenant compte de l'inhomogénéité de notre problème. Ceci nous permet de définir un opérateur de S-paramultiplication et d'en étudier les propriétés. Cet opérateur est l'équivalent dans le cas inhomogène de la paramultiplication, et nous obtenons dans ce cadre l'équivalent du théorème de paralinéarisation de J. M. Bony [2].
- Nous définissons l'algèbre des opérateurs S-paradifférentiels. Cette algèbre contient à la fois les opérateurs differentiels et la S-paramultiplication.
- Par analogie avec [2], nous déduisons du théorème de S-paralinéarisation et du calcul symbolique pour les opérateurs S-paradifférentiels un théorème de propagation des singularités pour Schrödinger.
- Dans $\mathbb{R}^{d+1}$, nous identifions des variables tangentielles $(t, x') \in \mathbb{R}^d$ et une variable normale $x_d \in \mathbb{R}$. En plus de l'analyse de Littlewood-

Paley sur $\mathbb{R}^{d+1}$, nous utilisons une analyse de Littlewood-Paley n'agissant que sur les variables tangentielles. Ceci nous permet de définir un opérateur de S-paramultiplication tangentielle et d'en étudier les propriétés. Nous obtenons alors l'équivalent du théorème de paralinéarisation tangentielle de M. Sablé-Tougeron [13].

– Nous définissons l'algèbre des opérateurs S-paradifférentiels tangentiels. Cette algèbre contient à la fois les opérateurs différentiels en (t, x') et la S-paramultiplication tangentielle.

– Par analogie avec [1], nous déduisons du théorème de S-paralinéarisation tangentiel et du calcul symbolique pour les opérateurs S-paradifférentiels tangentiels un théorème de réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger non linéaire dans le cas des rayons transverses.

– Enfin, nous appliquons les résultats de réflexion des singularités au calcul de l'opérateur de Dirichlet-Neumann pour l'équation de Schrödinger non linéaire dans le cas du laplacien plat et du demi-espace $\mathbb{R}^d_+$. Soit f une fonction dans $C^\infty(\mathbb{C}^2)$. Si u est solution de :

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + f(u,\bar{u}) = 0,\ t > 0,\ x_d > 0, \\ u|_{x_d=0} = h, \\ u|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

alors $\partial_{x_d} u|_{x_d=0}$ est déterminé par h :

$$-\partial_{x_d} u|_{x_d=0} = N(h). \tag{1.2}$$

(1.2) définit l'opérateur de Dirichlet-Neumann associé à l'équation de Schrödinger $i\partial_t u + \Delta u + f(u,\bar{u}) = 0$ et à l'ouvert $\mathbb{R}^d_+$. Le théorème de S-paralinéarisation de la cinquième partie permet de réécrire l'équation comme la somme d'un opérateur L et d'un reste. L se factorise alors sous la forme

$$L = -(D_{x_d} + A)(D_{x_d} + B).$$

Les résultats de réflexion des singularités montrent que $(D_{x_d} + B)u$ est régulière. Nous en déduisons que $N \simeq -iB$.

2. L'algèbre $S^m_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Nous rappelons la définition et les principales propriétés de l'algèbre pseudodifférentielle inhomogène $S^m_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$. Cette algèbre nous permettra, entre autres, de définir une notion de régularité microlocale adaptée à l'équation de Schrödinger.

Dans tout ce qui suit, $|\xi|_4 = (\sum_{j=1}^d \xi_j^4)^{1/4}$ est la norme 4 sur $\mathbb{R}^d$. Si $(\tau_j, \xi_j) \in \mathbb{R}^{d+1}$ pour $j = 1, 2$, nous avons alors l'inégalité triangulaire suivante que nous utiliserons constamment dans ce travail :

$$\begin{aligned}(|\xi_1+\xi_2|_4^4+(\tau_1+\tau_2)^2)^{\frac14} &\leqslant (|\xi_1+\xi_2|_4^4+(\sqrt{|\tau_1|+|\tau_2|})^4)^{\frac14}\\ &\leqslant (|\xi_1+\xi_2|_4^4+(\sqrt{|\tau_1|}+\sqrt{|\tau_2|})^4)^{\frac14}\\ &\leqslant (|\xi_1|_4^4+\tau_1^2)^{\frac14}+(|\xi_2|_4^4+\tau_2^2)^{\frac14},\end{aligned}\tag{2.1}$$

où nous avons utilisé l'inégalité triangulaire pour la norme 4 sur $\mathbb{R}^{d+1}$. Un ensemble V de $T^*(\mathbb{R}^{d+1}) \setminus \{0\}$ est dit S-conique si $(t, x, \tau, \xi) \in V$ implique $(t, x, \lambda^2\tau, \lambda\xi) \in V$ pour tout $\lambda > 0$. Une fonction θ sur $T^*(\mathbb{R}^{d+1}) \setminus \{0\}$ est dite S-homogène de degré m si pour tout (t, x, τ, ξ) dans $T^*(\mathbb{R}^{d+1}) \setminus \{0\}$ et pour tout $\lambda > 0$, $\theta(t, x, \lambda^2\tau, \lambda\xi) = \lambda^m\theta(t, x, \tau, \xi)$.

Définition 2.1. — *Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $S^m_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ l'ensemble des $a(t, x, \tau, \xi)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^{2d+2})$ tels que pour tous (k, α, l, β) il existe $C_{k\alpha l\beta}$ vérifiant :*

$$|\partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C_{k\alpha l\beta}(1+|\xi|_4^4+\tau^2)^{\frac{m-|\beta|-2l}{4}},\ \forall(t,x,\tau,\xi).$$

Remarque. — L'algèbre $S^m_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ est introduite par R. Lascar dans [10] afin d'étudier la propagation des singularités pour l'équation de Schrödinger. Nous l'utilisons dans [14] pour étudier la réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger.

À $a \in S^m_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$, on associe l'opérateur $a(t, x, D)$ défini pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ par :

$$a(t,x,D)u(t,x) = (2\pi)^{-d-1}\int\int e^{it\tau+i<x,\xi>}a(t,x,\tau,\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi,$$

où $\widehat{u}$ désigne la transformée de Fourier par rapport à t et x. Le produit et l'adjoint d'opérateurs de $OpS^m_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ sont étudiés dans [10] :

Proposition 2.2. — *(i) Soient deux réels m et m' et soient a dans S^m_{Sch} et b dans $S^{m'}_{Sch}$. Alors il existe c dans $S^{m+m'}_{Sch}$ tel que $a(t,x,D)b(t,x,D) = c(t,x,D)$ et pour tout entier N :*

$$c(t,x,\tau,\xi) - \sum_{2l+|\beta|<N} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} \partial_t^l \partial_x^\beta a(t,x,\tau,\xi) \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta b(t,x,\tau,\xi) \in S^{m+m'-N}_{Sch}.$$

(ii) Soit un réel m et soit a dans S^m_{Sch}. Alors il existe b dans S^m_{Sch} tel que $a(t,x,D)^* = b(t,x,D)$ et pour tout entier N :

$$b(t,x,\tau,\xi) - \sum_{2l+|\beta|<N} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} \partial_t^l \partial_x^\beta \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta \bar{a}(t,x,\tau,\xi) \in S^{m-N}_{Sch}.$$

Définition 2.3. — *Pour $s \in \mathbb{R}$, on définit l'espace de Sobolev inhomogène :*

$$H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1}) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}) \,/\, (1 + |\xi|_4^4 + \tau^2)^{\frac{s}{4}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})\}. \tag{2.2}$$

La proposition suivante est démontrée dans [10] :

Proposition 2.4. — *Si $a \in S^m_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$, alors $a(t,x,D)$ est continu de $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-m}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout réel s.*

Enfin, nous rappelons l'inégalité de Gårding précisée suivante obtenue dans [14] :

Lemme 2.5. — *Soit $a \in S^{2m+1}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ tel que* Re $a \geqslant 0$, *alors :*

$$\operatorname{Re}\,(a(t,x,D)u,u) \geqslant -C\|u\|^2_{H^m_{Sch}}, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}). \tag{2.3}$$

3. Les opérateurs de S-paramultiplication.

Dans cette section, nous définissons un opérateur de paramultiplication adapté à l'opérateur de Schrödinger puis nous étudions certaines de ses propriétés en adaptant à notre cadre les preuves de [4]. Enfin, nous obtenons l'équivalent du théorème de paralinéarisation de J. M. Bony [2] en s'inspirant de [12].

Le lemme suivant sera utile dans tout ce qui suit :

Lemme 3.1. — *Soit d' et d'' deux entiers, et $d = d' + d''$. Soit deux réels r_1 et r_2 tels que $0 < r_1 < r_2$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe C_k tel que pour tous $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$, $1 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant +\infty$, $\lambda > 0$, et $u \in L^{a_1}(\mathbb{R}^{d''}, L^a(\mathbb{R}^{d'+1}))$ on a :*

$$\begin{aligned}
&\text{supp } \widehat{u} \subset \{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac14} \leqslant r_1\lambda\}\\
&\Rightarrow \sup_{2l+|\alpha|=k} \|\partial_t^l\partial_{x'}^\alpha u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^b_{t,x'})} \leqslant C_k\lambda^{k+(d'+2)(\frac1a-\frac1b)}\|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})}\\
&\text{supp } \widehat{u} \subset \{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14} \leqslant r_1\lambda\}\\
&\Rightarrow \sup_{2l+|\alpha|=k} \|\partial_t^l\partial_{x}^\alpha u\|_{L^{b_1}_{x''}(L^a_{t,x'})} \leqslant C_k\lambda^{k+d''(\frac1{a_1}-\frac1{b_1})}\|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})}\\
&\text{supp } \widehat{u} \subset \{(\tau,\xi)\,/\,r_1\lambda \leqslant (\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac14} \leqslant r_2\lambda\}\\
&\Rightarrow C_k^{-1}\lambda^{2k}\|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})} \leqslant \sup_{2l+|\alpha|=2k} \|\partial_t^l\partial_{x'}^\alpha u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})} \leqslant C_k\lambda^{2k}\|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})}\\
&\text{supp } \widehat{u} \subset \{(\tau,\xi)\,/\,r_1\lambda \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14} \leqslant r_2\lambda\}\\
&\Rightarrow C_k^{-1}\lambda^{2k}\|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})} \leqslant \sup_{2l+|\alpha|=2k} \|\partial_t^l\partial_{x}^\alpha u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})} \leqslant C_k\lambda^{2k}\|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})},
\end{aligned}$$

où $x = (x', x'')$ avec $x' \in \mathbb{R}^{d'}$ et $x'' \in \mathbb{R}^{d''}$ et $\xi = (\xi', \xi'')$ avec $\xi' \in \mathbb{R}^{d'}$ et $\xi'' \in \mathbb{R}^{d''}$.

Preuve. — Nous commençons par la première implication. Soit ϕ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^{d'}_{\xi'})$ valant 1 près de $\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{1/4} \leqslant r_1\}$ et g sa transformée de Fourier inverse. $\widehat{u}(\tau,\xi) = \phi(\lambda^{-2}\tau, \lambda^{-1}\xi')\widehat{u}(\tau,\xi)$, donc :

$$u(t,x) = \lambda^{d'+2}\iint g(\lambda^2 s, \lambda y')u(t-s, x'-y', x'')dsdy'.$$

Après dérivation, nous avons pour tout l et α :

$$\partial_t^l\partial_{x'}^\alpha u(t,x) = \lambda^{d'+2+2l+|\alpha|}\iint (\partial_t^l\partial_{x'}^\alpha g)(\lambda^2 s, \lambda y')u(t-s, x'-y', x'')dsdy'.$$

Soit $1/c = 1 + 1/b - 1/a$, l'inégalité de Young appliquée en (t, x') donne :

$$\|\partial_t^l\partial_{x'}^\alpha u(.,x'')\|_{L^b_{t,x'}} \leqslant \lambda^{2l+|\alpha|+(d'+2)(1-\frac1c)}\|\partial_t^l\partial_{x'}^\alpha g\|_{L^c}\|u(.,x'')\|_{L^a_{t,x'}},$$

et en intégrant par rapport à x'' :

$$\|\partial_t^l \partial_{x'}^\alpha u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^b_{t,x'})} \leqslant \lambda^{2l+|\alpha|+(d'+2)(1-\frac{1}{c})} \|\partial_t^l \partial_{x'}^\alpha g\|_{L^c} \|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})}.$$

Or :

$$\begin{aligned}\|\partial_t^l \partial_{x'}^\alpha g\|_{L^c} &\leqslant \|\partial_t^l \partial_{x'}^\alpha g\|_{L^1} + \|\partial_t^l \partial_{x'}^\alpha g\|_{L^\infty} \leqslant C\|(1+|.|^2)^{d'+1} \partial_t^l \partial_{x'}^\alpha g\|_{L^\infty} \\ &\leqslant C \sup_{2l+|\alpha|=k} \|(1-\Delta_{t,x'})^{d'+1}(\tau^l {\xi'}^\alpha \phi)\|_{L^1} = C_k,\end{aligned}$$

ce qui donne le premier point du lemme. La deuxième implication se démontre de manière analogue. Nous démontrons la troisième implication. Soit $(\theta_i)_{0\leqslant i\leqslant d'}$ une suite de fonctions C^∞ sur $|\xi'|_4^4 + \tau^2 = 1$ telle que supp $\theta_0 \subset \{\tau \neq 0\}$, supp $\theta_i \subset \{\xi_i \neq 0\}$ pour $1 \leqslant i \leqslant d'$ et $\sum_{i=0}^{d'} \theta_i = 1$. Nous appelons encore θ_i la fonction S-homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^{1+d'}$ qui coïncide avec θ_i sur $|\xi'|_4^4 + \tau^2 = 1$. Soit ϕ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{1+d'} \setminus \{0\})$ valant 1 près de $\{(\tau,\xi') \,/\, r_1 \leqslant (\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{1/4} \leqslant r_2\}$. $\widehat{u}(\tau,\xi) = \phi(\lambda^{-2}\tau, \lambda^{-1}\xi')\widehat{u}(\tau,\xi)$, donc par définition de $(\theta_i)_{0\leqslant i\leqslant d'}$:

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\tau,\xi) = \theta_0(\tau,\xi') &\frac{\phi(\lambda^{-2}\tau,\lambda^{-1}\xi')}{\tau^k} \widehat{D_t^k u}(\tau,\xi) \\ &+ \sum_{i=1}^{d} \theta_i(\tau,\xi') \frac{\phi(\lambda^{-2}\tau,\lambda^{-1}\xi')}{\xi_i^{2k}} \widehat{D_{x_i}^{2k} u}(\tau,\xi).\end{aligned}$$

Soit $\phi_{0,k}(\tau,\xi) = \theta_0(\tau,\xi')\phi(\tau,\xi')/\tau^k$ et $\phi_{i,k}(\tau,\xi') = \theta_i(\tau,\xi')\phi(\tau,\xi')/\xi_i^{2k}$ pour $1 \leqslant i \leqslant d'$. Comme $\phi_{i,k}$ est dans C_0^∞, sa transformée de Fourier inverse $g_{i,k}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d'+1})$ et :

$$\begin{aligned}\lambda^{2k} u(t,x) = \lambda^{d'+2} &\int\int g_{0,k}(\lambda^2 s, \lambda y') D_t^k u(t-s, x'-y', x'') ds dy' \\ &+ \sum_{i=1}^{d'} \lambda^{d'+2} \int\int g_{i,k}(\lambda^2 s, \lambda y') D_{x_i}^{2k} u(t-s, x'-y', x'') ds dy',\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\lambda^{2k}\|u(.,x'')\|_{L^a_{t,x'}} \leqslant \|g_{0,k}\|_{L^1}\|D_t^k u(.,x'')\|_{L^a_{t,x'}} + \sum_{i=1}^{d} \|g_{i,k}\|_{L^1}\|D_{\xi_i}^{2k} u(.,x'')\|_{L^a_{t,x'}},$$

puis par intégration en x'',

$$\lambda^{2k}\|u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})}\leqslant \|g_{0,k}\|_{L^1}\|D_t^k u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})}+\sum_{i=1}^{d}\|g_{i,k}\|_{L^1}\|D_{\xi_i}^{2k}u\|_{L^{a_1}_{x''}(L^a_{t,x'})}.$$

On majore alors $\|g_{i,k}\|_{L^1}$ par C_k pour $0\leqslant i\leqslant d'$ comme précédemment. Enfin, la dernière implication se démontre de manière analogue. □

Suivant Y. Meyer [12], nous introduisons une fonction positive φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ valant 1 pour $(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\leqslant 1/2$ et 0 pour $(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\geqslant 1$. Pour tout entier p, nous définissons $S_p^{Sch}\ :\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})\to\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ par $\widehat{S_p^{Sch}u}(\tau,\xi)=\varphi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)$. Nous définissons également Δ_p^{Sch} par $\Delta_p^{Sch}=S_{p+1}^{Sch}-S_p^{Sch}$, c'est-à-dire par $\widehat{\Delta_p^{Sch}u}(\tau,\xi)=\psi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)$ où $\psi(\tau,\xi)=\varphi(\tau/4,\xi/2)-\varphi(\tau,\xi)$. Alors, la décomposition de Littlewood-Paley de $u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ est :

$$u=\sum_{p\geqslant -1}\Delta_p^{Sch}(u),$$

où la somme converge pour la topologie de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ et où nous avons noté $\Delta_{-1}^{Sch}=S_0^{Sch}$.

La proposition suivante fournit une norme équivalente sur H^s_{Sch} grâce à la décomposition de Littlewood-Paley.

Proposition 3.2. — *Soit $s\in\mathbb{R}$, alors :*

$$H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})=\left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})\,/\,\sum_{p\geqslant -1}4^{ps}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^2}^2<+\infty\right\}.$$

De plus, il existe une constante C_s telle que :

$$C_s^{-1}\|u\|^2_{H^s_{Sch}}\leqslant\sum_{p\geqslant -1}4^{ps}\|\Delta_p^{Sch}u\|^2_{L^2}\leqslant C_s\|u\|^2_{H^s_{Sch}}.\tag{3.1}$$

Preuve. — Le support de $\psi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi)$ est dans $\{(\tau,\xi)\,/\,2^{p-1}\leqslant(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\leqslant 2^{p+1}\}$, donc il existe une constante C_s telle que :

$$C_s^{-1}4^{ps}\|\Delta_p^{Sch}u\|^2_{L^2}\leqslant\|\Delta_p^{Sch}u\|^2_{H^s_{Sch}}\leqslant C_s4^{ps}\|\Delta_p^{Sch}u\|^2_{L^2},\tag{3.2}$$

pour $p \geqslant 0$ et nous avons la même inégalité pour $p = -1$ car $1 \leqslant (1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2$ sur le support de φ. De plus,

$$\frac{1}{2} \leqslant \varphi^2(\tau,\xi) + \sum_{p\geqslant 0} \psi^2(2^{-2p}\tau, 2^{-p}\xi) \leqslant 1,$$

car au plus deux termes sont non nuls dans la somme, φ et ψ sont positives et $\varphi(\tau,\xi) + \sum_{p\geqslant 0} \psi(2^{-2p}\tau, 2^{-p}\xi) = 1$. Nous en déduisons :

$$\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^s_{Sch}} \leqslant \sum_{p\geqslant -1} \|\Delta_p^{Sch} u\|^2_{H^s_{Sch}} \leqslant \|u\|^2_{H^s_{Sch}},$$

ce qui implique le résultat grâce à (3.2). □

Nous utiliserons souvent le lemme suivant.

Lemme 3.3. — *Soit $0 < r_1 < r_2$, n un entier et s un réel. Il existe une constante C_s indépendante de n telle que si $(u_q)_{q\geqslant 0}$ est une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ avec supp $\widehat{u}_q \subset \{(\tau,\xi)\,/\,2^{n+q}r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^{n+q}r_2\}$ et $(2^{qs}\|u_q\|_{L^2})_{q\geqslant 0}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$, alors :*

$$u = \sum_{q\geqslant 0} u_q \in H^s_{Sch} \text{ et } \|u\|^2_{H^s_{Sch}} \leqslant C_s 4^{ns} \sum_{q\geqslant 0} 4^{qs}\|u_q\|^2_{L^2}.$$

Si $s > 0$ et si $(u_q)_{q\geqslant 0}$ est une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ telle que supp $\widehat{u}_q$ est inclus dans $\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^{n+q}r_1\}$ et $(2^{qs}\|u_q\|_{L^2})_{q\geqslant 0}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$, alors :

$$u = \sum_{q\geqslant 0} u_q \in H^s_{Sch} \text{ et } \|u\|^2_{H^s_{Sch}} \leqslant C_s 4^{ns} \sum_{q\geqslant 0} 4^{qs}\|u_q\|^2_{L^2}.$$

Preuve. — Il existe N tel que $|p-q| > N$ implique

$$\{(\tau,\xi)\,/\,2^q r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14} \leqslant 2^q r_2\} \cap \{(\tau,\xi)\,/\,2^p r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14} \leqslant 2^p r_2\} = \varnothing.$$

Donc $\Delta_p^{Sch}(u) = \sum_{|q+n-p|\leqslant N} \Delta_p^{Sch}(u_q)$, ce qui implique :

$$\sum_{p\geqslant -1} 4^{ps}\|\Delta_p^{Sch}(u)\|^2_{L^2} \leqslant 4^{ns}\left(\sum_{|r|\leqslant N} 2^{rs}\right)^2 \sum_{q\geqslant 0} 4^{qs}\|u_q\|^2_{L^2},$$

ce qui conclut le premier point grâce à la proposition 3.2.

Dans le second cas, il existe un entier N tel que $\Delta_p^{Sch}(u) = \sum_{q\geqslant p-N-n} \Delta_p^{Sch}(u_q)$:

$$\begin{aligned}\sum_{p\geqslant -1} 4^{ps}\|\Delta_p^{Sch}(u)\|_{L^2}^2 &\leqslant \sum_{p\geqslant -1} 4^{ps}\left(\sum_{q\geqslant p-N-n}\|\Delta_p^{Sch}(u_q)\|_{L^2}\right)^2\\ &\leqslant \sum_{p\geqslant -1}\left(\sum_{q\geqslant p-N-n} 2^{(p-q)s/2}2^{(p+q)s/2}\|u_q\|_{L^2}\right)^2\\ &\leqslant \frac{2^{(N+n)s}}{1-2^{-s}}\sum_{p\geqslant -1}\sum_{q\geqslant p-N-n} 2^{(p-q)s}4^{qs}\|u_q\|_{L^2}^2\\ &\leqslant 4^{ns}\frac{4^{Ns}}{(1-2^{-s})^2}\sum_{q\geqslant 0} 4^{qs}\|u_q\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

□

Nous introduisons des espaces de Hölder adaptés à notre cadre.

Définition 3.4. — *Soit $s\in\mathbb{R}$, l'espace C^s_{Sch} est défini par :*

$$C^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1}) = \left\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}) \,/\, \sup_{p\geqslant -1} 2^{ps}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty} < +\infty\right\}.$$

Remarque. — Soit g la transformée de Fourier inverse de ψ.

$$\Delta_p^{Sch}u(t,x) = 2^{p(d+2)}\int g(2^{2p}s, 2^p y)u(t-s, x-y)dsdy,$$

donc :

$$\|\Delta_p^{Sch}(u)\|_{L^\infty} \leqslant 2^{p(d+2)}\|g(2^{2p}.,2^p.)\|_{L^1}\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|g\|_{L^1}\|u\|_{L^\infty},$$

ce qui entraîne que $L^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ est inclus dans $C^0_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Le lemme 3.1 avec $d' = d$ et $d'' = 0$ implique le corollaire suivant :

Corollaire 3.5. — *Pour tout réel s, l'opérateur $\partial_t^l\partial_x^\alpha$ envoie C^s_{Sch} dans $C^{s-2l-|\alpha|}_{Sch}$.*

Le lemme suivant est l'analogue du lemme 3.6 pour C^s_{Sch}.

LEMME 3.6. — *Soit $0 < r_1 < r_2$, n un entier et s un réel. Il existe une constante C_s indépendante de n telle que si $(u_q)_{q\geqslant 0}$ est une série convergeant vers u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ avec supp $\widehat{u}_q \subset \{(\tau,\xi)\,/\,2^{n+q}r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^{n+q}r_2\}$ et $\sup_{q\geqslant -1} 2^{qs}\|u_q\|_{L^\infty} < +\infty$, alors :*

$$u \in C^s_{Sch} \text{ et } \|u\|_{C^s_{Sch}} \leqslant 2^{ns} C_s \sup_{q\geqslant 0} 2^{qs}\|u_q\|_{L^\infty}.$$

Si $s > 0$ et si $(u_q)_{q\geqslant 0}$ est une série convergeant vers u dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ telle que on ait supp $\widehat{u}_q \subset \{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^{n+q}r_1\}$ et $\sup_{q\geqslant -1} 2^{qs}\|u_q\|_{L^\infty} < +\infty$, alors :

$$u \in C^s_{Sch} \text{ et } \|u\|_{C^s_{Sch}} \leqslant 2^{ns} C_s \sup_{q\geqslant 0} 2^{qs}\|u_q\|_{L^\infty}.$$

Preuve. — Dans le premier cas, il existe N tel que $|p-q| > N$ implique

$$\{(\tau,\xi)\,/\,2^q r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^q r_2\} \cap \{(\tau,\xi)\,/\,2^p r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^p r_2\} = \varnothing.$$

Donc $\Delta_p^{Sch}(u) = \sum_{|q+n-p|\leqslant N} \Delta_p^{Sch}(u_q)$, ce qui implique :

$$\begin{aligned} 2^{ps}\|\Delta_p^{Sch}(u)\|_{L^\infty} &\leqslant \sum_{|q+n-p|\leqslant N} 2^{ps}\|u_q\|_{L^\infty} \\ &\leqslant 2^{ns}(2N+1)2^{Ns} \sup_{q\geqslant -1} 2^{qs}\|u_q\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

ce qui démontre le premier point.

Dans le deuxième cas, il existe N tel que $\Delta_p^{Sch}(u) = \sum_{q\geqslant p-N-n} \Delta_p^{Sch}(u_q)$, ce qui implique :

$$2^{ps}\|\Delta_p^{Sch}(u)\|_{L^\infty} \leqslant \sum_{q\geqslant p-N-n} 2^{ps}\|u_q\|_{L^\infty} \leqslant 2^{ns}\frac{2^{Ns}}{1-2^{-s}} \sup_{q\geqslant -1} 2^{qs}\|u_q\|_{L^\infty}. \qquad \square$$

La proposition suivante étend les injections de Sobolev classiques à notre cadre.

Proposition 3.7. — *Pour tout réel s, $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ s'injecte continûment dans l'espace $C^{s-\frac{d}{2}-1}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.*

Preuve. — D'après le lemme 3.1 avec $d' = d$ et $d'' = 0$, nous avons l'inégalité $\|\Delta_p^{Sch}(u)\|_{L^\infty} \leqslant C2^{p(\frac{d}{2}+1)}\|\Delta_p^{Sch}(u)\|_{L^2}$, et nous concluons en remarquant que $l^2(\mathbb{N})$ s'injecte continuement dans $l^\infty(\mathbb{N})$. □

Le produit de u et v, lorsque il existe, s'écrit de manière formelle :

$$uv = \sum_{p,q\geqslant -1} \Delta_p^{Sch}(u)\Delta_q^{Sch}(v).$$

Comme J. M. Bony, nous allons décomposer cette somme en trois parties correspondant aux termes où les fréquences de u sont respectivement petites, grandes ou comparables à celles de v.

Définition 3.8. — *Nous appelons S-paraproduit de v par u et nous notons $T_u^{Sch}v$ l'opérateur bilinéaire suivant :*

$$T_u^{Sch}v = \sum_{q\geqslant 2} S_{q-2}^{Sch}(u)\Delta_q^{Sch}(v).$$

Nous notons $R^{Sch}(u,v)$ l'opérateur bilinéaire suivant :

$$R^{Sch}(u,v) = \sum_{|p-q|\leqslant 2} \Delta_p^{Sch}(u)\Delta_q^{Sch}(v).$$

Nous avons immédiatement $uv = T_u^{Sch}v + T_v^{Sch}u + R^{Sch}(u,v)$.

La proposition suivante étudie l'action de T^{Sch} et R^{Sch} sur les espaces H^s_{Sch} et C^s_{Sch}.

Proposition 3.9. —

$$\begin{array}{ll}
\forall s, & \|T^{Sch}\|_{\mathcal{L}(L^\infty\times H^s_{Sch},H^s_{Sch})} < +\infty,\\
\forall s, \forall t<0 & \|T^{Sch}\|_{\mathcal{L}(C^t_{Sch}\times H^s_{Sch},H^{s+t}_{Sch})} < +\infty,\\
\forall s, & \|T^{Sch}\|_{\mathcal{L}(L^\infty\times C^s_{Sch},C^s_{Sch})} < +\infty,\\
\forall s>0, & \|R^{Sch}\|_{\mathcal{L}(C^0_{Sch}\times H^s_{Sch},H^s_{Sch})} < +\infty,\\
\forall s>0, & \|R^{Sch}\|_{\mathcal{L}(C^0_{Sch}\times C^s_{Sch},C^s_{Sch})} < +\infty.
\end{array}$$

Preuve. — Nous avons :

$$\|S_{p-2}^{Sch}u\Delta_p^{Sch}v\|_{L^2} \leqslant \|S_{p-2}^{Sch}u\|_{L^\infty}\|\Delta_p^{Sch}v\|_{L^2} \leqslant 2^{-ps}\varepsilon_p\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s_{Sch}},$$

avec (ε_p) dans $l^2(\mathbb{N})$. Comme le spectre de $S_{q-2}^{Sch}(u)\Delta_q^{Sch}(v)$ est inclus dans l'ensemble $\{(\tau,\xi)\,/\,2^{q-2} \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 9\times 2^{q-2}\}$, on a

$$\|T^{Sch}\|_{\mathcal{L}(L^\infty\times H^s_{Sch},H^s_{Sch})} < +\infty$$

grâce au lemme 3.3. De même, pour $t<0$:

$$\|S_{p-2}^{Sch}u\Delta_p^{Sch}v\|_{L^2} \leqslant \|S_{p-2}^{Sch}u\|_{L^\infty}\|\Delta_p^{Sch}v\|_{L^2} \leqslant 2^{-p(t+s)}\varepsilon_p\|u\|_{C^t_{Sch}}\|v\|_{H^s_{Sch}},$$

avec (ε_p) dans $l^2(\mathbb{N})$, et nous concluons $\|T^{Sch}\|_{\mathcal{L}(C^t_{Sch}\times H^s_{Sch},H^{s+t}_{Sch})} < +\infty$ grâce au lemme 3.3.

$$\|S_{p-2}^{Sch}u\Delta_p^{Sch}v\|_{L^\infty} \leqslant \|S_{p-2}^{Sch}u\|_{L^\infty}\|\Delta_p^{Sch}v\|_{L^\infty} \leqslant 2^{-ps}\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{C^s_{Sch}},$$

et nous concluons $\|T^{Sch}\|_{\mathcal{L}(L^\infty\times C^s_{Sch},C^s_{Sch})} < +\infty$ grâce au lemme 3.6.

Le raisonnement est le même pour R^{Sch}, en utilisant $\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{C^0_{Sch}}$, $s>0$ et le fait que le spectre de $\Delta_p^{Sch}(u)\Delta_q^{Sch}(v)$ pour $|p-q|\leqslant 2$ est inclus dans $\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 10\times 2^q\}$. □

Remarque. — Nous pouvons montrer d'autres propriétés pour T^{Sch} et R^{Sch} (voir [4] dans le cas homogène), mais nous n'en avons pas besoin pour la suite.

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.10. — *Pour tout $s>0$, il existe C_s telle que :*

$$\begin{aligned} \|uv\|_{H^s_{Sch}} &\leqslant C_s(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s_{Sch}} + \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s_{Sch}}),\\ \|uv\|_{C^s_{Sch}} &\leqslant C_s(\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{C^s_{Sch}} + \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{C^s_{Sch}}), \end{aligned} \tag{3.3}$$

et pour $s>d/2+1$:

$$\|uv\|_{H^{d/2+1}_{Sch}} \leqslant C_s\|u\|_{H^{d/2+1}_{Sch}}\|v\|_{H^s_{Sch}}. \tag{3.4}$$

En vue de démontrer l'équivalent du théorème de paralinéarisation de J. M. Bony, nous démontrons le lemme suivant inspiré de [12] :

Lemme 3.11. — *Soit $C_{\alpha,l}$, $(\alpha,l)\in\mathbb{N}^d\times\mathbb{N}$ une suite de constantes, et $(l_p)_{p\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ telles que $\|\partial_t^l\partial_x^\alpha l_p\|_{L^\infty}\leqslant C_{\alpha,l}2^{p(m+|\alpha|+2l)}$ pour tout $p\geqslant 0$ et tout (α,l) où $m\in\mathbb{R}$. Alors l'opérateur $L\ :\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})\to\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ défini par $L(g)(t,x)=\sum_{p\geqslant 0}l_p(t,x)\Delta_p^{Sch}g(t,x)$ se prolonge en un opérateur borné de H^s_{Sch} dans H^{s-m}_{Sch} et de C^s_{Sch} dans C^{s-m}_{Sch} pour tout $s-m>0$, et sa norme ne dépend que de s, m et des $C_{\alpha,l}$.*

Preuve. — Nous fixons $\delta>4$. Nous avons :

$$1=\varphi(\delta^{-2}2^{-2p}\tau,\delta^{-1}2^{-p}\xi)+\sum_{q=0}^{\infty}\psi(\delta^{-2}2^{-2(p+q)}\tau,\delta^{-1}2^{-(p+q)}\xi),$$

ce qui donne, en posant $\widehat{l_{p,-1}}(\tau,\xi)=\widehat{l_p}(\tau,\xi)\varphi(\delta^{-2}2^{-2p}\tau,\delta^{-1}2^{-p}\xi)$ et $\widehat{l_{p,q}}(\tau,\xi)=\widehat{l_p}(\tau,\xi)\psi(\delta^{-2}2^{-2(p+q)}\tau,\delta^{-1}2^{-(p+q)}\xi)$ pour $q\geqslant 0$:

$$l_p(t,x)=\sum_{q\geqslant -1}l_{p,q}(t,x),$$

et l'hypothèse sur l_p et le lemme 3.1 avec $d'=d$ et $d''=0$ impliquent $\|l_{p,q}\|_{L^\infty}\leqslant C2^{pm-qN}$ pour tout entier pair N et $q\geqslant 0$.

Nous posons alors $L_q(u)(t,x)=\sum_{p\geqslant -1}l_{p,q}(t,x)\Delta_p^{Sch}u(t,x)$. Nous supposons pour commencer que $u\in H^s_{Sch}$. Le spectre de $l_{p,-1}\Delta_p^{Sch}u$ (i.e. le support de sa transformée de Fourier) est inclus dans $\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\leqslant(\delta+2)2^p\}$, donc d'après le lemme 3.3 :

$$\|L_{-1}(u)\|^2_{H^{s-m}_{Sch}}\leqslant C\sum_{p\geqslant -1}4^{p(s-m)}\|l_{p,-1}\Delta_p^{Sch}u\|^2_{L^2},$$

car $s-m>0$. Comme :

$$\|l_{p,-1}\Delta_p^{Sch}u\|_{L^2}\leqslant\|l_{p,-1}\|_{L^\infty}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^2}\leqslant C2^{pm}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^2},\tag{3.5}$$

nous en déduisons que $\|L_{-1}(u)\|^2_{H^{s-m}_{Sch}}\leqslant C\|u\|^2_{H^s_{Sch}}$ grâce à (3.1).

Le spectre de $l_{p,q}\Delta_p^{Sch}u$ est inclus dans

$$\{(\tau,\xi)\,/\,(\delta/2-2)2^{p+q}\leqslant(\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14}\leqslant(2\delta+2)2^{p+q}\}$$

pour $q\geqslant 0$ et $\delta/2-2>0$, donc d'après le lemme 3.3 :

$$\|L_q(u)\|^2_{H^{s-m}_{Sch}}\leqslant C4^{q(s-m)}\sum_{p\geqslant -1}4^{p(s-m)}\|l_{p,q}\Delta_p^{Sch}u\|^2_{L^2},$$

et comme :

$$\|l_{p,q}\Delta_p^{Sch}u\|_{L^2} \leqslant \|l_{p,q}\|_{L^\infty}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^2} \leqslant 2^{pm-qN}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^2}, \tag{3.6}$$

nous en déduisons que $\|L_q(u)\|^2_{H^{s-m}_{Sch}} \leqslant C4^{q(s-m-N)}\|u\|^2_{H^s_{Sch}}$ pour tout N grâce à (3.1).

Finalement, nous choisissons $N > s-m$:

$$\|L(u)\|_{H^{s-m}_{Sch}} \leqslant \sum_{q\geqslant -1}\|L_q(u)\|_{H^{s-m}_{Sch}} \leqslant C\|u\|_{H^s_{Sch}}.$$

Quand $u \in C^s_{Sch}$, nous utilisons le lemme 3.6, et nous remplaçons (3.1) par :

$$\sup_{p\geqslant 0} 2^{ps}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty} \leqslant C\|u\|_{C^s_{Sch}},$$

(3.5) par :

$$\|l_{p,-1}\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty} \leqslant \|l_{p,-1}\|_{L^\infty}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty} \leqslant 2^{pm}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty},$$

et (3.6) par :

$$\|l_{p,q}\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty} \leqslant \|l_{p,q}\|_{L^\infty}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty} \leqslant 2^{pm-qN}\|\Delta_p^{Sch}u\|_{L^\infty}.$$

□

Le théorème suivant est l'adaptation à notre cadre du théorème de paralinéarisation de J. M. Bony.

Théorème 3.12. — *Soit $s > d/2+1$. Alors, pour tout $u \in H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et toute fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $F(0) = 0$, nous avons :*

$$F(u) = T^{Sch}_{F'(u)}u + r,$$

où $r \in H^{2s-d/2-1}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Preuve. — Nous commençons par montrer que $F'(u)$ est dans $C^{s-d/2-1}_{Sch}$. Nous avons :

$$F'(u) = F'(S_0^{Sch}(u)) + \sum_{p\geqslant 0} F'(S_{p+1}^{Sch}(u)) - F'(S_p^{Sch}(u)).$$

Comme $S_0^{Sch}(u) \in C_b^\infty$ et $F' \in C^\infty(\mathbb{R})$, $F'(S_0^{Sch}(u))$ est dans C_b^∞ donc dans $C_{Sch}^{s-d/2-1}$. Nous avons :

$$\begin{aligned} F'(S_{p+1}^{Sch}(u)) - F'(S_p^{Sch}(u)) &= F'(S_p^{Sch}(u) + \Delta_p^{Sch}(u)) - F'(S_p^{Sch}(u)) \\ &= \Delta_p^{Sch}(u) \int_0^1 F''(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))dt \\ &= m_p \Delta_p^{Sch}(u), \end{aligned}$$

où nous avons posé $m_p = \int_0^1 F''(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))dt$. Nous avons l'inégalité $\|S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)\|_{L^\infty} \leqslant C$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, car $u \in C_{Sch}^{s-d/2-1}$ par la proposition 3.7 et car $s - d/2 - 1 > 0$. Le lemme 3.1 avec $d' = d$ et $d'' = 0$ implique :

$$\|\partial_t^l \partial_x^\alpha (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(2l+|\alpha|)} \ \forall \alpha, \forall l,$$

et comme :

$$\begin{aligned} &\partial_t^l \partial_x^\alpha F''(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)) = \\ &\qquad \sum_{\alpha_1+..+\alpha_q=\alpha} \ \sum_{l_1+..+l_q=l} F^{(q+2)}(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)) \\ &\qquad \partial_t^{l_1}\partial_x^{\alpha_1}(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)) \ldots \partial_t^{l_q}\partial_x^{\alpha_q}(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)), \end{aligned}$$

nous en déduisons :

$$\|\partial_t^l \partial_x^\alpha m_p\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(2l+|\alpha|)} \ \forall \alpha, \forall l.$$

D'après le lemme 3.11, nous avons donc $F'(u) \in C_{Sch}^{s-d/2-1}$. Nous avons :

$$F(u) = F(S_2^{Sch}(u)) + \sum_{p \geqslant 2} m_p^1 \Delta_p^{Sch}(u),$$

où nous avons posé $m_p^1 = \int_0^1 F'(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))dt$. Comme $S_2^{Sch}(u) \in H_{Sch}^{+\infty}$, $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $F(0) = 0$, nous avons $F(S_2^{Sch}(u)) \in H_{Sch}^{+\infty}$. Par conséquent, pour prouver le théorème, il suffit de montrer que :

$$\sum_{p \geqslant 2} l_p(t,x) \Delta_p^{Sch}(u)(t,x) \in H_{Sch}^{2s-\frac{d}{2}-1},$$

où nous avons posé $l_p = m_p^1 - S_{p-2}^{Sch} F'(u)$. D'après le lemme 3.11, il suffit de montrer que :

$$\|\partial_t^l \partial_x^\alpha l_p\|_{L^\infty} \leqslant C_{l,\alpha} 2^{p(2l+|\alpha|+\frac{d}{2}+1-s)}, \ \forall (l,\alpha) \in \mathbb{N}^{d+1}. \tag{3.7}$$

Nous allons montrer (3.7) pour $(l,\alpha) = 0$ et $2l + |\alpha| > s - d/2 - 1$: les autres cas en découlent alors par interpolation. Comme $u \in C_{Sch}^{s-d/2-1}$, nous avons $\|u - (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(d/2+1-s)}$, ce qui implique $\|F'(u) - m_p^1\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(d/2+1-s)}$. De plus, nous avons montré que $F'(u)$ appartient à $C_{Sch}^{s-d/2-1}$, donc $\|F'(u) - S_{p-2}^{Sch} F'(u)\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(d/2+1-s)}$. Nous en déduisons (3.7) pour $(l,\alpha) = 0$.

Soit maintenant $|\alpha| + 2l > s - d/2 - 1$. Alors :

$$\begin{aligned}\|\partial_t^l \partial_x^\alpha S_{p-2}^{Sch} F'(u)\|_{L^\infty} &\leqslant \|F'(u)\|_{C_{Sch}^{s-\frac{d}{2}-1}} \sum_{q \leqslant p-3} 2^{q(2l+|\alpha|+\frac{d}{2}+1-s)} \\ &\leqslant C 2^{p(2l+|\alpha|+\frac{d}{2}+1-s)},\end{aligned}$$

car $F'(u) \in C_{Sch}^{s-d/2-1}$. Il suffit donc de démontrer :

$$\|\partial_t^l \partial_x^\alpha m_p^1\|_{L^\infty} \leqslant C_{l,\alpha} 2^{p(2l+|\alpha|+\frac{d}{2}+1-s)}. \tag{3.8}$$

Pour $2l_1 + |\alpha_1| < s - d/2 - 1$, $\|\partial_t^{l_1} \partial_x^{\alpha_1} (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))\|_{L^\infty} \leqslant C$. Pour $|\alpha_1| + 2l_1 = s - d/2 - 1$, $\|\partial_t^{l_1} \partial_x^{\alpha_1} (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))\|_{L^\infty} \leqslant Cp$. Enfin, pour $|\alpha_1| + 2l_1 > s - d/2 - 1$, $\|\partial_t^{l_1} \partial_x^{\alpha_1} (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(2l_1+|\alpha_1|+d/2+1-s)}$. Nous avons donc :

$$\|\partial_t^{l_1} \partial_x^{\alpha_1} (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u))\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p(2l_1+|\alpha_1|)(1-(s-\frac{d}{2}-1)/(|\alpha|+2l))},$$

pour $|\alpha_1| + 2l_1 \leqslant |\alpha| + 2l$, et comme :

$$\begin{aligned}&\partial_t^l \partial_x^\alpha F'(S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)) = \\ &\qquad \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_q=\alpha} \ \sum_{l_1+\ldots+l_q=l} F^{(q+1)}(S_p^{Sch}(u) \\ &\qquad + t\Delta_p^{Sch}(u)) \partial_t^{l_1} \partial_x^{\alpha_1} (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)) \partial_t^{l_q} \partial_x^{\alpha_q} (S_p^{Sch}(u) + t\Delta_p^{Sch}(u)),\end{aligned}$$

nous en déduisons (3.8). □

Remarque. — Le théorème 3.12 se généralise au cas de N fonctions u_j dans $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et d'une fonction F de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $F(0)=0$. Alors nous avons :

$$F(u_1,..,u_N)=\sum_{j=1}^{N} T^{Sch}_{\frac{\partial F}{\partial u_j}(u_1,..,u_N)}u_j+r,$$

où $r\in H^{2s-d/2-1}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.

4. Les opérateurs S-paradifférentiels.

Nous définissons l'algèbre des opérateurs S-paradifférentiels, puis nous montrons certaines de leurs propriétés d'action sur les espaces H^s_{Sch} et de calcul symbolique. Pour cela, nous adaptons les preuves de [6] à notre cadre, car elles sont plus directes que les preuves originales de [2].

Nous commençons par définir la classe de symboles $\Sigma^{Sch,m}_{\rho}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Définition 4.1. — *Pour $m\in\mathbb{R}$ et $\rho\geqslant 0$, nous définissons $\Sigma^{Sch,m}_{\rho}(\mathbb{R}^{d+1})$ comme l'ensemble des fonctions $a(t,x,\tau,\xi)$ C^{ρ}_{Sch} en (t,x) et C^∞ en (τ,ξ) telles que :*

$$\|\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi a(.,.,\tau,\xi)\|_{C^{\rho}_{Sch}}\leqslant C_{l,\beta}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}}.$$

Nous définissons des opérateurs paradifférentiels à partir des symboles de la classe $\Sigma^{Sch,m}_{\rho}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Définition 4.2. — *Soit $m\in\mathbb{R}$, $\rho\geqslant 0$ et $a\in\Sigma^{Sch,m}_{\rho}(\mathbb{R}^{d+1})$. Nous notons $Op^{\mathcal{S}}(a)$ l'opérateur sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ défini par la formule :*

$$Op^{\mathcal{S}}(a)u=\sum_{p\geqslant 2} S^{Sch}_{p-2}a(t,x,D)\Delta^{Sch}_p u,$$

où $S^{Sch}_p a(t,x,\tau,\xi)$ est le symbole obtenu en faisant agir le multiplicateur de Fourier S^{Sch}_p sur a relativement aux variables (t,x).

Si $a\in C^{\rho}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})\subset\Sigma^{Sch,0}_{\rho}(\mathbb{R}^{d+1})$, alors $Op^{\mathcal{S}}(a)=T^{Sch}_a$. Le lemme suivant donne un autre exemple d'opérateur S-paradifférentiel :

Lemme 4.3. — *Soit m un réel et a dans S^m_{Sch}, alors $a(t,x,D) = Op^{\mathcal{S}}(a) + R(t,x,D)$, où R est continu de H^s_{Sch} dans $H^{s'}_{Sch}$ pour tous réels s et s'.*

Preuve. — Nous avons l'égalité :

$$\begin{aligned} a(t,x,D) - Op^{\mathcal{S}}(a) &= \sum_{p\geqslant 2} (a(t,x,D) - S^{Sch}_{p-2} a(t,x,D))\Delta^{Sch}_p + a(t,x,D) S^{Sch}_2, \\ &= \sum_{p\geqslant 0} \Delta^{Sch}_p a(t,x,D) S^{Sch}_{p+3} + a(t,x,D) S^{Sch}_2, \end{aligned}$$

et comme S^{Sch}_2 est continu de H^s_{Sch} dans $H^{s'}_{Sch}$ pour tous réels s et s', il suffit de montrer la même chose pour $\sum_{p\geqslant 0} \Delta^{Sch}_p a(t,x,D) S^{Sch}_{p+3}$. Soit N tel que $N+m \geqslant 0$ et $N+m+1$ est un entier pair et soit (j,α) et (k,β) dans $\mathbb{N}^{d+1}$. Alors le lemme 3.1 avec $d'=d$ et $d''=0$ implique :

$$\begin{aligned} |\partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_\tau^k \partial_\xi^\beta \Delta^{Sch}_p a(t,x,\tau,\xi)| &\leqslant C 2^{-p(N+m+1)} \\ &\qquad \sup_{2l+|\gamma|=N+m+1} |\partial_t^{j+l} \partial_x^{\alpha+\gamma} \partial_\tau^k \partial_\xi^\beta a(t,x,\tau,\xi)| \\ &\leqslant C 2^{-p(N+m+1)} (1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2k-|\beta|}{4}}, \end{aligned}$$

ce qui joint au fait que $(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^{p+3}$ sur le support de $\varphi(2^{-2(p+3)}\tau, 2^{-(p+3)}\xi)$ implique :

$$\begin{aligned} |\partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_\tau^k \partial_\xi^\beta \Delta^{Sch}_p a(t,x,\tau,\xi) \varphi(2^{-2(p+3)}\tau, 2^{-(p+3)}\xi)| \\ \leqslant 2^{-p} (1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{-N-2k-|\beta|}{4}}. \end{aligned}$$

Donc $2^p \Delta^{Sch}_p a(t,x,\tau,\xi)\varphi(2^{-2(p+3)}\tau, 2^{-(p+3)}\xi)$ est dans S^{-N}_{Sch} avec des semi-normes bornées indépendamment de p, ce qui implique que $\sum_{p\geqslant 0} \Delta^{Sch}_p a(t,x,D) S^{Sch}_{p+3}$ est continu de H^s_{Sch} dans H^{s+N}_{Sch} pour tout réel s et pour tout N tel que $N+m \geqslant 0$ et $N+m+1$ est un entier pair. $\square$

Le lemme suivant est utile pour la suite :

Lemme 4.4. — *Soit* $(M_q(t,x,\tau,\xi))_{q\in\mathbb{N}}$ *une famille de fonctions* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{2(d+1)}$ *telles qu'il existe trois réels* C_1, C_2, C_3, *avec* $0 < C_1 < C_2 < C_3$ *et*

$$\begin{aligned} &Supp(\mathcal{F}_{t,x}M_0(\sigma,\eta,\tau,\xi)) \\ &\subset \{(\sigma,\eta,\tau,\xi)\,/\,(\sigma^2+|\eta|_4^4)^{\frac14} < C_1, (\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14} < C_3\}, \\ &Supp(\mathcal{F}_{t,x}M_q(\sigma,\eta,\tau,\xi)) \\ &\subset \{(\sigma,\eta,\tau,\xi)\,/\,(\sigma^2+|\eta|_4^4)^{\frac14} < C_1 2^q, C_2 2^q < (\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14} < C_3 2^q\}, \\ &\qquad \forall q\in\mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Supposons de plus que, pour tout (l,β) *dans* $\mathbb{N}^{d+1}$, *il existe un réel* $C_{l,\beta}$ *avec*

$$|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta M_q(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C_{l,\beta}2^{q(m-2l-|\beta|)}. \tag{4.2}$$

Alors pour tout s, $\sum_q M_q(t,x,D)$ *est continu de* $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ *dans* H^{s-m}_{Sch} $(\mathbb{R}^{d+1})$. *De plus, sa norme s'estime à partir de* C_1, C_2, C_3 *et* $C_{l,\beta}$.

Preuve. — Soit $\widetilde{\psi}$ une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}\setminus\{0\})$ égale à 1 dans un voisinage de $\{(\tau,\xi)\,/\,C_2 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant C_3\}$ et $\widetilde{\varphi}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ égale à 1 dans un voisinage de $\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant C_3\}$. Alors, pour $q\geqslant 0$:

$$M_q(t,x,D)u = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\int e^{i(t\tau+<x,\xi>)}M_q(t,x,\tau,\xi)\widehat{u}_q(\tau,\xi)d\tau d\xi,$$

où $\widehat{u}_q = \widetilde{\psi}(2^{-2q}\tau, 2^{-q}\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)$ pour $q\geqslant 1$, et $\widehat{u}_0 = \widetilde{\varphi}(\tau,\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)$. Posons $m_q(t,x,\tau,\xi) = M_q(t,x,2^{2q}\tau,2^q\xi)$. (4.1) et (4.2) impliquent que :

$$|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta m_q(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C_{l,\beta}2^{qm},$$

et que m_q est à support compact dans $\{(\tau,\xi)\,/\,C_2 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant C_3\}$ si $q\geqslant 1$, et $\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant C_3\}$ si $q=0$.

Soit $k_q(t,x,s,y) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\int e^{i(s\tau+<y,\xi>)}m_q(t,x,\tau,\xi)d\tau d\xi$, alors :

$$|k_q(t,x,s,y)| \leqslant C2^{mq}(1+|s|+|y|)^{-d-2}, \tag{4.3}$$

et comme $m_q(t,x,\tau,\xi) = \int\int \mathrm{e}^{-i(s\tau+<y,\xi>)} k_q(t,x,s,y)dsdy$, alors :

$$\begin{aligned} &M_q(t,x,D)u \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \iiiint \mathrm{e}^{i(t\tau+<x,\xi>)} \phi_q(s,y,\tau,\xi) \\ &\qquad\qquad k_q(t,x,s,y)\widehat{u}_q(\tau,\xi)dsdyd\tau d\xi, \\ &= \int\int k_q(t,x,s,y)\phi_q(s,y,D_{t,x})u_q(t,x)dsdy, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $\phi_q(s,y,\tau,\xi) = \exp(-i2^{-2q}s\tau - i2^{-q} < y,\xi >)$. Comme :

$$\|\phi_q(s,y,D_{t,x})u_q(.,.)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \leqslant \|u_q\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})},$$

(4.3) et (4.4) impliquent :

$$\|M_q(t,x,D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \leqslant C2^{mq}\|u_q\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}. \tag{4.5}$$

Comme dans la proposition 3.2, nous pouvons montrer :

$$\sum_{q\geqslant 0} 4^{qs}\|u_q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \leqslant C\|u\|^2_{H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})}, \tag{4.6}$$

ce qui avec (4.1), (4.5) et le lemme 3.3 donne le résultat. □

Le lemme 4.4 implique le lemme suivant.

Lemme 4.5. — *Soit $m \in \mathbb{R}$, $\rho \geqslant 0$ et $a \in \Sigma^{Sch,m}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$. Pour tout $p_0 \geqslant 3$, l'opérateur sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ défini par la formule :*

$$\sum_{p\geqslant p_0} S^{Sch}_{p-p_0} a(t,x,D)\Delta^{Sch}_p u, \tag{4.7}$$

diffère de $Op^{\mathcal{S}}(a)$ par un opérateur continu de $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s+\rho-m}_{Sch}$ $(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout réel s.

Preuve. — La différence entre les deux opérateurs s'écrit :

$$\sum_{2\leqslant p\leqslant p_0-1} S^{Sch}_{p-2} a(t,x,D)\Delta^{Sch}_p + \sum_{p\geqslant p_0}\sum_{q=p-p_0}^{p-3} \Delta^{Sch}_q a(t,x,D)\Delta^{Sch}_p, \tag{4.8}$$

et comme $\sum_{2\leqslant p\leqslant p_0-1} S_{p-2}^{Sch}a(t,x,D)\Delta_p^{Sch}$ est continu de $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tous réels s et s', il suffit d'étudier le second terme de (4.8). Nous posons $M_p(t,x,\tau,\xi) = \sum_{q=p-p_0}^{p-3} \Delta_q^{Sch} a(t,x,\tau,\xi)\psi(2^{-2p}\tau, 2^{-p}\xi)$ pour $p \geqslant p_0$, et $M_p(t,x,\tau,\xi) = 0$ sinon. $\mathcal{F}_{t,x}M_p(\sigma,\eta,\tau,\xi) = \sum_{q=p-p_0}^{p-3} \mathcal{F}_{t,x}a(\sigma,\eta,\tau,\xi)\psi(2^{-2q}\sigma, 2^{-q}\eta)\psi(2^{-2p}\tau, 2^{-p}\xi)$, donc M_p vérifie (4.1) avec $C_1 = 1/4$, $C_2 = 1/2$ et $C_3 = 2$. Sur le support de $\psi(2^{-2p}\tau, 2^{-p}\xi)$, comme $p - p_0 \leqslant q \leqslant p-3$, la définition 3.4 et la définition 4.1 impliquent :

$$\begin{aligned} |\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta \Delta_q^{Sch} a(t,x,\tau,\xi)| &\leqslant 2^{-q\rho}\|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta a(.,.,\tau,\xi)\|_{C^\rho_{Sch}} \\ &\leqslant 2^{-q\rho} C_{l,\beta}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}} \\ &\leqslant 2^{p(-\rho+m-2l-|\beta|)}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

ce qui implique (4.2) grâce à la formule de Leibnitz. Le lemme 4.4 permet alors de conclure. □

Nous montrons certaines propriétés d'action sur les espaces H^s_{Sch} et de calcul symbolique satisfaites par les opérateurs S-paradifférentiels.

Théorème 4.6. —

(i) *Soit a dans $\Sigma_\rho^{Sch,m}(\mathbb{R}^{d+1})$. Si $\rho > 0$, l'opérateur $Op^{\mathcal{S}}(a)$ est borné de $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-m}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout réel s. Si $\rho = 0$, l'opérateur $Op^{\mathcal{S}}(a)$ est borné de $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-m-\varepsilon}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout réel s et tout $\varepsilon > 0$.*

(ii) *Soit $\rho \geqslant 0$, et soit $\bar\rho$ tel que $\bar\rho = \rho$ si $\rho > 0$ et $\bar\rho > 0$ si $\rho = 0$. Soit a dans $\Sigma_{\bar\rho}^{Sch,m}(\mathbb{R}^{d+1})$ et soit b dans $\Sigma_\rho^{Sch,m'}(\mathbb{R}^{d+1})$. La différence*

$$Op^{\mathcal{S}}(a)\circ Op^{\mathcal{S}}(b) - \sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} Op^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a \partial_t^l \partial_x^\beta b),$$

est un opérateur borné de $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-m-m'+\rho}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout réel s.

(iii) *Soit $\rho \geqslant 0$ tel que $\rho \neq 1$, et soit a dans $\Sigma_\rho^{Sch,m}(\mathbb{R}^{d+1})$. L'opérateur $Op^{\mathcal{S}}(a)^* - Op^{\mathcal{S}}(\bar a)$, est un opérateur borné de $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s-m+1-(1-\rho)^+}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout réel s, où $(1-\rho)^+ = \max(1-\rho, 0)$.*

Remarque. — Dans la suite, nous utiliserons souvent l'analogue du point (ii) pour la composition de n opérateurs, $n \geqslant 3$, qui est une conséquence directe de (ii). Par exemple, pour $Op^{\mathcal{S}}(a_1)\circ Op^{\mathcal{S}}(a_2)\circ Op^{\mathcal{S}}(a_3)$, où a_j est dans $\Sigma_\rho^{Sch,m_j}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour $j=1,2,3$ avec $\rho>0$, on applique d'abord (ii) à $Op^{\mathcal{S}}(a_2)\circ Op^{\mathcal{S}}(a_3)$, puis à chacun des $Op^{\mathcal{S}}(a_1)\circ Op^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a_2\partial_t^l\partial_x^\beta a_3)$.

Preuve du théorème 4.6. — (i) Nous posons $M_p(t,x,\tau,\xi)=S_{p-2}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\psi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi)$ pour $p\geqslant 2$, et $M_p(t,x,\tau,\xi)=0$ sinon.

$$\mathcal{F}_{t,x}M_p(\sigma,\eta,\tau,\xi)=\mathcal{F}_{t,x}a(\sigma,\eta,\tau,\xi)\varphi(2^{-2(p-2)}\sigma,2^{-(p-2)}\eta)\psi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi),$$

donc M_p vérifie (4.1) avec $C_1=1/4$, $C_2=1/2$ et $C_3=2$. Si $\rho>0$, sur le support de $\psi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi)$, la définition 3.4 et la définition 4.1 impliquent :

$$\begin{aligned}|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-2}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)| &\leqslant C\|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a(.,.,\tau,\xi)\|_{C^\rho_{Sch}}\\ &\leqslant C_{l,\beta}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}}\\ &\leqslant C2^{p(m-2l-|\beta|)},\end{aligned}\tag{4.10}$$

ce qui implique (4.2) grâce à la formule de Leibnitz. Le lemme 4.4 permet alors de conclure. Dans le cas $\rho=0$, nous remplaçons (4.10) par :

$$\begin{aligned}|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-2}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)| &\leqslant p\|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a(.,.,\tau,\xi)\|_{C^0_{Sch}}\\ &\leqslant pC_{l,\beta}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}}\\ &\leqslant Cp2^{p(m-2l-|\beta|)}\leqslant C_\varepsilon 2^{p(m+\varepsilon-2l-|\beta|)},\end{aligned}\tag{4.11}$$

pour tout $\varepsilon>0$.

(ii) $Op^{\mathcal{S}}(a)\circ Op^{\mathcal{S}}(b)u=\sum_{p\geqslant2,q\geqslant2}S_{p-2}^{Sch}a(t,x,D)\Delta_p^{Sch}(S_{q-2}^{Sch}b(t,x,D)\Delta_q^{Sch}u)$ et :

(4.12)
$$\begin{aligned}&\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}Op^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)u\\ &=\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}\Big(Op^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)S_2^{Sch}u+\sum_{q\geqslant2}Op^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)\Delta_q^{Sch}u\Big)\\ &=\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}Op^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)S_2^{Sch}u\\ &+\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}\sum_{p,q\geqslant2}S_{p-2}^{Sch}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)\Delta_p^{Sch}\Delta_q^{Sch}u.\end{aligned}$$

L'opérateur $\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}Op^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)S_2^{Sch}$ est continu de H^s_{Sch} $(\mathbb{R}^{d+1})$ dans $H^{s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tous réel s et s' car c'est le cas pour S_2^{Sch} et grâce à (i). Il suffit donc de regarder :

$$\begin{aligned}(4.13)\qquad &\sum_{p\geqslant 2,q\geqslant 2}S_{p-2}^{Sch}a(t,x,D)\Delta_p^{Sch}(S_{q-2}^{Sch}b(t,x,D)\Delta_q^{Sch}u)\\ &\quad-\sum_{p\geqslant 2,q\geqslant 2}\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}S_{p-2}^{Sch}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)\Delta_p^{Sch}\Delta_q^{Sch}u.\end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.5 et au point (i), nous pouvons utiliser (4.7) avec $p_0=5$. Nous nous intéressons donc à :

$$\begin{aligned}(4.14)\qquad &\sum_{p\geqslant 5,q\geqslant 5}S_{p-5}^{Sch}a(t,x,D)\Delta_p^{Sch}(S_{q-5}^{Sch}b(t,x,D)\Delta_q^{Sch}u)\\ &\quad-\sum_{p\geqslant 5,q\geqslant 5}\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}S_{p-5}^{Sch}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)\Delta_p^{Sch}\Delta_q^{Sch}u.\end{aligned}$$

Nous remarquons que $|q-p|\leqslant 2$ sur le support de la somme. Le terme général de (4.14) s'écrit :

$$\begin{aligned}(4.15)\qquad &\frac{1}{(2\pi)^{2(d+1)}}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{i(t-s)\gamma+i<x-y,\theta>+is\tau+i<y,\xi>}\\ &\Bigg(S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\gamma,\theta)S_{q-5}^{Sch}b(s,y,\tau,\xi)\\ &\quad-\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}S_{p-5}^{Sch}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi)\Bigg)\\ &\psi(2^{-2p}\gamma,2^{-p}\theta)\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi dsdyd\gamma d\theta\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\!\!\int e^{it\tau+i<x,\xi>}M_{pq}(t,x,\tau,\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi,\end{aligned}$$

avec :

$$M_{pq}(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\int\int\int \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma - i<x-y,\theta>}$$

$$\Big(S^{Sch}_{p-5}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)S^{Sch}_{q-5}b(s,y,\tau,\xi)$$

$$- \sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} S^{Sch}_{p-5}(\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi a\partial^l_t\partial^\beta_x b)(t,x,\tau,\xi)\Big) \tag{4.16}$$

$$\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)dsdyd\gamma d\theta.$$

Lemme 4.7. — *Pour tout (k,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$:*

$$|\partial^k_\tau\partial^\alpha_\xi M_{pq}(t,x,\tau,\xi)| \leqslant 2^{q(m+m'-\rho-2k-|\alpha|)}. \tag{4.17}$$

Preuve. — Soit :

$$L = (1+2^{4q}(s-t)^2+2^{4q}|x-y|^4)^{-1}(1-2^{4q}(t-s)D_\gamma+2^{4q}|x-y|^2D^2_\theta),$$

ce qui entraîne $L(\mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>}) \equiv \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>}$. Nous décomposons l'expression suivante en trois termes :

(4.18)

$$\begin{aligned}
&S^{Sch}_{p-5}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)S^{Sch}_{q-5}b(s,y,\tau,\xi)\\
&\quad - \sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} S^{Sch}_{p-5}(\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi a\partial^l_t\partial^\beta_x b)(t,x,\tau,\xi)\\
&= S^{Sch}_{p-5}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)\Big(S^{Sch}_{q-5}b(s,y,\tau,\xi)\\
&\quad - \sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{(s-t)^l(y-x)^\beta}{l!\beta!}\partial^l_t\partial^\beta_x S^{Sch}_{q-5}b(t,x,\tau,\xi)\Big)\\
&\quad + S^{Sch}_{p-5}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{(s-t)^l(y-x)^\beta}{l!\beta!}\partial^l_t\partial^\beta_x S^{Sch}_{q-5}b(t,x,\tau,\xi)\\
&\quad - \sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}\partial^l_t\partial^\beta_x S^{Sch}_{q-5}b(t,x,\tau,\xi)\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi S^{Sch}_{p-5}a(t,x,\tau,\xi)\\
&\quad + \sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}\Big(\partial^l_t\partial^\beta_x S^{Sch}_{q-5}b(t,x,\tau,\xi)\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi S^{Sch}_{p-5}a(t,x,\tau,\xi)\\
&\quad - S^{Sch}_{p-5}(\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi a\partial^l_t\partial^\beta_x b)(t,x,\tau,\xi)\Big).
\end{aligned}$$

Comme $(s-t)^l(y-x)^\beta \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>} = i^{-l-|\beta|}\partial_\gamma^l\partial_\theta^\beta(\mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>})$, la contribution à (4.16) du deuxième terme de (4.18) devient après intégration par parties :

(4.19)
$$\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\int\int\int \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>}\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)$$
$$\left(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)-\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\right)$$
$$\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)dsdyd\gamma d\theta,$$

et pour tout (l,β) :

$$\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\left(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)-\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\right)$$
$$\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi),$$

est nul en $(\gamma,\theta)=0$ et indépendant de (s,y), donc la contribution du deuxième terme à l'intégrale (4.16) est nulle. Nous décomposons

$$M_{pq}(t,x,\tau,\xi)=M'_{pq}(t,x,\tau,\xi)+M''_{pq}(t,x,\tau,\xi),$$

où $M'_{pq}(t,x,\tau,\xi)$ (resp. $M''_{pq}(t,x,\tau,\xi)$) est la contribution à (4.16) du premier (resp. du troisième) terme de (4.18). Sur le support de $\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&|\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)|\\
&\leqslant\left(\sum_{r\leqslant p-6}2^{-r\bar\rho}\right)\|\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)\|_{C^{\bar\rho}_{Sch}}\\
&\leqslant C(1+(\tau-\gamma)^2+|\xi-\theta|_4^4)^{\frac{m-2k-|\alpha|}{4}}\\
&\leqslant C2^{p(m-2k-|\alpha|)}.
\end{aligned}\tag{4.20}$$

Sur le support de $\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)$, nous avons pour $2l+|\beta|>\rho$:

(4.21)
$$\begin{aligned}
|\partial_t^l\partial_x^\beta\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)|&\leqslant\left(\sum_{r\leqslant q-6}2^{r(2l+|\beta|-\rho)}\right)\|\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha b(.,.,\tau,\xi)\|_{C^\rho_{Sch}}\\
&\leqslant C2^{q(2l+|\beta|-\rho)}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m'-2k-|\alpha|}{4}}\\
&\leqslant C2^{q(2l+|\beta|-\rho+m'-2k-|\alpha|)}.
\end{aligned}$$

La formule de Taylor implique l'égalité :

(4.22)
$$S_{q-5}^{Sch}b(s,y,\tau,\xi) - \sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{(s-t)^l(y-x)^\beta}{l!\beta!}\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)$$
$$= \sum_{l+|\beta|\leqslant[\rho]+1\leqslant 2l+|\beta|} \frac{(s-t)^l(y-x)^\beta}{l!\beta!}B_{l,\beta,q}(t,x,\tau,\xi),$$

où (4.21) implique que sur le support de $\psi(2^{-2q}\tau, 2^{-q}\xi)$:

$$|\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha B_{l,\beta,q}(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C2^{q(2l+|\beta|-\rho+m'-2k-|\alpha|)}. \tag{4.23}$$

(4.24)
$$M'_{pq}(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\int\int\int \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>}$$
$$\sum_{l+|\beta|\leqslant[\rho]+1\leqslant 2l+|\beta|} \frac{(s-t)^l(y-x)^\beta}{l!\beta!}B_{l,\beta,q}(t,x,\tau,\xi)S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)$$
$$\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)dsdyd\gamma d\theta$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\int\int\int \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>}$$
$$\sum_{l+|\beta|\leqslant[\rho]+1\leqslant 2l+|\beta|} \partial_\gamma^l\partial_\theta^\beta(B_{l,\beta,q}(t,x,\tau,\xi)S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)$$
$$\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi))dsdyd\gamma d\theta$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\int\int\int \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>}$$
$$\sum_{l+|\beta|\leqslant[\rho]+1\leqslant 2l+|\beta|} ({}^tL)^{[d/2]+2}\partial_\gamma^l\partial_\theta^\beta(B_{l,\beta,q}(t,x,\tau,\xi)S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)$$
$$\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi))dsdyd\gamma d\theta,$$

ce qui implique en utilisant (4.20), (4.23) et $|p-q|\leqslant 2$:

(4.25)
$$|\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha M'_{pq}(t,x,\tau,\xi)| \leqslant 2^{q(m+m'-\rho-2k-|\alpha|)}$$
$$\int\int\int\int(1+2^{2q}|t-s|+2^{2q}|x-y|^2)^{-[d/2]-2}\mathbf{1}_{\{(\gamma^2+|\theta|_4^4)^{1/4}\leqslant C2^q\}}dsdyd\gamma d\theta,$$

d'où la majoration par le second membre de (4.17). Pour étudier $M''_{pq}(t,x,\tau,\xi)$, écrivons :

$$
\begin{aligned}
&M''_{pq}(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\int\int\int \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma - i<x-y,\theta>}({}^tL)^{[d/2]+2}\\
&\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}(\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\\
&- S_{p-5}^{Sch}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi))\\
&\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)dsdyd\gamma d\theta,
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

Pour obtenir l'analogue de (4.25), il suffit de montrer que sur le support de $\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)$:

$$
\begin{aligned}
&|\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha(\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\\
&\quad - S_{p-5}^{Sch}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi))|\\
&\quad\leqslant 2^{(m+m'-\rho-2k-|\alpha|)q},
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

pour tout (k,α,l,β) tels que $2l+|\beta|\leqslant\rho$. Or :

(4.28)
$$
\begin{aligned}
&\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi) - S_{p-5}^{Sch}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi)\\
&= (I-S_{p-5}^{Sch})\left(\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\right)\\
&+ S_{p-5}^{Sch}\Bigg(\left(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi) - \partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a(t,x,\tau,\xi)\right)\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\\
&+ \partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a(t,x,\tau,\xi)\left(\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi) - \partial_t^l\partial_x^\beta b(t,x,\tau,\xi)\right)\Bigg).
\end{aligned}
$$

Nous commençons par le cas $2l+|\beta|<\rho$. Sur le support de $\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)$:

(4.29)
$$
\begin{aligned}
&\left|(I-S_{p-5}^{Sch})\left(\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\right)\right|\\
&\leqslant 2^{-p(\rho-2l-|\beta|)}\|\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(.,.,\tau,\xi)\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(.,.,\tau,\xi)\|_{C_{Sch}^{\rho-2l-|\beta|}}\\
&\leqslant 2^{-p(\rho-2l-|\beta|)}\|S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)\|_{C_{Sch}^\rho}\|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)\|_{C_{Sch}^\rho}\\
&\leqslant 2^{-p(\rho-2l-|\beta|)}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m'}{4}}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}} \leqslant 2^{q(m+m'-\rho)},
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé le corollaire 3.5, (3.3), la définition 4.1 et $|p-q| \leqslant 2$. Nous obtenons de la même manière et en utilisant la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned}\left|\partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha (I - S_{p-5}^{Sch}) \left(\partial_t^l \partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch} b(t,x,\tau,\xi) \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch} a(t,x,\tau,\xi)\right)\right| \\ \leqslant 2^{q(m+m'-\rho-2k-|\alpha|)}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Pour estimer la contribution des deux autres termes de (4.28), nous raisonnons de la même manière en utilisant les inégalités :

$$\begin{aligned}&\left|\partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha \left(\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch} a(t,x,\tau,\xi) - \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta a(t,x,\tau,\xi)\right)\right| \\ &\leqslant 2^{-p\bar\rho} \|\partial_\tau^{k+l} \partial_\xi^{\alpha+\beta} a(.,.,\tau,\xi)\|_{C_{Sch}^{\bar\rho}}, \\ &\left|\partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha \left(\partial_t^l \partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch} b(t,x,\tau,\xi) - \partial_t^l \partial_x^\beta b(t,x,\tau,\xi)\right)\right| \\ &\leqslant 2^{-q(\rho-2l-|\beta|)} \|\partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha b(.,.,\tau,\xi)\|_{C_{Sch}^{\rho}}.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Nous regardons maintenant le cas $2l + |\beta| = \rho$. En regardant les spectres des différents termes, nous avons :

$$\begin{aligned}&(I - S_{p-5}^{Sch}) \left(\partial_t^l \partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch} b(t,x,\tau,\xi) \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch} a(t,x,\tau,\xi)\right) \\ &= (I - S_{p-5}^{Sch}) \sum_{\substack{j \leqslant q-6,\, n \leqslant p-6, \\ \max(j,n) \geqslant p-8}} \partial_t^l \partial_x^\beta \Delta_j^{Sch} b(t,x,\tau,\xi) \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta \Delta_n^{Sch} a(t,x,\tau,\xi),\end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned}&|\partial_t^l \partial_x^\beta \Delta_j^{Sch} b(t,x,\tau,\xi) \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta \Delta_n^{Sch} a(t,x,\tau,\xi)| \\ &\qquad \leqslant 2^{-n\bar\rho} \|\partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha a(.,.,\tau,\xi)\|_{C_{Sch}^{\bar\rho}} \|b(.,.,\tau,\xi)\|_{C_{Sch}^{\rho}},\end{aligned} \tag{4.32}$$

nous obtenons sur le support de $\psi(2^{-2q}\tau, 2^{-q}\xi)$:

$$\begin{aligned}&\left|(I - S_{p-5}^{Sch}) \left(\partial_t^l \partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch} b(t,x,\tau,\xi) \partial_\tau^l \partial_\xi^\beta S_{p-5}^{Sch} a(t,x,\tau,\xi)\right)\right| \\ &\qquad \leqslant (1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m'}{4}} (1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}} \leqslant 2^{q(m+m'-\rho)},\end{aligned} \tag{4.33}$$

car $\rho = 2l + |\beta|$. Nous obtenons alors (4.30) en utilisant la formule de Leibnitz. La première inégalité de (4.31) est encore valable. Pour estimer le dernier terme de (4.28), nous remarquons en regardant les spectres des différents termes :

(4.34)
$$S_{p-5}^{Sch}\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\left(\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)-\partial_t^l\partial_x^\beta b(t,x,\tau,\xi)\right)$$
$$=S_{p-5}^{Sch}\sum_{\substack{j\geqslant q-5,\\ \max(j,n)\leqslant p-4 ou |j-n|\leqslant 2}}\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta\Delta_n^{Sch}a\partial_t^l\partial_x^\beta\Delta_j^{Sch}b(t,x,\tau,\xi),$$

ce qui joint à (4.32) implique sur le support de $\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)$:

$$\left|S_{p-5}^{Sch}\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\left(\partial_t^l\partial_x^\beta S_{q-5}^{Sch}b(t,x,\tau,\xi)-\partial_t^l\partial_x^\beta b(t,x,\tau,\xi)\right)\right|$$
$$\leqslant(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m'}{4}}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}}\leqslant 2^{q(m+m'-\rho)}, \tag{4.35}$$

et la formule de Leibnitz permet de majorer le dernier terme de (4.28). Ceci achève la preuve du lemme. □

Fin de la preuve du théorème 4.6.

(4.36)
$$\mathcal{F}_{t,x}M_{pq}(\sigma,\eta,\tau,\xi)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\int\widehat{a}(\sigma+\gamma,\eta+\theta,\tau-\gamma,\xi-\theta)$$
$$\varphi(2^{-2(p-5)}(\sigma+\gamma),2^{-(p-5)}(\eta+\theta))\psi(2^{-2p}(\tau-\gamma),2^{-p}(\xi-\theta))$$
$$\widehat{b}(-\gamma,-\theta,\tau,\xi)\varphi(2^{-2(q-5)}(-\gamma),2^{-(q-5)}(-\theta))\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi)d\gamma d\theta$$
$$-\sum_{2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}\mathcal{F}_{t,x}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)(\sigma,\eta,\tau,\xi)\varphi(2^{-2(p-5)}\sigma,2^{-(p-5)}\eta)$$
$$\psi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi)\psi(2^{-2q}\tau,2^{-q}\xi),$$

et nous voyons que $(M_{pq}(t,x,\tau,\xi))_{p,q\geqslant 5,|p-q|\leqslant 2}$ vérifie (4.1) avec $C_1=1/4$, $C_2=1/2$ et $C_3=2$. De plus, (4.2) est satisfait d'après le lemme précédent. L'opérateur (4.14) est donc borné de H_{Sch}^s dans $H_{Sch}^{s+\rho-m-m'}$ ce qui conclut le point (ii).

(iii) Nous avons :

$$Op^{\mathcal{S}}(a)^*u=\sum_{p\geqslant 2}\Delta_p^{Sch}(S_{p-2}^{Sch}a(t,x,D)^*u),$$

et :

$$Op^{\mathcal{S}}(\bar{a})u = \sum_{p\geqslant 2} S_{p-2}^{Sch}\bar{a}(t,x,D)\Delta_p^{Sch}u.$$

Grâce au lemme 4.5 et au point (i), nous pouvons utiliser (4.7) avec $p_0 = 3$. Nous nous intéressons donc à :

$$\sum_{p\geqslant 3} \Delta_p^{Sch}(S_{p-3}^{Sch}a(t,x,D)^* u) - S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(t,x,D)\Delta_p^{Sch}u. \tag{4.37}$$

Le terme général s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\Delta_p^{Sch}(S_{p-3}^{Sch}a(t,x,D)^* u) - S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(t,x,D)\Delta_p^{Sch}u \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{e}^{i(t-s)\gamma+i<x-y,\theta>}\psi(2^{-2p}\gamma,2^{-p}\theta) \\
&\left(S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(s,y,\gamma,\theta) - S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(t,x,\gamma,\theta)\right)u(s,y)dsdyd\gamma d\theta \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\!\!\int \mathrm{e}^{it\tau+i<x,\xi>}M_p(t,x,\tau,\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

où :

(4.39)

$$M_p(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int \mathrm{e}^{i(t-s)(\gamma-\tau)+i<x-y,\theta-\xi>}\psi(2^{-2p}\gamma,2^{-p}\theta)$$
$$\left(S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(s,y,\gamma,\theta) - S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(t,x,\gamma,\theta)\right)dsdyd\gamma d\theta.$$

Comme :

(4.40)

$$\mathcal{F}_{t,x}M_p(\sigma,\eta,\tau,\xi) = \psi(2^{-2p}(\sigma+\tau),2^{-p}(\eta+\xi))\varphi(2^{-2(p-3)}\sigma,2^{-(p-3)}\eta)$$
$$\widehat{\bar{a}}(\sigma,\eta,\sigma+\tau,\eta+\xi) - \psi(2^{-2p}\tau,2^{-p}\xi)\varphi(2^{-2(p-3)}\sigma,2^{-(p-3)}\eta)\widehat{\bar{a}}(\sigma,\eta,\tau,\xi),$$

M_p vérifie (4.1) avec $C_1 = 1/8$, $C_2 = 3/8$ et $C_3 = 17/8$. Comme :

$$|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta\partial_{x_j}S_p^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)| \leqslant \sum_{q\leqslant p-1} 2^{q(1-\rho)}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}},$$

nous avons, compte tenu du fait que $\rho \neq 1$:

$$|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta\partial_{x_j}S_p^{Sch}a(t,x,\tau,\xi)| \leqslant 2^{p(1-\rho)^+}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}},$$

et par le même raisonnement :

$$|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta \partial_t S_p^{Sch} a(t,x,\tau,\xi)| \leqslant 2^{p(2-\rho)^+}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2l-|\beta|}{4}}.$$

Donc :

(4.41)
$$S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(s,y,\gamma,\theta) - S_{p-3}^{Sch}\bar{a}(t,x,\gamma,\theta) = (t-s)A_p^0(t,x,s,y,\gamma,\theta) + \sum_{j=1}^{d}(x_j-y_j)A_p^j(t,x,s,y,\gamma,\theta),$$

où sur le support de $\psi(2^{-2p}\gamma, 2^{-p}\theta)$:

(4.42)
$$\begin{aligned} &|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta A_p^0(t,x,s,y,\gamma,\theta)| \leqslant 2^{p(m-2l-|\beta|+(2-\rho)^+)},\\ &|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta A_p^j(t,x,s,y,\gamma,\theta)| \leqslant 2^{p(m-2l-|\beta|+(1-\rho)^+)},\ 1 \leqslant j \leqslant d. \end{aligned}$$

De même que (4.22), (4.23) et (4.24) impliquent (4.25), (4.41), (4.42) et des intégrations par parties du même type que (4.24) impliquent :

$$|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta M_p(t,x,\tau,\xi)| \leqslant 2^{p(m-2l-|\beta|-1+(1-\rho)^+)},$$

ce qui montre que M_p vérifie (4.2). Le lemme 4.4 implique alors (iii). □

Les deux lemmes suivants seront utiles dans la section 8 :

Lemme 4.8. — *Soit $\rho > 0$, $r_0 > 0$ et $a(r,t,x,\tau,\xi)$ bornée en $r \in [0,r_0]$ à valeurs dans $\Sigma_\rho^{Sch,0}(\mathbb{R}^{d+1})$, telle que $r^N a(r,t,x,\tau,\xi)$ est bornée en $r \in [0,r_0]$ à valeurs dans $\Sigma_\rho^{Sch,-N}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour un $N > 1/2$. Alors, pour tout s, $Op^{\mathcal{S}}(a(r,.))$ applique continûment H^s_{Sch} dans $L^2(0,r_0,H^{s+1/2}_{Sch})$.*

Preuve. — Nous posons $M_p(r,t,x,\tau,\xi) = S_{p-2}^{Sch}a(r,t,x,\tau,\xi)\,\psi(2^{-2p}\tau, 2^{-p}\xi)$ pour $p \geqslant 2$, et $M_p(r,t,x,\tau,\xi) = 0$ sinon. Nous montrons comme dans la démonstration du point (i) du théorème 4.6 que M_p vérifie (4.1) et la forme suivante de (4.2) :

(4.43)
$$\begin{aligned} &\|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta M_q(r,t,x,\tau,\xi)\| \leqslant C_{l,\beta} 2^{q(-2l-|\beta|)},\\ &\|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta M_q(r,t,x,\tau,\xi)\| \leqslant r^{-N} C_{l,\beta} 2^{q(-N-2l-|\beta|)}. \end{aligned}$$

(4.5) et (4.6) impliquent alors pour u dans H^s_{Sch} :

(4.44)
$$\|S^{Sch}_{p-2}a(r,.)\Delta^{Sch}_p u\|_{L^2} \leqslant 2^{-ps}\varepsilon_p \text{ et } \|S^{Sch}_{p-2}a(r,.)\Delta^{Sch}_p u\|_{L^2} \leqslant r^{-N}2^{-pN-ps}\varepsilon_p,$$

où (ε_p) est dans $l^2(\mathbb{N})$. Nous en déduisons :

(4.45)
$$\begin{aligned}\int_0^{r_0} \|S^{Sch}_{p-2}a(r,.)\Delta^{Sch}_p u\|^2_{L^2}dr &\leqslant \int_0^{2^{-p}} 4^{-ps}\varepsilon_p^2 dr + \int_{2^{-p}}^{r_0} r^{-2N}4^{-pN-ps}\varepsilon_p^2 dr\\ &\leqslant 4^{-p(s+1/2)}\varepsilon_p^2,\end{aligned}$$

ce qui joint à (4.1) permet de conclure grâce au lemme 3.3. □

Lemme 4.9. — *Soit $\rho > 0$ et $a(\gamma, r, t, x, \tau, \xi)$ bornée en γ, r dans $0 \leqslant \gamma \leqslant r \leqslant r_0$ à valeurs dans $\Sigma^{Sch,0}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$, telle que $(r-\gamma)^N a(\gamma, r, t, x, \tau, \xi)$ est bornée dans $0 \leqslant \gamma \leqslant r \leqslant s_0$ à valeurs dans $\Sigma^{Sch,-N}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$ pour un $N > 1$. Alors, pour tout s, l'opérateur $u \to \int_0^r Op^S(a(\gamma, r, .))u(\gamma, .)d\gamma$ est borné de $L^2(0, r_0, H^s_{Sch})$ dans $L^2(0, r_0, H^{s+1}_{Sch})$.*

Preuve. — Nous posons $M_p(\gamma, r, t, x, \tau, \xi) = S^{Sch}_{p-2}a(\gamma, r, t, x, \tau, \xi)$ $\psi(2^{-2p}\tau, 2^{-p}\xi)$ pour $p \geqslant 2$, et $M_p(\gamma, r, t, x, \tau, \xi) = 0$ sinon. M_p vérifie (4.1) et la forme suivante de (4.2) :

$$\begin{aligned}&\|\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi M_q(\gamma, r, t, x, \tau, \xi)\| \leqslant C_{l,\beta}2^{q(-2l-|\beta|)},\\ &\|\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi M_q(\gamma, r, t, x, \tau, \xi)\| \leqslant (r-\gamma)^{-N}C_{l,\beta}2^{q(-N-2l-|\beta|)}.\end{aligned} \tag{4.46}$$

(4.5) et (4.6) impliquent alors pour u dans H^s_{Sch} :

$$\begin{aligned}&\|S^{Sch}_{p-2}a(\gamma, r, .)\Delta^{Sch}_p u(\gamma, .)\|_{L^2} \leqslant 2^{-ps}\varepsilon_p(\gamma),\\ &\|S^{Sch}_{p-2}a(\gamma, r, .)\Delta^{Sch}_p u(\gamma, .)\|_{L^2} \leqslant (\gamma - r)^{-N}2^{-pN-ps}\varepsilon_p(\gamma),\end{aligned} \tag{4.47}$$

où $\sum_{p\geqslant 0}\|\varepsilon_p(\gamma)\|^2_{L^2(0,r_0)} < +\infty$. Nous en déduisons :

(4.48)
$$\begin{aligned}\left\|\int_0^r S^{Sch}_{p-2}a(\gamma, r, .)\Delta^{Sch}_p u(\gamma, .)d\gamma\right\|_{L^2} &\leqslant \int_0^{r-2^{-p}} 2^{-ps-pN}(r-\gamma)^{-N}\varepsilon_p(\gamma)d\gamma\\ &\quad + \int_{r-2^{-p}}^r 2^{-ps}\varepsilon_p(\gamma)d\gamma.\end{aligned}$$

De plus :
(4.49)
$$\int_0^{r_0}\left(\int_0^{r-2^{-p}} 2^{-ps-pN}(r-\gamma)^{-N}\varepsilon_p(\gamma)d\gamma\right)^2 dr$$
$$\leqslant 4^{-pN-ps}\int_0^{r_0}\left(\int_0^{r-2^{-p}}(r-\gamma)^{-N}\varepsilon_p^2(\gamma)d\gamma\right)\left(\int_0^{r-2^{-p}}(r-\gamma)^{-N}d\gamma\right)dr$$
$$\leqslant C4^{-p(s+1)}\int_0^{r_0}\varepsilon_p^2(\gamma)d\gamma,$$

et :

$$\int_0^{r_0}\left(\int_{r-2^{-p}}^{r} 2^{-ps}\varepsilon_p(\gamma)d\gamma\right)^2 dr \leqslant C4^{-p(s+1)}\int_0^{r_0}\varepsilon_p^2(\gamma)d\gamma. \tag{4.50}$$

(4.48), (4.49) et (4.50) impliquent :
(4.51)
$$\int_0^{r_0}\left\|\int_0^{r} S_{p-2}^{Sch}a(\gamma,r,.)\Delta_p^{Sch}u(\gamma,.)d\gamma\right\|_{L^2}^2 dr \leqslant C4^{-p(s+1)}\int_0^{r_0}\varepsilon_p^2(\gamma)d\gamma.$$

(4.51) et (4.1) permettent de conclure grâce au lemme 3.3. □

5. Propagation des singularités.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer un théorème de propagation des singularités pour l'équation de Schrödinger non linéaire. Nous adaptons à notre cadre la preuve de [8].

Soit g une métrique C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, f une fonction C^∞ et $u \in H^s_{Sch,loc}(\mathbb{R}^{d+1})$ solution de :

$$(i\partial_t + \Delta_g)u + f(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u}) = 0. \tag{5.1}$$

Remarque. — Dans [5] et [9], les auteurs obtiennent l'existence locale de telles solutions sous certaines hypothèses sur f.

Définition 5.1. — *Un point* $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ *dans* $T^*(\mathbb{R}^{d+1}) \setminus \{0\}$ *est caractéristique (resp. non caractéristique) si* $-\tau_0 + \sigma_2(\Delta_g)(\xi_0) = 0$ *(resp.* $-\tau_0 + \sigma_2(\Delta_g)(\xi_0) \neq 0$*). Soit* $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ *dans* $T^*(\mathbb{R}^{d+1}) \setminus \{0\}$ *caractéristique, alors la bicaractéristique passant par* $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ *est la courbe définie par :*

$$\begin{cases} t = t_0, \\ \tau = \tau_0, \\ x'(s) = \frac{\partial \sigma_2(\Delta_g)}{\partial \xi}(x(s), \xi(s)), x(0) = x_0, \\ \xi'(s) = -\frac{\partial \sigma_2(\Delta_g)}{\partial x}(x(s), \xi(s)), \xi(0) = \xi_0. \end{cases} \tag{5.2}$$

C'est la courbe intégrale de $H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}$ *où :*

$$H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_2(\Delta_g)}{\partial \xi_j} \partial_{x_j} - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \sigma_2(\Delta_g)}{\partial x_j} \partial_{\xi_j}.$$

Si $s > d/2 + 2$, la remarque qui suit la démonstration du théorème 3.12 implique :

$$\begin{aligned} f(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u}) &= T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \bar{u} \\ &+ \sum_{j=1}^{d} T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} \bar{u} + r, \end{aligned} \tag{5.3}$$

où $r \in H^{2s-3-d/2}_{Sch,loc}(\mathbb{R}^{d+1})$. Par conséquent, u est solution de :

$$\begin{aligned} &(i\partial_t + \Delta_g) u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \bar{u} \\ &+ \sum_{j=1}^{d} T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} \bar{u} = r, \end{aligned} \tag{5.4}$$

où $r \in H^{2s-3-d/2}_{Sch,loc}(\mathbb{R}^{d+1})$. Nous posons alors :

$$\begin{aligned} Lu = (i\partial_t + \Delta_g)u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}\bar{u} \\ + \sum_{j=1}^{d} T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}\partial_{x_j}u + T^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}\partial_{x_j}\bar{u}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

et $Lu \in H^{2s-3-d/2}_{Sch,loc}(\mathbb{R}^{d+1})$. De plus, $L = Op^{\mathcal{S}}(l) + Op^{\mathcal{S}}(\tilde{l})J$, où l est dans $\Sigma^{Sch,2}_{s-1-d/2}$, $\tilde{l}$ est dans $\Sigma^{Sch,1}_{s-2-d/2}$, et J est l'application qui à un nombre complexe associe son conjugué. Le symbole principal de L est $\sigma_2(L) = -\tau + \sigma_2(\Delta_g)$.

Dans la suite, nous aurons besoin de faire commuter J avec des opérateurs pseudodifférentiels et paradifférentiels. Si $a(t,x,\tau,\xi)$ est un symbole, un calcul montre que

$$Ja(t,x,D) = a^J(t,x,D)J, \text{ où } a^J(t,x,\tau,\xi) = \bar{a}(t,x,-\tau,-\xi).$$

Comme φ et ψ sont réelles et peuvent être choisies paires en (τ,ξ), J commute avec S^{Sch}_p et Δ^{Sch}_p. Par conséquent, $JOp^{\mathcal{S}}(a) = Op^{\mathcal{S}}(a^J)J$. Pour un ensemble V de $T^*(\mathbb{R}^{d+1})\setminus\{0\}$, nous notons $V^J = \{(t,x,\tau,\xi) \,/\, (t,x,-\tau,-\xi) \in V\}$.

Le théorème suivant décrit le comportement de la solution aux points (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) non caractéristiques, tels que $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$ est également non caractéristique.

Théorème 5.2. — *Soit $s > d/2+2$, et $u \in H^s_{Sch,loc}(\mathbb{R}^{d+1})$ solution de (5.1). Soit un point (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) dans $T^*(\mathbb{R}^{d+1})\setminus\{0\}$ non caractéristique. Si u est microlocalement H^σ_{Sch} en $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$, alors u est microlocalement $H^{\min(\sigma+1,2s-1-d/2)}_{Sch}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0).*

En particulier, si (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) et $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$ sont non caractéristiques, alors u est microlocalement $H^{2s-1-d/2}_{Sch}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) et $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$.

Preuve. — Quitte à multiplier u et L par une fonction dans $C^\infty_0(\mathbb{R}^{d+1})$ égale à 1 au voisinage de (t_0,x_0), nous pouvons supposer que u est dans $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et Lu est dans $H^{2s-3-d/2}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ par le point (ii) du théorème 4.6. Soit χ dans S^0_{Sch} tel que $l(t,x,\tau,\xi) \neq 0$ sur un voisinage S-conique V du support de $\chi(t,x,\tau,\xi)$, $\chi(t,x,\tau,\xi)$ est elliptique en

$(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, et u est microlocalement H^σ_{Sch} dans un voisinage S-conique du support de $\chi^J(t, x, \tau, \xi)$. Soit $q_0 = 1/l$ sur V qu'on étend en une fonction de $\Sigma^{-2}_{s-1-d/2}$. Soit $R = I - Op^{\mathcal{S}}(q_0)Op^{\mathcal{S}}(l)$ et :

$$Q = (1 + R + \ldots + R^{[\rho]})Op^{\mathcal{S}}(q_0),$$

alors $\chi(t, x, D)(QL - I) = -\chi(t, x, D)R^{[\rho]+1} + \chi(t, x, D)QOp^{\mathcal{S}}(\tilde{l})J$. Par le point (i) du théorème 4.6, R est continu de H^t_{Sch} dans H^t_{Sch} pour tout t, et $Op^{\mathcal{S}}(q_0)$ est continu de H^t_{Sch} dans H^{t+2}_{Sch} pour tout t, donc Q est continu de H^t_{Sch} dans H^{t+2}_{Sch} pour tout t. De plus, par le point (ii) du théorème 4.6 et le choix de q_0 et R, $\chi(t, x, D)R^{[\rho]+1}$ est continu de H^t_{Sch} dans $H^{t+s-1-d/2}_{Sch}$ pour tout t. Enfin, comme u est microlocalement H^σ_{Sch} dans un voisinage S-conique du support de χ^J, par le point (ii) du théorème 4.6, $\chi^J(t, x, D)Q^J Op^{\mathcal{S}}(\tilde{l}^J)u$ est dans $H^{\min(\sigma+1, 2s-1-d/2)}_{Sch}$. Comme $\chi(t, x, D)u = \chi(t, x, D)QLu + \chi(t, x, D)R^{[\rho]+1}u - J(\chi^J(t, x, D)Q^J Op^{\mathcal{S}}(\tilde{l}^J)u)$:

$$\begin{aligned}
\|\chi(t, x, D)u\|_{H^{\min(\sigma+1, 2s-1-d/2)}_{Sch}} \leqslant{}& C\|QLu\|_{H^{2s-1-d/2}_{Sch}} \\
&+ \|\chi(t, x, D)R^{[\rho]+1}u\|_{H^{2s-1-d/2}_{Sch}} \\
&+ \|\chi^J(t, x, D)Q^J Op^{\mathcal{S}}(\tilde{l}^J)u\|_{H^{\min(\sigma+1, 2s-1-d/2)}_{Sch}},
\end{aligned}$$

et nous concluons grâce à ce qui précède et au fait que u est dans $H^s_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et Lu dans $H^{2s-3-d/2}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$. □

Le théorème suivant décrit la propagation des singularités pour l'équation de Schrödinger non linéaire.

Théorème 5.3. — *Soit $s > d/2 + 2$, et $u \in H^s_{Sch,loc}(\mathbb{R}^{d+1})$ solution de (5.1). Soit $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ dans $T^*(\mathbb{R}^{d+1}) \setminus \{0\}$ caractéristique. Nous supposons que u est microlocalement H^σ_{Sch} en $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ pour $\sigma \leqslant 2s - 2 - d/2$. Alors u est microlocalement H^σ_{Sch} en tout point de la bicaractéristique issue de $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$, et u est microlocalement $H^{\sigma+1}_{Sch}$ en tout point (t, x, τ, ξ) tel que $(t, x, -\tau, -\xi)$ est sur la bicaractéristique issue de $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$.*

Preuve. — Il suffit de montrer que u est microlocalement H^σ_{Sch} en tout point de Γ et que u est microlocalement $H^{\sigma+1}_{Sch}$ en tout point de Γ^J, où Γ est un arc de la courbe intégrale de $H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}$ allant d'un point $(t_0, x_1, \tau_0, \xi_1)$ à $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ (pour le cas où Γ va de $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$ à $(t_0, x_1, \tau_0, \xi_1)$, il suffit de faire le même raisonnement en remplaçant

$H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}$ par $-H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}$). Soit $\delta=(s-2-d/2)/2$ si $2+d/2<s<d/2+3$, $0<\delta<1/2$ si $s=d/2+3$ et $\delta=1/2$ si $s>d/2+3$. Par un argument de type bootstrap, nous pouvons supposer que u est microlocalement $H^{\sigma-\delta}_{Sch}$ sur un voisinage S-conique W de Γ. Si un point (t,x,τ,ξ) est caractéristique, alors $(t,x,-\tau,-\xi)$ est non caractéristique, donc quitte à diminuer W, nous pouvons supposer que tous les points de W^J sont non caractéristiques, ce qui joint au fait que u est microlocalement $H^{\sigma-\delta}_{Sch}$ sur W implique que u est microlocalement $H^{\sigma-\delta+1}_{Sch}$ sur W^J par le théorème 5.2. Soit χ dans S^0_{Sch} à support dans W tel que $\chi=1$ sur un voisinage S-conique de Γ et $\chi(t,x,D)u$ est dans $H^{\sigma-\delta}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$, alors

$$Op^{\mathcal{S}}(l)(1-\chi(t,x,D))u+Op^{\mathcal{S}}(\tilde{l})(1-\chi(t,x,D))\bar{u}$$

est microlocalement dans $H^{2s-3-d/2}_{Sch}$ dans un voisinage S-conique de Γ par le point (ii) du théorème 4.6. Quitte à remplacer u par $\chi(t,x,D)u$, nous pouvons supposer que u est dans $H^{\sigma-\delta}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et $Op^{\mathcal{S}}(l)u$ est dans $H^{\min(\sigma-\delta,2s-d/2-3)}_{Sch,loc}$. Quitte à multiplier par $(1+D_t^2+|D_x|_4^4)^{-1/4}$ ce qui laisse invariant les bicaractéristiques, nous pouvons supposer que l est dans $\Sigma^{Sch,1}_{s-1-d/2}$, et que $Op^{\mathcal{S}}(l)u\in H^{\sigma}_{Sch,loc}$. Soit V un voisinage S-conique de (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) et $\phi_V\in S^0_{Sch}$ tel que $\phi_V(t,x,D)u$ est dans H^{σ}_{Sch} et $\phi_V(t,x,\tau,\xi)=1$ sur $V\cap\{(\tau,\xi)\,/\,\tau^2+|\xi|_4^4\geqslant 1\}$. Comme $H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}$ et $2\tau\partial_\tau+\sum_{j=1}^d\xi_j\partial_{\xi_j}$ ne sont pas colinéaires, il existe un voisinage S-conique U avec $\Gamma\subset U\subset W$, et des fonctions ϕ et θ dans S^0_{Sch} à support dans U telles que $H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}\theta>0$ sur suppϕ, $\phi\geqslant 0$, $\phi=0$ pour $\tau^2+|\xi|_4^4\leqslant 1/2$, et pour $\tau^2+|\xi|_4^4\geqslant 1$, $\phi>0$ sur Γ et $H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}\phi\geqslant 0$ sur $U\setminus V$.

Remarque. — La construction de θ et ϕ est plus simple que dans [2] car $-\tau+\sigma_2(\Delta_g)$ est C^∞ en (t,x,τ,ξ). Il suffit de construire des fonctions θ et ϕ C^∞ dans un voisinage de Γ et de les étendre en des fonctions S-homogènes de degré 0. De plus, pour avoir $H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}\theta>0$ sur suppϕ et $H^{Sch}_{-\tau+\sigma_2(\Delta_g)}\phi\geqslant 0$ sur $U\setminus V$, il suffit de prendre pour ϕ une fonction de $C_0^\infty(U)$ positive et croissante le long des bicaractéristiques incluses dans $U\setminus V$, puis de prendre pour θ une fonction C^∞ strictement croissante le long des bicaractéritiques incluses dans le support de ϕ.

Pour $\varepsilon>0$ et λ que l'on fixera plus tard, nous posons :

$$c_{\lambda,\varepsilon}(t,x,\tau,\xi)=\phi(t,x,\tau,\xi)\mathrm{e}^{\lambda\theta(t,x,\tau,\xi)}(\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{\sigma}{4}}(1+\varepsilon^4(\tau^2+|\xi|_4^4))^{-1}.$$

Nous posons $C_{\lambda,\varepsilon}=c_{\lambda,\varepsilon}(t,x,D)$. Pour $\varepsilon>0$, $c_{\lambda,\varepsilon}$ est dans $S^{\sigma-4}_{Sch}$, donc $C_{\lambda,\varepsilon}u$ est dans $H^{4-\delta}_{Sch}$. De plus, $c_{\lambda,\varepsilon}$ est borné dans S^{σ}_{Sch} pour λ fixé.

Si nous montrons que $\|C_{\lambda,\varepsilon}u\|_{L^2}$ reste borné quand ε tend vers 0, alors $C_{\lambda,0}u \in L^2$ et u est microlocalement H^{σ}_{Sch} en tout point de Γ. Enfin, u est microlocalement $H^{\sigma+1}_{Sch}$ en tout point de Γ^J par le théorème 5.2, ce qui termine la preuve. Il suffit donc de montrer que pour λ assez grand, ε assez petit, et pour tout v dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, on a

(5.6)
$$\lambda\|C_{\lambda,\varepsilon}v\|^2_{L^2} \leqslant A_\lambda(\|C_{\lambda,\varepsilon}Op^{\mathcal{S}}(l)v\|^2_{L^2} \\ + \|\phi_V(t,x,D)(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_x|_4^4))^{-1}v\|^2_{H^\sigma_{Sch}} + \|v\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}}).$$

En effet, pour des raisons de continuité, l'inégalité est encore vraie pour $v=u$. Comme $Op^{\mathcal{S}}(l)u \in H^\sigma_{Sch,loc}$, $\|C_{\lambda,\varepsilon}Op^{\mathcal{S}}(l)v\|^2_{L^2}$ est borné quand ε tend vers 0. De plus :

$$\|\phi_V(t,x,D)(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_x|_4^4))^{-1}v\|_{H^\sigma_{Sch}} \leqslant \|\phi_V(t,x,D)v\|_{H^\sigma_{Sch}} \\ + \|[\phi_V(t,x,D),(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_x|_4^4))^{-1}]v\|_{H^\sigma_{Sch}},$$

où le second terme est borné quand ε tend vers 0 car le symbole du commutateur est borné dans S^{-1}_{Sch} et $u \in H^{\sigma-\delta}_{Sch}$ avec $\delta \leqslant 1/2$. (5.6) permet donc bien d'obtenir une borne sur $\|C_{\lambda,\varepsilon}v\|^2_{L^2}$.

Il reste à établir (5.6). On part de l'identité :

$$\begin{aligned} &2\mathrm{Im}(C_{\lambda,\varepsilon}Op^{\mathcal{S}}(l)v, C_{\lambda,\varepsilon}v) \\ &\quad= 2\mathrm{Im}(Op^{\mathcal{S}}(l)C_{\lambda,\varepsilon}v, C_{\lambda,\varepsilon}v) + 2\mathrm{Im}([C_{\lambda,\varepsilon}, Op^{\mathcal{S}}(l)]v, C_{\lambda,\varepsilon}v) \\ &\quad= i((Op^{\mathcal{S}}(l)^* - Op^{\mathcal{S}}(l))C_{\lambda,\varepsilon}v, C_{\lambda,\varepsilon}v) \\ &\qquad+ 2\mathrm{Im}([C_{\lambda,\varepsilon}, Op^{\mathcal{S}}(l)]v, C_{\lambda,\varepsilon}v),\ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

l est dans $\Sigma^1_{s-1-d/2}$ avec $s > d/2+2$ et son symbole principal est réel. Par conséquent, $Op^{\mathcal{S}}(l)^* - Op^{\mathcal{S}}(l)$ est borné sur L^2 par le point (iii) du théorème 4.6, ce qui implique :

(5.8)
$$2\mathrm{Im}([C_{\lambda,\varepsilon}, Op^{\mathcal{S}}(l)]v, C_{\lambda,\varepsilon}v) \leqslant 2\mathrm{Im}(C_{\lambda,\varepsilon}Op^{\mathcal{S}}(l)v, C_{\lambda,\varepsilon}v) + M\|C_{\lambda,\varepsilon}v\|^2_{L^2} \\ \leqslant \|C_{\lambda,\varepsilon}Op^{\mathcal{S}}(l)v\|^2_{L^2} + (M+1)\|C_{\lambda,\varepsilon}v\|^2_{L^2}.$$

Le point (ii) du théorème 4.6 implique :

$$i[Op^{\mathcal{S}}(l), C_{\lambda,\varepsilon}] = Op^{\mathcal{S}}(H_l^{Sch}c_{\lambda,\varepsilon}) + R_{\lambda,\varepsilon}(t,x,D),$$

où $R_{\lambda,\varepsilon}$ est borné de H^r_{Sch} dans $H^{r-\sigma+2\delta}_{Sch}$ pour tout réel r. Par conséquent :

$$|(R_{\lambda,\varepsilon}v, C_{\lambda,\varepsilon}v)| \leqslant M(\lambda)\|v\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}}.$$

Pour $(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}$ assez grand, il existe A tel que :

$$\mathrm{Re}\ H_l^{Sch}\phi \geqslant 0 \text{ hors de } V \text{ et } \mathrm{Re}\ H_l^{Sch}\theta \geqslant 2/A \text{ sur supp}\phi.$$

Par conséquent, il existe une constante $M(\lambda)$ telle que pour $(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}$ assez grand Re $T_{\lambda,\varepsilon} \geqslant 0$ où :

$$T_{\lambda,\varepsilon} = H_l^{Sch}c_{\lambda,\varepsilon} - \lambda c_{\lambda,\varepsilon}/A + M(\lambda)\phi_V(t,x,\tau,\xi)(\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{\sigma}{4}}(1+\varepsilon^4(\tau^2+|\xi|_4^4))^{-1}.$$

Le dernier terme fournit l'estimation dans V. (5.8) implique :

(5.9)

$$\begin{aligned}
&2\lambda/A\|C_{\lambda,\varepsilon}v\|^2_{L^2} + 2\mathrm{Re}(Op^{\mathcal{S}}(T_{\lambda,\varepsilon}), C_{\lambda,\varepsilon}v)\\
&\leqslant \|C_{\lambda,\varepsilon}Op^{\mathcal{S}}(l)v\|^2_{L^2} + (2M+1)\|C_{\lambda,\varepsilon}v\|^2_{L^2}\\
&+ 2M(\lambda)(\|\phi_V(t,x,D)(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_x|_4^4))^{-1}v\|_{H^\sigma}\|C_{\lambda,\varepsilon}v\|_{L^2} + \|v\|^2_{H^{\sigma-\delta}}).
\end{aligned}$$

H_l^{Sch} ne fait intervenir que le symbole principal de L qui est dans S^1_{Sch}, donc $T_{\lambda,\varepsilon}$ est dans S^σ_{Sch}. Dans (5.9), nous pouvons donc remplacer $Op^{\mathcal{S}}(T_{\lambda,\varepsilon})$ par $T_{\lambda,\varepsilon}(t,x,D)$ grâce au lemme 4.3. Comme $\delta \leqslant 1/2$, et comme le symbole principal de l'opérateur $C^*_{\lambda,\varepsilon}T_{\lambda,\varepsilon}(t,x,D)$ est dans $S^{2\sigma}_{Sch}$ et vérifie $\mathrm{Re}(c_{\lambda,\varepsilon}T_{\lambda,\varepsilon}) \geqslant 0$, le lemme 2.5 implique :

$$\mathrm{Re}(T_{\lambda,\varepsilon}(t,x,D)v, C_{\lambda,\varepsilon}v) \geqslant -\|v\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}},$$

ce qui joint à (5.9) implique (5.6). □

6. S-paramultiplication tangentielle.

Dans cette section, nous définissons un opérateur de paramultiplication tangentielle adapté à l'opérateur de Schrödinger puis nous étudions certaines de ses propriétés en adaptant à notre cadre les preuves de [13]. Enfin, nous obtenons l'équivalent du théorème de paralinéarisation tangentielle de M. Sablé-Tougeron [13].

Nous commençons par introduire l'équivalent des espaces $H^{s,s'}$ de Hörmander [7].

DÉFINITION 6.1. — *Pour s et s' réels et $d \geqslant 2$, nous définissons l'espace de Sobolev inhomogène :*

(6.1)

$$H^{s,s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1}) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}) \,/\, (1+|\xi|_4^4+\tau^2)^{\frac{s}{4}}(1+|\xi'|_4^4+\tau^2)^{\frac{s'}{4}}\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^{d+1})\right\},$$

où ξ' est la variable duale de x' avec $x=(x',x_d)$ et $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. $H^{s,s'}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ est l'ensemble des u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ tels qu'il existe U dans $H^{s,s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ vérifiant $U=u$ sur $\mathbb{R}^{d+1}_+ = \{(t,x',x_d)/(t,x') \in \mathbb{R}^d,\, x_d>0\}$.

Soit deux entiers p et p', nous définissons $\widetilde{S}^{Sch}_{p'} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ par $\widehat{\widetilde{S}^{Sch}_{p'}u}(\tau,\xi) = \varphi(\frac{\tau}{2^{2p}}, \frac{\xi'}{2^p}, 0)\widehat{u}(\tau,\xi)$ et $S^{Sch}_{pp'} = S^{Sch}_p \circ \widetilde{S}^{Sch}_{p'}$. Nous définissons également $\widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'}$ par $\widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'} = \widetilde{S}^{Sch}_{p'+1} - \widetilde{S}^{Sch}_{p'}$, c'est-à-dire par $\widehat{\widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'}u}(\tau,\xi) = \psi(\frac{\tau}{2^{2p}}, \frac{\xi'}{2^p}, 0)\widehat{u}(\tau,\xi)$, $\widetilde{\Delta}^{Sch}_{-1} = \widetilde{S}^{Sch}_0$ et $\Delta^{Sch}_{pp'} = \Delta^{Sch}_p \circ \widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'}$. Alors, la double décomposition de Littlewood-Paley de $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ est :

$$u = \sum_{p,p' \geqslant -1} \Delta^{Sch}_{pp'}(u),$$

où la somme converge pour la topologie de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ et où les termes d'indice (p,p') tels que $p' > p+1$ sont nuls. La proposition et les 5 lemmes suivants se démontrent comme la proposition 3.2 et le lemme 3.3 :

PROPOSITION 6.2. — *Soit s et s' deux réels, alors :*

$$H^{s,s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1}) = \left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}) \,/ \sum_{p,p' \geqslant -1} 4^{ps+p's'} \|\Delta^{Sch}_{pp'}u\|^2_{L^2} < +\infty\right\}.$$

De plus, il existe une constante C_s telle que :

$$C_s^{-1}\|u\|^2_{H^{s,s'}_{Sch}} \leqslant \sum_{p,p' \geqslant -1} 4^{ps+p's'} \|\Delta^{Sch}_{pp'}u\|^2_{L^2} \leqslant C_s\|u\|^2_{H^{s,s'}_{Sch}}. \tag{6.2}$$

LEMME 6.3. — *Soit $0 < r_1 < r_2$, n et n' deux entiers et s et s' deux réels. Il existe une constante $C_{ss'}$ indépendante de n et n' telle que si $(u_{qq'})$ est une suite de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ avec supp $\widehat{u}_{qq'}$ inclus dans*

$$\{(\tau,\xi)\,/\,2^{n+q}r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac14} \leqslant 2^{n+q}r_2,\ 2^{n'+q'}r_1 \leqslant (\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac14} \leqslant 2^{n'+q'}r_2\}$$

et $(2^{qs+q's'}\|u_{qq'}\|_{L^2})_{q,q'\geqslant 0}$ *dans* $l^2(\mathbb{N}^2)$, *alors :*

$$u=\sum_{q,q'\geqslant 0}u_{qq'}\in H^{s,s'}_{Sch}\text{ et }\|u\|^2_{H^{s,s'}_{Sch}}\leqslant C_{ss'}4^{ns+n's'}\sum_{q,q'\geqslant 0}4^{qs+qs'}\|u_{qq'}\|^2_{L^2}.$$

Lemme 6.4. — *Soit* $0<r_1<r_2$, *et* s *et* s' *deux réels. Il existe une constante* $C_{ss'}$ *telle que si* (u_q) *est une suite de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ *avec supp* $\widehat{u}_q$ *inclus dans*

$$\{(\tau,\xi)\,/\,2^q r_1\leqslant(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\leqslant 2^q r_2,\,(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}\leqslant r_2\}$$

et $(2^{qs}\|u_q\|_{L^2})_{q\geqslant 0}$ *dans* $l^2(\mathbb{N})$, *alors :*

$$u=\sum_{q\geqslant 0}u_q\in H^{s,+\infty}_{Sch}=\bigcap_{s'\in\mathbb{R}}H^{s,s'}_{Sch}\text{ et }\|u\|^2_{H^{s,s'}_{Sch}}\leqslant C_{ss'}\sum_{q\geqslant 0}4^{qs}\|u_q\|^2_{L^2}.$$

De plus, si $s>0$ *nous pouvons remplacer la couronne-boule par une bi-boule de la forme* $\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\leqslant 2^q r_2,\,(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}\leqslant r_2\}$.

Lemme 6.5. — *Soit* $0<r_1<r_2$, n' *un entier et* s *et* s' *deux réels avec* $s>0$. *Il existe une constante* $C_{ss'}$ *indépendante de* n' *telle que si* $(u_{qq'})$ *est une suite de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ *avec supp* $\widehat{u}_{qq'}\subset\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\leqslant 2^q r_2,\,2^{n'+q'}r_1\leqslant(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}\leqslant 2^{n'+q'}r_2\}$ *et* $(2^{qs+q's'}\|u_{qq'}\|_{L^2})_{q,q'\geqslant 0}$ *est dans* $l^2(\mathbb{N}^2)$, *alors :*

$$u=\sum_{q,q'\geqslant 0}u_{qq'}\in H^{s,s'}_{Sch}\text{ et }\|u\|^2_{H^{s,s'}_{Sch}}\leqslant C_{ss'}4^{n's'}\sum_{q,q'\geqslant 0}4^{qs+qs'}\|u_{qq'}\|^2_{L^2}.$$

Lemme 6.6. — *Soit* $0<r_1<r_2$, n *un entier et* s *et* s' *deux réels avec* $s'>0$. *Il existe une constante* $C_{ss'}$ *indépendante de* n *telle que si* $(u_{qq'})$ *est une suite de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ *avec supp* $\widehat{u}_{qq'}\subset\{(\tau,\xi)\,/\,2^{n+q}r_1\leqslant(\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4}\leqslant 2^{n+q}r_2,\,(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}\leqslant 2^{q'}r_2\}$ *et* $(2^{qs+q's'}\|u_{qq'}\|_{L^2})_{q,q'\geqslant 0}$ *est dans* $l^2(\mathbb{N}^2)$, *alors :*

$$u=\sum_{q,q'\geqslant 0}u_{qq'}\in H^{s,s'}_{Sch}\text{ et }\|u\|^2_{H^{s,s'}_{Sch}}\leqslant C_{ss'}4^{ns}\sum_{q,q'\geqslant 0}4^{qs+qs'}\|u_{qq'}\|^2_{L^2}.$$

Lemme 6.7. — *Soit* $r_1>0$, *et* s *et* s' *deux réels avec* $s>0$ *et* $s'>0$. *Il existe une constante* $C_{ss'}$ *indépendante de* n *telle que si* $(u_{qq'})$ *est une suite* *de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ *avec supp* $\widehat{u}_{qq'} \subset \{(\tau,\xi) \,/\, (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^q r_1,\ (\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4} \leqslant 2^{q'} r_1\}$ *et* $(2^{qs+q's'}\|u_{qq'}\|_{L^2})_{q,q'\geqslant 0}$ *est dans* $l^2(\mathbb{N}^2)$*, alors :*

$$u = \sum_{q,q'\geqslant 0} u_{qq'} \in H^{s,s'}_{Sch} \text{ et } \|u\|^2_{H^{s,s'}_{Sch}} \leqslant C_{ss'} \sum_{q,q'\geqslant 0} 4^{qs+qs'} \|u_{qq'}\|^2_{L^2}.$$

La proposition suivante étend le résultat de la proposition 3.7.

Proposition 6.8. — *Pour tout réels s et s', soit un réel ρ satisfaisant :*

$$\begin{aligned} &\rho = \min(s - \tfrac{1}{2}, s + s' - \tfrac{d}{2} - 1) && \text{si } s' \neq (d-1)/2 + 1, \\ &\rho < s - \tfrac{1}{2} && \text{si } s' = (d-1)/2+1. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Alors $H^{s,s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ *s'injecte continûment dans* $C^{\rho}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.

Preuve. — D'après le lemme 3.1 avec $d' = d-1$ et $d'' = 1$,

$$\|\Delta^{Sch}_{pp'}(u)\|_{L^\infty} \leqslant C 2^{p'(\frac{d-1}{2}+1)+\frac{p}{2}} \|\Delta^{Sch}_{pp'}(u)\|_{L^2},$$

donc :

(6.4)

$$\begin{aligned} \|\Delta^{Sch}_{p}(u)\|_{L^\infty} &\leqslant \sum_{p'=-1}^{p+1} \|\Delta^{Sch}_{pp'}(u)\|_{L^\infty} \\ &\leqslant 2^{-p(s-1/2)} \left(\sum_{p'=-1}^{p+1} 4^{p'(\frac{d-1}{2}+1-s')}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p'\geqslant -1} 4^{p's'+ps} \|\Delta^{Sch}_{pp'}(u)\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant 2^{-p(s-1/2)} \left(\sum_{p'=-1}^{p+1} 4^{p'(\frac{d-1}{2}+1-s')}\right)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{H^{s,s'}_{Sch}}, \end{aligned}$$

et nous concluons en remarquant que $2^{-p(s-1/2)}(\sum_{p'=-1}^{p+1} 4^{p'(\frac{d-1}{2}+1-s')})^{1/2} \leqslant 2^{-p\rho}$. □

Par analogie avec la S-paramultiplication, nous définissons un paraproduit n'agissant que sur les variables tangentielles et un paraproduit à deux indices.

Définition 6.9. — *Nous appelons S-paraproduit tangentiel de v par u et nous notons $\widetilde{T}_u^{Sch}v$ l'opérateur bilinéaire suivant :*

$$\widetilde{T}_u^{Sch}v = \sum_{q'\geqslant 2} \widetilde{S}_{q'-2}^{Sch}(u)\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v),$$

et nous appelons S-paraproduit à deux indices l'opérateur bilinéaire suivant :

$$\widetilde{\widetilde{T}}_u^{Sch} v = \sum_{q,q'\geqslant 2} S_{q-2,q'-2}^{Sch}(u)\Delta_{qq'}^{Sch}(v).$$

Proposition 6.10. — *Soit s et s' réels tels que :*

$$s > \frac{1}{2},\ s+s' > \frac{d}{2}+1 \ \text{ et } s+2s' > \frac{1}{2}, \tag{6.5}$$

alors $H_{Sch}^{s,s'}$ est une algèbre multiplicative.

Preuve. — Soit u et v dans $H_{Sch}^{s,s'}$. uv se décompose en :

$$\begin{aligned} uv = {} & \widetilde{\widetilde{T}}_u^{Sch} v + \widetilde{\widetilde{T}}_v^{Sch} u \\ & + \sum_{q\geqslant 2,q'\geqslant 0} (\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'+3}^{Sch}(u)S_{q-2}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v) + S_{q-2}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(u)\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'+3}^{Sch}(v)) \\ & + \sum_{|p-q|\leqslant 2,q'\geqslant 2} (\Delta_{qq'}^{Sch}(u)\Delta_p^{Sch}\widetilde{S}_{q'-2}^{Sch}(v) + \Delta_p^{Sch}\widetilde{S}_{q'-2}^{Sch}(u)\Delta_{qq'}^{Sch}(v)) \\ & + \sum_{|p-q|\leqslant 2,|p'-q'|\leqslant 2} \Delta_{qq'}^{Sch}(u)\Delta_{pp'}^{Sch}(v). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Par symétrie, il suffit de montrer que w_1, w_2, w_3 et w_4 sont dans $H_{Sch}^{s,s'}$, où nous avons posé :

$$\begin{aligned} w_1 &= \widetilde{\widetilde{T}}_u^{Sch} v, \\ w_2 &= \sum_{q\geqslant 2,q'\geqslant 0} \Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'+3}^{Sch}(u)S_{q-2}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v), \\ w_3 &= \sum_{|p-q|\leqslant 2,q'\geqslant 2} \Delta_{qq'}^{Sch}(u)\Delta_p^{Sch}\widetilde{S}_{q'-2}^{Sch}(v), \\ w_4 &= \sum_{|p-q|\leqslant 2,|p'-q'|\leqslant 2} \Delta_{qq'}^{Sch}(u)\Delta_{pp'}^{Sch}(v). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Soit ρ donné par (6.3). La proposition 6.8 implique :

$$\|\Delta_{qq'}^{Sch}(u)\|_{L^\infty} \leqslant C2^{-q\rho} \text{ et } \|\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'}^{Sch}(u)\|_{L^\infty} \leqslant C2^{-q\rho},$$

et comme $\rho > 0$ par (6.5), $\|S_{qq'}^{Sch}(u)\|_{L^\infty} \leqslant C$. Le lemme 6.3 implique $w_1 \in H_{Sch}^{s,s'}$, et le lemme 6.5 implique $w_3 \in H_{Sch}^{s+\rho,s'}$. Nous découpons à l'aide de $\widetilde{\Delta}_{k'}^{Sch}$ pour obtenir $w_4 = \sum_{q,k'} w_{qk'}$ où :

$$w_{qk'} = \sum_{p/|p-q|\leqslant 2, p',q'/|p'-q'|\leqslant 2} \widetilde{\Delta}_{k'}^{Sch}(\Delta_{qq'}^{Sch}(u)\Delta_{pp'}^{Sch}(v)).$$

En regardant les spectres, nous voyons que $q' \geqslant k' - 5$ dans la définition de $w_{q,k'}$. De plus, en appliquant deux fois le lemme 3.1 et comme $q' \leqslant q+1$:

(6.8)
$$\begin{aligned}\|\widetilde{\Delta}_{k'}^{Sch}(\Delta_{qq'}^{Sch}(u)\Delta_{pp'}^{Sch}(v))\|_{L^2} &\leqslant 2^{k'(\frac{d-1}{2}+1)}\|\widetilde{\Delta}_{k'}^{Sch}(\Delta_{qq'}^{Sch}(u)\Delta_{pp'}^{Sch}(v))\|_{L^2_{x_d}(L^1_{t,x'})}\\ &\leqslant 2^{k'(\frac{d-1}{2}+1)}\|\Delta_{qq'}^{Sch}(u)\|_{L^2}\|\Delta_{pp'}^{Sch}(v)\|_{L^\infty_{x_d}(L^2_{t,x'})}\\ &\leqslant 2^{k'(\frac{d-1}{2}+1)}2^{p/2}\|\Delta_{qq'}^{Sch}(u)\|_{L^2}\|\Delta_{pp'}^{Sch}(v)\|_{L^2}\\ &\leqslant 2^{k'(\frac{d-1}{2}+1)}2^{-qs}2^{-q'(s+2s'-1/2)}c_{qq'},\end{aligned}$$

où $(c_{qq'})$ est dans $l^2(\mathbb{N}^2)$. Ceci entraîne $\|w_{qk'}\|_{L^2} \leqslant 2^{-k'(s+2s'-d/2-1)}2^{-qs}c_{qk'}$ où $(c_{qk'})$ est dans $l^2(\mathbb{N}^2)$ car $s+2s' > 1/2$. Les lemmes 6.4 et 6.5 impliquent que w_4 est dans $H_{Sch}^{s,s+2s'-d/2-1}$.

w_2 est une somme de termes à spectre dans

$$\{(\tau,\xi) \,/\, 2^{q-2} \leqslant (\tau^2 + |\xi|_4^4)^{\frac{1}{4}} \leqslant 9\times 2^{q-2},\ (\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac{1}{4}} \leqslant 10\times 2^{q'}\}$$

et il existe $(\varepsilon_{qq'})$ dans $l^2(\mathbb{N}^2)$ et (ε_q) et $(\varepsilon_{q'})$ dans $l^2(\mathbb{N})$ telles que :

(6.9)
$$\|\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'+3}^{Sch}(u)\|_{L^2_{x_d}(L^\infty_{t,x'})} \leqslant \begin{cases} 2^{-qs-q'(s'-\frac{d-1}{2}-1)}\varepsilon_{qq'} & \text{si } s' < \frac{d-1}{2}+1,\\ 2^{-qs+q'\epsilon}\varepsilon_{qq'} & \text{si } s' = \frac{d-1}{2}+1,\\ 2^{-qs}\varepsilon_q & \text{si } s' > \frac{d-1}{2}+1,\end{cases}$$

pour tout $\epsilon > 0$. De plus, en utilisant le lemme 3.1 avec $d' = d-1$ et $d'' = 1$, et le fait que $k \geqslant q'+1$ sur le support de $\Delta_{kq'}^{Sch}(v)$ et que $s > 1/2$, on a :

$$\|S_{q-2}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v)\|_{L^\infty_{x_d}(L^2_{t,x'})} \leqslant 2^{-q'(s+s'-1/2)}\varepsilon_{q'}, \tag{6.10}$$

d'où :

$$\|\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'+3}^{Sch}(u)S_{q-2}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v)\|_{L^2}\leqslant 2^{-qs-q'(s'+\rho)}\varepsilon_{qq'}. \tag{6.11}$$

Le lemme 6.6 donne $w_2\in H_{Sch}^{s,s'+\rho}$ si $s'+\rho>0$. Pour $s'+\rho\leqslant 0$, nous avons $s'<0$, et nous découpons w_2 avec $\widetilde{\Delta}_{k'}^{Sch}$. Nous estimons les morceaux dans $L_{x_d}^2(L_{t,x'}^1)$, et les lemmes 6.3 et 6.4 donnent $w_2\in H_{Sch}^{s,s+2s'-d/2-1}$. Finalement, w_1, w_2, w_3 et w_4 sont dans $H_{Sch}^{s,s'}$, ce qui implique que uv est également dans $H_{Sch}^{s,s'}$. □

En comparant l'opérateur $\widetilde{T}_u^{Sch}$ à $\widetilde{\widetilde{T}}_u^{Sch}$, nous précisons son action sur les espaces $H_{Sch}^{s,s'}$.

Proposition 6.11. — *Soit deux réels s et s' vérifiant $s>1/2$, $s+s'>d/2+1$, ρ défini par (6.3) et u dans $H_{Sch}^{s,s'}$. L'opérateur $\widetilde{T}_u^{Sch}$ est borné dans $H_{Sch}^{t,t'}$ pour $-s<t\leqslant s$ avec une norme majorée par $C\|u\|_{H_{Sch}^{s,s'}}$. De plus, $\widetilde{T}_u^{Sch}-\widetilde{\widetilde{T}}_u^{Sch}$ applique continûment $H_{Sch}^{t,t'}$ dans $H_{Sch}^{t,t'+\rho}$ pour $-s<t\leqslant s$ avec une norme majorée par $C\|u\|_{H_{Sch}^{s,s'}}$.*

Preuve. — Nous avons l'égalité :

$$\widetilde{T}_u^{Sch}v=\widetilde{\widetilde{T}}_u^{Sch}v+\sum_{q\geqslant 0,q'\geqslant 2}\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'-2}^{Sch}(u)S_{q+3}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v),$$

et comme $\widetilde{\widetilde{T}}_u^{Sch}v$ est continu sur $H_{Sch}^{t,t'}$ pour tout (t,t') par le lemme 6.3, il suffit de montrer que $\sum_{q\geqslant 0,q'\geqslant 2}\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'-2}^{Sch}(u)S_{q+3}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v)$ applique continûment $H_{Sch}^{t,t'}$ dans $H_{Sch}^{t,t'+\rho}$ pour $-s<t\leqslant s$. Pour un réel a, nous notons $a^+=\max(a,0)$ et $a^-=\max(-a,0)$. Nous établissons des estimations similaires à (6.9) et (6.10) et nous en déduisons pour $t\neq 1/2$ et $s'\neq (d-1)/2+1$:

$$\begin{aligned}&\|\Delta_q^{Sch}\widetilde{S}_{q'-2}^{Sch}(u)S_{q+3}^{Sch}\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(v)\|_{L^2}\\&\qquad\leqslant 2^{-q(s-(t-1/2)^-)-q'(t'+(t-1/2)^+-(s'-\frac{d-1}{2}-1)^-)}\varepsilon_{qq'},\end{aligned}$$

avec $\|(\varepsilon_{qq'})\|_{l^2(\mathbb{N}^2)}\leqslant C\|u\|_{H_{Sch}^{s,s'}}\|v\|_{H_{Sch}^{t,t'}}$. Le lemme 6.5 permet alors de conclure si $-s+1/2<t\leqslant s$. Des estimations similaires permettent de

conclure dans le cas $s' = (d-1)/2+1$, et le cas $t = 1/2$ se traite par interpolation.

Pour le cas $-s < t \leqslant -s+1/2$, nous faisons un découpage à l'aide de Δ_k^{Sch}. Nous estimons les morceaux dans $L^2_{t,x'}(L^1_{x_d})$ en utilisant le fait que $t < 0$, et nous concluons grâce au lemme 6.3. □

Le lemme suivant est l'analogue du lemme 3.11.

Lemme 6.12. — *Soit $C_{\alpha,l}$, $(\alpha, l) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$ une suite de constantes, et $(l_{pp'})_{p,p'\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ telles que $\|\partial_t^l \partial_x^\alpha l_{pp'}\|_{L^\infty} \leqslant C_{\alpha,l} 2^{p(m+\alpha_d)+p'(m'+|\alpha'|+2l)}$ pour tout $p, p' \geqslant 0$, et tout (α, l) où m et m' sont réels. Alors l'opérateur $L \ : \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ défini par $L(g)(t,x) = \sum_{p,p'\geqslant 0} l_{pp'}(t,x)\Delta_{pp'}^{Sch} g(t,x)$ se prolonge en un opérateur borné de $H_{Sch}^{s,s'}$ dans $H_{Sch}^{s-m,s'-m'}$ pour tout $s-m > 0$ et $s'-m' > 0$, et sa norme ne dépend que de s, s', m, m' et des $C_{\alpha,l}$.*

Preuve. — Nous fixons $\delta > 4$. Nous avons :

$$1 = \left(\varphi(\delta^{-2}2^{-2p}\tau, \delta^{-1}2^{-p}\xi) + \sum_{q=0}^{\infty} \psi(\delta^{-2}2^{-2(p+q)}\tau, \delta^{-1}2^{-(p+q)}\xi)\right)$$

$$\left(\varphi(\delta^{-2}2^{-2p'}\tau, \delta^{-1}2^{-p'}\xi', 0) + \sum_{q'=0}^{\infty} \psi(\delta^{-2}2^{-2(p'+q')}\tau, \delta^{-1}2^{-(p'+q')}\xi', 0)\right),$$

ce qui donne

$$l_{pp'}(t,x) = \sum_{qq'\geqslant -1} l_{pp'qq'}(t,x),$$

où nous avons posé :

$$\widehat{l_{pp',-1,-1}}(\tau,\xi) = \widehat{l_{pp'}}(\tau,\xi)\varphi(\delta^{-2}2^{-2p}\tau, \delta^{-1}2^{-p}\xi)$$
$$\varphi(\delta^{-2}2^{-2p'}\tau, \delta^{-1}2^{-p'}\xi', 0),$$

$$\widehat{l_{pp',-1,q'}}(\tau,\xi) = \widehat{l_{pp'}}(\tau,\xi)\varphi(\delta^{-2}2^{-2p}\tau, \delta^{-1}2^{-p}\xi)$$
$$\psi(\delta^{-2}2^{-2(p'+q')}\tau, \delta^{-1}2^{-(p'+q')}\xi', 0),$$

pour $q' \geqslant 0$,

$$\widehat{l_{pp',q,-1}}(\tau,\xi) = \widehat{l_{pp'}}(\tau,\xi)\psi(\delta^{-2}2^{-2(p+q)}\tau, \delta^{-1}2^{-(p+q)}\xi)$$
$$\varphi(\delta^{-2}2^{-2p'}\tau, \delta^{-1}2^{-p'}\xi', 0),$$

pour $q \geqslant 0$ et

$$\widehat{l_{pp'qq'}}(\tau,\xi) = \widehat{l_{pp'}}(\tau,\xi)\psi(\delta^{-2}2^{-2(p+q)}\tau, \delta^{-1}2^{-(p+q)}\xi)$$
$$\psi(\delta^{-2}2^{-2(p'+q')}\tau, \delta^{-1}2^{-(p'+q')}\xi', 0),$$

pour $q \geqslant 0$ et $q' \geqslant 0$.

Le lemme 3.1 avec $d' = d-1$ et $d'' = 1$ implique $\|l_{pp'q,-1}\|_{L^\infty} \leqslant C2^{pm+p'm'-qN}$, $\|l_{pp',-1,q'}\|_{L^\infty} \leqslant C2^{pm+p'm'-q'N}$ et $\|l_{pp'qq'}\|_{L^\infty} \leqslant C2^{pm+p'm'-qN-q'N}$ pour tout entier pair N et $q, q' \geqslant 0$.

Nous posons alors $L_{qq'}(u)(t,x) = \sum_{pp'\geqslant -1} l_{pp'qq'}(t,x)\Delta_{pp'}^{Sch}u(t,x)$. Le spectre de $l_{pp',-1,-1}\Delta_{pp'}^{Sch}u$ est inclus dans

$$\{(\tau,\xi)\,/\,(\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{1}{4}} \leqslant (\delta+2)2^p,\ (\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac{1}{4}} \leqslant (\delta+2)2^{p'}\},$$

donc d'après le lemme 6.7 :

$$\|L_{-1,-1}(u)\|^2_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant C\sum_{pp'\geqslant -1} 4^{p(s-m)+p'(s-m')}\|l_{pp',-1,-1}\Delta_{pp'}^{Sch}u\|^2_{L^2},$$

car $s-m>0$ et $s'-m'>0$. Comme :

(6.12)
$$\|l_{pp',-1,-1}\Delta_{pp'}^{Sch}u\|_{L^2} \leqslant \|l_{pp',-1,-1}\|_{L^\infty}\|\Delta_{pp'}^{Sch}u\|_{L^2} \leqslant C2^{pm+p'm'}\|\Delta_{pp'}^{Sch}u\|_{L^2},$$

nous en déduisons que $\|L_{-1,-1}(u)\|_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant C\|u\|_{H^{s,s'}_{Sch}}$ grâce à (6.2).

Grâce au choix de δ, le spectre de $l_{pp'qq'}\Delta_p^{Sch}u$ est inclus dans

$$\{(\tau,\xi)\,/\,(\delta/2-2)2^{p+q} \leqslant (\tau^2+|\xi|_4^4)^{1/4} \leqslant (2\delta+2)2^{p+q},$$
$$(\delta/2-2)2^{p'+q'} \leqslant (\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4} \leqslant (2\delta+2)2^{p'+q'}\}$$

pour $q, q' \geqslant 0$, donc d'après le lemme 6.3 :

$$\|L_{qq'}(u)\|^2_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant C4^{q(s-m)+q'(s'-m')}$$
$$\sum_{pp'\geqslant -1} 4^{p(s-m)+p(s'-m')}\|l_{pp'qq'}\Delta_{pp'}^{Sch}u\|^2_{L^2},$$

et comme :

$$\begin{aligned}\|l_{pp'qq'}\Delta_{pp'}^{Sch}u\|_{L^2} &\leqslant \|l_{pp'qq'}\|_{L^\infty}\|\Delta_{pp'}^{Sch}u\|_{L^2}\\ &\leqslant 2^{pm+p'm'-qN-q'N}\|\Delta_{pp'}^{Sch}u\|_{L^2},\end{aligned} \tag{6.13}$$

nous en déduisons que $\|L_{qq'}(u)\|_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant C2^{q(s-m-N)+q'(s'-m'-N)} \|u\|_{H^{s,s'}_{Sch}}$ pour tout N grâce à (6.2). Nous montrons par la même méthode

$$\|L_{q,-1}(u)\|_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant C2^{q(s-m-N)}\|u\|_{H^{s,s'}_{Sch}}$$

et

$$\|L_{-1,q'}(u)\|_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant C2^{q'(s'-m'-N)}\|u\|_{H^{s,s'}_{Sch}}$$

pour tout entier pair N en utilisant respectivement le lemme 6.6 et le lemme 6.5. Finalement, nous choisissons $N > \max(s-m, s'-m')$, et nous obtenons

$$\|L(u)\|_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant \sum_{q,q'\geqslant -1} \|L_{qq'}(u)\|_{H^{s-m,s'-m'}_{Sch}} \leqslant C\|u\|_{H^{s,s'}_{Sch}}.$$

□

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 6.13

Théorème 6.13. — *Soit deux réels s et s' vérifiant (6.5). Alors, pour tout u dans $H^{s,s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et toute fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que $F(0) = 0$, nous avons :*

$$F(u) = \widetilde{\widetilde{T}}^{Sch}_{F'(u)}u + r,$$

où $r \in H^{s,s'+\rho}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et ρ est défini par (6.3).

Preuve. — Nous avons :

(6.14)
$$\begin{aligned}
F(u) &= \sum_{p\geqslant 0}(F(S^{Sch}_{p+1}u) - F(S^{Sch}_p u)) + F(S^{Sch}_0 u)\\
&= \sum_{p\geqslant 0}\Bigg(\sum_{p'\geqslant 0}(F(\widetilde{S}^{Sch}_{p'+1}S^{Sch}_{p+1}u) - F(\widetilde{S}^{Sch}_{p'}S^{Sch}_{p+1}u)) + F(\widetilde{S}^{Sch}_0 S^{Sch}_{p+1}u)\\
&\quad - \sum_{p'\geqslant 0}(F(\widetilde{S}^{Sch}_{p'+1}S^{Sch}_p u) - F(\widetilde{S}^{Sch}_{p'}S^{Sch}_p u)) + F(\widetilde{S}^{Sch}_0 S^{Sch}_p u)\Bigg) + F(S^{Sch}_0 u)\\
&= \sum_{p,p'\geqslant 0} m_{pp'}(t,x)\Delta^{Sch}_{pp'}u + \sum_{p,p'\geqslant 0} m^1_{pp'}(t,x)\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_{p'}uS^{Sch}_p\widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'}u\\
&\quad + \sum_{p\geqslant 0} m_p(t,x)\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_0 u + F(S^{Sch}_0 u),
\end{aligned}$$

où nous avons posé :
(6.15)

$$m_{pp'}(t,x) = \int_0^1 F'(S^{Sch}_{p+1,p'+1}u - (1-s)\Delta^{Sch}_{pp'}u)ds,$$

$$m^1_{pp'}(t,x) = \int_0^1\int_0^1 F''(S^{Sch}_{pp'}u + s\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_{p'}u + \theta S^{Sch}_p\widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'}u)dsd\theta,$$

$$m_p(t,x) = \int_0^1 F'(S^{Sch}_{p,0}u + s\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_0 u)ds.$$

Par conséquent :

$$F(u) - \widetilde{\widetilde{T}}^{Sch}_{F'(u)}u = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + F(S^{Sch}_0 u), \tag{6.16}$$

où nous avons posé :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sum_{p,p'\geqslant 2}(m_{pp'}(t,x) - S^{Sch}_{p-2,p'-2}F'(u))\Delta^{Sch}_{pp'}u,\\ r_2 &= \sum_{p \text{ ou } p'\leqslant 1} m_{pp'}(t,x)\Delta^{Sch}_{pp'}u,\\ r_3 &= \sum_{p,p'\geqslant 0} m^1_{pp'}(t,x)\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_{p'}uS^{Sch}_p\widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'}u,\\ r_4 &= \sum_{p\geqslant 0} m_p(t,x)\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_0 u. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Comme $F(0) = 0$ et $S^{Sch}_0 u$ appartient à $H^{+\infty}_{Sch}$, $F(S^{Sch}_0 u)$ est dans $H^{+\infty}_{Sch}$. Il suffit donc de montrer que r_1, r_2, r_3 et r_4 sont dans $H^{s,s'+\rho}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.

En utilisant le fait que u est dans C^ρ_{Sch} par la proposition 6.8 :

$$\|\partial^l_t\partial^\alpha_x(S^{Sch}_{p,0}u + s\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_0 u)\|_{L^\infty} \leqslant 2^{p\alpha_d},$$

pour tout (l,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$ par le lemme 3.1 avec $d' = d-1$ et $d'' = 1$. Nous en déduisons que $\|\partial^l_t\partial^\alpha_x m_p\|_{L^\infty} \leqslant 2^{p\alpha_d}$ pour tout (l,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$. De même, $\|\partial^l_t\partial^\alpha_x m_{pp'}\|_{L^\infty} \leqslant 2^{p\alpha_d}$ si p' ou $p \leqslant 1$ pour tout (l,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$. Par le lemme 6.12, r_2 et r_4 sont dans $H^{s,+\infty}_{Sch}$. Comme u est dans C^ρ_{Sch} et $\rho > 0$, $F'(u)$ est dans C^ρ_{Sch} (ceci a été prouvé au début de la démonstration du théorème 3.12). Par conséquent, $\|\partial^l_t\partial^\alpha_x(m_{pp'} - S^{Sch}_{p-2,p'-2}F'(u))\|_{L^\infty} \leqslant$

$2^{p\alpha_d+p'(2l+|\alpha'|-\rho)}$ pour tout (l,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$ (on le montre pour $(l,\alpha')=0$ et $2l+|\alpha'|>\rho$ avec α_d quelconque, puis on conclut par interpolation), et le lemme 6.12 implique que r_1 est dans $H^{s,s'+\rho}_{Sch}$ si $s'+\rho>0$.

Si $s'+\rho\leqslant 0$, alors $s'<0$, donc u est dans $H^{s+s'}_{Sch}$ avec $s+s'>d/2+1$, et le théorème 3.12 implique que $F'(u)\in H^{s+s'}_{Sch}$ si on suppose $F'(0)=0$ ce qu'on peut toujours faire quitte à remplacer $F(u)$ par $F(u)-F'(0)u$. Grâce au lemme 3.1 avec $d'=d-1$ et $d''=1$, nous obtenons alors :

(6.18)
$$\|\partial_t^l\partial_x^\alpha(m_{pp'}-S^{Sch}_{p-2,p'-2}F'(u))\|_{L^\infty_{x_d}(L^2_{t,x'})}\leqslant 2^{p\alpha_d+p'(2l+|\alpha'|-s-s'+1/2)},$$

pour tout (l,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$ (on le montre pour $(l,\alpha')=0$ et $2l+|\alpha'|>s+s'-1/2$ avec α_d quelconque, puis on conclut par interpolation). Nous reprenons la décomposition de r_1 en $\sum_{q,q'\geqslant -1} r^1_{qq'}$ obtenue grâce à la partition de l'unité utilisée dans la démonstration du lemme 6.12. En utilisant (6.18) et les lemmes 6.5 et 6.3, et en raisonnant comme dans le lemme 6.12, nous obtenons pour $q\geqslant 0$ et $q'\geqslant 0$:

$$\|r^1_{-1,q'}\|_{H^{s,s+2s'-d/2-1}_{Sch}}\leqslant 2^{-q'(N-s'-\rho)} \text{ et}$$
$$\|r^1_{qq'}\|_{H^{s,s+2s'-d/2-1}_{Sch}}\leqslant 2^{-q(N-s)-q'(N-s'-\rho)},$$

pour tout entier pair N. Pour les termes qui restent, nous utilisons (6.18) et les lemmes 6.5, 6.4 et 6.3, et nous raisonnons comme dans le lemme 6.12. De plus, nous découpons avec $\widetilde{\Delta}^{Sch}_{k'}$, nous estimons les morceaux dans $L^2_{x_d}(L^1_{t,x'})$ et nous utilisons le fait que $s+2s'>1/2$. Nous trouvons alors pour $q\geqslant 0$:

$$\|r^1_{-1,-1}\|_{H^{s,s+2s'-d/2-1}_{Sch}}\leqslant 1 \text{ et } \|r^1_{q,-1}\|_{H^{s,s+2s'-d/2-1}_{Sch}}\leqslant 2^{-q(N-s)},$$

pour tout entier pair N. Nous choisissons $N>\max(s,s'+\rho)$ et nous obtenons que r^1 est dans $H^{s,s'+\rho}_{Sch}$.

Il reste à étudier r_3. Comme u est dans C^ρ_{Sch}, $\|\partial_t^l\partial_x^\alpha m^1_{pp'}\|_{L^\infty}\leqslant 2^{p\alpha_d+p'(2l+|\alpha'|)}$ pour tout (l,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$. Nous raisonnons comme pour r_1. Quand $s'+\rho>0$, nous utilisons le lemme 6.12 et $\|\Delta^{Sch}_p\widetilde{S}^{Sch}_{p'}uS^{Sch}_p\widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'}u\|_{L^2}\leqslant C2^{-ps-p'(s'+\rho)}\varepsilon_{pp'}$ où $(\varepsilon_{pp'})$ est dans $l^2(\mathbb{N}^2)$. Quand $s'+\rho\leqslant 0$, nous décomposons r_3 en $\sum_{q,q'\geqslant -1} r^3_{qq'}$ grâce à la partition de l'unité utilisée dans la démonstration du lemme 6.12. Pour les termes $r^3_{qq'}$ et $r^3_{-1,q'}$ $q,q'\geqslant 0$, le raisonnement est analogue au cas $s'+\rho>0$. Pour les termes $r^3_{q,-1}$ et $r^3_{-1,-1}$ $q \geqslant 0$, nous découpons avec $\widetilde{\Delta}^{Sch}_{k'}$ et nous utilisons $\|\Delta^{Sch}_p \widetilde{S}^{Sch}_{p'} u S^{Sch}_p \widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'} u\|_{L^2_{x_d}(L^1_{t,x'})} \leqslant C 2^{-ps-p'(s+2s'-1/2)} \varepsilon_{pp'}$ où $(\varepsilon_{pp'})$ est dans $l^2(\mathbb{N}^2)$. □

Remarque. — Le théorème 6.13 se généralise au cas de N fonctions u_j dans $H^{s,s'}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$ et d'une fonction F de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $F(0) = 0$. Alors nous avons :

$$F(u_1, .., u_N) = \sum_{j=1}^{N} \overset{\approx}{T}{}^{Sch}_{\frac{\partial F}{\partial u_j}(u_1,..,u_N)} u_j + r,$$

où $r \in H^{s,s'+\rho}_{Sch}(\mathbb{R}^{d+1})$.

D'après la proposition 6.11, nous pouvons remplacer la paraproduit à deux indices $\overset{\approx}{T}{}^{Sch}$ par le paraproduit tangentiel $\widetilde{T}^{Sch}$. Pour ce dernier, nous pouvons énoncer une version dans $\mathbb{R}^{d+1}_+$:

Corollaire 6.14. — *Soit deux réels s et s' vérifiant (6.5). Soit une fonction F dans $C^\infty(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+ \times \mathbb{R}^N)$ une fonction à support compact en (t, x) et soient $u_1, .., u_N$ des fonctions de $H^{s,s'}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, nous avons :*

$$F(t, x, u_1, .., u_N) = \sum_{j=1}^{N} \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial F}{\partial u_j}(t,x,u_1,..,u_N)} u_j + r,$$

où $r \in H^{s,s'+\rho}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et ρ est défini par (6.3).

Remarque. — La proposition 6.11 et le corollaire 6.14 impliquent que $F(t, x, u_1, .., u_N)$ est dans $H^{s,s'}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$.

7. Les opérateurs S-paradifférentiels tangentiels.

Nous définissons l'algèbre des opérateurs S-paradifférentiels tangentiels, puis nous déduisons des résultats sur les opérateurs S-paradifférentiels certaines de leurs propriétés d'action sur les espaces H^s_{Sch} et de calcul symbolique.

Nous commençons par définir les classes de symboles $\Sigma^{Sch,m}_{s,s'}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et $\widetilde{\Sigma}^{Sch,m}_\rho(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$.

DÉFINITION 7.1. — *Pour $m \in \mathbb{R}$ et s et s' vérifiant :*

$$s + s' > d/2 + 1 \text{ et } -((d-1)/2 + 1) \leqslant s' < (d-1)/2 + 1, \tag{7.1}$$

nous définissons $\Sigma^{Sch,m}_{s,s'}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ comme l'ensemble des fonctions de la forme :

$$a(t,x,\tau,\xi') = \sum_{j \leqslant s+s'-d/2-1} a_{m-j}(t,x,\tau,\xi'), \tag{7.2}$$

avec a_{m-j} $H^{s-j,s'}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ en (t,x) et C^∞ en (τ,ξ') telles qu'il existe $C > 0$ et :

$$a_{m-j}(t,x,\lambda^2\tau,\lambda\xi') = \lambda^{m-j} a_{m-j}(t,x,\tau,\xi'), \forall(\lambda,\tau,\xi')/\lambda \geqslant 1, (\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{\frac14} \geqslant C,$$

pour $0 \leqslant j \leqslant s + s' - d/2 - 1$. Nous disons que a_{m-j} est S-homogène de degré $m - j$ hors d'un voisinage de l'origine.

Pour $m \in \mathbb{R}$ et $\rho > 0$, nous définissons $\widetilde{\Sigma}^{Sch,m}_\rho(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ comme l'ensemble des fonctions $a(t,x,\tau,\xi') = \sum_{j \leqslant \rho} a_{m-j}(t,x,\tau,\xi')$ avec a_{m-j} continue bornée en $x_d \geqslant 0$ à valeur dans les fonctions C^ρ_{Sch} en (t,x') et C^∞ en (τ,ξ') telles que a_{m-j} est S-homogène de degré $m-j$ hors d'un voisinage de l'origine pour $0 \leqslant j \leqslant \rho$.

Nous définissons des opérateurs paradifférentiels tangentiels à partir des symboles appartenant à $\Sigma^{Sch,m}_{s,s'}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ ou $\widetilde{\Sigma}^{Sch,m}_\rho(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$.

DÉFINITION 7.2. — *Soit $m \in \mathbb{R}$, s et s' vérifiant (7.1) et $\rho > 0$. Soit a dans $\Sigma^{Sch,m}_{s,s'}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ ou $\widetilde{\Sigma}^{Sch,m}_\rho(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Nous notons $\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a)$ l'opérateur sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ défini par la formule :*

$$\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a)u = \sum_{p' \geqslant 2} \widetilde{S}^{Sch}_{p'-2} a(t,x,D_{t,x'}) \widetilde{\Delta}^{Sch}_{p'} u,$$

où $\widetilde{S}^{Sch}_{p'} a(t,x,D_{t,x'})$ désigne le symbole obtenu en faisant agir le multiplicateur de Fourier $\widetilde{S}^{Sch}_{p'}$ sur a relativement aux variables (t,x').

Remarque. — Si $a \in H^{s,s'}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+) \subset \Sigma^{Sch,0}_{s,s'}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, alors $\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a) = \widetilde{T}^{Sch}_a$.

Le théorème 4.6 implique :

Corollaire 7.3. —

(i) *Soit a dans $\widetilde{\Sigma}_\rho^{Sch,m}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$. L'opérateur $\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a)$ est borné en $x_d \geqslant 0$ à valeur dans les opérateurs bornés de $H^t_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{t-m}_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel t.*

(ii) *Soit a dans $\widetilde{\Sigma}_\rho^{Sch,m}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ et b dans $\widetilde{\Sigma}_\rho^{Sch,m'}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$. La différence*

$$\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a)\circ\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(b)-\sum_{j+k+2l+|\beta|\leqslant\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(\partial_\tau^l\partial_{\xi'}^\beta a_j\partial_t^l\partial_{x'}^\beta b_k),$$

est un opérateur borné en $x_d \geqslant 0$ à valeur dans les opérateurs bornés de $H^t_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{t-m-m'+\rho}_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel t.

(iii) *Soit a dans $\widetilde{\Sigma}_\rho^{Sch,m}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ et $\rho \neq 1$. L'opérateur $\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a)^* - \widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(\bar{a})$, est un opérateur borné en $x_d \geqslant 0$ à valeur dans les opérateurs bornés de $H^t_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{t-m+1-(1-\rho)^+}_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel t.*

Soit a dans $\Sigma_{s,s'}^{Sch,m}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ avec s et s' vérifiant (7.1). Alors a vérifie (7.2) et les a_{m-j} sont continues et bornées en $x_d \geqslant 0$ à valeur dans $\Sigma^{Sch,m-j}_{s+s'-d/2-1-j}(\mathbb{R}^d)$, donc $\Sigma_{s,s'}^{Sch,m}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ est inclus dans $\widetilde{\Sigma}^{Sch,m}_{s+s'-d/2-1}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$. Par conséquent, le corollaire 7.3 est encore valable si a appartient à $\Sigma_{s,s'}^{Sch,m}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$.

Un opérateur A linéaire continu de $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$ dans $C^\infty(\mathbb{R}_+^{d+1})$ est dit proprement supporté si pour tout compact K de $\mathbb{R}_+^{d+1}$, il existe un compact K' de $\mathbb{R}_+^{d+1}$ tel que :

$$\operatorname{supp} u \subset K \Rightarrow \operatorname{supp} Au \subset K' \text{ et } u = 0 \text{ sur } K' \Rightarrow Au = 0 \text{ sur } K.$$

Afin de définir la version microlocale tangentielle des espaces $H^{s,s'}_{Sch}$, nous introduisons des symboles S-pseudodifférentiels tangentiels.

Définition 7.4. — *Pour $m \in \mathbb{R}$, nous notons $S^m_{Sch,t}(\mathbb{R}^{d+1})$ l'ensemble des $a(t,x,\tau,\xi')$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^{2d+1})$ tels que pour tous (k,α,l,β) il existe $C_{k\alpha l\beta}$ vérifiant :*

$$|\partial_t^k\partial_x^\alpha\partial_\tau^l\partial_{\xi'}^\beta a(t,x,\tau,\xi')| \leqslant C_{k\alpha l\beta}(1+|\xi'|_4^4+\tau^2)^{\frac{m-|\beta|-2l}{4}},\ \forall (t,x,\tau,\xi').$$

Définition 7.5. — *$u \in H^{t,t'}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ est dit microlocalement de classe $\widetilde{H}^{t,\sigma}_{Sch}$ en un point (t_0,x_0,τ_0,ξ'_0) de $\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1}\times(\mathbb{R}^d\setminus\{0\})$ si il existe un* *opérateur proprement supporté Q dans $S^0_{Sch,t}$ elliptique en $(t_0, x_0, \tau_0, \xi'_0)$ tel que Qu est dans $H^{t,\sigma}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$.*

Soit t un réel et soit u dans $H^{0,t}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Soit s et s' vérifiant (7.1) et $\rho > 0$. Soit a dans $\Sigma^{Sch,m}_{s,s'}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ ou dans $\widetilde{\Sigma}^{Sch,m}_{\rho}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Si u est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ en $(t_0, x_0, \tau_0, \xi'_0)$, alors $\widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a)u$ est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{0,\min(t-m+s+s'-d/2-1,\sigma-m)}_{Sch}$ en $(t_0, x_0, \tau_0, \xi'_0)$ par les points (i) et (ii) du corollaire 7.3.

Proposition 7.6. — *Soit deux réels s et s' vérifiant $s > 1/2$, $s+s' > d/2+1$, ρ défini par (6.3) et u dans $H^{s,s'}_{Sch}$. Soit v dans $H^{t,t'}_{Sch}$ avec $-s < t \leqslant s$ et soit $(t_0, x_0, \tau_0, \xi'_0)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+ \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Si v est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{t,\sigma}_{Sch}$ en $(t_0, x_0, \tau_0, \xi'_0)$, alors $\widetilde{T}^{Sch}_u v$ est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{t,\min(t'+\rho,\sigma)}_{Sch}$ en $(t_0, x_0, \tau_0, \xi'_0)$.*

Preuve. — Soit b dans $C^\infty_0(\mathbb{R}^{d+1})$. On commence par remarquer que $b\widetilde{T}^{Sch}_u - \widetilde{T}^{Sch}_u b$ applique continuement $H^{t,t'}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ dans $H^{t,t'+\rho}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ pour $-s < t \leqslant s$. Par prolongement et restriction, il suffit de le montrer sur $\mathbb{R}^{d+1}$. Puis, par la proposition 6.11, il suffit d'étudier l'opérateur $b\approx{T}^{Sch}_u - \approx{T}^{Sch}_u b$. On montre d'abord que $b - \approx{T}^{Sch}_b$ est infiniment régularisant tangentiel, ce qui ramène l'étude à celle de $\approx{T}^{Sch}_b \approx{T}^{Sch}_u - \approx{T}^{Sch}_u \approx{T}^{Sch}_b$. A l'aide du lemme 6.3, on montre que pour tout $p_0 \geqslant 3$, l'opérateur

$$\overset{\approx}{T}{}^{Sch}_u - \sum_{q,q' \geqslant p_0} S^{Sch}_{q-p_0,q'-p_0}(u)\Delta^{Sch}_{qq'} \tag{7.3}$$

est continu de $H^{t,t'}_{Sch}$ dans $H^{t,t'+\rho}_{Sch}$ pour tout t, t'. Enfin, le lemme 6.3 montre la même propriété de continuité pour l'opérateur

$$\sum_{q,q' \geqslant 3} \left(\sum_{p,p' \geqslant 3} S^{Sch}_{p-3,p'-3}(u)\Delta^{Sch}_{pp'}(S^{Sch}_{q-3,q'-3}(b)\Delta^{Sch}_{qq'}) - S^{Sch}_{q-3,q'-3}(u)S^{Sch}_{q-3,q'-3}(b)\Delta^{Sch}_{qq'} \right). \tag{7.4}$$

Le deuxième terme de la somme étant symétrique en u et b, on en déduit que $b\overset{\approx}{T}{}^{Sch}_u - \overset{\approx}{T}{}^{Sch}_u b$ est continu de $H^{t,t'}_{Sch}$ dans $H^{t,t'+\rho}_{Sch}$ pour tout t, t', puis que $b\widetilde{T}_u^{Sch} - \widetilde{T}_u^{Sch} b$ applique continuement $H_{Sch}^{t,t'}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ dans $H_{Sch}^{t,t'+\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ pour $-s < t \leqslant s$.

Soit $b(t,x)$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$ et $\chi(\tau,\xi')$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ S-homogène de degré 0 en dehors d'un voisinage de 0 tel que $b(t,x)\chi(\tau,\xi')$ est elliptique en (t_0,x_0,τ_0,ξ'_0). On veut montrer sous certaines conditions sur le support de b et χ que $b(t,x)\chi(D_{t,x'})\widetilde{T}_u^{Sch} v$ est dans $H_{Sch}^{t,\min(t'+\rho,\sigma)}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $\chi(D_{t,x'})\widetilde{T}_u^{Sch} bv$ est dans $H_{Sch}^{t,\min(t'+\rho,\sigma)}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$. De plus, par prolongement et restriction, et en utilisant la proposition 6.11 et (7.3), on montre que pour tout $p_0 \geqslant 3$, l'opérateur

$$\widetilde{T}_u^{Sch} - \sum_{q' \geqslant p_0} \widetilde{S}_{q'-p_0}^{Sch}(u)\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch} \tag{7.5}$$

est continu de $H_{Sch}^{t,t'}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ dans $H_{Sch}^{t,t'+\rho}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$ pour tout $-s < t \leqslant s$. Il reste donc à montrer que

$$\chi(D_{t,x'}) \sum_{q' \geqslant p_0} \widetilde{S}_{q'-p_0}^{Sch}(u)\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(bv) \text{ est dans } H_{Sch}^{t,\min(t'+\rho,\sigma)}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1}). \tag{7.6}$$

On note Γ un ouvert S-conique contenant le support de χ. Pour $p_0 \geqslant 2$, on note

$$\Gamma_{p_0} = \left\{ (\tau,\xi') \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} / \operatorname{dist}\left(\frac{(\tau,\xi')}{(\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{\frac{1}{4}}}, \Gamma \cap E \right) \leqslant 2^{-p_0+2} \right\}, \tag{7.7}$$

où E est l'ensemble $\{(\tau,\xi') \,/\, \tau^2 + |\xi'|_4^4 = 1\}$ et la distance entre (τ,ξ') et (σ,η') est définie par $((\tau-\sigma)^2 + |\xi'-\eta'|_4^4)^{1/4}$. Soit $\chi_{p_0}(\tau,\xi')$ dans $S_{Sch}^0(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 dans un voisinage de $\{(\tau,\xi') \in \Gamma_{p_0},\, \tau^2 + |\xi'|_4^4 \geqslant 1\}$. Alors, on a

$$\begin{aligned} &\chi(D_{t,x'}) \sum_{q' \geqslant p_0} \widetilde{S}_{q'-p_0}^{Sch}(u)\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(bv) \\ &\qquad = \chi(D_{t,x'}) \sum_{q' \geqslant p_0} \widetilde{S}_{q'-p_0}^{Sch}(u)\widetilde{\Delta}_{q'}^{Sch}(\chi_{p_0}(D_{t,x'})bv). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Comme v est microlocalement de classe $\widetilde{H}_{Sch}^{t,\sigma}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ'_0), si Γ et le support de b sont assez petits, et si p_0 est assez grand et χ_{p_0} à support assez petit, alors

$$\chi_{p_0}(D_{t,x'})bv \text{ est dans } H_{Sch}^{t,\min(t'+\rho,\sigma)}(\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1}). \tag{7.9}$$

(7.8) et (7.9) impliquent (7.6). □

8. Un théorème de réflexion des singularités.

Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer un théorème de réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger non linéaire. Nous adaptons les preuves de [1] à notre cadre. Nous commençons par étudier le cas d'une équation d'évolution paradifférentielle et nous ramènerons l'équation de Schrödinger non linéaire à un système de deux telles équations.

Dans $\mathbb{R}^d \times [0, x_d^1]$ nous considérons l'opérateur d'évolution

$$L(t,x,D) = D_{x_d} - \widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)) - \widetilde{Op}^{\mathcal{S}}(\tilde{a}(x_d,.))J$$

où a est dans $\widetilde{\Sigma}_\rho^{Sch,1}(\mathbb{R}^d \times [0, x_d^1])$, et où $\tilde{a}$ est dans $\widetilde{\Sigma}_\rho^{Sch,0}(\mathbb{R}^d \times [0, x_d^1])$ avec $\rho > 0$. L'étude de l'équation d'évolution $Lu = h$, où la régularité de h est à préciser, fait l'objet des propositions 8.1, 8.2, 8.3 et 8.4. Les propositions 8.1 et 8.2 étudient ce qui se passe au voisinage conique des points où L est elliptique, et les propositions 8.3 et 8.4 étudient la propagation des singularités pour L. Ces propositions permettent de prendre en compte les différents cas qui apparaîtrons après réduction de l'équation de Schrödinger non linéaire à un système de deux telles équations.

Proposition 8.1. — *Soit $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ dans $T^*(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. Nous supposons qu'il existe $C > 0$ tel que pour $(\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{1/4} \geqslant C$:*

$$\text{(8.1)} \qquad \operatorname{Im} a_1(t_0, x_0', x_d, \tau_0, \xi_0') \geqslant C(\tau_0^2 + |\xi_0'|_4^4)^{\frac{1}{4}} \text{ pour tout } x_d \in [0, x_d^1],$$

où $a_1(t,x,\tau,\xi')$ est le symbole principal de a. Soit u dans $L^2(0, x_d^1, H^s_{Sch})$. Nous supposons qu'il existe B dans $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ elliptique en $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ tel que BLu est dans $L^2(0, x_d^1, H^{\sigma-1}_{Sch})$ et $B^J u$ est dans $L^2(0, x_d^1, H^{\sigma-1}_{Sch})$ pour $s \leqslant \sigma \leqslant s + \rho$. Alors il existe B' dans $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ elliptique en $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ tel que $B'u$ est dans $L^2(\varepsilon, x_d^1, H^\sigma_{Sch})$ pour tout $0 < \varepsilon < x_d^1$.

Preuve. — (8.1) implique qu'il existe un voisinage S-conique de $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ et $C > 0$ tel que pour (t, x', τ, ξ') dans V vérifiant $(\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{1/4} \geqslant C$:

$$\text{(8.2)} \qquad \operatorname{Im} a_1(t,x,\tau,\xi') \geqslant C(\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{1/4} \text{ pour tout } x_d \in [0, x_d^1].$$

Quitte à modifier B, nous pouvons supposer que son symbole b a son support inclus dans V et que $b \equiv 1$ dans un voisinage S-conique de

(t_0,x'_0,τ_0,ξ'_0). Soit B' dans $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ elliptique en (t_0,x'_0,τ_0,ξ'_0) tel que $b\equiv 1$ sur le support de son symbole b'. Soit $a_p(t,x,\tau,\xi')$ égal à $a_1(t,x,\tau,\xi')$ pour $x_d\in[0,x_d^1]$ et (t,x',τ,ξ') dans V, tel que a_p est dans $\widetilde{\Sigma}^{Sch,1}_\rho(\mathbb{R}^d\times[0,x_d^1])$ et pour $(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}\geqslant C$:

$$\text{(8.3)}\qquad \operatorname{Im} a_p(t,x,\tau,\xi')\geqslant C(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}\text{ pour tout } x_d\in[0,x_d^1].$$

Nous posons $p(t,x,y_d,\tau,\xi')=\exp(i\int_{y_d}^{x_d}a_p(t,x',s,\tau,\xi')ds)$. Alors il existe C et c, avec $c>0$, telles que pour tout $(l,\alpha')\in\mathbb{N}^d$, et pour tout $0\leqslant y_d\leqslant x_d\leqslant x_d^1$:

(8.4)
$$\|\partial_\tau^l\partial_{\xi'}^{\alpha'}p(.,x_d,y_d,\tau,\xi')\|_{C^\rho_{Sch}}\leqslant C(1+\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac{-2l-|\alpha'|}{4}}\,\mathrm{e}^{-c(x_d-y_d)(1+\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}},$$

ce qui implique que $(x_d-y_d)^Np(t,x,y_d,\tau,\xi')$ est borné dans $0\leqslant y_d\leqslant x_d\leqslant x_d^1$ à valeur dans $\Sigma_\rho^{-N,Sch}(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel N.

Soit $\delta=\min(1,\rho)/2$ si $\rho\neq 1$ et $0<\delta<1/2$ si $\rho=1$. Par un argument de type bootstrap, nous pouvons supposer que Bu est dans $L^2(\varepsilon,x_d^1,H^{\sigma-\delta}_{Sch})$ pour tout $0<\varepsilon<x_d^1$. Comme $b\equiv 1$ sur le support de son symbole b' et comme u est dans $L^2(0,x_d^1,H^s_{Sch})$, $B'L(1-B)u$ est dans $L^2(0,x_d^1,H^{s+\rho-1}_{Sch})$ par le point (ii) du corollaire 7.3. Quitte à remplacer u par Bu, nous pouvons supposer que u est dans $L^2(\varepsilon,x_d^1,H^{\sigma-\delta}_{Sch})$ pour tout $0<\varepsilon<x_d^1$ et que $B'Lu$ est dans $L^2(0,x_d^1,H^{\sigma-1}_{Sch})$.

Pour v dans $C_0^\infty([0,x_d^1]\times\mathbb{R}^d)$, l'intégration par parties de l'expression $\int_{\varepsilon/2}^{x_d}Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))\partial_{y_d}B'v(y_d,.)dy_d$ donne :

(8.5)
$$\begin{aligned}
B'v(x_d,.)&=Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,\varepsilon/2,.))B'v(\varepsilon/2,.)\\
&\quad+\int_{\varepsilon/2}^{x_d}Op^{\mathcal{S}}(\partial_{y_d}p(x_d,y_d,.))B'v(y_d,.)dy_d\\
&\quad+\int_{\varepsilon/2}^{x_d}Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))\partial_{y_d}B'v(y_d,.)dy_d\\
&=Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,\varepsilon/2,.))B'v(\varepsilon/2,.)+\int_{\varepsilon/2}^{x_d}R(x_d,y_d)B'v(y_d,.)dy_d\\
&\quad+\int_{\varepsilon/2}^{x_d}Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))B'(\partial_{y_d}-iOp^{\mathcal{S}}(a(y_d,.)))v(y_d,.)dy_d\\
&\quad+i\int_{\varepsilon/2}^{x_d}Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))[B',Op^{\mathcal{S}}(a(y_d,.))]v(y_d,.)dy_d,
\end{aligned}$$

où :

(8.6)
$$\begin{aligned}R(x_d,y_d) &= Op^{\mathcal{S}}(\partial_{y_d}p(x_d,y_d,.)) + iOp^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))Op^{\mathcal{S}}(a(y_d,.))\\ &= iOp^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.)(a_1(y_d,.)-a_p(y_d,.)))\\ &\quad + i\sum_{1\leqslant j<\rho} Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.)a_{1-j}(y_d,.))\\ &\quad - iOp^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.)a(y_d,.)) + iOp^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))Op^{\mathcal{S}}(a(y_d,.)).\end{aligned}$$

Comme $Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,\varepsilon/2,.))$ est borné en $\varepsilon\leqslant x_d\leqslant x_d^1$ à valeurs dans $\Sigma_\rho^{-N,Sch}$ pour tout N, $Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,\varepsilon/2,.))$ est borné de H^{s-1}_{Sch} dans H^σ_{Sch} pour tout x_d dans $\varepsilon\leqslant x_d\leqslant x_d^1$. Par conséquent, on a

$$(8.7)\quad \|Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,\varepsilon/2,.))B'v(\varepsilon/2,.)\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^\sigma_{Sch})}\leqslant C\|B'v(\varepsilon/2,.)\|_{H^{s-1}_{Sch}}.$$

Comme $a_p=a_1$ sur le support de b', les points (i) et (ii) du théorème 4.6 impliquent que $(x_d-y_d)^N R(x_d,y_d)B'$ est borné en $0\leqslant y_d\leqslant x_d\leqslant x_d^1$ à valeur dans les opérateurs continus de H^r_{Sch} dans $H^{r+N-1+\min(1,\rho)}_{Sch}$ pour tout réels r et N. Nous prenons $N=1-\delta$. Alors, comme $N<1$:

$$(8.8)\quad \left\|\int_{\varepsilon/2}^{x_d} R(x_d,y_d)B'v(y_d,.)dy_d\right\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^\sigma_{Sch})}\leqslant C\|v\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^{\sigma-\delta}_{Sch})}.$$

Le lemme 4.9 implique :

(8.9)
$$\begin{aligned}&\left\|\int_{\varepsilon/2}^{x_d} Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))B'(\partial_{y_d}-iOp^{\mathcal{S}}(a(y_d,.)))v(y_d,.)dy_d\right\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^\sigma_{Sch})}\\ &\qquad\leqslant C\|B'(\partial_{x_d}-iOp^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(x_d,.)\|_{L^2(0,x_1^d,H^{\sigma-1}_{Sch})}.\end{aligned}$$

Le point (ii) du corollaire 7.3, le lemme 4.9 et le fait que $\delta\leqslant 1$ impliquent :

(8.10)
$$\begin{aligned}&\left\|\int_{\varepsilon/2}^{x_d} Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,y_d,.))[B',Op^{\mathcal{S}}(a(y_d,.))]v(y_d,.)dy_d\right\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^\sigma_{Sch})}\\ &\qquad\leqslant C\|v\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^{\sigma-\delta}_{Sch})}.\end{aligned}$$

Finalement, (8.5), (8.7), (8.8), (8.9) et (8.10) impliquent :

$$\begin{aligned}\|B'v\|_{L^2(\varepsilon,x_1^d,H^\sigma_{Sch})} \leqslant C(\|B'v(\varepsilon/2,.)\|_{H^{s-1}_{Sch}} + \|v\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^{\sigma-\delta}_{Sch})}\\ + \|B'(\partial_{x_d} - iOp^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(x_d,.)\|_{L^2(0,x_1^d,H^{\sigma-1}_{Sch})}).\end{aligned} \tag{8.11}$$

De plus,

(8.12)

$$\|B'v(\varepsilon/2,.)\|_{H^{s-1}_{Sch}} \leqslant C(\|B'v\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^{s-1}_{Sch})} + \|\partial_{x_d}B'v\|_{L^2(0,x_1^d,H^{s-1}_{Sch})})$$

$$\leqslant C(\|v\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^{\sigma-\delta}_{Sch})} + \|B'(\partial_{x_d} - iOp^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(x_d,.)\|_{L^2(0,x_1^d,H^{\sigma-1}_{Sch})})$$

ce qui joint à (8.11) implique

$$\begin{aligned}\|B'v\|_{L^2(\varepsilon,x_1^d,H^\sigma_{Sch})} \leqslant C(\|v\|_{L^2(\varepsilon/2,x_1^d,H^{\sigma-\delta}_{Sch})}\\ +\|B'(\partial_{x_d} - iOp^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(x_d,.)\|_{L^2(0,x_1^d,H^{\sigma-1}_{Sch})}).\end{aligned} \tag{8.13}$$

(8.13) est encore vraie pour $v = u$ par continuité et implique $B'u \in L^2(\varepsilon, x_1^d, H^\sigma_{Sch})$. □

Proposition 8.2. — *Soit $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ dans $T^*(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. Nous supposons qu'il existe $C > 0$ tel que pour $(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4} \geqslant C$, a_1 vérifie (8.1). Soit u dans $L^2(0, x_d^1, H^s_{Sch})$. Nous supposons qu'il existe B dans $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ elliptique en $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ tel que BLu est dans $L^2(0, x_d^1, H^{\sigma-1}_{Sch})$ et $B^J u$ est dans $L^2(0, x_d^1, H^{\sigma-1}_{Sch})$ pour $s \leqslant \sigma \leqslant s + \rho$. De plus, nous supposons que $u(0, .)$ est microlocalement $H^{\sigma-1/2}_{Sch}$ en $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$. Alors il existe B' dans $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ elliptique en $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ tel que $B'u$ est dans $L^2(0, x_d^1, H^\sigma_{Sch})$.*

Preuve. — Nous reprenons l'argument de type bootstrap de la preuve de la proposition 8.1. Quitte à remplacer u par Bu, nous pouvons supposer que u est dans $L^2(0, x_d^1, H^{\sigma-\delta}_{Sch})$, que $B'Lu$ est dans $L^2(0, x_d^1, H^{\sigma-1}_{Sch})$ et que $u(0, .)$ est dans $H^{\sigma-1/2}_{Sch}$.

Le lemme 4.8 implique :

$$\|Op^{\mathcal{S}}(p(x_d,0,.))v(0,.)\|_{L^2(0,x_1^d,H^\sigma_{Sch})} \leqslant C\|v(0,.)\|_{H^{\sigma-1/2}_{Sch}}, \tag{8.14}$$

et comme (8.5), (8.8), (8.9) et (8.10) sont vraies pour $\varepsilon = 0$, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \|B'v\|_{L^2(0,x_1^d,H^\sigma_{Sch})} \leqslant C(&\|v(0,.)\|_{H^{\sigma-1/2}_{Sch}} + \|v\|_{L^2(0,x_1^d,H^{\sigma-\delta}_{Sch})} \\ &+ \|B'(\partial_{x_d} - iOp^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(x_d,.)\|_{L^2(0,x_1^d,H^{\sigma-1}_{Sch})}, \end{aligned} \tag{8.15}$$

et pour $v = u$, ceci implique $B'u \in L^2(0, x_1^d, H^\sigma_{Sch})$. □

Dans ce qui suit, nous supposons en plus que $\rho > 1$ et que le symbole principal $a_1(t,x,\tau,\xi')$ de a est dans $S^1_{Sch,t}(\mathbb{R}^{d+1})$ et est réel. Un point (t_0,x_0,τ_0,ξ_0') étant fixé dans $\mathbb{R}^d \times \{0\} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, nous notons $\widetilde{\gamma}$ la projection sur $\xi_d = 0$ de la bicaractéristique de $l(t,x,\tau,\xi) = \xi_d - a_1(t,x,\tau,\xi')$ issue de $(t_0,x_0,\tau_0,\xi_0',a_1(t_0,x_0,\tau_0,\xi_0'))$. Nous supposons x_d^1 assez petit pour que $\widetilde{\gamma}$, paramétrée par x_d, soit définie pour x_d dans $[0,x_d^1]$.

Proposition 8.3. — *Soit s et σ deux réels tels que $s \leqslant \sigma \leqslant s+\rho-1$ et soit u dans $H^{1,s-1}_{Sch}(\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Nous supposons que Lu est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ sur $\widetilde{\gamma}$, que u est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{1,\sigma-1}_{Sch}$ en $\widetilde{\gamma}(x_d^2)$ avec $0 < x_d^2 < x_d^1$, et que u est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ sur $\widetilde{\gamma}^J$. Alors u est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{1,\sigma-1}_{Sch}$ sur $\widetilde{\gamma}$ et pour $0 \leqslant x_d \leqslant x_d^1$, $u(.,x_d)$ est microlocalement de classe H^σ_{Sch} au point (t,x',τ,ξ') tel que (t,x',x_d,τ,ξ') appartient à $\widetilde{\gamma}$.*

Preuve. — Soit $\delta = \min(1/2,(\rho-1)/2)$ si $\rho \neq 2$ et $0 < \delta < 1/2$ si $\rho = 2$. Par un argument de type bootstrap, nous pouvons supposer que u est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\sigma-1-\delta}_{Sch}$ sur un voisinage S-conique W de $\widetilde{\gamma}([0,x_d^1])$. Quitte à diminuer W, nous pouvons supposer que u est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ sur W^J. Soit χ dans $S^0_{Sch,t}$ à support dans W tel que $\chi = 1$ sur un voisinage S-conique de $\widetilde{\gamma}([0,x_d^1])$, alors $\chi(t,x,D_{t,x'})u$ est dans $H^{1,\sigma-1-\delta}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et

$$(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))(1-\chi(t,x,D_{t,x'}))u - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}(x_d,.))(1-\chi(t,x,D_{t,x'}))\bar{u}$$

est microlocalement dans $\widetilde{H}^{0,s+\rho-1}_{Sch}$ sur $\widetilde{\gamma}$ par le point (ii) du corollaire 7.3. Quitte à remplacer u par $\chi(t,x,D_{t,x'})u$, nous pouvons supposer que u est dans $H^{1,\sigma-1-\delta}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et que $(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))u$ est dans $H^{0,\sigma}_{Sch,loc}$. Soit

V un voisinage S-conique de $\widetilde{\gamma}(x_d^2)$ et $\phi_V \in S^0_{Sch,t}$ tel que $\phi_V(t,x,D)u$ est dans $H^{1,\sigma-1}_{Sch}$ et $\phi_V(t,x,\tau,\xi') = 1$ sur $V \cap \{(\tau,\xi') \,/\, \tau^2 + |\xi'|_4^4 \geqslant 1\}$. Nous commençons par montrer que u est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\sigma-1}_{Sch}$ en tout point de $\widetilde{\gamma}([0,x_d^2])$. Soit

$$H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)} = \partial_{x_d} - \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{\xi_j} a_1(t,x,\tau,\xi')\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{d-1} \partial_{x_j} a_1(t,x,\tau,\xi')\partial_{\xi_j}.$$

Comme $H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}$ et $2\tau\partial_\tau + \sum_{j=1}^{d-1} \xi_j \partial_{\xi_j}$ ne sont pas colinéaires, il existe un voisinage S-conique U avec $\widetilde{\gamma}([0,x_d^2]) \subset U \subset W$, et une fonction ϕ dans $S^0_{Sch,t}$ à support dans U telle que $\phi \geqslant 0$, $\phi = 0$ pour $\tau^2 + |\xi'|_4^4 \leqslant 1/2$, et pour $\tau^2 + |\xi'|_4^4 \geqslant 1$, $\phi > 0$ sur $\widetilde{\gamma}([0,x_d^2[)$, $\phi(t,x',x_d^2,\tau,\xi') \equiv 0$ pour tout (t,x',τ,ξ') et $H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}\phi \geqslant 0$ sur $U \setminus V$ (la construction est plus simple que dans [1] car a_1 est C^∞ en (t,x,τ,ξ')). Pour $\varepsilon > 0$, nous posons :

$$c_\varepsilon(t,x,\tau,\xi') = \phi(t,x,\tau,\xi')(\tau^2 + |\xi'|_4^4)^{\frac{\sigma}{4}}(1 + \varepsilon^4(\tau^2 + |\xi'|_4^4))^{-1}.$$

Nous posons $C_\varepsilon = c_\varepsilon(t,x,D_{t,x'})$. Pour $\varepsilon > 0$, c_ε est dans $S^{\sigma-4}_{Sch,t}$, donc $C_\varepsilon u$ est dans $H^{1,3-\delta}_{Sch}$. De plus, c_ε est borné dans $S^\sigma_{Sch,t}$. Si nous montrons que $\|C_\varepsilon u(x_d,.)\|_{L^2}$ reste borné indépendamment de x_d dans $[0,x_d^2]$ quand ε tend vers 0, alors $\|C_0 u(x_d,.)\|_{L^2} \leqslant C$ pour $0 \leqslant x_d \leqslant x_d^2$. Donc $u(.,x_d)$ est microlocalement de classe H^σ_{Sch} au point (t,x',τ,ξ') tel que (t,x',x_d,τ,ξ') appartient à $\widetilde{\gamma}$ et u est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ en tout point de $\widetilde{\gamma}([0,x_d^2])$. Puis en utilisant $D_{x_d}u = Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))u + H^{0,\sigma}_{Sch}$ et le point (i) du corollaire 7.3, nous en déduisons que u est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\sigma-1}_{Sch}$ en tout point de $\widetilde{\gamma}([0,x_d^2])$, ce qui termine la preuve à condition de montrer que $\|C_\varepsilon u(x_d,.)\|_{L^2}$ reste borné indépendamment de x_d dans $[0,x_d^2]$ quand ε tend vers 0. Il suffit de montrer que pour ε assez petit :

(8.16)

$$\begin{aligned}\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|^2_{L^2} \leqslant A\bigg(&\int_{x_d}^{x_d^2} \|C_\varepsilon(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(s,.)\|^2_{L^2}\\ &+ \|\phi_V(t,x',s,D_{t,x'})(1+\varepsilon^4(D_t^2 + |D_{x'}|_4^4))^{-1}v(s,.)\|^2_{H^\sigma_{Sch}}\\ &+ \|v(s,.)\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}}\bigg),\ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,x_d^2]).\end{aligned}$$

En effet, pour des raisons de continuité, l'inégalité est encore vraie pour $v = u$. De plus :

$$\int_0^{x_d^2} \|\phi_V(t,x',s,D_{t,x'})(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_{x'}|_4^4))^{-1}u(s,.)\|^2_{H^\sigma_{Sch}} ds$$

$$\leqslant \int_0^{x_d^2} \|\phi_V(t,x',s,D_{t,x'})u(s,.)\|^2_{H^\sigma_{Sch}} ds$$

$$+ \int_0^{x_d^2} \|[\phi_V(t,x',s,D_{t,x'}),(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_{x'}|_4^4))^{-1}]u(s,.)\|^2_{H^\sigma_{Sch}} ds,$$

où le second terme est borné quand ε tend vers 0 car le symbole du commutateur est borné dans $S^{-1}_{Sch,t}$ et u est dans $H^{0,\sigma-\delta}_{Sch}$ avec $\delta \leqslant 1/2$. (8.16) permet donc bien d'obtenir une borne sur $\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|^2_{L^2}$ indépendante de x_d dans $[0,x_d^2]$ et de $\varepsilon > 0$.

Il reste à établir (8.16). Soit v dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,x_d^2])$. On intègre entre x_d et x_d^2 l'égalité :

$$\partial_{x_d}\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|^2_{L^2} = -2\mathrm{Im} < (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))C_\varepsilon v(x_d,.), C_\varepsilon v(x_d,.) >$$

$$- < (Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))^*)C_\varepsilon v(x_d,.), C_\varepsilon v(x_d,.) >,$$

et comme $\rho > 1$ et $a_1(t,x,\tau,\xi')$ est réel, $Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))^*$ est continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ par le point (iii) du corollaire 7.3. Finalement :

(8.17)

$$\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|^2_{L^2} \leqslant 2\int_{x_d}^{x_d^2} \mathrm{Im} < (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))C_\varepsilon v(s,.), C_\varepsilon v(s,.) > ds$$

$$+ C\int_{x_d}^{x_d^2} \|C_\varepsilon v(s,.)\|^2_{L^2} ds,$$

où on a utilisé le fait que $\phi(t,x',x_d^2,\tau,\xi') \equiv 0$ pour tout (t,x',τ,ξ'). Le point (ii) du corollaire 7.3 implique :

$$\text{(8.18)} \quad i[D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)), C_\varepsilon] = Op^{\mathcal{S}}(H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}c_\varepsilon) + R_\varepsilon(t,x,D_{t,x'}),$$

où $R_\varepsilon(t,x,D_{t,x'})$ est borné en $x_d \in [0,x_d^2]$ à valeur dans les opérateurs bornés de $H^r_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{r-\sigma+2\delta}_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel r. Par conséquent :

$$(8.19)\quad \left|\int_0^{x_d^2} < R_\varepsilon(t,x,D_{t,x'})v(s), C_\varepsilon v(s) > ds\right| \leqslant M\int_0^{x_d^2} \|v(s)\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}} ds.$$

Pour $(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}$ assez grand, Re $H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}\phi \geqslant 0$ hors de V. De plus :

$$(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{-\frac{1}{4}} H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac{1}{4}} = \sum_{j=1}^{d-1}\partial_{x_j}a_1(t,x,\tau,\xi')\xi_j^3(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{-1},$$

$$\begin{aligned}&(1+\varepsilon^4(\tau^2+|\xi'|_4^4))^{-1}H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}(1+\varepsilon^4(\tau^2+|\xi'|_4^4))\\ &= 4\sum_{j=1}^{d-1}\partial_{x_j}a_1(t,x,\tau,\xi')\varepsilon^4\xi_j^3(1+\varepsilon^4(\tau^2+|\xi'|_4^4))^{-1},\end{aligned}$$

sont des fonctions bornées. Par conséquent, il existe une constante M telle que pour $(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{1/4}$ assez grand Re $T_\varepsilon \geqslant 0$, où :

$$(8.20)\quad T_\varepsilon = H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}c_\varepsilon + M\phi_V(t,x,\tau,\xi')(\tau^2+|\xi'|_4^4)^{\frac{\sigma}{4}}(1+\varepsilon^4(\tau^2+|\xi'|_4^4))^{-1}.$$

En effet, $H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}(\phi e^{\lambda\theta}) \geqslant \lambda\phi e^{\lambda\theta}H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}\theta$ sur $U\setminus V$. Donc quitte à remplacer ϕ par $\phi e^{\lambda\theta}$ où $\lambda>0$ est assez grand, $\theta\geqslant 0$ et $H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}\theta>0$ sur $W\cap \mathrm{supp}\phi$, nous obtenons l'estimation dans $U\setminus V$. Le dernier terme de (8.20) fournit l'estimation dans V. (8.18) et (8.20) impliquent :

$$\begin{aligned}(8.21)\quad & i(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))C_\varepsilon\\ &= iC_\varepsilon(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))) + i[(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))),C_\varepsilon]\\ &= iC_\varepsilon(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))) + Op^{\mathcal{S}}(H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}c_\varepsilon(x_d,.)) + R_\varepsilon(t,x,D_{t,x'})\\ &= iC_\varepsilon(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))\\ &\quad - M\phi_V(t,x,D_{t,x'})(D_t^2+|D_{x'}|_4^4)^{\frac{\sigma}{4}}(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_{x'}|_4^4))^{-1}\\ &\quad + Op^{\mathcal{S}}(T_\varepsilon(x_d,.)) + R_\varepsilon(t,x,D_{t,x'}),\end{aligned}$$

ce qui joint à (8.17) et (8.19) donne :

$$\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|^2_{L^2} + 2\mathrm{Re}\int_0^{x_d^2} < Op^{\mathcal{S}}(T_\varepsilon(s,.))v(s,.), C_\varepsilon v(s,.) > ds$$

$$\leqslant C\int_{x_d}^{x_d^2}(\|C_\varepsilon(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(s,.)\|^2_{L^2} + \|v(s,.)\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}} \tag{8.22}$$

$$+ \|\phi_V(t,x',s,D_{t,x'})(1+\varepsilon^4(D_t^2 + |D_{x'}|_4^4))^{-1}v(s,.)\|^2_{H^\sigma_{Sch}} ds)$$

$$+ C\int_{x_d}^{x_d^2} \|C_\varepsilon v(s,.)\|^2_{L^2} ds.$$

Comme a_1 est dans $S^1_{Sch,t}$, T_ε est dans $S^\sigma_{Sch,t}$ et le lemme 4.3 montre que nous pouvons remplacer $Op^{\mathcal{S}}(T_\varepsilon(s,.))$ par $T_\varepsilon(t,x',s,D_{t,x'})$. Comme

$$C_\varepsilon^* T_\varepsilon(t,x,D_{t,x'}) - (c_\varepsilon T_\varepsilon)(t,x',s,D_{t,x'})$$

a son symbole dans $S^{2\sigma-1}_{Sch}$ et comme $\mathrm{Re} c_\varepsilon T_\varepsilon \geqslant 0$, le lemme 2.5 implique :

$$\mathrm{Re}\int_0^{x_d^2} < Op^{\mathcal{S}}(T_\varepsilon(s,.))v(s,.), C_\varepsilon v(s,.) > ds \geqslant -\int_0^{x_d^2} \|v(s,.)\|^2_{H^{\sigma-1/2}_{Sch}} ds,$$

ce qui joint à (8.22) et au fait que $\delta \leqslant 1/2$ implique :

(8.23)

$$\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|^2_{L^2} \leqslant C\int_{x_d}^{x_d^2}(\|C_\varepsilon(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(s,.)\|^2_{L^2} + \|v(s,.)\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}}$$

$$+ \|\phi_V(t,x',s,D_{t,x'})(1+\varepsilon^4(D_t^2 + |D_{x'}|_4^4))^{-1}v(s,.)\|^2_{H^\sigma_{Sch}} ds)$$

$$+ C\int_{x_d}^{x_d^2} \|C_\varepsilon v(s,.)\|^2_{L^2} ds,$$

et le lemme de Gronwall permet alors de se ramener à (8.16).

Il reste à montrer que u est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\sigma-1}_{Sch}$ en tout point de $\widetilde{\gamma}([x_d^2, x_d^1])$. Nous utilisons cette fois l'existence d'un voisinage S-conique U avec $\widetilde{\gamma}([x_d^2, x_d^1]) \subset U \subset W$, et une fonction ϕ dans $S^0_{Sch,t}$ à support dans U telle que $\phi \geqslant 0$, $\phi = 0$ pour $\tau^2 + |\xi'|_4^4 \leqslant 1/2$, et pour $\tau^2 + |\xi'|_4^4 \geqslant 1$, $\phi > 0$ sur $\widetilde{\gamma}(]x_d^2, x_d^1])$, $\phi(t,x',x_d^2,\tau,\xi') \equiv 0$ pour tout (t,x',τ,ξ') et $H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}\phi \leqslant 0$

sur $U \setminus V$. Il suffit cette fois de montrer que pour ε assez petit :

(8.24)
$$\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|_{L^2}^2 \leqslant A\bigg(\int_{x_d^2}^{x_d} \|C_\varepsilon(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(s,.)\|_{L^2}^2 + \|\phi_V(t,x',s,D_{t,x'})(1+\varepsilon^4(D_t^2+|D_{x'}|_4^4))^{-1}v(s,.)\|_{H^\sigma_{Sch}}^2 + \|v(s,.)\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}}\bigg),\ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [x_d^2, x_d^1]),$$

en suivant une démarche analogue au cas $\widetilde{\gamma}([0,x_d^2])$. □

Proposition 8.4. — *Soit s et σ deux réels tels que $s \leqslant \sigma \leqslant s+\rho-1$ et soit u dans $H^{1,s-1}_{Sch}(\mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}_+^{d+1})$. Nous supposons que Lu est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ sur $\widetilde{\gamma}$, que $u(.,0)$ est microlocalement de classe H^σ_{Sch} au point (t_0,x'_0,τ_0,ξ'_0) tel que $(t_0,x'_0,0,\tau_0,\xi'_0)$ appartient à $\widetilde{\gamma}$, et que u est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ sur $\widetilde{\gamma}^J$. Alors u est microlocalement de classe $\widetilde{H}^{1,\sigma-1}_{Sch}$ sur $\widetilde{\gamma}$ et pour $0 \leqslant x_d \leqslant x_d^1$, $u(.,x_d)$ est microlocalement de classe H^σ_{Sch} au point (t,x',τ,ξ') tel que (t,x',x_d,τ,ξ') appartient à $\widetilde{\gamma}$.*

Preuve. — Nous utilisons cette fois l'existence d'un voisinage S-conique U avec $\widetilde{\gamma}([0,x_d^1]) \subset U \subset W$, et d'une fonction ϕ dans $S^0_{Sch,t}$ à support dans U telle que $\phi(t,x',0,D_{t,x'})u(0,.)$ est dans H^σ_{Sch}, $\phi \geqslant 0$, $\phi = 0$ pour $\tau^2+|\xi'|_4^4 \leqslant 1/2$, et pour $\tau^2+|\xi'|_4^4 \geqslant 1$, $\phi > 0$ sur $\widetilde{\gamma}([0,x_d^1])$ et $H^{Sch}_{l(t,x,\tau,\xi)}\phi \leqslant 0$ sur U quand $0 \leqslant x_d \leqslant x_d^1$. Il suffit cette fois de montrer que pour ε assez petit :

(8.25)
$$\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|_{L^2}^2 \leqslant \|C_\varepsilon v(0,.)\|_{L^2}^2 + A\bigg(\int_0^{x_d} \|C_\varepsilon(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))v(s,.)\|_{L^2}^2 + \|v(s,.)\|^2_{H^{\sigma-\delta}_{Sch}}ds\bigg),\ \forall v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times [0,x_d^1[).$$

Nous partons de :

(8.26)
$$\|C_\varepsilon v(x_d,.)\|_{L^2}^2 \leqslant \|C_\varepsilon v(0,.)\|_{L^2}^2 - 2\int_0^{x_d} \mathrm{Im} < (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)))C_\varepsilon v(s,.), C_\varepsilon v(s,.) > ds + C\int_0^{x_d} \|C_\varepsilon v(s,.)\|_{L^2}^2 ds,$$

puis nous suivons une démarche analogue à la démonstration de la proposition 8.3. □

Soit g une métrique C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, f une fonction C^∞ et $u \in H^s_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ solution de :

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta_g)u + f(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u}) = 0,\ x_d > 0, \\ u|_{x_d=0} = 0. \end{cases} \tag{8.27}$$

Nous commençons par définir les régions elliptique et hyperbolique, ainsi que les bicaractéristiques.

Définition 8.5. — *Un point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ dans $\mathbb{R}^d \times \{0\} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ est hyperbolique (resp. elliptique) si l'équation en α $-\tau_0 + \sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', \alpha) = 0$ admet deux racines réelles distinctes (resp. aucune racine réelle). Soit $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ un point hyperbolique et soit ξ_d^1 et ξ_d^2 ces deux racines réelles distinctes. Au voisinage de $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$, la bicaractéristique passant par $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ est formée de deux demi-arcs γ_j, $j = 1, 2$, définis par $x_d(s) \geqslant 0$, et :*

$$\begin{cases} t = t_0, \\ \tau = \tau_0, \\ x'(s) = \frac{\partial \sigma_2(\Delta_g)}{\partial \xi}(x(s), \xi(s)), x(0) = (x_0', 0), \\ \xi'(s) = -\frac{\partial \sigma_2(\Delta_g)}{\partial x}(x(s), \xi(s)), \xi(0) = (\xi_0', \xi_d^j), j = 1, 2. \end{cases} \tag{8.28}$$

Remarque. — $\sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', \alpha) = -\alpha^2 + \beta(\xi_0')\alpha + \sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', 0)$, où $\beta(\xi_0')$ est une forme linéaire en ξ_0'. Comme $\sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', \alpha) \leqslant 0$ pour tout réel α, on a

$$(\beta(\xi_0'))^2 + 4\sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', 0) \leqslant 0. \tag{8.29}$$

Supposons que $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0')$ est hyperbolique. Alors

$$(\beta(\xi_0'))^2 - 4\tau_0 + 4\sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', 0) > 0, \tag{8.30}$$

ce qui joint à (8.29) implique $\tau_0 < 0$. Par conséquent, on a

$$(\beta(\xi_0'))^2 + 4\tau_0 + 4\sigma_2(\Delta_g)(-\xi_0', 0) < (\beta(\xi_0'))^2 + 4\sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', 0) \leqslant 0, \tag{8.31}$$

ce qui implique que $(t_0, x_0, -\tau_0, -\xi_0')$ est elliptique. On a donc prouvé l'implication suivante :

$$(8.32)\qquad (t_0, x_0, \tau_0, \xi_0') \text{ hyperbolique } \Rightarrow (t_0, x_0, -\tau_0, -\xi_0') \text{ elliptique.}$$

On suppose que $s > d/2 + 2$. Comme u vérifie :

$$(8.33)\qquad g_{dd}\partial_{x_d}^2 u = -(i\partial_t + \Delta_g - g_{dd}\partial_{x_d}^2)u - f(t, x, u, \bar{u}, \nabla u, \nabla\bar{u}),$$

et comme

$$(8.34)\quad u \in H^{r,s}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+) \Leftrightarrow u \in H^{r-1,s+1}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+) \text{ et } \partial_{x_d} u \in H^{r-1,s}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+),$$

(voir [14]), la remarque suivant le corollaire 6.14 implique que u est dans $H^{s+\alpha,-\alpha}_{Sch,loc}$ pour tout $\alpha < s - 3/2$. En particulier, u est dans $H^{2s-2-d/2,-(s-2-d/2)}_{Sch,loc}$. Le corollaire 6.14 implique alors :

$$(8.35)\qquad \begin{aligned} f(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u}) &= \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \bar{u} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{d} \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} \bar{u} + r, \end{aligned}$$

où $r \in H^{2s-3-d/2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Par conséquent, u est solution de :

$$(8.36)\qquad \begin{aligned} &(i\partial_t + \Delta_g)u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \bar{u} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{d} \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} \bar{u} = r, \end{aligned}$$

où $r \in H^{2s-3-d/2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Nous posons alors :

$$(8.37)\qquad \begin{aligned} Lu &= (i\partial_t + \Delta_g)u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \bar{u} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{d} \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})} \partial_{x_j} \bar{u}, \end{aligned}$$

et $Lu \in H^{2s-3-d/2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$.

Le théorème suivant décrit le comportement de la solution aux points elliptiques $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$ tels que $(t_0, x'_0, 0, -\tau_0, -\xi'_0)$ est également un point elliptique.

Théorème 8.6. — *Soit $s > d/2+2$, et $u \in H^s_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ solution de (8.27). Soit un point $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$ dans $\mathbb{R}^d \times \{0\} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ elliptique. Si u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma-1}_{Sch}$ en $(t_0, x'_0, 0, -\tau_0, -\xi'_0)$ alors u est microlocalement $\widetilde{H}^{\min(\sigma,2s-1-d/2)}_{Sch}$ en $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$.*

En particulier, si $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$ et $(t_0, x'_0, 0, -\tau_0, -\xi'_0)$ sont elliptiques, alors u est microlocalement $\widetilde{H}^{2s-1-d/2}_{Sch}$ en $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$ et $(t_0, x'_0, 0, -\tau_0, -\xi'_0)$.

Preuve. — s et $s'=0$ vérifient (7.1) car $s > d/2+2$. L s'écrit :

$$L = -g_{dd}(x) D^2_{x_d} + (L_1 + \widetilde{L}_1 J) D_{x_d} + L_2 + \widetilde{L}_2 J, \tag{8.38}$$

où $L_1 = Op^{\mathcal{S}}(l_1(x_d,.))$, $\widetilde{L}_1 = Op^{\mathcal{S}}(\tilde{l}_1(x_d,.))$, $L_2 = Op^{\mathcal{S}}(l_2(x_d,.))$ et $\widetilde{L}_2 = Op^{\mathcal{S}}(\tilde{l}_2(x_d,.))$ avec $\tilde{l}_1$ dans $\Sigma^{Sch,0}_{s-1,0}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, l_1 dans $\Sigma^{Sch,1}_{s,0}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, l_2 dans $\Sigma^{Sch,2}_{s,0}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et $\tilde{l}_2$ dans $\Sigma^{Sch,1}_{s-1,0}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. De plus, comme g_{dd} est C^∞ et $g_{dd}(x) \geqslant c > 0$, quitte à diviser par $g_{dd}(x)$, nous pouvons supposer $g_{dd}(x) = 1$. Dans un voisinage S-conique du point elliptique $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$, nous avons la factorisation suivante :

$$\begin{aligned} L &= -(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}(x_d,.))J) \\ &\qquad (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}(x_d,.))J) + R + \widetilde{R}J \\ &= -(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(b'(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b'}(x_d,.))J) \\ &\qquad (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a'}(x_d,.))J) + R' + \widetilde{R'}J, \end{aligned} \tag{8.39}$$

où a, a', b et b' sont dans $\Sigma^{Sch,1}_{s,0}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, $-a_1$, $-a'_1$, b_1 et b'_1 vérifient (8.1), $\tilde{a}$, $\tilde{a}'$, $\tilde{b}$ et $\tilde{b}'$ sont dans $\Sigma^{Sch,0}_{s-1,0}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, et R, $\widetilde{R}$, R' et $\widetilde{R'}$ sont continus de $H^{0,t}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ dans $H^{0,t+s-3-d/2}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ pour tout t. En effet, la première égalité de (8.39) est équivalente à :

$$(8.40)\quad \begin{cases} Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.)) + Op^{\mathcal{S}}(b(x_d,.)) = L_1, \\ Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}(x_d,.)) = \widetilde{L}_1, \\ -Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))Op^{\mathcal{S}}(b(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}(x_d,.))Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}^J(x_d,.)) \\ \qquad -iOp^{\mathcal{S}}(\partial_{x_d} b(x_d,.)) + R = L_2, \\ -Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}(x_d,.))Op^{\mathcal{S}}(b^J(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}(x_d,.)) \\ \qquad -iOp^{\mathcal{S}}(\partial_{x_d} \tilde{b}(x_d,.)) + \widetilde{R} = \widetilde{L}_2, \end{cases}$$

ce qui par le point (ii) du corollaire 7.3 est équivalent à :

$$(8.41)\quad \begin{cases} a_{1-j} + b_{1-j} = l^1_{1-j},\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 1, \\ \tilde{a}_{1-j} - \tilde{b}_{1-j} = \tilde{l}^1_{1-j},\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 1, \\ a_1 b_1 + \tilde{a}_1 \tilde{b}^J_1 = -l^2_2, \\ \tilde{a}_1 b^J_1 + a_1 \tilde{b}_1 = 0, \\ \displaystyle\sum_{l+k+2n+|\beta|=j+1} \frac{1}{i^{n+\beta} n!\beta!} (\partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} a_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} b_{1-l} + \partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} \tilde{a}_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} \tilde{b}^J_{1-l}) \\ \qquad + i\partial_{x_d} b_{1-j} = -l^2_{1-j},\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 2 \\ \displaystyle\sum_{l+k+2n+|\beta|=j+1} \frac{1}{i^{n+\beta} n!\beta!} (\partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} \tilde{a}_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} b^J_{1-l} + \partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} a_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} \tilde{b}_{1-l}) \\ \qquad + i\partial_{x_d} \tilde{b}_{1-j} = -\tilde{l}^2_{1-j},\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 2. \end{cases}$$

On choisit $\tilde{a}_1(t,x,\tau,\xi') = \tilde{b}_1(t,x,\tau,\xi') = 0$, ce qui vérifie bien la deuxième égalité de (8.41) avec $j = 0$ et la quatrième. La première égalité de (8.41) avec $j = 0$ et la troisième impliquent alors que $a_1(t,x,\tau,\xi')$ et $b_1(t,x,\tau,\xi')$ appartiennent à $S^1_{Sch,t}$ et sont les deux racines de l'équation en α : $-\tau + \sigma_2(\Delta_g)(\xi',\alpha) = 0$. De plus, comme aucune des deux racines est réelle, nous pouvons choisir a_1 et b_1 telles que $-a_1$ et b_1 vérifient (8.1). Supposons qu'on ait trouvé a_{1-k}, $\tilde{a}_{1-k}$, b_{1-k} et $\tilde{b}_{1-k}$ S-homogènes de degré $1-k$ en (τ,ξ') et dans $H^{s-k,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ en (t,x) pour $0 \leqslant k \leqslant j$ et $j \leqslant s - d/2 - 2$, alors $j+1 \leqslant s - d/2 - 1$ et par la première et la cinquième

égalité de (8.41) :
(8.42)

$$(a_1 - b_1)b_{-j} = -l^1_{-j}b_1 - i\frac{\partial b_{1-j}}{\partial x_d} - l^2_{1-j}$$

$$- \sum_{\substack{l+k+2n+|\beta|=j+1,\\ k,l\leqslant j}} \frac{1}{i^{n+|\beta|}n!\beta!}(\partial^n_\tau\partial^\beta_{\xi'}a_{1-k}\partial^n_t\partial^\beta_{x'}b_{1-l} + \partial^n_\tau\partial^\beta_{\xi'}\tilde{a}_{1-k}\partial^n_t\partial^\beta_{x'}\tilde{b}^J_{1-l}).$$

Par hypothèse de récurrence, $\partial_x b_{1-j}$ est S-homogène de degré $1-j$ en (τ,ξ') et dans $H^{s-j-1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ en (t,x). Si $j < s-d/2-2$, $H^{s-j-1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ est une algèbre par la proposition 6.10. L'hypothèse de récurrence implique que :

$$\sum_{\substack{l+k+2n+|\beta|=j+1,\\ k,l\leqslant j}} \frac{1}{i^{n+|\beta|}n!\beta!}(\partial^n_\tau\partial^\beta_{\xi'}a_{1-k}\partial^n_t\partial^\beta_{x'}b_{1-l} + \partial^n_\tau\partial^\beta_{\xi'}\tilde{a}_{1-k}\partial^n_t\partial^\beta_{x'}\tilde{b}^J_{1-l})$$

est S-homogène de degré $1-j$ en (τ,ξ') et dans $H^{s-j-1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. De plus, a_1 et b_1 sont complexes conjuguées et non réelles, donc $a_1 - b_1 \neq 0$ et $(a_1-b_1)^{-1}$ est S-homogène de degré -1 en (τ,ξ') et dans $H^{s,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Donc b_{-j} est S-homogène de degré $-j$ en (τ,ξ') et dans $H^{s-j-1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ en (t,x) par (8.42) et le fait que $H^{s-j-1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ est une algèbre. Par la première égalité de (8.41) a_{-j} vérifie les même propriétés que b_{-j}. Si $j = s-d/2-2$, $H^{s-j-1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+) = H^{d/2+1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ n'est pas une algèbre, mais le raisonnement précédent reste vrai en utilisant le fait que la multiplication est continue de $H^{d/2+1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+) \times H^{t,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ dans $H^{d/2+1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ pour tout $t > d/2+1$ par (3.4). Par la deuxième et la sixième égalité de (8.41), on a :

(8.43)

$$(a_1 + b^J_1)\tilde{b}_{-j} = -\tilde{l}^1_{-j}b^J_1 - i\frac{\partial \tilde{b}_{1-j}}{\partial x_d} - \tilde{l}^2_{1-j}$$

$$- \sum_{\substack{l+k+2n+|\beta|=j+1,\\ k,l\leqslant j}} \frac{1}{i^{n+|\beta|}n!\beta!}(\partial^n_\tau\partial^\beta_{\xi'}\tilde{a}_{1-k}\partial^n_t\partial^\beta_{x'}b^J_{1-l} + \partial^n_\tau\partial^\beta_{\xi'}a_{1-k}\partial^n_t\partial^\beta_{x'}\tilde{b}_{1-l}).$$

Si $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi'_0)$ n'est pas elliptique, alors $b_1(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi'_0)$ est réel, donc b^J_1 est réel en (t_0,x_0,τ_0,ξ'_0). Comme a_1 n'est pas réel en (t_0,x_0,τ_0,ξ'_0), $a_1 + b^J_1 \neq 0$. Si $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi'_0)$ est elliptique, alors $b_1(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi'_0)$ a une partie imaginaire strictement positive, donc b^J_1 a une partie imaginaire strictement négative en (t_0,x_0,τ_0,ξ'_0). Comme a_1 a une partie imaginaire strictement négative en (t_0,x_0,τ_0,ξ'_0), $a_1+b_1^J\neq 0$. Dans tous les cas, $a_1+b_1^J\neq 0$, et un raisonnement analogue au précédant implique que $\tilde{a}_{-j}$ et $\tilde{b}_{-j}$ sont S-homogène de degré $-j$ en (τ,ξ') et dans $H^{s-j-1,0}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ en (t,x). Nous avons donc établi la première égalité de (8.39) par récurrence, et la deuxième se montre de manière analogue.

Nous posons

$$u_1=(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(b(x_d,.))-Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}(x_d,.))J)u,$$

$$u_2=(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d,.))-Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}'(x_d,.))J)u.$$

Comme u est dans $H^s_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, (8.39) et le fait que $u|_{x_d=0}=0$ impliquent :

$$\text{(8.44)}\qquad\begin{cases}(D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(a(x_d,.))-Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}(x_d,.))J)u_1\\ \qquad=-Lu+Ru+\widetilde{R}\bar{u}\in H^{0,2s-3-d/2}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+),\\ (D_{x_d}-Op^{\mathcal{S}}(b'(x_d,.))-Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}'(x_d,.))J)u_2\\ \qquad=-Lu+R'u+\widetilde{R}'\bar{u}\in H^{0,2s-3-d/2}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+),\\ u_1-u_2|_{x_d=0}=0,\end{cases}$$

et u_1 et u_2 sont dans $H^{0,s-1}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ en utilisant le point (i) du corollaire 7.3. Comme u_1 est dans $H^{0,s-1}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et microlocalement $\widetilde{H}^{0,\sigma-2}_{Sch}$ en $(t_0,x'_0,0,-\tau_0,-\xi'_0)$, (8.44) implique que u_1 est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\min(\sigma-1,2s-2-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0,x'_0,0,\tau_0,\xi'_0)$ par la proposition 8.1 (car $-a_1$ vérifie (8.1)). En utilisant (8.44), nous en déduisons que u_1 est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\min(\sigma-2,2s-3-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0,x'_0,0,\tau_0,\xi'_0)$. Par conséquent, $u_1|_{x_d=0}$ est microlocalement $H^{\min(\sigma-3/2,2s-5/2-d/2)}_{Sch}$ au point (t_0,x'_0,τ_0,ξ'_0), ce qui implique la même chose pour $u_2|_{x_d=0}$. Comme u_2 est dans $H^{0,s-1}_{Sch}$ $(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, microlocalement $\widetilde{H}^{0,\sigma-2}_{Sch}$ au point $(t_0,x'_0,0,-\tau_0,-\xi'_0)$, et $u_2|_{x_d=0}$ est microlocalement $H^{\min(\sigma-3/2,2s-5/2-d/2)}_{Sch}$ au point (t_0,x'_0,τ_0,ξ'_0), (8.44) implique que u_2 est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\min(\sigma-1,2s-2-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0,x'_0,0,\tau_0,\xi'_0)$ par la proposition 8.2 (car b'_1 vérifie (8.1)).

Il reste à en déduire que u est $\widetilde{H}^{\min(\sigma,2s-1-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0,x'_0,0,\tau_0,\xi'_0)$. Comme u est $\widetilde{H}^{\sigma-1}_{Sch}$ au point $(t_0,x'_0,0,-\tau_0,-\xi'_0)$, $(Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d,.))-Op^{\mathcal{S}}(b(x_d,.)))\bar{u}$ est $\widetilde{H}^{0,\sigma-1}_{Sch}$ au point $(t_0,x'_0,0,\tau_0,\xi'_0)$ par le point (i) du corollaire 7.3. Par conséquent, comme

$$u_1-u_2=(Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d,.))-Op^{\mathcal{S}}(b(x_d,.)))u+(Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a}'(x_d,.))-Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}(x_d,.)))\bar{u},$$

et comme $u_1 - u_2$ est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\min(\sigma-1,2s-2-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$, $(Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .)))u$ est dans $\widetilde{H}^{0,\min(\sigma-1,2s-2-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$. Comme $Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .))$ est elliptique en $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$, on en déduit que u est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\min(\sigma,2s-1-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$.

Comme u est dans $H^{2s-2-d/2,-(s-2-d/2)}_{Sch,loc}$, et comme u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma-1}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, -\tau_0, -\xi_0')$,

$$\widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}\bar{u} + \sum_{j=1}^{d} \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}\partial_{x_j}\bar{u},$$

est microlocalement $\widetilde{H}^{\min(\sigma-2,2s-d/2-3)}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ par la proposition 7.6. Par conséquent :

$$\begin{aligned} g_{dd}\partial^2_{x_d}u &= -(i\partial_t + \Delta_g - g_{dd}\partial^2_{x_d})u - \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}u \\ &\quad - \sum_{j=1}^{d} \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u_j}(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla \bar{u})}\partial_{x_j}u + r, \end{aligned} \tag{8.45}$$

où r est microlocalement $\widetilde{H}^{\min(\sigma-2,2s-d/2-3)}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$. Comme u est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\min(\sigma,2s-1-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$, (8.34), (8.45) et la proposition 7.6 impliquent que u est microlocalement $\widetilde{H}^{\min(\sigma,2s-1-d/2)}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$. □

Le théorème suivant décrit la réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger non linéaire.

Théorème 8.7. — *Soit $s > d/2 + 2$, et $u \in H^s_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ solution de (8.27). Soit $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ dans $\mathbb{R}^d \times \{0\} \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ un point hyperbolique. Nous notons γ_1 et γ_2 les deux demi-arcs bicaractéristiques, et nous nous plaçons dans un voisinage $\omega = \omega' \times [0, x_d^1]$ de $(t_0, x_0', 0)$ dans $\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+$ dans lequel γ_1 et γ_2 ne coupent $x_d = 0$ qu'en $(t_0, x_0', 0)$. Soit $(t_1, x_1, \tau_1, \xi_1)$ un point de γ_1 avec (t_1, x_1) dans $\omega' \times]0, x_d^1[$ et soit σ tel que $\sigma \leqslant 2s - d/2 - 2$ et u est microlocalement H^σ_{Sch} en $(t_1, x_1, \tau_1, \xi_1)$. Alors u est microlocalement $\widetilde{H}^\sigma_{Sch}$ en $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ et microlocalement H^σ_{Sch} sur la bicaractéristique incidente γ_1 et sur la bicaractéristique réfléchie γ_2. De plus, u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma+1}_{Sch}$ en $(t_0, x_0', 0, -\tau_0, -\xi_0')$ et microlocalement $H^{\sigma+1}_{Sch}$ sur γ_2^J et γ_1^J.*

Preuve.— Nous reprenons la factorisation de L (8.39) qui est également valable dans un voisinage S-conique du point hyperbolique $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$. En effet, il suffit de vérifier que $a_1 - b_1 \neq 0$ et $a_1 + b_1^J \neq 0$ dans un voisinage S-conique de $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$, car le reste du raisonnement est identique. Or, comme $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ est hyperbolique, a_1 et b_1 sont les deux racines distinctes de l'équation $-\tau_0 + \sigma_2(\Delta_g)(\xi_0', \alpha) = 0$, donc $a_1 - b_1 \neq 0$. De plus, d'après (8.32), $(t_0, x_0, -\tau_0, -\xi_0')$ est elliptique, donc $b_1^J(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ n'est pas réel. Par conséquent, comme a_1 est réel, $a_1 + b_1^J \neq 0$.

Nous posons de nouveau

$$u_1 = (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{b}(x_d, .))J)u,$$

$$u_2 = (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(\tilde{a'}(x_d, .))J)u,$$

et (8.44) est toujours valable. Nous supposons que γ_1 coïncide avec la bicaractéristique de $(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(a(x_d, .))$ et que γ_2 coïncide avec la bicaractéristique de $(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(b'(x_d, .))$. Comme le point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ est hyperbolique, $a_1(t, x, \tau, \xi')$ et $b_1(t, x, \tau, \xi')$ sont réels, car ce sont les deux racines de l'équation en α $i\tau + \sigma_2(\Delta_g)(\xi', \alpha) = 0$. De même, $a_1'(t, x, \tau, \xi')$ et $b_1'(t, x, \tau, \xi')$ sont réels. De plus, a_1, b_1, a_1' et b_1' sont dans $S^1_{Sch,t}$. Par un argument de type bootstrap, nous pouvons supposer que u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma-1}_{Sch}$ en $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ et microlocalement $H^{\sigma-1}_{Sch}$ sur γ_1 et γ_2. Alors, comme $(t_0, x_0', 0, -\tau_0, -\xi_0')$ est un point elliptique par (8.32), u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma}_{Sch}$ en $(t_0, x_0', 0, -\tau_0, -\xi_0')$ et microlocalement H^{σ}_{Sch} sur γ_2^J et γ_1^J par les théorèmes 5.2 et 8.6. De plus, comme u est dans $H^s_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et u est microlocalement H^{σ}_{Sch} en $(t_1, x_1, \tau_1, \xi_1)$ et sur $\gamma_1^J \cup \gamma_2^J$, u_1 est dans $H^{1,s-2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et u_1 est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\sigma-2}_{Sch}$ en $(t_1, x_1, \tau_1, \xi_1')$, microlocalement $\widetilde{H}^{0,\sigma-1}_{Sch}$ en $(t_0, x_0', 0, -\tau_0, -\xi_0')$ et microlocalement $H^{0,\sigma-1}_{Sch}$ sur γ_1^J. La proposition 8.3 implique que u_1 est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\sigma-2}_{Sch}$ en $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ et $u_1|_{x_d=0}$ est microlocalement $H^{\sigma-3/2}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$. Nous avons donc la même chose pour $u_2|_{x_d=0}$. Comme u_2 est dans $H^{1,s-2}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$, $u_2|_{x_d=0}$ est microlocalement $H^{\sigma-3/2}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', \tau_0, \xi_0')$ et u_2 est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\sigma-1}_{Sch}$ en $(t_0, x_0', 0, -\tau_0, -\xi_0')$ et microlocalement $H^{0,\sigma-1}_{Sch}$ sur γ_2^J, (8.44) implique que u_2 est microlocalement $\widetilde{H}^{1,\sigma-2}_{Sch}$ au point $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ par la proposition 8.4.

Comme u est $\widetilde{H}^{\sigma-1}_{Sch}$ au point $(t_0, x'_0, 0, -\tau_0, -\xi'_0)$, $(Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .)))\bar{u}$ est $\widetilde{H}^{0,\sigma-1}_{Sch}$ au point $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$ par le point (i) du corollaire 7.3. Par conséquent, comme

$$u_1 - u_2 = (Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .)) + (Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .)))J)u,$$

et comme $u_1 - u_2$ est $\widetilde{H}^{0,\sigma-1}_{Sch}$ au point $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$, $(Op^{\mathcal{S}}(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .)))u$ est dans $\widetilde{H}^{0,\sigma-1}_{Sch}$ au point $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$. Comme $Op^{\mathcal{S}}$ $(a'(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(b(x_d, .))$ est elliptique en $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$, on en déduit que u est microlocalement $\widetilde{H}^{0,\sigma}_{Sch}$ au point $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$. Comme dans la preuve du théorème 8.6, on en déduit que u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma}_{Sch}$ au point $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$ grâce à l'égalité (8.45).

Il reste à montrer que u microlocalement H^{σ}_{Sch} sur γ_1 et γ_2 et que u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma+1}_{Sch}$ en $(t_0, x'_0, 0, -\tau_0, -\xi'_0)$ et microlocalement $H^{\sigma+1}_{Sch}$ sur γ_2^J et γ_1^J. Comme u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma}_{Sch}$ au point $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$, u est microlocalement H^{σ}_{Sch} dans un voisinage de $(t_0, x'_0, 0, \tau_0, \xi'_0)$ dans $\mathbb{R}^{d+1}_+ \times \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$. Alors, u microlocalement H^{σ}_{Sch} sur γ_1 et γ_2 par le théorème 5.3. Ceci implique que u est microlocalement $\widetilde{H}^{\sigma+1}_{Sch}$ en $(t_0, x'_0, 0, -\tau_0, -\xi'_0)$ et microlocalement $H^{\sigma+1}_{Sch}$ sur γ_2^J et γ_1^J par les théorèmes 5.2 et 8.6. □

Remarque. — Nous nous sommes intéressé à la réflexion des singularités dans l'ouvert $\mathbb{R}^d_+$, mais l'adaptation au cas d'un ouvert Ω C^∞ est immédiate car tous les raisonnements se font en coordonnées locales.

Remarque. — Les théorèmes 5.2 et 5.3 décrivent ce qui se passe dans $T^*(\mathbb{R}^{d+1}_+) \setminus \{0\}$. Le théorème 8.6 décrit ce qui se passe pour les points elliptiques dont l'image par J est un point elliptique, et le théorème 8.7 décrit ce qui se passe pour les points hyperboliques et les points elliptiques dont l'image par J est un point hyperbolique. Il resterait à étudier le cas des rayons rasants et glissants et les points elliptiques dont l'image par J est ni un point elliptique, ni un point hyperbolique, ce qui n'est pas notre propos.

9. L'opérateur de Dirichlet-Neumann.

On se propose d'appliquer les résultats de réflexion des singularités obtenus dans la section précédente à la détermination de l'opérateur de

Dirichlet-Neumann de l'équation de Schrödinger non linéaire dans le cas du laplacien plat ($\Delta_g = \Delta$) et de l'ouvert $\mathbb{R}^d_+$.

Soit $T > 0$, soit h dans $H^{s-1/2}_{Sch}(]0,T[\times\mathbb{R}^d_+)$, soit f une fonction dans $C^\infty(\mathbb{C}^2)$ telle que $f(0,0) = 0$ et u dans $H^s_{Sch}(]0,T[\times\mathbb{R}^d_+)$ solution de :

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)u + f(u,\bar{u}) = 0,\ x_d > 0,\ 0 < t < T, \\ u|_{x_d=0} = h, \\ u|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Nous appelons opérateur de Dirichlet-Neumann l'opérateur $N\ : h \to \partial_\nu u|_{x_d=0}$ de $H^{s-1/2}_{Sch}(]0,T[\times\mathbb{R}^{d-1})$ dans $H^{s-3/2}_{Sch}(]0,T[\times\mathbb{R}^{d-1})$, où ν est la normale extérieure (i.e. $\partial_\nu = -\partial_{x_d}$). Nous allons chercher une approximation de N par un opérateur de $Op\Sigma^{Sch,1}_{s-d/2+1}(]0,T[\times\mathbb{R}^{d-1})$.

Remarque. — Nous n'étudions pas le cas général où f dépend de $(t,x,u,\bar{u},\nabla u,\nabla\bar{u})$. En effet, nous utilisons dans la démonstration du lemme 9.3 l'effet régularisant microlocal pour l'équation de Schrödinger non linéaire établi dans [16] dans le cadre plus restreint d'une nonlinéarité f dépendant uniquement de $(u,\bar{u})$.

Aux régions hyperbolique $\mathcal{H}$ et elliptique $\mathcal{E}$ de la définition 8.5, nous ajoutons la région de glancing $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{H} = \{(t,(x',0),\tau,\xi') \in T^*(\mathbb{R}^d)\ /\ \tau + |\xi'|^2 < 0\}, \tag{9.2}$$

$$\mathcal{E} = \{(t,(x',0),\tau,\xi') \in T^*(\mathbb{R}^d)\ /\ \tau + |\xi'|^2 > 0\}, \tag{9.3}$$

$$\mathcal{G} = \{(t,(x',0),\tau,\xi') \in T^*(\mathbb{R}^d)\ /\ \tau + |\xi'|^2 = 0\}. \tag{9.4}$$

Si $s > d/2 + 1$, le corollaire 6.14 implique :

$$f(u,\bar{u}) = \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(u,\bar{u})}u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(u,\bar{u})}\bar{u} + r, \tag{9.5}$$

où $r \in H^{s,s-1-d/2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Par conséquent, u est solution de :

$$(i\partial_t + \Delta)u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(u,\bar{u})}u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(u,\bar{u})}\bar{u} = r, \tag{9.6}$$

où $r \in H^{0,2s-1-d/2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. Nous posons alors :

$$Lu = (i\partial_t + \Delta)u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial u}(u,\bar{u})} u + \widetilde{T}^{Sch}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(u,\bar{u})} \bar{u}, \tag{9.7}$$

et $Lu \in H^{0,2s-1-d/2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$. La preuve du théorème 8.6 adaptée au cas où f ne dépend pas de ∇u et $\nabla \bar{u}$ implique immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 9.1. — *Soit $s > d/2 + 1$, soit u dans $H^s_{Sch}(]0, T[\times \mathbb{R}^d_+)$ solution de (9.1), et soit L donné par (9.7). Il existe a, b, $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$, donnés par les relations suivantes :*

(9.8)
$$\begin{cases} a_{1-j} + b_{1-j} = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 1, \\ \tilde{a}_{1-j} - \tilde{b}_{1-j} = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 1, \\ a_1^2 = b_1^2 = -\tau - |\xi'|^2,\ \tilde{a}_1 = \tilde{b}_1 = 0, \\ \displaystyle\sum_{l+k+2n+|\beta|=j+1} \frac{1}{i^{n+\beta} n!\beta!} (\partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} a_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} b_{1-l} + \partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} \tilde{a}_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} \tilde{b}^J_{1-l}) \\ \qquad + i\partial_{x_d} b_{1-j} = -\frac{\partial f}{\partial u}(u,\bar{u})\delta_{j1},\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 2 \\ \displaystyle\sum_{l+k+2n+|\beta|=j+1} \frac{1}{i^{n+\beta} n!\beta!} (\partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} \tilde{a}_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} b^J_{1-l} + \partial^n_\tau \partial^\beta_{\xi'} a_{1-k} \partial^n_t \partial^\beta_{x'} \tilde{b}_{1-l}) \\ \qquad + i\partial_{x_d} \tilde{b}_{1-j} = -\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}(u,\bar{u})\delta_{j1},\ 0 \leqslant j \leqslant s - d/2 - 2, \end{cases}$$

où $\delta_{j1} = 1$ si $j = 1$ et $\delta_{j1} = 0$ sinon, tels que pour tous $\chi_1(\tau, \xi')$ et $\chi_2(\tau, \xi')$ dans $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ nuls dans un voisinage S-conique de $\mathcal{G}$ avec $\chi_2 = 1$ sur le support de χ_1, alors $\chi_2 a$ et $\chi_2 b$ sont dans $\Sigma^{Sch,1}_{s+2,0}(]0, T[\times \overline{\mathbb{R}}^d_+)$, $\chi_2 \tilde{a}$ et $\chi_2 \tilde{b}$ sont dans $\Sigma^{Sch,0}_{s+1,0}(]0, T[\times \overline{\mathbb{R}}^d_+)$, et :

$$\begin{aligned} \chi_1 L = -\chi_1 (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 a(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 \tilde{a}(x_d, .))J) \\ (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 b(x_d, .)) - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 \tilde{b}(x_d, .))J) + R + \widetilde{R}J, \end{aligned} \tag{9.9}$$

où R et $\widetilde{R}$ sont continus de $H^{0,t}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ dans $H^{0,t+s-1-d/2}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ pour tout t. De plus, a_1 et b_1 sont choisies telles que $-\mathrm{Im}\ (a_1) = \mathrm{Im}\ (b_1) \geqslant 0$ et $-\mathrm{Re}\ (a_1) = \mathrm{Re}\ (b_1) \geqslant 0$.

Définition 9.2. — *Soit* $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ *dans* $\mathcal{H}$*. La bicaractéristique passant par* $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ *est formée de la réunion de* $(t_0, x_0', 0, \tau_0, \xi_0')$ *et de deux demi-droites ouvertes :*

$$\gamma_1 = \{(t_0, \xi_0' s, \xi^1 s, \tau_0, \xi_0', \xi^1) \,/\, \xi^1 = -(-\tau - |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ et } s < 0\},$$

et :

$$\gamma_2 = \{(t_0, \xi_0' s, \xi^2 s, \tau_0, \xi_0', \xi^2) \,/\, \xi^2 = (-\tau - |\xi'|^2)^{\frac{1}{2}} \text{ et } s > 0\}.$$

γ_1 *est dite bicaractéristique incidente et* γ_2 *bicaractéristique réfléchie.*

Nous rappelons la définition de l'ensemble I_d introduit dans [16] :

$$\begin{aligned}
&\text{si } d = 1, \quad I_d = \bigcup_{k \geqslant 1} [2k, 2k + 1/2[,\\
&\text{si } d = 2, \quad I_d = \bigcup_{k \geqslant 1}]2k, 2k + 1[,\\
&\text{si } d = 3, \quad I_d = \bigcup_{k \geqslant 1} [2k, 2k + 1/2[\cup]2k + 1/2, 2k + 3/2[,\\
&\text{si } d \geqslant 4, \quad I_d = \bigcup_{k \geqslant 0}]k + d/2, k + 1 + d/2[.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Nous allons utiliser le lemme suivant qui sera démontré plus tard :

Lemme 9.3. — *Soit* u *dans* $C(0, T, H^s(\mathbb{R}^d_+))$ *solution de (9.1) et soit* s *dans* I_d*, où* I_d *est défini par (9.10). Alors* u *est microlocalement* $H^{2s-d/2+1/2}_{Sch}$ *sur toute bicaractéristique incidente.*

Le théorème suivant montre que $-iB = -iOp^{\mathcal{S}}(b(0,.)) - iOp^{\mathcal{S}}(\tilde{b}(0,.))J$ est une bonne approximation de l'opérateur de Dirichlet-Neumann N hors de la région $\mathcal{G} \cup (\mathcal{G}^J \cap \mathcal{E})$, où $\mathcal{G}^J$ est l'image de $\mathcal{G}$ par J.

Théorème 9.4. — *Soit* $\chi_1(\tau, \xi')$ *et* $\chi_2(\tau, \xi')$ *dans* $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ *nuls dans un voisinage S-conique de* $\mathcal{G} \cup (\mathcal{G}^J \cap \mathcal{E})$ *avec* $\chi_2 = 1$ *sur le support de* χ_1*, et soit* b *et* $\tilde{b}$ *donnés par les relations (9.8). Soit* $s > d/2 + 1$*, soit* u *dans* $H^s_{Sch}(]0, T[\times \mathbb{R}^d_+)$ *et dans* $C(0, T, H^s(\mathbb{R}^d_+))$ *solution de (9.1). Alors*

$$\chi_1(D_{x_d} u|_{x_d=0} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 b(0,.))h - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 \tilde{b}(0,.))\bar{h}) \in H^{2s-1-\frac{d}{2}}_{Sch}(\mathbb{R}^d).$$

Preuve. — Soit $v = (D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 b(x_d,.)) - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 \tilde{b}(x_d,.))J)u$. Alors v est dans $H^{0,s-1}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ par le point (i) du corollaire 7.3. Soit $\chi(\tau,\xi')$ dans $S^0_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ avec $\chi_2 = 1$ sur le support de χ et $\chi = 1$ sur le support de χ_1. Comme Lu est dans $H^{0,2s-1-d/2}_{Sch,loc}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ et par (9.9), v vérifie :

$$\chi(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 a) - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 \tilde{a})J)v \in H^{0,2s-1-d/2}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+), \tag{9.11}$$

ce qui implique que v est dans $H^{1,s-2}_{Sch}(\overline{\mathbb{R}}^{d+1}_+)$ par le point (i) du corollaire 7.3. Par le choix de a, $-a_1$ vérifie (8.1) pour les points de $\{\chi = 1\} \cap \mathcal{E}$, et comme v vérifie (9.11), $v|_{x_d=0}$ est microlocalement dans $H^{2s-d/2}_{Sch}(\mathbb{R}^d)$ en tout point de $\{\chi = 1\} \cap \mathcal{E} \cap \mathcal{E}^J$ par la proposition 8.1. Comme u est microlocalement $H^{2s-d/2}_{Sch}$ sur toute bicaractéristique incidente par le lemme 9.3, v est microlocalement $\widetilde{H}^{0,2s-1-d/2}_{Sch}$ sur toute bicaractéristique incidente par les points (i) et (ii) du corollaire 7.3. (9.11) implique alors que v est microlocalement $\widetilde{H}^{1,2s-2-d/2}_{Sch}$ sur toute bicaractéristique incidente par les points (i) et (ii) du corollaire 7.3. De plus, sur le support de χ et par choix de a, les bicaractéristiques de $(D_{x_d} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 a))$ coïncident avec les bicaractéristiques incidentes. Par conséquent, $v|_{x_d=0}$ est microlocalement dans $H^{2s-1-d/2}_{Sch}$ en tout point de $\{\chi = 1\} \cap \mathcal{H}$ et est microlocalement dans $H^{2s-d/2}_{Sch}$ en tout point de $\{\chi = 1\} \cap \mathcal{H}^J$ par la proposition 8.3. Comme $\{\chi = 1\} \cap (\mathcal{G} \cup (\mathcal{G}^J \cap \mathcal{E})) = \varnothing$ et $\chi = 1$ sur le support de χ_1, nous en déduisons que $v|_{x_d=0}$ est microlocalement dans $H^{2s-1-d/2}_{Sch}$ en tout point du support de χ_1. Par conséquent, $\chi_1 v|_{x_d=0} = \chi_1(D_{x_d}u|_{x_d=0} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 b(0,.))h - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 \tilde{b}(0,.))\bar{h})$ est dans $H^{2s-1-d/2}_{Sch}(\mathbb{R}^d)$. □

Remarque. — Si b et $\tilde{b}$ sont quelconques, $\chi_1(D_{x_d}u|_{x_d=0} - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 b(0,.))$ $h - Op^{\mathcal{S}}(\chi_2 \tilde{b}(0,.))\bar{h})$ est au mieux dans $H^{s-3/2}_{Sch}(\mathbb{R}^d)$. Nous gagnons donc $s + 1/2 - d/2$ en régularité par un choix judicieux de b et $\tilde{b}$.

Remarque. — Dans la preuve du théorème 9.4, tous les raisonnements sont locaux et s'etendent donc au cas d'un ouvert C^∞. De plus, l'effet régularisant du lemme 9.3 reste vrai lorsque l'on remplace le demi-espace par l'exterieur d'un obstacle convexe. Par conséquent, le théorème 9.4 est encore vrai lorsque l'on remplace le demi-espace par l'exterieur d'un obstacle convexe.

Avant de démontrer le lemme 9.3, nous montrons un résultat d'interpolation :

Lemme 9.5. — *Soit s un réel strictement positif et soit $< x_d >= \sqrt{1+x_d^2}$. Soit u dans $H^s(\mathbb{R}^d_+)$ tel que $< x_d >^s u$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d_+)$. Alors pour tout $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $< x_d >^{\theta s} u$ est dans $H^{(1-\theta)s}(\mathbb{R}^d_+)$.*

Preuve. — L'opérateur P défini par

$$P(u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_d > 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{[s]+1} \alpha_k u(x', -kx_d) & \text{si } x_d < 0, \end{cases}$$

où

$$\sum_{k=1}^{[s]+1} (-1)^j k^j \alpha_k = 1,\ 0 \leqslant j \leqslant [s],$$

prolonge continuement les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^d_+)$ en fonctions de $H^s(\mathbb{R}^d)$ (voir par exemple [11]). De plus, l'expression de P implique

$$\| < x_d >^s P(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{[s]+1} |\alpha_k| k^{-1/2}\right) \| < x_d >^s u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}.$$

P prolonge donc continuement les fonctions de $H^s(\mathbb{R}^d_+)$ telles que $< x_d >^s u$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ en fonctions de $H^s(\mathbb{R}^d)$ telles que $< x_d >^s P(u)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Il suffit par conséquent de prouver le lemme 9.5 dans $\mathbb{R}^d$.

Soit k un réel et soit θ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors les méthodes habituelles de calcul pseudodifférentiel fournissent

(9.12)
$$\theta(2^{-p}D) < x_d >^k = \sum_{0 \leqslant l < j} \frac{2^{-pl}}{i^l l!} (< x_d >^k)^{(l)} (\partial_{\xi_d}^l \theta)(2^{-p}D) + 2^{-p(j-d)} R,$$

où l'opérateur R a pour noyau

$$K(x,y) = 2^{-pd} \int_0^1 \frac{t^{j-1}}{i^j (j-1)!} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i(x-y)\xi} (< tx_d + (1-t)y_d >^k)^{(j)} (\partial_{\xi_d}^j \theta)(2^{-p}\xi) d\xi dt,$$

et nous avons immédiatement l'estimation

$$(1 + |x-y|^{d+1}) |K(x,y)| \leqslant C \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} < tx_d + (1-t)y_d >^{k-j},$$

ce qui implique que R est continu sur L^2 si $j \geqslant k$ par le lemme de Schur. Pour $[k]+1 \leqslant j_1 \leqslant j-d$, nous posons

$$R_1 = \sum_{j_1 \leqslant l < j} \frac{2^{p(j_1-l)}}{i^l l!} (< x_d >^k)^{(l)} (\partial^l_{\xi_d}\theta)(2^{-p}D) + 2^{-p(j-d-j_1)} R,$$

et nous obtenons

(9.13)
$$\theta(2^{-p}D) < x_d >^k = \sum_{0 \leqslant l < j_1} \frac{2^{-pl}}{i^l l!} (< x_d >^k)^{(l)} (\partial^l_{\xi_d}\theta)(2^{-p}D) + 2^{-pj_1} R_1,$$

où R_1 est continu sur L^2 avec une norme indépendante de p. En passant à l'adjoint dans (9.13), nous obtenons

(9.14)
$$< x_d >^k \theta(2^{-p}D) = \sum_{0 \leqslant l < j_1} \frac{2^{-pl} i^l}{l!} (\partial^l_{\xi_d}\theta)(2^{-p}D) (< x_d >^k)^{(l)} + 2^{-pj_1} R_2,$$

où $R_2 = R_1^*$ est continu sur L^2 avec une norme indépendante de p.

Nous rappelons maintenant l'analyse de Littlewood Paley classique. Suivant Y. Meyer [12], nous introduisons une fonction positive φ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ valant 1 pour $|\xi| \leqslant 1/2$ et 0 pour $|\xi| \geqslant 1$. Pour tout entier p, nous définissons $S_p : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ par $\widehat{S_p u}(\xi) = \varphi(2^{-p}\xi)\widehat{u}(\xi)$. Nous définissons également Δ_p par $\Delta_p = S_{p+1} - S_p$, c'est-à-dire par $\widehat{\Delta_p u}(\xi) = \psi(2^{-p}\xi)\widehat{u}(\xi)$ où $\psi(\xi) = \varphi(\xi/2) - \varphi(\xi)$. Alors, la décomposition de Littlewood-Paley de $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est :

$$u = \sum_{p \geqslant -1} \Delta_p(u),$$

où la somme converge pour la topologie de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et où on a noté $\Delta_{-1} = S_0$. L'espace H^s a alors une caractérisation très simple (voir par exemple [4]). $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est dans H^s si et seulement si

$$\sum_{p \geqslant -1} 4^{ps} \|\Delta_p u\|^2_{L^2} < +\infty, \tag{9.15}$$

et la racine carrée de cette quantité fournit une norme équivalente à la norme usuelle sur H^s.

Nous appliquons (9.13) avec $k = \theta s$, $j_1 = [s] + 1$ et $\theta = \psi$:

(9.16)
$$\Delta_p < x_d >^{\theta s} = \sum_{0 \leqslant l < j_1} \frac{2^{-pl}}{i^l l!} (< x_d >^{\theta s})^{(l)} (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) + 2^{-p([s]+1)} R,$$

où R est continu sur L^2 avec une norme indépendante de p. Donc :

(9.17)
$$2^{(1-\theta)s} \|\Delta_p < x_d >^{\theta s} u\|_{L^2} \leqslant \sum_{0 \leqslant l < j_1} \frac{2^{p((1-\theta)s - l)}}{l!}$$
$$\|(< x_d >^{\theta s})^l (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2} + 2^{-p([s]+1-(1-\theta)s)} \|Ru\|_{L^2}.$$

Nous avons

$$2^{-p([s]+1-(1-\theta)s)} \|Ru\|_{L^2} \leqslant 2^{p(s-[s]-1)} C \|u\|_{L^2} \leqslant C \varepsilon_p \|u\|_{L^2}, \tag{9.18}$$

où $(\varepsilon_p)_{p \geqslant -1}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$ car $s - [s] - 1 < 0$. De plus, par Hölder et Young

(9.19)
$$\begin{aligned} &2^{p(1-\theta)s} \|(< x_d >^{\theta s})^l (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2} \\ &\leqslant 2^{p(1-\theta)s} \|((< x_d >^{\theta s})^{(l)})^{1/\theta} (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|^{\theta}_{L^2} \|(\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|^{1-\theta}_{L^2} \\ &\leqslant C \| < x_d >^{s - l/\theta} (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2} + C 2^{ps} \|(\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Pour des raisons de support,

$$(\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) = (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D)(\Delta_{p-1} + \Delta_p + \Delta_{p+1}),$$

donc, comme u est dans H^s, (9.15) implique

(9.20)
$$2^{ps} \|(\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2} \leqslant C 2^{ps} (\|\Delta_{p-1} u\|_{L^2} + \|\Delta_p u\|_{L^2} + \|\Delta_{p+1} u\|_{L^2}) \leqslant \varepsilon_p,$$

où $(\varepsilon_p)_{p \geqslant -1}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$.

$$\| < x_d >^{s - l/\theta} (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2} \leqslant C \| < x_d >^{s} (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2},$$

donc grâce à (9.15), (9.17), (9.18), (9.19) et (9.20), il suffit de montrer

$$\| < x_d >^{s} (\partial^l_{\xi_d} \psi)(2^{-p} D) u\|_{L^2} \leqslant \varepsilon_p. \tag{9.21}$$

On applique (9.14) avec $k=s$, $j_1=[s]+1$ et $\theta=\partial_{\xi_d}^l\psi$:

(9.22)
$$< x_d >^s (\partial_{\xi_d}^l\psi)(2^{-p}D) = \sum_{0\leqslant n<j_1} \frac{2^{-pn}i^n}{n!}(\partial_{\xi_d}^{n+l}\psi)(2^{-p}D)(< x_d >^s)^{(n)} + 2^{-p([s]+1)}R,$$

où R est continu sur L^2 avec une norme indépendante de p. Nous en déduisons

(9.23)
$$\| < x_d >^s (\partial_{\xi_d}^l\psi)(2^{-p}D)u\|_{L^2} \leqslant \sum_{0\leqslant n<j_1} \frac{2^{-pn}}{n!}\|(\partial_{\xi_d}^{n+l}\psi)(2^{-p}D)(< x_d >^s)^{(n)}u\|_{L^2} + 2^{-p([s]+1)}\|Ru\|_{L^2}.$$

Nous avons

$$2^{-p([s]+1)}\|Ru\|_{L^2} \leqslant C2^{-p([s]+1)}\|u\|_{L^2} \leqslant \varepsilon_p \tag{9.24}$$

où $(\varepsilon_p)_{p\geqslant -1}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$. Pour des raisons de support,

$$\begin{aligned}\|(\partial_{\xi_d}^{n+l}\psi)(2^{-p}D)(< x_d >^s)^{(n)}u\|_{L^2} \leqslant C(\|\Delta_{p-1}(< x_d >^s)^{(n)}u\|_{L^2} \\ + \|\Delta_p(< x_d >^s)^{(n)}u\|_{L^2} + \|\Delta_{p+1}(< x_d >^s)^{(n)}u\|_{L^2}),\end{aligned} \tag{9.25}$$

et comme $< x_d >^s u$ est dans L^2, $(< x_d >^s)^{(n)}u$ est dans L^2 et nous déduisons de (9.15) et de (9.25) que

$$\|(\partial_{\xi_d}^{n+l}\psi)(2^{-p}D)(< x_d >^s)^{(n)}u\|_{L^2} \leqslant \varepsilon_p, \tag{9.26}$$

où $(\varepsilon_p)_{p\geqslant -1}$ est dans $l^2(\mathbb{N})$. Finalement, (9.23), (9.24) et (9.26) impliquent (9.21). □

Preuve du lemme 9.3 . — En multipliant l'équation (9.1) par $x_d^{2s}\bar{u}$, en intégrant sur $\mathbb{R}^d_+$ et en prenant la partie imaginaire, nous trouvons :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_d^s u\|_{L^2}^2 + \mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^d_+}(\Delta u)x_d^{2s}\bar{u}dx \leqslant \|x_d^s f(u,\bar{u})\|_{L^2}\|x_d^s u\|_{L^2}. \tag{9.27}$$

$x_d^{2s}=0$ en $x_d=0$ car $2s>2+d>0$. En intégrant par parties, nous trouvons donc

$$\frac{d}{dt}\|x_d^s u\|_{L^2}^2 - 4s\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}^d_+}\partial_{x_d}u x_d^{2s-1}\bar{u}dx \leqslant \|x_d^s f(u,\bar{u})\|_{L^2}^2 + \|x_d^s u\|_{L^2}^2. \tag{9.28}$$

Comme $s > d/2+1 > d/2$, u est dans $C(0,T,H^s(R^d_+))$ donc dans $L^\infty(0,T,L^\infty(\mathbb{R}^d_+))$. Comme, $f(0,0)=0$, et comme f est C^∞, nous en déduisons donc

$$|f(u,\bar{u})| \leqslant C|u|,$$

ce qui implique

$$\|x_d^s f(u,\bar{u})\|_{L^2} \leqslant C\|x_d^s u\|_{L^2}. \tag{9.29}$$

Soit θ et θ_1 des fonctions dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$ égales à 1 dans un voisinage de 0 telles que $\theta=1$ sur le support de θ_1, alors

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d} u x_d^{2s-1}\bar{u}dx\right|\\
&\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d} u\theta(x_d) x_d^{2s-1}\bar{u}dx\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d} u(1-\theta(x_d)) x_d^{2s-1}\bar{u}dx\right|\\
&\leqslant C\|u\|_{L^2}\|\partial_{x_d} u\|_{L^2} + \left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d} u(1-\theta)(1-\theta_1) x_d^{2s-1}\bar{u}dx\right|\\
&\leqslant C + \left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d} u(1-\theta)(1-\theta_1) x_d^{2s-1}\bar{u}dx\right|,
\end{aligned} \tag{9.30}$$

car u est dans $C([0,T],H^s(\mathbb{R}^d_+))$ et $s > 1+d/2 \geqslant 1$. De plus,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d} u(1-\theta)(1-\theta_1) x_d^{2s-1}\bar{u}dx\right|\\
&\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d}((1-\theta)x_d^{s-1/2}u)(1-\theta_1)x_d^{s-1/2}\bar{u}dx\right|\\
&+ \left|\int_{\mathbb{R}^d_+} \partial_{x_d}((1-\theta)x_d^{s-1/2})(1-\theta_1)x_d^{s-1/2}|u|^2dx\right|\\
&\leqslant \|x_d^{s-1/2}(1-\theta_1)u\|_{H^{1/2}}\|\partial_{x_d}((1-\theta)x_d^{s-1/2}u)\|_{H^{-1/2}} + C\| < x_d >^{s-1} u\|^2_{L^2}\\
&\leqslant C\|x_d^{s-1/2}(1-\theta_1)u\|_{H^{1/2}}\|(1-\theta)x_d^{s-1/2}u\|_{H^{1/2}} + C\| < x_d >^{s} u\|^2_{L^2}\\
&\leqslant C\| < x_d >^{s-1/2} u\|^2_{H^{1/2}} + C\| < x_d >^{s} u\|^2_{L^2},
\end{aligned} \tag{9.31}$$

car $x_d^{s-1/2}(1-\theta) < x_d >^{1/2-s}$ et $x_d^{s-1/2}(1-\theta_1) < x_d >^{1/2-s}$ sont C^∞ et bornées, donc la multiplication par $x_d^{s-1/2}(1-\theta) < x_d >^{1/2-s}$ et par $x_d^{s-1/2}(1-\theta_1) < x_d >^{1/2-s}$ sont continues sur $H^{1/2}(\mathbb{R}^d_+)$. Comme $s > d/2+1 > 1/2$, le lemme 9.5 implique

$$\begin{aligned}\| < x_d >^{s-1/2} u\|^2_{H^{1/2}} &\leqslant C(\| < x_d >^s u\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{H^s}) \\ &\leqslant C + C\| < x_d >^s u\|^2_{L^2},\end{aligned} \tag{9.32}$$

car u est dans $C([0,T],H^s(\mathbb{R}^d_+))$. Finalement, (9.28), (9.29), (9.30), (9.31) et (9.32) impliquent

$$\frac{d}{dt}\|x_d^s u\|^2_{L^2} \leqslant C + C\| < x_d >^s u\|^2_{L^2}. \tag{9.33}$$

De plus, $< x_d >^{2s} \simeq 1 + x_d^{2s}$ pour $x_d \geqslant 0$, donc comme u est dans $C([0,T],H^s(\mathbb{R}^d_+))$ et $u(0,.)=0$, (9.33) implique

$$\| < x_d >^s u(t)\|^2_{L^2} \leqslant C + C\int_0^t \| < x_d >^s u(r)\|^2_{L^2} dr, \tag{9.34}$$

et le lemme de Gronwall implique que $< x_d >^s u$ est dans $L^\infty([0,T],L^2(\mathbb{R}^d_+))$.

Soit (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) avec $t_0 > 0$ un point d'une bicaractéristique incidente. s est dans I_d, u est solution dans $C([0,T],H^s(\mathbb{R}^d_+))$ de (9.1), $< x_d >^s u$ est dans $L^\infty(]0,T[,L^2(\mathbb{R}^d_+))$ et $u(0,.)=0$, donc la proposition 4.1 et le théorème 4.6 de [16] impliquent l'existence de $q(t,x,\xi)$ dans $L^\infty(0,T,\Sigma^{-2}_{s-d/2})$, où Σ^m_ρ désigne la classe de Bony, et de $c(x,\xi)$ dans S^0 égal à 1 dans un voisinage conique de (x_0,ξ_0) tels que

$$\int_0^T t^{2(2s-d/2)+\delta}\|c(x,D_x)v(t,.)\|^2_{H^{2s-d/2+1/2}}dt < +\infty, \tag{9.35}$$

pour tout $\delta > 0$, où $v = u - T_q\bar{u}$, et où T_q désigne l'opérateur paradifférentiel de Bony agissant sur la variable x et de symbole $q(t,x,\xi)$. Donc :

$$\int_{t_0/2}^T \|c(x,D_x)v(t,.)\|^2_{H^{2s-d/2+1/2}}dt < +\infty. \tag{9.36}$$

Soit alors $b(t,x,\tau,\xi)$ dans S^0_{Sch} tel que b est nul dans un voisinage S-conique de $\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\ (t,x)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$, b est elliptique en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0), b est nul pour t hors de $]t_0/2,T[$ et $c=1$ sur un voisinage du support de b.

Alors

(9.37)

$$b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{\frac{2s-d/2+1/2}{2}}v = b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{\frac{2s-d/2+1/2}{2}}c(x,D_x)v + b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{\frac{2s-d/2+1/2}{2}}(1-c(x,D_x))v.$$

D'après (9.36), comme b est nul pour t hors de $]t_0/2,T[$, et comme S^0_{Sch} est continu sur $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$,

$$b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{\frac{2s-d/2+1/2}{2}}c(x,D_x)v \in L^2(\mathbb{R}^{d+1}). \tag{9.38}$$

Comme b est nul dans un voisinage S-conique de $\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\ (t,x)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$ et $c=1$ sur un voisinage du support de b, la proposition 3.4 de [14] implique

$$b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{\frac{2s-d/2+1/2}{2}}(1-c(x,D_x)) \in Op(S^{-\infty}_{Sch}). \tag{9.39}$$

(9.37), (9.38) et (9.39) impliquent

$$b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{\frac{2s-d/2+1/2}{2}}v \in L^2(\mathbb{R}^{d+1}). \tag{9.40}$$

Comme b est nul dans un voisinage S-conique de$\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\ (t,x) \in \mathbb{R}^{d+1}\}$, $b(t,x,\tau,\xi)(1+|\xi|^2)^{\frac{2s-d/2+1/2}{2}}$ est dans $S^{2s-d/2+1/2}_{Sch}$, donc (9.40) implique que v est microlocalement $H^{2s-d/2+1/2}_{Sch}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0).

Comme (t_0,x_0,τ_0,ξ_0) est caractéristique, $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$ est non caractéristique. L'analogue du théorème 5.2 pour une nonlinéarité du type $f(u,\bar{u})$ montre que si u est microlocalement H^σ_{Sch} en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0), alors u est microlocalement $H^{\min(\sigma+2,2s-d/2+1)}_{Sch}$ en $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$. Par conséquent, pour montrer que u est microlocalement $H^{2s-d/2+1/2}_{Sch}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0), il suffit de montrer que si u est microlocalement H^σ_{Sch} en $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$, alors u est microlocalement $H^{\min(\sigma,2s-d/2+1/2)}_{Sch}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0). Or $u=v+T_q\bar{u}$ et v est microlocalement $H^{2s-d/2+1/2}_{Sch}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0). Il suffit donc de montrer que si u est microlocalement H^σ_{Sch} en $(t_0,x_0,-\tau_0,-\xi_0)$, alors $T_q\bar{u}$ est microlocalement $H^{\min(\sigma,2s-d/2+1/2)}_{Sch}$ en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0), ce qui revient à montrer que

$$\begin{aligned} &\bar{u} \text{ est microlocalement } H^\sigma_{Sch} \text{ en } (t_0,x_0,\tau_0,\xi_0)\\ &\Rightarrow T_q\bar{u} \text{ est microlocalement } H^\sigma_{Sch} \text{ en } (t_0,x_0,\tau_0,\xi_0), \end{aligned} \tag{9.41}$$

où $s \leqslant \sigma \leqslant 2s-d/2+1/2$.

On suppose que $\bar{u}$ est microlocalement H^{σ}_{Sch} en $(t_0, x_0, \tau_0, \xi_0)$. L'analogue du théorème 5.2 pour une nonlinéarité du type $f(u,\bar{u})$ montre que $\bar{u}$ est microlocalement $H^{2s+1-d/2}_{Sch}$ en tout point de $\{(t,x,\tau=\pm 1, \xi=0),\, (t,x)\in \mathbb{R}^{d+1}\}$. Donc il existe $b(t,x,\tau,\xi)$ et $b_1(t,x,\tau,\xi)$ dans S^0_{Sch} tel que b est nul dans un voisinage S-conique de $\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\, (t,x)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$ et elliptique en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0), $b_1\equiv 1$ sur un voisinage S-conique du support de b et sur un voisinage S-conique de $\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\, (t,x)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$, et tel que $b_1(t,x,D)\bar{u}$ est dans H^{σ}_{Sch}. Alors, on a

$$\begin{aligned}b(t,x,D)T_q\bar{u} = b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{-\frac{\sigma}{2}}(1+|D_x|^2)^{\frac{\sigma}{2}}T_q b_1(t,x,D)\bar{u}\\ + b(t,x,D)T_q(1-b_1(t,x,D))\bar{u}.\end{aligned} \tag{9.42}$$

Comme $q(t,x,\xi)$ est dans $L^\infty(0,T,\Sigma^{-2}_{s-d/2})$, T_q est continu de $L^2(0,T, H^r(\mathbb{R}^d))$ dans $L^2(0,T,H^{r+2}(\mathbb{R}^d))$ pour tout r, ce qui implique que $(1+|D_x|^2)^{\sigma/2}T_q b_1(t,x,D)\bar{u}$ est dans $L^2(0,T,H^2(\mathbb{R}^d))$, donc dans L^2. Comme $b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{-\sigma/2}$ est dans $Op(S^{-\sigma}_{Sch})$ par la proposition 3.4 de [14], on en déduit que

$$b(t,x,D)(1+|D_x|^2)^{-\frac{\sigma}{2}}(1+|D_x|^2)^{\frac{\sigma}{2}}T_q b_1(t,x,D)\bar{u} \text{ est dans } H^{\sigma}_{Sch}. \tag{9.43}$$

Pour montrer que $T_q\bar{u}$ est microlocalement H^{σ}_{Sch} en (t_0,x_0,τ_0,ξ_0), il suffit d'après (9.42) et (9.43) de montrer que

$$b(t,x,D)T_q(1-b_1(t,x,D))\bar{u} \text{ est dans } H^{\sigma}_{Sch}. \tag{9.44}$$

Par conséquent, pour montrer (9.41), et donc pour conclure, il reste à prouver que

$$\begin{aligned}b(t,x,D)T_q(1-b_1(t,x,D)) \text{ est continu de } L^2(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))\\ \text{dans } L^2(\mathbb{R},H^{\sigma}(\mathbb{R}^d)),\end{aligned} \tag{9.45}$$

lorsque $b(t,x,\tau,\xi)$ et $1-b_1(t,x,\tau,\xi)$ sont des symboles dans S^0_{Sch} nuls dans un voisinage S-conique de $\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\, (t,x)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$, $1-b_1$ est nul dans un voisinage S-conique du support de b, et $s\leqslant\sigma\leqslant 2s+1/2-d/2$. Pour cela, nous utilisons le fait que $\partial_t^k q$ est dans $L^\infty(0,T,\Sigma^{-2}_{s-d/2-2k})$ pour $2k<s+2-d/2$, ce qui a été montré dans la proposition 4.1 et le lemme 4.4 de [16]. La preuve de (9.45) fait l'objet du lemme 9.6. □

Lemme 9.6. — *Soit* $b(t,x,\tau,\xi)$ *et* $b_1(t,x,\tau,\xi)$ *dans* S^0_{Sch} *nuls dans un voisinage S-conique de* $\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\,(t,x)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$*, tel que* b_1 *est nul dans un voisinage S-conique du support de* b*. Soit* $\rho>0$ *non entier. Soit* $q(t,x,\xi)$ *tel que* $\partial_t^k q$ *est dans* $L^\infty(\mathbb{R},\Sigma^{-2}_{\rho-2k}(\mathbb{R}^d))$ *pour* $2k<\rho+2$*. Alors* $b(t,x,D)T_q b_1(t,x,D)$ *est continu de* $L^2(\mathbb{R},H^r(\mathbb{R}^d))$ *dans* $L^2(\mathbb{R},H^{r+\rho+2}(\mathbb{R}^d))$ *pour tout réel* r*.*

9.1. Preuve du lemme 9.6.

La fin de cette étude est consacrée à la preuve du lemme 9.6. Cette preuve va se déduire de formules de composition entre T_q et $b(t,x,D)$, où $b(t,x,\tau,\xi)$ est dans S^m_{Sch} et nul dans un voisinage S-conique de $\{(t,x,\tau=\pm 1,\xi=0),\,(t,x)\in\mathbb{R}^{d+1}\}$. Dans toute la suite, $L^2(H^s)$ désigne l'espace $L^2(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$. Nous commençons par définir la classe de symboles $\Sigma^{m,\mu}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$.

Définition 9.7. — *Pour* $m\in\mathbb{R}$*,* ρ *réel et* $\mu>0$*, nous définissons* $\Sigma^{m,\mu}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$ *comme l'ensemble des fonctions* $a(t,x,\tau,\xi)$ C^ρ *en* x *et* C^∞ *en* (τ,ξ) *telles que :*

$$\|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a(t,.,\tau,\xi)\|_{C^\rho}\leqslant C_{l,\beta}(1+|\xi|^2)^{\frac{m-2l-|\beta|}{2}},$$

et telles que $|\tau|\leqslant\mu(1+|\xi|^2)$ *sur le support de* $a(t,x,\tau,\xi)$*.*

Nous définissons des opérateurs paradifférentiels à partir des symboles de la classe $\Sigma^{m,\mu}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$ et de l'analyse de Littlewood-Paley classique.

Définition 9.8. — *Soit* $m\in\mathbb{R}$*,* ρ *réel,* $\mu>0$ *et* $a\in\Sigma^{m,\mu}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$*. Nous notons* T_a *l'opérateur sur* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ *défini par la formule :*

$$T_a u=\sum_{p\geqslant 2}S_{p-2}a(t,x,D)\Delta_p u,$$

où $S_p a(t,x,\tau,\xi)$ *est le symbole obtenu en faisant agir le multiplicateur de Fourier* S_p *sur* a *relativement à la variable* x*.*

Si $b(t,x,\tau,\xi)$ dans S^m_{Sch} est tel que $|\tau|\leqslant\mu(1+|\xi|^2)$ sur son support, alors b est dans $\Sigma^{m,\mu}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$.

Lemme 9.9. — *Soit* m *un réel,* $\mu>0$ *et* a *dans* S^m_{Sch} *tel que* $|\tau|\leqslant\mu(1+|\xi|^2)$ *sur son support, alors* $a(t,x,D)=T_a+R(t,x,D)$*, où* R *est continu de* H^s_{Sch} *dans* $H^{s'}_{Sch}$ *pour tous réels* s *et* s'*.*

Preuve. — Nous avons l'égalité :

$$a(t,x,D) - T_a = \sum_{p\geqslant 2}(a(t,x,D) - S_{p-2}a(t,x,D))\Delta_p + a(t,x,D)S_2,$$
$$= \sum_{p\geqslant 0}\Delta_p a(t,x,D)S_{p+3} + a(t,x,D)S_2,$$

et comme $a(t,x,D)S_2$ est dans $Op(S^{-\infty}_{Sch})$ par la proposition 3.4 de [14], il suffit de montrer la même chose pour $\sum_{p\geqslant 0}\Delta_p a(t,x,D)S_{p+3}$. Soit N tel que $N+m\geqslant 0$ et $N+m+1$ est un entier et soit (j,α) et (k,β) dans $\mathbb{N}^{d+1}$. Alors :

$$|\partial_t^j\partial_x^\alpha\partial_\tau^k\partial_\xi^\beta\Delta_p a(t,x,\tau,\xi)|\leqslant C2^{-p(N+m+1)}\sup_{|\gamma|=N+m+1}|\partial_t^j\partial_x^{\alpha+\gamma}\partial_\tau^k\partial_\xi^\beta a(t,x,\tau,\xi)|$$
$$\leqslant C2^{-p(N+m+1)}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{m-2k-|\beta|}{4}},$$

ce qui joint au fait que $|\xi|\leqslant 2^{p+3}$ sur le support de $\varphi(2^{-(p+3)}\xi)$ et $|\tau|\leqslant\mu(1+|\xi|^2)$ sur le support de $a(t,x,\tau,\xi)$ implique :

$$|\partial_t^j\partial_x^\alpha\partial_\tau^k\partial_\xi^\beta\Delta_p a(t,x,\tau,\xi)\varphi(2^{-(p+3)}\xi)|\leqslant 2^{-p}(1+\tau^2+|\xi|_4^4)^{\frac{-N-2k-|\beta|}{4}}.$$

Donc $2^p\Delta_p a(t,x,\tau,\xi)\varphi(2^{-(p+3)}\xi)$ est dans S^{-N}_{Sch} avec des semi-normes bornées indépendamment de p, ce qui implique que $\sum_{p\geqslant 0}\Delta_p a(t,x,D)S_{p+3}$ est dans $Op(S^{-N}_{Sch})$ pour tout N tel que $N+m\geqslant 0$ et $N+m+1$ est un entier. $\sum_{p\geqslant 0}\Delta_p a(t,x,D)S_{p+3}$ est donc dans $Op(S^{-\infty}_{Sch})$. □

Le lemme suivant est utile pour la suite :

LEMME 9.10. — *Soit $(M_q(t,x,\tau,\xi))_{q\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions C^∞ en (τ,ξ) telles qu'il existe quatres réels C_1, C_2, C_3, C_4, avec $0<C_1<C_2<C_3$, $C_4>0$ et*

(9.46)
$$Supp(\mathcal{F}_x M_0(t,\eta,\tau,\xi))$$
$$\subset\{(t,\eta,\tau,\xi)\,/\,|\eta|<C_1,|\xi|<C_3,|\tau|\leqslant C_4(1+|\xi|^2)\},$$
$$Supp(\mathcal{F}_x M_q(t,\eta,\tau,\xi))$$
$$\subset\{(t,\eta,\tau,\xi)\,/\,|\eta|<C_12^q,C_22^q<|\xi|<C_32^q,|\tau|\leqslant C_4(1+|\xi|^2)\},\ \forall q\in\mathbb{N}^*.$$

Supposons de plus que, pour tout (l,β) *dans* $\mathbb{N}^{d+1}$*, il existe un réel* $C_{l,\beta}$ *avec*

$$|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta M_q(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C_{l,\beta} 2^{q(m-2l-|\beta|)}. \tag{9.47}$$

Alors pour tout s*, l'opérateur* $\sum_q M_q(t,x,D)$ *est borné de* $L^2(H^s)$ *dans* $L^2(H^{s-m})$*. De plus, sa norme s'estime à partir de* C_1*,* C_2*,* C_3*,* C_4 *et* $C_{l,\beta}$*.*

Preuve. — Soit $\widetilde{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ égale à 1 dans un voisinage de $\{\xi \,/\, C_2 \leqslant |\xi| \leqslant C_3\}$ et $\widetilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ égale à 1 dans un voisinage de $\{\xi \,/\, |\xi| \leqslant C_3\}$. Alors, pour $q \geqslant 0$:

$$M_q(t,x,D)u = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\int \mathrm{e}^{i(t\tau + <x,\xi>)} M_q(t,x,\tau,\xi) \widehat{u}_q(\tau,\xi) d\tau d\xi,$$

où $\widehat{u}_q = \widetilde{\psi}(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)$ pour $q \geqslant 1$, et $\widehat{u}_0 = \widetilde{\varphi}(\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)$. Posons $m_q(t,x,\tau,\xi) = M_q(t,x,2^{2q}\tau, 2^q\xi)$. (9.46) et (9.47) impliquent que :

$$|\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta m_q(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C_{l,\beta} 2^{qm},$$

et que m_q est à support dans $\{\xi \,/\, C_2 \leqslant |\xi| \leqslant C_3\}$ si $q \geqslant 1$, $\{\xi \,/\, |\xi| \leqslant C_3\}$ si $q = 0$, et $\{\tau \,/\, |\tau| \leqslant C_4(1 + C_3^2)\}$ pour tout $q \geqslant 0$.

Soit $k_q(t,x,s,y) = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\int \mathrm{e}^{i(s\tau + <y,\xi>)} m_q(t,x,\tau,\xi) d\tau d\xi$, alors :

$$|k_q(t,x,s,y)| \leqslant C 2^{mq} (1 + |s| + |y|)^{-d-2}, \tag{9.48}$$

et comme $m_q(t,x,\tau,\xi) = \int\int \mathrm{e}^{-i(s\tau + <y,\xi>)} k_q(t,x,s,y) ds dy$, alors :

(9.49)

$$\begin{aligned} M_q(t,x,D)u &= \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int\int\int\int \mathrm{e}^{i(t\tau + <x,\xi>)} \phi_q(s,y,\tau,\xi) k_q(t,x,s,y) \widehat{u}_q(\tau,\xi) ds dy d\tau d\xi, \\ &= \int\int k_q(t,x,s,y) \phi_q(s,y,D_{t,x}) u_q(t,x) ds dy, \end{aligned}$$

où $\phi_q(s,y,\tau,\xi) = \exp(-i2^{-2q}s\tau - i2^{-q} < y, \xi >)$. Comme :

$$\|\phi_q(s,y,D_{t,x}) u_q(.,.)\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \leqslant \|u_q\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})},$$

(9.48) et (9.49) impliquent :

$$\|M_q(t,x,D)u\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \leqslant C 2^{mq} \|u_q\|_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})}. \tag{9.50}$$

Comme u est dans $L^2(H^s)$:

$$\sum_{q\geqslant 0} 4^{qs}\|u_q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{d+1})} \leqslant C\|u\|^2_{L^2(H^s)}, \tag{9.51}$$

ce qui avec (9.46) et (9.50) donne le résultat. □

Le lemme 9.10 implique le lemme suivant.

Lemme 9.11. — *Soit $m \in \mathbb{R}$, ρ réel, $\mu > 0$ et $a \in \Sigma^{m,\mu}_\rho(\mathbb{R}^{d+1})$. Pour tout $p_0 \geqslant 3$, l'opérateur sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{d+1})$ défini par la formule :*

$$\sum_{p\geqslant p_0} S_{p-p_0} a(t,x,D)\Delta_p u, \tag{9.52}$$

diffère de T_a par un opérateur continu de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s+\rho-m})$ pour tout réel s.

Preuve. — La différence entre les deux opérateurs s'écrit :

$$\sum_{2\leqslant p\leqslant p_0-1} S_{p-2} a(t,x,D)\Delta_p + \sum_{p\geqslant p_0}\sum_{q=p-p_0}^{p-3} \Delta_q a(t,x,D)\Delta_p, \tag{9.53}$$

et comme $\sum_{2\leqslant p\leqslant p_0-1} S_{p-2}a(t,x,D)\Delta_p$ est continu de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s'})$ pour tous réels s et s', il suffit d'étudier le second terme de (9.53). Nous posons $M_p(t,x,\tau,\xi) = \sum_{q=p-p_0}^{p-3} \Delta_q a(t,x,\tau,\xi)\psi(2^{-p}\xi)$ pour $p \geqslant p_0$, et $M_p(t,x,\tau,\xi) = 0$ sinon. $\mathcal{F}_x M_p(t,\eta,\tau,\xi) = \sum_{q=p-p_0}^{p-3} \mathcal{F}_x a(t,\eta,\tau,\xi)$ $\psi(2^{-q}\eta)\psi(2^{-p}\xi)$, donc M_p vérifie (9.46) avec $C_1 = 1/4$, $C_2 = 1/2$, $C_3 = 2$ et $C_4 = \mu$. Sur le support de $\psi(2^{-p}\xi)$, comme $p - p_0 \leqslant q \leqslant p-3$, la définition 9.7 implique :

$$\begin{aligned} |\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi \Delta_q a(t,x,\tau,\xi)| &\leqslant 2^{-q\rho}\|\partial^l_\tau\partial^\beta_\xi a(t,.,\tau,\xi)\|_{C^\rho} \\ &\leqslant 2^{-q\rho} C_{l,\beta}(1+|\xi|^2)^{\frac{m-2l-|\beta|}{2}} \leqslant 2^{p(-\rho+m-2l-|\beta|)}, \end{aligned} \tag{9.54}$$

ce qui implique (9.47) grâce à la formule de Leibnitz. Le lemme 9.10 permet alors de conclure. □

Nous montrons certaines propriétés d'action sur les espaces $L^2(H^s)$ et de calcul symbolique.

Théorème 9.12. —

(i) *Soit a dans $\Sigma_\rho^{m,\mu}(\mathbb{R}^{d+1})$ et $\rho>0$. L'opérateur T_a est borné de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s-m})$ pour tout réel s.*

(ii) *Soit $\rho>0$ non entier, soit a dans $\Sigma_\rho^{m,\mu}(\mathbb{R}^{d+1})$ et soit b dans $\Sigma_\rho^{m',\mu}(\mathbb{R}^{d+1})$ tel que $\partial_t^k b$ est dans $\Sigma_{\rho-2k}^{m',\mu}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout entier k avec $2k<\rho+2$. La différence*

$$T_a\circ T_b-\sum_{2l+|\beta|<\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}T_{\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b},$$

est un opérateur borné de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s-m-m'+\rho})$ pour tout réel s.

(iii) *Soit $\rho>0$ non entier, soit $a(t,x,\xi)$ dans $L^\infty(\mathbb{R},\Sigma_\rho^m(\mathbb{R}^d))$ et soit b dans $\Sigma_\rho^{m',\mu}(\mathbb{R}^{d+1})$. La différence*

$$T_a\circ T_b-\sum_{|\beta|<\rho}\frac{1}{i^{|\beta|}\beta!}T_{\partial_\xi^\beta a\partial_x^\beta b},$$

est un opérateur borné de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s-m-m'+\rho})$ pour tout réel s.

Preuve. — (i) Nous posons $M_p(t,x,\tau,\xi)=S_{p-2}a(t,x,\tau,\xi)\psi(2^{-p}\xi)$ pour $p\geqslant 2$, et $M_p(t,x,\tau,\xi)=0$ sinon.

$$\mathcal{F}_xM_p(t,\eta,\tau,\xi)=\mathcal{F}_xa(t,\eta,\tau,\xi)\varphi(2^{-(p-2)}\eta)\psi(2^{-p}\xi),$$

donc M_p vérifie (9.46) avec $C_1=1/4$, $C_2=1/2$, $C_3=2$ et $C_4=\mu$. Sur le support de $\psi(2^{-p}\xi)$, la définition 9.7 implique :

$$\begin{aligned}|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta S_{p-2}a(t,x,\tau,\xi)|&\leqslant C\|\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a(t,.,\tau,\xi)\|_{C^\rho}\\&\leqslant C_{l,\beta}(1+|\xi|^2)^{\frac{m-2l-|\beta|}{2}}\leqslant C2^{p(m-2l-|\beta|)},\end{aligned}\tag{9.55}$$

ce qui implique (9.47) grâce à la formule de Leibnitz. Le lemme 9.10 permet alors de conclure.

(ii) $T_a \circ T_b u = \sum_{p\geqslant 2, q\geqslant 2} S_{p-2}a(t,x,D)\Delta_p(S_{q-2}b(t,x,D)\Delta_q u)$ et :

$$\begin{aligned}
&\sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} T_{\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b} u \\
&= \sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} \Big(T_{\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b} S_2 u + \sum_{q\geqslant 2} T_{\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b}\Delta_q u \Big) \\
&= \sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} T_{\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b} S_2 u \\
&\quad + \sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} \sum_{p,q\geqslant 2} S_{p-2}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)\Delta_p\Delta_q u.
\end{aligned} \tag{9.56}$$

L'opérateur $\sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} T_{\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b} S_2$ est continu de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s'})$ pour tous réel s et s' car c'est le cas pour S_2 et grâce à (i). Il suffit donc de regarder :

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\geqslant 2, q\geqslant 2} S_{p-2}a(t,x,D)\Delta_p(S_{q-2}b(t,x,D)\Delta_q u) \\
&- \sum_{p\geqslant 2, q\geqslant 2}\ \sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} S_{p-2}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)\Delta_p\Delta_q u.
\end{aligned} \tag{9.57}$$

Grâce au lemme 9.11 et au point (i), nous pouvons utiliser (9.52) avec $p_0 = 5$. Nous nous intéressons donc à :

$$\begin{aligned}
&\sum_{p\geqslant 5, q\geqslant 5} S_{p-5}a(t,x,D)\Delta_p(S_{q-5}b(t,x,D)\Delta_q u) \\
&- \sum_{p\geqslant 5, q\geqslant 5}\ \sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!} S_{p-5}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)\Delta_p\Delta_q u.
\end{aligned} \tag{9.58}$$

Nous remarquons que $|q-p|\leqslant 2$ sur le support de la somme. Le terme général de (9.58) s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^{2(d+1)}}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{i(t-s)\gamma+i<x-y,\theta>+is\tau+i<y,\xi>}\\
&\Bigg(S_{p-5}a(t,x,\gamma,\theta)S_{q-5}b(s,y,\tau,\xi)\\
&-\sum_{2l+|\beta|<\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}S_{p-5}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi)\Bigg)\\
&\psi(2^{-p}\theta)\psi(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi dsdyd\gamma d\theta\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\!\!\int e^{it\tau+i<x,\xi>}M_{pq}(t,x,\tau,\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi,
\end{aligned}\tag{9.59}$$

avec :

$$\begin{aligned}
&M_{pq}(t,x,\tau,\xi)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{-i(t-s)\gamma-i<x-y,\theta>}\\
&\Bigg(S_{p-5}a(t,x,\tau-\gamma,\xi-\theta)S_{q-5}b(s,y,\tau,\xi)\\
&\qquad-\sum_{2l+|\beta|<\rho}\frac{1}{i^{l+|\beta|}l!\beta!}S_{p-5}(\partial_\tau^l\partial_\xi^\beta a\partial_t^l\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi)\Bigg)\\
&\psi(2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-q}\xi)dsdyd\gamma d\theta.
\end{aligned}\tag{9.60}$$

Pour tout (k,α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$:

$$|\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha M_{pq}(t,x,\tau,\xi)|\leqslant 2^{q(m+m'-\rho-2k-|\alpha|)}.\tag{9.61}$$

Pour prouver (9.61), nous utilisons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&|\partial_t^l\partial_x^\beta\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha S_{q-5}b(t,x,\tau,\xi)|\\
&\qquad\leqslant\Bigg(\sum_{r\leqslant q-6}2^{r(2l+|\beta|-\rho)}\Bigg)\|\partial_t^l\partial_\tau^k\partial_\xi^\alpha b(t,.,\tau,\xi)\|_{C^{\rho-2l}}\\
&\qquad\leqslant C\Bigg(\sum_{r\leqslant q-6}2^{r(2l+|\beta|-\rho)}\Bigg)(1+|\xi|^2)^{\frac{m'-2k-|\alpha|}{2}}.
\end{aligned}\tag{9.62}$$

Sur le support de $\psi(2^{-q}\xi)$, nous en déduisons pour $\rho < 2l + |\beta| < \rho + 2$:

$$|\partial_t^l \partial_x^\beta \partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha S_{q-5} b(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C 2^{q(2l+|\beta|-\rho+m'-2k-|\alpha|)}. \tag{9.63}$$

La formule de Taylor appliqué à la variable y, puis à la variable s implique l'égalité :

$$\begin{aligned} S_{q-5}b(s,y,\tau,\xi) - \sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{(s-t)^l (y-x)^\beta}{l!\beta!} \partial_t^l \partial_x^\beta S_{q-5} b(t,x,\tau,\xi) \\ = \sum_{\rho<2l+|\beta|<\rho+2} \frac{(s-t)^l (y-x)^\beta}{l!\beta!} B_{l,\beta,q}(t,x,\tau,\xi), \end{aligned} \tag{9.64}$$

où (9.63) implique que sur le support de $\psi(2^{-q}\xi)$:

$$|\partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha B_{l,\beta,q}(t,x,\tau,\xi)| \leqslant C 2^{q(2l+|\beta|-\rho+m'-2k-|\alpha|)}. \tag{9.65}$$

Le reste de la preuve de (9.61) est analogue à la preuve de (4.17).

$(M_{pq}(t,x,\tau,\xi))_{p,q\geqslant 5,|p-q|\leqslant 2}$ vérifie (9.46) avec $C_1 = 1/4$, $C_2 = 1/2$, $C_3 = 2$ et $C_4 = \mu$. De plus, (9.47) est satisfait d'après (9.61). L'opérateur (9.58) est donc borné de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s+\rho-m-m'})$ ce qui conclut le point (ii).

(iii) $T_a \circ T_b u = \sum_{p\geqslant 2, q\geqslant 2} S_{p-2} a(t,x,D_x) \Delta_p (S_{q-2} b(t,x,D) \Delta_q u)$ et :

$$\begin{aligned} &\sum_{|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} T_{\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b} u \\ &\quad = \sum_{|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} \left(T_{\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b} S_2 u + \sum_{q\geqslant 2} T_{\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b} \Delta_q u \right) \\ &\quad = \sum_{|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} T_{\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b} S_2 u + \sum_{|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} \sum_{p,q\geqslant 2} S_{p-2}(\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b) \Delta_p \Delta_q u. \end{aligned} \tag{9.66}$$

L'opérateur $\sum_{|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} T_{\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b} S_2$ est continu de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s'})$ pour tous réel s et s' car c'est le cas pour S_2 et grâce à (i). Il suffit donc de regarder :

$$(9.67)\quad \sum_{p\geqslant 2, q\geqslant 2} S_{p-2}a(t,x,D_x)\Delta_p(S_{q-2}b(t,x,D)\Delta_q u) - \sum_{p\geqslant 2, q\geqslant 2}\sum_{|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} S_{p-2}(\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b)\Delta_p\Delta_q u.$$

Grâce au lemme 9.11 et au point (i), nous pouvons utiliser (9.52) avec $p_0 = 5$. Nous nous intéressons donc à :

$$(9.68)\quad \sum_{p\geqslant 5, q\geqslant 5} S_{p-5}a(t,x,D_x)\Delta_p(S_{q-5}b(t,x,D)\Delta_q u) - \sum_{p\geqslant 5, q\geqslant 5}\sum_{|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} S_{p-5}(\partial_\xi^\beta a \partial_x^\beta b)\Delta_p\Delta_q u.$$

Nous remarquons que $|q-p| \leqslant 2$ sur le support de la somme. Le terme général de (9.68) s'écrit :

$$(9.69)\quad \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int e^{i<x-y,\theta>+it\tau+i<y,\xi>} \left(S_{p-5}a(t,x,\theta)S_{q-5}b(t,y,\tau,\xi) - \sum_{|\beta|<\rho}\frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} S_{p-5}(\partial_\xi^\beta a\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi)\right) \psi(2^{-p}\theta)\psi(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi dy d\theta$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\!\!\int e^{it\tau+i<x,\xi>} M_{pq}(t,x,\tau,\xi)\widehat{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi,$$

avec :

$$(9.70)\quad M_{pq}(t,x,\tau,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int\!\!\int e^{-i<x-y,\theta>}\bigg(S_{p-5}a(t,x,\xi-\theta)S_{q-5}b(t,y,\tau,\xi) - \sum_{|\beta|<\rho}\frac{1}{i^{|\beta|}\beta!} S_{p-5}(\partial_\xi^\beta a\partial_x^\beta b)(t,x,\tau,\xi)\bigg)\psi(2^{-p}(\xi-\theta))\psi(2^{-q}\xi)dy d\theta.$$

Par une preuve analogue à celle de (4.17), on montre que tout (k, α) dans $\mathbb{N}^{d+1}$:

$$|\partial_\tau^k \partial_\xi^\alpha M_{pq}(t, x, \tau, \xi)| \leqslant 2^{q(m+m'-\rho-2k-|\alpha|)}, \tag{9.71}$$

en utilisant cette fois l'opérateur

$$L = (1 + 2^{2q}|x-y|^2)^{-1}(1 - 2^{2q}(x-y)D_\theta),$$

qui vérifie $L(\mathrm{e}^{-i<x-y,\theta>}) \equiv \mathrm{e}^{-i(t-s)\gamma - i<x-y,\theta>}$.

$(M_{pq}(t, x, \tau, \xi))_{p,q\geqslant 5, |p-q|\leqslant 2}$ vérifie (9.46) avec $C_1 = 1/4$, $C_2 = 1/2$, $C_3 = 2$ et $C_4 = \mu$. De plus, (9.47) est satisfait d'après (9.71). L'opérateur (9.68) est donc borné de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s+\rho-m-m'})$ ce qui conclut le point (iii). □

Preuve du lemme 9.6. — On a

$$\begin{aligned} b(t,x,D)T_q b_1(t,x,D) &= (b(t,x,D) - T_b)T_q b_1(t,x,D) \\ &\quad + T_b T_q(b_1(t,x,D) - T_{b_1}) + T_b T_q T_{b_1}. \end{aligned} \tag{9.72}$$

Comme $b(t, x, \tau, \xi)$ et $b_1(t, x, \tau, \xi)$ sont dans S^0_{Sch} et sont nuls dans un voisinage S-conique de $\{(t, x, \tau = \pm 1, \xi = 0), (t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}\}$, il existe $\mu > 0$ tel que $|\tau| \leqslant \mu(1 + |\xi|^2)$ sur leur support respectif. En particulier, T_b et T_{b_1} sont continus de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^s)$ pour tout s par le point (i) du théorème 9.12. $b(t, x, D) - T_b$ et $b_1(t, x, D) - T_{b_1}$ sont continus de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s'})$ pour tout s et s' par le lemme 9.9. Enfin, T_q est continu de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s+2})$ pour tout s. Par conséquent, d'après (9.72), il reste à montrer que

$$T_b T_q T_{b_1} \text{ est continu de } L^2(H^s) \text{ dans } L^2(H^{s+\rho+2}) \text{ pour tout } s. \tag{9.73}$$

Par le point (iii) du théorème 9.12, on a

$$T_q T_{b_1} = \sum_{|\alpha|<\rho} \frac{1}{i^{|\alpha|}\alpha!} T_{\partial_\xi^\alpha q \partial_x^\alpha b_1} + R, \tag{9.74}$$

où R est un opérateur borné de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s+2+\rho})$ pour tout réel s. De plus, $\partial_t^k(\partial_\xi^\alpha q \partial_x^\alpha b_1)$ est dans $\Sigma^{-2-|\alpha|,\mu}_{\rho-2k}(\mathbb{R}^{d+1})$ pour tout entier k avec $2k < \rho + 2$, donc le point (ii) du théorème 9.12 implique que

$$T_b T_{\partial_\xi^\alpha q \partial_x^\alpha b_1} = \sum_{2l+|\beta|<\rho} \frac{1}{i^{l+|\beta|} l!\beta!} T_{\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta b \partial_t^l \partial_x^\beta (\partial_\xi^\alpha q \partial_x^\alpha b_1)} + R_\alpha, \tag{9.75}$$

où R_α est un opérateur borné de $L^2(H^s)$ dans $L^2(H^{s+2+\rho})$ pour tout réel s. Comme $b_1 \equiv 0$ sur le support de b, on a

$$\partial_\tau^l \partial_\xi^\beta b \partial_t^l \partial_x^\beta (\partial_\xi^\alpha q \partial_x^\alpha b_1) = 0, \forall (l, \alpha, \beta). \tag{9.76}$$

(9.74), (9.75) et (9.76) impliquent (9.73). □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Alabidi, Réflexion transverse des singularités pour un problème aux limites non linéaire d'ordre 2. C. R. A. S, série I-10 t.300, 1985.

[2] J.M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup (4ème série). 14, (1981), 209-246.

[3] L. Boutet de Monvel, Propagation des Singularités des Solutions d'Équations Analogues à l'Équation de Schrödinger, Fourier integral operators and partial differential equations, Lecture Notes in Math. 459, Springer-Verlag, Berlin, (1975), 1-14.

[4] J.Y. Chemin, Fluides parfaits incompressibles. Astérisque 230, 1995.

[5] H. Chihara, Local existence for semi-linear Schrödinger equations. Math. Japonica 42, (1995), 35-52.

[6] J.M. Delort, Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein-Gordon quasilinéaire à données petites en dimension 1. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup (4ème série). 34, (2001), 1-61, 2001.

[7] L. Hörmander, Linear partial differential operators. Springer, Berlin Heidelberg, 1969.

[8] L. Hörmander, Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. Springer, Berlin Heidelberg, 1997.

[9] C. Kenig, G. Ponce, L. Vega, Smoothing effects and local existence theory for the generalized nonlinear Schrödinger equations. Invent. Math. 134, no 3, (1998), 489-545.

[10] R. Lascar, Propagation des singularités des solutions d'équations pseudodifférentielles quasi-homogènes. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 27, (1977), 79-123.

[11] J.L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications. Dunod, Paris, 1968.

[12] Y. Meyer, Remarques sur un théorème de J. M. Bony, Suppl. ai Rend. del Circolo mat. di Palermo, (1981), 1-20.

[13] M. Sablé-Tougeron, Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires. Ann. Inst. Fourier. 36, (1986), 39-82.

[14] J. Szeftel, Réflexion des singularités pour l'équation de Schrödinger. Comm. Partial Differential Equations 29 (5-6), (2004), 707-761.

[15] J. Szeftel, Design of absorbing boundary conditions for Schrödinger equations in $\mathbb{R}^d$. SIAM J. Numer. Anal., 42(4), (2004), 1527-1551.

[16] J. Szeftel, Microlocal dispersive smoothing for the nonlinear Schrödinger equation. Soumis, 2003.

[17] J. Szeftel, Absorbing boundary conditions for nonlinear Schrödinger equations. Soumis, 2004.

Manuscrit reçu le 23 février 2004,
accepté le 23 novembre 2004.

Jérémie SZEFTEL,
Université Paris 13
LAGA UMR 7539, Institut Galilée
99, avenue J.B.Clément
93430 Villetaneuse (France)

szeftel@math.univ-paris13.fr