ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Franck SUEUR

Approche visqueuse de solutions discontinues de systèmes hyperboliques semilinéaires

Tome 56, nº 1 (2006), p. 183-245.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_1_183_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
56, 1 (2006) 183-245

APPROCHE VISQUEUSE DE SOLUTIONS DISCONTINUES DE SYSTÈMES HYPERBOLIQUES SEMILINÉAIRES

par Franck SUEUR

RÉSUMÉ. — On s'intéresse à des systèmes symétriques hyperboliques multidimensionnels en présence d'une semilinéarité. Il est bien connu que ces systèmes admettent des solutions discontinues, régulières de part et d'autre d'une hypersurface lisse caractéristique de multiplicité constante. Une telle solution u^0 étant donnée, on montre que u^0 est limite quand $\varepsilon \to 0$ de solutions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ du système perturbé par une viscosité de taille ε. La preuve utilise un problème mixte parabolique et des développements de couches limites. On s'intéresse aussi à des singularités plus faibles comme des sauts de dérivées.

ABSTRACT. — We are interested in some multidimensional semilinear symmetric hyperbolic systems. It is well known that these systems have some discontinuous solutions which are regular outside of a smooth hypersurface characteristic of constant multiplicity. We suppose that such a solution u^0 is given and we show that u^0 is the limit, when $\varepsilon \to 0$, of solutions $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ of the system perturbated by a viscosity of size ε. The key tools of the proof are a parabolic boundary problem and boundary layers expansions. We also consider weaker singularities as derivatives jumps.

1. Introduction

On considère un opérateur

$$\mathcal{H} := A_0(t,x)\partial_t + \sum_{1\leqslant i\leqslant n} A_i(t,x)\partial_i + B(t,x) \tag{1.1}$$

symétrique hyperbolique. Les matrices $(A_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et B sont de taille $N\times N$, symétriques, C^∞ de leurs arguments, constantes hors d'un compact de

Mots-clés : approche visqueuse, couches limites, solutions discontinues.
Classification math. : 35F30, 35K50, 35R05.

$\mathbb{R}^{n+1}$. On considère aussi des fonctions $(t,x) \mapsto f(t,x)$ et $(t,x,u) \mapsto F(t,x,u)$ qui joueront respectivement le rôle de terme source et de non-linéarité. Ces fonctions f et F sont à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. La fonction F dépend de façon C^∞ de ses arguments . On suppose que pour tout (t,x) dans $\mathbb{R}^{1+n}$, on a $F(t,x,0)=0$. On note $\Omega_T := (0,T)\times\mathbb{R}^n$. On introduit le problème

$$P^0(T): \quad \mathcal{H}u^0 = F(t,x,u^0) + f(t,x) \text{ quand } (t,x)\in\Omega_T.$$

On s'interesse à des solutions particulières singulières sur une hypersurface Γ de $\mathbb{R}^{n+1}$ et régulières en dehors de Γ. Les singularités envisagées sont des sauts de u ou de ses dérivées, l'hypersurface Γ étant supposée lisse et caractéristique. Comme on s'interesse à des résultats locaux, quitte à effectuer un redressement, on peut supposer que $\Gamma = \{x_n = 0\}$. On note $x=(y,x_n)$, et, pour $T>0$,

$$\Gamma_T := \{(t,y,0)\in\mathbb{R}^{1+n} : 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

On utilisera les espaces de Sobolev $(H^s)_{s\in\mathbb{R}_+}$ construits sur L^2. Une fonction sera dite H^∞ sur un domaine si toutes ses dérivées sont de carrés intégrables sur ce domaine. On note $p{-}H^\infty(\Omega_T)$ l'espace des fonctions H^∞ de part et d'autre de Γ_T et on suppose que f est dans $p{-}H^\infty(\Omega_T)$. Le fait que Γ soit une surface caractéristique se traduit par $\ker A_n \neq \{0\}$. On supposera dans ce travail :

Hypothèse 1.1. — *Le champ d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ $\ker A_n$ *est de dimension constante sur* Γ.

C'est en particulier le cas lorsque l'opérateur est strictement hyperbolique. On notera d_0 la dimension de $\ker A_n$ sur Γ.

L'étude du problème $P^0(T_0)$ pour des opérateurs strictements hyperboliques, est menée par G. Métivier dans [17], [18]. Au paragraphe 3, on effectue une réduction du problème $P^0(T_0)$ qui permet d'appliquer au cas présent des résultats d'O. Guès [9] et de l'auteur [26].

Dans la suite, on suppose donnés un réel $T_0>0$ *et une solution* u^0 *dans* $p-H^\infty(\Omega_{T_0})$ *du problème* $P^0(T_0)$.

Notons que l'on ne fait aucune hypothèse sur la trace de u^0 à $t=0$.

Dans cet article, on montre que l'on peut obtenir u^0 comme limite de solutions du système perturbé par une petite viscosité. On considère une viscosité linéaire $\mathcal{E}$ de la forme

$$\mathcal{E} := \sum_{1\leqslant i,l\leqslant n} \partial_i E_{i,l}(t,x)\partial_l$$

où les matrices $(E_{i,l})_{1\leqslant i,l\leqslant n}$ sont de taille $N\times N$, symétriques, C^∞ de leurs arguments, constantes hors d'un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que le tenseur est dissipatif au sens suivant :

HYPOTHÈSE 1.2. — *Il existe $\delta>0$ tel que pour tout $(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1}$, pour tout $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in(\mathbb{R}^N)^n$,*

$$\sum_{1\leqslant i,l\leqslant n}\langle y_i, E_{i,l}(t,x)\ y_l\rangle \geqslant \delta\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|_2^2,$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$.

On considère donc le problème

$$P^\varepsilon(T):\quad \mathcal{L}^\varepsilon u^\varepsilon=0 \text{ quand } \ (t,x)\in\Omega_T$$

où

$$\mathcal{L}^\varepsilon u := \mathcal{H}u-(F(t,x,u)+f(t,x)+\varepsilon\mathcal{E}u)$$

et ε est un coefficient strictement positif destiné à tendre vers 0. On donne un premier énoncé simplifié. Des résultats plus précis sont donnés à la section suivante.

THÉORÈME 1.3. — *Il existe un temps T_1 dans $]0,T_0]$, un réel ε_0 dans $]0,1]$ et une famille $(u^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}$ de solutions respectives des problèmes $(P^\varepsilon(T_1))_{0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}$ telles que u^0 est limite de u^ε dans $L^2(\Omega_{T_1})$, quand ε tend vers 0, et*

$$\|u^0-u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_{T_1})}=O(\varepsilon^{\frac14}).$$

La première assertion du théorème nous renseigne sur l'effet de la semilinéarité. Notons que si l'existence, pour un $\varepsilon\in]0,1]$ fixé, d'une solution régulière u^ε au problème $P^\varepsilon(T_\varepsilon)$, où $T_\varepsilon>0$, est connue, le théorème 1.3 affirme, lui, l'existence des u^ε, pour $\varepsilon>0$ assez petit, sur un intervalle de temps non trivial commun. Bien sûr, dans le cas linéaire, on peut prendre $T_1=T_0$. La convergence des $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ vers u^0 est, à notre connaissance, un résultat nouveau *même dans le cas linéaire*. La méthode employée ici donne également des estimations dans les espaces de Sobolev H^s ainsi que dans L^∞. Ces dernières jouent un rôle crucial dans le cas semilinéaire.

Il se peut que la singularité soit plus faible qu'un saut de la fonction u^0 elle-même et ne concerne que le saut d'une dérivée (et ce ne peut être alors qu'une dérivée normale). On peut alors prendre $T_1=T_0$ et la qualité de l'approximation est alors d'autant meilleure que le saut concerne une dérivée d'ordre élevée.

Précisons que dans le théorème 1.3 les traces à $t=0$ des u^ε ne coïncident pas en général avec la trace à $t=0$ de u^0.

Dans cet article, on montre en fait que l'on peut décrire u^ε à l'aide d'un développement BKW de la forme

$$u^\varepsilon(t,x)=\sum_{j=0}^{k}\sqrt{\varepsilon}^{j}\,\mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})+\sqrt{\varepsilon}^{k+1}\,r_\varepsilon(t,x)$$

pour tout entier positif k, où le profil $\mathcal{U}^j$ se décompose en trois termes :

$$\mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}):=\mathcal{U}^j_a(t,x)+\mathcal{U}^j_b(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})+\mathcal{U}^j_c(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}).$$

Les fonctions $\mathcal{U}^j_b(t,x,\theta)$ et $\mathcal{U}^j_c(t,x,z)$ sont des termes rendant compte de la présence respectivement de couches limites caractéristiques et non caractéristiques de part et d'autre de Γ. Ces fonctions sont singulières à travers Γ et tendent vers 0 lorsque θ ou z tendent vers $\pm\infty$. Leur rôle est d'assurer le raccord de u^ε et de $\partial_n u^\varepsilon$ sur Γ. On a $u^0:=\mathcal{U}^0_a$. Le comportement de $\mathcal{U}^0_b$ est non linéaire. La couche limite non caractéristique n'apparaît que pour $j=2$, c'est-à-dire avec une amplitude ε. Cela provient de ce que le rôle des couches limites non caractéristiques ne concerne que le raccordement de dérivées d'ordre plus grand que 1 de u^0. Si les r premières dérivées de f^0 sont continues au passage de Γ, les profils $(\mathcal{U}^j_b)_{0\leqslant j\leqslant r}$ et $(\mathcal{U}^j_c)_{0\leqslant j\leqslant r+2}$ sont nuls. Le terme r_ε joue le rôle de reste.

Les couches limites apparaissent aussi dans des problèmes aux limites. Evoquons quelques travaux mathématiques significatifs sur les couches limites dans ce contexte. L'étude des couches limites non caractéristiques est menée en une dimension d'espace par M. Gisclon [6], F. Rousset [24] et en plusieurs dimensions d'espace par E. Grenier et O. Guès [8] sous une condition de petitesse peu naturelle et par [20] sous une condition spectrale plus fine. Dans le cas caractéristique, citons les articles d'O. Guès [10] et de l'auteur [26].

Insistons sur le fait que la singularité est ici portée par une hypersurface caractéristique, contrairement au cas des ondes de chocs. Dans ce dernier cas, la variable rapide adéquate est x_n/ε, ce qui correspond à des couches limites non caractéristiques de part et d'autre de l'hypersurface. Plusieurs articles récents traitent de l'approche visqueuse des ondes de choc. En une dimension d'espace, citons les articles de J. Goodman et Z. Xin [7], O. Guès et M. Williams [13] pour les chocs faibles, et F. Rousset [23] pour des chocs de force arbitraire satisfaisant l'hypothèse d'Evans. En plusieurs dimensions d'espace, l'étude est menée dans [11] sous l'hypothèse technique que le front de choc ne dévie pas trop d'un hyperplan. Cette hypothèse, artificielle, est supprimée dans [12].

On a choisi de travailler dans un cadre H^∞. Il est tout à fait possible de travailler avec une régularité très grande mais finie, au prix d'une analyse plus laborieuse.

Notons que l'on peut aussi considèrer une perturbation $\mathcal{E}$ de la forme

$$\mathcal{E} = \partial_n E_{n,n}(t,x)\partial_n$$

où la matrice $E_{n,n}$ est de taille $N \times N$, symétrique, dépend de façon C^∞ de ses arguments et est constante hors d'un compact de $\mathbb{R}^{n+1}$, et vérifie, pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\langle y, E_{n,n}(t,x)y\rangle \geqslant \delta\|y\|_2^2$ où δ est une constante strictement positive. Les résultats de l'article restent vrais pour une telle perturbation $\mathcal{E}$.

Signalons ici des perpectives d'extension des méthodes et des résultats présentés dans ce papier.

- Une question mathématique naturelle concerne l'hypothèse de symètrie des opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ et l'hypothèse 1.2 de dissipativité de la viscosité $\mathcal{E}$. Peut-on s'en passer en utilisant, par exemple, des symétriseurs pseudodifférentiels ? Plus précisemment, le théorème 1.3 est-il encore valide lorsque $\mathcal{H}$ est un opérateur strictement hyperbolique et $\mathcal{E}$ un opérateur uniformément elliptique compatible en un sens à déterminer ?
- Une application physique intéressante concerne le micromagnétisme. La modélisation des matériaux ferromagnétiques fait intervenir un terme d'échange qui joue un rôle analogue à la viscosité. La question du comportement du matériaux quand ce terme d'échange tend vers 0 se pose donc naturellement. On renvoie aux articles de G. Carbou, P. Fabrie et O. Guès [5], [4] pour un traitement mathématique relatif à cette question dans le cadre des problèmes aux limites.
- Il serait aussi intéressant d'essayer d'appliquer la démarche précédente à d'autres singularités le long de fronts caractéristiques dans le cas quasilinéaire comme les ondes soniques mises en évidence par G. Métivier dans [19] ou dans des cas favorables de discontinuités de contact.

2. Les principaux résultats

On note $\partial_0 := \partial_t$ et pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $Z_i := \partial_i$ et $Z_n := h(x_n)\partial_n$ où h est une fonction C^∞, à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$, bornée sur

$\mathbb{R}_+$ telle que $h(x_n) = x_n$ quand $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. Ainsi $\mathfrak{Z} := (Z_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est une famille génératrice de l'algèbre des champs de vecteurs C^∞ tangents à Γ. Lorqu'il n'y pas de risque de confusion, on utilise simplement la lettre Z pour désigner une dérivation quelconque de $\mathfrak{Z}$, et, pour j entier naturel, Z^j un produit de j dérivations de $\mathfrak{Z}$. On introduit les normes

$$\|u\|_{H^{m,s}(\Omega_T)} := \sum_{i+j\leqslant m; i\leqslant s} \|Z^j \partial_n^i u\|_{L^2(\Omega_T)}$$

qui différencient régularités normale et conormale.

On note $\mathring{A}_n$ (respectivement $\mathring{E}_{nn}$) la trace de A_n (resp. E_{nn}) sur Γ. Une conséquence de l'hypothèse 1.2 est que la matrice $\mathring{E}_{nn}$ est symétrique définie positive. Comme $\mathring{A}_n$ est symétrique, la matrice $\mathring{E}_{nn}^{-1}\mathring{A}_n$ est $\mathbb{R}$-diagonalisable. Introduisons E_+ (resp. E_-) la somme des sous-espaces propres de $\mathring{E}_{nn}^{-1}\mathring{A}_n$ associés aux valeurs propres strictement négatives (resp. positives). On note aussi $E_0 := \ker \mathring{A}_n$. L'espace des états $\mathbb{R}^N$ se décompose alors en $\mathbb{R}^N = E_+ \oplus E_- \oplus E_0$. On note, en tout point de Γ, Π_+, Π_- et Π_0 les projecteurs associés à cette décomposition.

Désignons par $\mathbb{R}^n_+ := \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ le demi-espace, pour $T > 0$, les parties gauche et droite de l'espace-temps :

$$\Omega_T^+ := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : 0 \leqslant t \leqslant T, x_n > 0\},$$
$$\Omega_T^- := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} : 0 \leqslant t \leqslant T, x_n < 0\}.$$

Pour r entier positif, une fonction u de $p\text{–}H^\infty(\Omega_T)$ est de classe C^r sur Ω_T si et seulement si pour $0 \leqslant j \leqslant r$, les traces $T_j^\pm$ de $\partial_n^j(u|_{\Omega_T^\pm})$ sur Γ_T vérifient $T_j^+ = T_j^-$.

Introduisons l'espace de profils

$$\mathcal{P}(\Omega_T) := \{\mathcal{U}(t,x,z,\theta) = \mathcal{U}_a(t,x) + \mathcal{U}_b(t,x,\theta) + \mathcal{U}_c(t,x,z)$$

où

$$\mathcal{U}_a \in p\text{–}H^\infty(\Omega_T), \quad \mathcal{U}_b \in p\text{–}H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta)), \quad \mathcal{U}_c \in p\text{–}H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_z)).$$

Le symbole $\mathcal{S}$ désigne l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide. Écrire $\mathcal{U}_b \in p\text{–}H^\infty(\Omega_T, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta))$ signifie que la fonction $\Omega_T \to \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta)$, $(t,x) \mapsto \mathcal{U}_b(t,x,.)$ est H^∞ de part et d'autre de Γ_T. On introduit les normes

$$|u|^+_{m,T} := \sum_{0\leqslant l\leqslant m} |Z^l u|_{L^2(\Omega_T^+)}, \quad |u|^-_{m,T} := \sum_{0\leqslant l\leqslant m} |Z^l u|_{L^2(\Omega_T^-)}$$

et

$$\mathcal{G}^m(T) := \Big\{ (u^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1} \in (p\text{–}H^m(\Omega_T))^{]0,1]} : \\ \exists\, \varepsilon' \in]0,1], \sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon']} \|u^\varepsilon\|^\varepsilon_{m,T} < \infty \Big\}$$

où

$$\|u^\varepsilon\|^\varepsilon_{m,T} := \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{max(0,k-\frac{1}{2})} (|\partial_n^k u^\varepsilon|^+_{m-k,T} + |\partial_n^k u^\varepsilon|^-_{m-k,T}).$$

Remarquons que si $\mathcal{U}$ est dans $\mathcal{P}(\Omega_T)$ alors la famille $(a^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par

$$a^\varepsilon(t,x) := \mathcal{U}(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

est, pour tout $m \in \mathbb{N}$, dans $\mathcal{G}^m(T)$. Insistons notamment sur le fait qu'un profil de couche limite non caractéristique est un $O(\sqrt{\varepsilon})$ dans L^2 alors qu'un profil de couche limite caractéristique est un $O(\varepsilon^{\frac{1}{4}})$.

Le théorème suivant est le résultat central de l'article. Rappelons que l'on suppose, comme cela est mentionné dans l'introduction, qu'un réel $T_0 > 0$ et qu'une solution u^0 dans $p\text{–}H^\infty(\Omega_{T_0})$ du problème $P^0(T_0)$ sont donnés.

Théorème 2.1.

(1) *Il existe $T_1 \in]0,T_0]$ et des profils $(\mathcal{U}^j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{P}(\Omega_{T_1})$ tel que pour tout k entier positif, il existe $(R_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ dans $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}^m(T_1)$ et un réel ε_0 dans $]0,1]$ tels que*

   (i) *Pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$, la fonction u^ε définie par*

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1} R_\varepsilon(t,x) \tag{2.1}$$

   soit solution de $P^\varepsilon(T_1)$;

   (ii) *Le profil $\mathcal{U}^0_a$ coincide avec u^0 ;*

   (iii) *Les profils $\mathcal{U}^0_c$ et $\mathcal{U}^1_c$ sont identiquement nuls.*

(2) *Si u^0 est continue sur Ω_{T_0}, on peut prendre $T_1 = T_0$.*

(3) *Soit r un entier positif, si u^0 est de classe C^r sur Ω_{T_0}, on peut choisir les profils $\mathcal{U}^j$ de telle sorte que l'on ait les propriétés suivantes :*

$$\mathcal{U}^{2j+1}_a = 0 \quad pour\ 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{r}{2}\right],$$
$$\mathcal{U}^j_b = 0 \quad pour\ 0 \leqslant j \leqslant r,$$
$$\mathcal{U}^j_c = 0 \quad pour\ 0 \leqslant j \leqslant r+2,$$

où $\left[\frac{r}{2}\right]$ désigne la partie entière de $\frac{r}{2}$.

Le point (3) du théorème peut se reformuler ainsi : si u^0 est C^r, alors la famille $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ peut être décrite à l'aide de développement de la forme

$$\sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]} \varepsilon^j\, \mathcal{U}_a^j(t,x) + \sum_{j\geqslant r+1} \sqrt{\varepsilon}^j\, \mathcal{U}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

On peut qualifier la première somme de régulière. En effet, c'est un développement de ce type que l'on obtient lorsqu'on regarde les approximations visqueuses de solutions u^0 régulières dans tout l'espace (H^∞ sur Ω_T). Les termes singuliers (à variation rapide) n'apparaissent qu'avec, au plus, une amplitude $\sqrt{\varepsilon}^{r+1}$. A partir de cette amplitude (ie pour des puissances de $\sqrt{\varepsilon}$ plus grande que $r+1$), on peut avoir des profils $\mathcal{U}_a$ (resp. $\mathcal{U}_c$) avec une amplitude à une puissance impaire de $\sqrt{\varepsilon}$. Cela provient d'un jeu subtil d'interactions sur Γ des différents types de profils $\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_b$ et $\mathcal{U}_c$. La résolution du développement — c'est-à-dire l'échelle de l'amplitude — des profils $\mathcal{U}_a$ et $\mathcal{U}_c$ passe ainsi de ε à $\sqrt{\varepsilon}$.

Il est possible de montrer un résultat analogue en terme de propagation. On peut également caractériser les données initiales susceptibles de donner de tels développements. Une telle étude, dans un contexte un peu différent, est menée dans [26].

Le théorème 1.3 donné en introduction est une conséquence du théorème 2.1. En fait, on peut même déduire du théorème 2.1 des estimations beaucoup plus précises, et optimales, de $u^\varepsilon - u^0$. Les lignes qui suivent présentent ces estimations.

Bien sûr, si u^0 admet une discontinuité le long de Γ, on ne peut pas espérer que u^0 soit limite dans $H^{\infty,1/2}$ $(:= \cap_{m\geqslant 0} H^{m,1/2})$ ou L^∞ d'une famille $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ de solutions des problèmes $(P^\varepsilon(T_0))_{\varepsilon\in]0,1]}$. En général, on a, au contraire, un défaut de convergence uniforme :

$$\lim_{x_n\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\Pi_0 u^\varepsilon \neq \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{x_n\to 0}\Pi_0 u^\varepsilon.$$

Sur $\mathrm{Id}-\Pi_0$, on a l'estimation :

$$\|(\mathrm{Id}-\Pi_0)(u^\varepsilon-u^0)\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})} = O(\sqrt{\varepsilon}),$$

et pour tout m entier naturel,

$$\|(\mathrm{Id}-\Pi_0)(u^\varepsilon-u^0)\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_1})} = O(\varepsilon^{\frac{3}{4}-\frac{s}{2}}) \qquad \forall s\in\left[0,\frac{3}{2}\right], \tag{2.2}$$

$$\|\Pi_0(u^\varepsilon-u^0)\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_1})} = O(\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{s}{2}}) \qquad \forall s\in\left[0,\frac{1}{2}\right]. \tag{2.3}$$

La différence d'un facteur $\sqrt{\varepsilon}$ entre les estimations (2.2) et (2.3) traduit le fait intuitif que la couche limite a plus à faire sur $\ker \mathring{A}_n$ selon lequel le saut est polarisé. En effet, la condition de Rankine-Hugoniot [25] exprime que la singularité est « polarisée » selon $\ker \mathring{A}_n$:

Proposition 2.2. — *La fonction* $(\mathrm{Id}-\Pi_0)u^0$ *est continue. Si* f *et* u^0 *sont de classe* C^r *sur* Ω_{T_0} *alors* $(\mathrm{Id}-\Pi_0)u^0$ *est de classe* C^{r+1} *sur* Ω_{T_0}.

Rappelons que la régularité de u se propage au sens suivant : si $u|_{t=0}$ est de classe C^r sur $\mathbb{R}^n$ et f est C^r sur Ω_{T_0} alors u est C^r sur Ω_{T_0}. On donne en annexe une preuve de ces résultats sur les singularités hyperboliques.

Tournons maintenant notre attention vers des singularités plus faibles comme des sauts de dérivées normales. La proposition 2.2 montre que ces singularités sont elles-aussi polarisées selon $\ker \mathring{A}_n$. Pour r entier naturel, si u^0 est de classe C^r sur Ω_{T_0}, les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}\|(\mathrm{Id}-\Pi_0)(u^\varepsilon - u^0)\|_{L^\infty(\Omega_{T_0})} &= O(\varepsilon),\\ \|\Pi_0(u^\varepsilon - u^0)\|_{L^\infty(\Omega_{T_0})} &= O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r}{2}}),\end{aligned}$$

et, pour tout entier naturel m, et

$$\begin{aligned}a^\varepsilon &:= \|\Pi_0(u^\varepsilon - u^0)\|_{H^{m,s}(\Omega_{T_0})},\\ b^\varepsilon &:= \|\Pi_-(u^\varepsilon - u^0)\|_{H^{m,s}(\Omega^+_{T_0})} + \|\Pi_+(u^\varepsilon - u^0)\|_{H^{m,s}(\Omega^-_{T_0})},\\ c^\varepsilon &:= \|\Pi_+(u^\varepsilon - u^0)\|_{H^{m,s}(\Omega^+_{T_0})} + \|\Pi_-(u^\varepsilon - u^0)\|_{H^{m,s}(\Omega^-_{T_0})},\end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned}a^\varepsilon &= O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r+1}{2}+\frac14-\frac{s}{2}} + \varepsilon^{\frac{r+5}{2}+\frac12-s}) \quad \forall s \in \left[0, \min\Big(r+\frac32, \frac{r}{2}+3\Big)\right],\\ b^\varepsilon &= O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r+2}{2}+\frac14-\frac{s}{2}} + \varepsilon^{\frac{r+3}{2}+\frac12-s}) \quad \forall s \in \left[0, \min\Big(r+\frac52, \frac{r}{2}+2\Big)\right],\\ c^\varepsilon &= O(\varepsilon + \varepsilon^{\frac{r+2}{2}+\frac14-\frac{s}{2}} + \varepsilon^{\frac{r+5}{2}+\frac12-s}) \quad \forall s \in \left[0, \min\Big(r+\frac52, \frac{r}{2}+3\Big)\right].\end{aligned}$$

Ces estimations mettent en évidence la compétition de trois catégories de termes : les termes en $c\varepsilon$ sont déjà présents lorsqu'on regarde l'approximation visqueuse de solutions régulières sur Ω_{T_0} [15], [14] tandis que les autres termes correspondent à des couches limites. On a notamment que le premier profil $\mathcal{U}_b$ de couche limite non nul vèrifie $(\mathrm{Id}-\Pi_0)\mathcal{U}_b = 0$, donc en particulier $(\mathrm{Id}-\Pi_0)\mathcal{U}^0_b = 0$. En ce qui concerne la couche limite non caractéristique, on verra que la polarisation est différente selon que l'on se trouve d'un côté ou de l'autre de Γ (cf. proposition 6.12).

L'analyse consiste à se ramener à un problème dans le demi-espace puis à suivre la stratégie de [26]. Il est bien connu que des conditions de transmission (conditions de Rankine-Hugoniot [25]) sont nécessaires sur l'hypersurface. Ces conditions sont mises sous la forme de conditions aux limites. Le problème hyperbolique est reformulé en un problème mixte avec des conditions aux limites maximales dissipatives, en fait même conservatives (section 3). Pour les perturbations paraboliques, on se ramène à des problèmes mixtes paraboliques avec des conditions aux limites de type mixte Dirichlet-Neumann (section 4.1).

Rappelons les deux grandes étapes de la méthode de [26]. La première consiste à chercher une famille de solutions approchées sous la forme d'un développement BKW (section 4.2 et 6). On résout pour cela une succession de problèmes pour les profils du développement. Signalons ici que si l'on utilise des profils similaires à ceux de [26] et que les équations de profils sont de même type, les conditions aux limites diffèrent. L'ordre de résolution des problèmes pour les profils change en conséquence.

La seconde prouve l'existence d'une famille de solutions exactes des problèmes mixtes paraboliques ayant pour partie principale la famille de solutions approchées de la première étape (section 4.3 et 5). La différence est une famille de restes que l'on obtient comme solutions de problèmes mixtes paraboliques semilinéaires et pour lesquels on établit des estimations uniformes en ε.

On utilise, au cours des deux étapes, des lemmes de Borel pour prouver l'existence de données initiales compatibles avec les conditions aux limites (cf. propositions 3.4, 5.1 et 6.5).

Il est intéressant de noter que [26] montre que la limite de problèmes mixtes symétriques paraboliques avec conditions de Dirichlet est un problème symétrique hyperbolique strictement dissipatif. On voit donc que l'on atteint avec des conditions aux limites de type mixte Dirichlet-Neumann un problème que l'on n'atteint pas avec des conditions de Dirichlet. Ce fait, de portée générale, est détaillée dans [27]. Il est intimement lié à l'absence de couche limite non caractéristique de grande amplitude.

3. Réduction du problème $P^0(T)$

On ramène le problème $P^0(T)$ à un problème dans le demi-espace doublant le nombre d'inconnues. Les conditions de transmission imposées par l'équation (les conditions de Rankine-Hugoniot de la proposition 2.2) se traduisent par des conditions aux limites maximales dissipatives (en fait même conservatives). Ceci nous permettra de retrouver des résultats d'existence de u^0 et sera utile dans la construction des profils (paragraphe 6).

À toute fonction u définie sur Ω_T, on associe u^+ sa restriction à Ω_T^+, u^- défini par $u^-(t,x) := u(t,y,-x_n)$ pour tout (t,x) dans Ω_T^+, et $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \end{bmatrix}$.

On a alors que u vérifie $P^0(T)$ si et seulement si $\mathbf{u}$ vérifie le problème

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+, \tag{3.1}$$

$$M\mathbf{u} = 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T, \tag{3.2}$$

où

$$M := \begin{bmatrix} (\mathrm{Id} - \Pi_0) & -(\mathrm{Id} - \Pi_0) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}} := \begin{bmatrix} \mathcal{H} & 0 \\ 0 & \mathcal{H}^- \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{H}^- := A_0^-(t,x)\partial_t + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} A_i^-(t,x)\partial_i - A_n^-(t,x)\partial_n + B^-(t,x),$$

$$\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) := \begin{bmatrix} F(t,x,u^+) \\ F(t,y,-x_n,u^-) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{bmatrix} f^+ \\ f^- \end{bmatrix}.$$

On introduit la matrice normale de l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{H}}$:

$$\mathbf{A}_n := \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & -A_n \end{bmatrix}.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 3.1. — *La condition aux limites est maximale dissipative ie la forme quadratique* $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \cdot, \cdot \rangle$ *est négative sur le sous-espace* $\ker M$ *et* $\ker M$ *est maximale pour cette propriété.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u^+ \\ u^- \end{bmatrix} \in \ker M$. On a donc

$$(\mathrm{Id} - \Pi_0)\, u^+ = (\mathrm{Id} - \Pi_0)\, u^-.$$

Or

$$\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathring{A}_n u^+, u^+ \rangle - \langle \mathring{A}_n u^-, u^- \rangle.$$

Utilisant l'identité $\mathring{A}_n \Pi_0 = 0$ et la symétrie de $\mathring{A}_n$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \mathring{\mathbf{A}}_n \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \mathring{A}_n (\mathrm{Id} - \Pi_0) u^+, (\mathrm{Id} - \Pi_0) u^+ \rangle \\ &\quad - \langle \mathring{A}_n (\mathrm{Id} - \Pi_0)\, u^-, (\mathrm{Id} - \Pi_0)\, u^- \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi la forme quadratique $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \cdot, \cdot \rangle$ est négative sur le sous-espace $\ker M$. De plus, $\mathring{\mathbf{A}}_n$ possède $N + d_0$ valeurs propres négatives ou nulles et la somme des sous-espaces spectraux associés constitue un sous-espace maximal sur lequel la forme quadratique $\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \cdot, \cdot \rangle$ est négative. Comme tous les sous-espaces maximaux pour cette propriété ont la même dimension $N + d_0 = \dim \ker M$, le lemme est prouvé. $\square$

Notons que la preuve du lemme 3.1 montre que la condition aux limites est conservative c'est-à-dire que

$$\langle \mathring{\mathbf{A}}_n \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \ker M.$$

Afin d'énoncer des résultats utiles (cf. paragraphe 6) pour la construction des parties hyperboliques des profils (les $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j$), on considère le cas de condition aux limites non homogène :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \underline{M}\mathbf{u} = g(t,y) & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans (3.3), $\underline{M}$ est une matrice constante de taille $L \times 2N$, avec $L = 2(N - d_0)$, de rang L. La fonction g est supposée H^∞ sur Γ_T et à valeurs dans $\mathbb{R}^L$. Notons que, quitte à multiplier à gauche par une matrice adéquate, la condition aux limites (3.2) peut se réécrire sous la forme $\underline{M}\mathbf{u} = 0$.

Le théorème suivant concerne le prolongement des solutions de (3.3) :

Théorème 3.2. — *Si T est strictement positif et $\mathbf{u} \in H^\infty(\Omega_T)$ est solution de* (3.3) *alors il existe $T_0 > T$ et un unique prolongement de u (en une fonction encore noté $\mathbf{u}$) dans $H^\infty(\Omega_{T_0})$ solution de*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0}^+, \\ \underline{M}\mathbf{u} = g(t,y) & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0}. \end{cases} \tag{3.4}$$

De plus, si $T^* := \sup\{T_0 > T\}$ il existe un prolongement de $\mathbf{u}$ en une fonction encore notée $\mathbf{u}$ solution de (3.4) est fini, alors $\lim_{t \to T^*} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega_t^+)} = +\infty$. Dans le cas linéaire, $T^* = \infty$.

On peut déduire du théorème 3.2 l'existence d'une solution régulière au problème mixte :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \underline{M}(t,y)\mathbf{u} = g(t,y) & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ \mathbf{u} = a & \text{quand } t = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Il est nécessaire pour cela d'imposer certaines conditions de compatibilité entre données initiales et données au bord. En effet, si $\mathbf{u}$ est une solution régulière de (3.5), avec $T > 0$, on déduit de l'équation l'existence de fonctions

$(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles que

$$(\partial_t^k \mathbf{u})|_{t=0} = H_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{|\alpha|\leqslant k}). \tag{3.6}$$

où α désigne un n-uplet $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}$, $|\alpha|$ la longueur $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ et $\partial_x^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$.

Comme par ailleurs, il existe des fonctions $(G_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles que

$$\partial_t^k(\underline{M}\mathbf{u}) = G_k(t, y, (\partial_t^j \mathbf{u})_{j\leqslant k}),$$

on a sur $\{t = x_n = 0\}$ les relations :

$$G_k\big(0, y, (H_j(y, 0, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{|\alpha|\leqslant j}))_{0\leqslant j\leqslant k}\big) = \partial_t^k g(0, y). \tag{R_k}$$

Le résultat suivant montre que, réciproquement, ces conditions sont suffisantes à l'existence d'une solution régulière locale en temps.

Théorème 3.3. — *Soit $a \in H^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *La fonction a vérifie les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$,*

(2) *Il existe $T > 0$ et $\mathbf{u}$ solution régulière de* (3.5).

Le théorème précédent est non vide :

Proposition 3.4. — *Il existe $a \in H^\infty(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+)$ qui vérifie les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$*

Démonstration. — Dans cette preuve, on notera $\partial_x^\alpha = \partial_y^{\alpha'} \partial_n^{\alpha_n}$ où $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$. Il existe des fonctions $(\tilde{H}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\tilde{G}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de classe C^∞ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} H_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{j\leqslant k}) &= (-1)^k (A_n)^k \partial_n^k a + \tilde{H}_k(x, (\partial_x^\alpha a)_{\alpha\in I_k}) \\ G_k(t, y, (\partial_t^j \mathbf{u})_{1\leqslant j\leqslant k}) &= \underline{M} \partial_t^k \mathbf{u} + \tilde{G}_k(t, y, (\partial_t^j \mathbf{u})_{j\leqslant k-1}), \end{aligned}$$

où $I_k := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : \ |\alpha| \leqslant k, \ \alpha_n \neq k\}$. Ainsi les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ se réécrivent :

$$\begin{aligned} (-1)^k \underline{M} (A_n)^k \partial_n^k a|_{x_n=0} = (\partial_t^k g)|_{t=0} &- \underline{M} \tilde{H}_k(y, 0, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{\alpha\in I_k}) \\ &- \tilde{G}_k(0, y, (H_j(y, 0, (\partial_x^\alpha a|_{x_n=0})_{|\alpha|\leqslant j}))_{j\leqslant k-1}). \end{aligned}$$

On a le lemme algébrique suivant :

Lemme 3.5. — *Pour tout entier naturel k, on a $\operatorname{Im} \underline{M}(A_n)^k = \mathbb{R}^L$.*

Démonstration. — Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\ker(A_n)^k = \ker A_n \subset \ker \underline{M}$, et donc $\operatorname{Im} \underline{M}(A_n)^k = \operatorname{Im} \underline{M} = \mathbb{R}^L$. En effet, comme $(A_n)^k$ est symétrique, tout vecteur x de $\mathbb{R}^L$ se décompose en $x = x_0 + x_1$ où $x_0 \in \ker A_n^k \subset \ker \underline{M}$ et $x_1 \subset \operatorname{Im} A_n^k$. Un vecteur quelconque y de $\mathbb{R}^L$ s'écrit donc $y = \underline{M}x = \underline{M}x_1$, avec $x_1 \subset \operatorname{Im} A_n^k$. □

De la surjectivité des $\underline{M}(A_n)^k$, on déduit, par récurrence, l'existence d'une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ telle que $\underline{M}a_0 = g|_{t=0}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\underline{M}(A_n)^k a_k = -(-1)^k \underline{M}\tilde{H}_k(y, 0, (\partial_y^{\alpha'} a_{\alpha_n}|_{x_n=0})_{\alpha\in I_k})\\ -\tilde{G}_k(0, y, (H_j(y, 0, (\partial_y^{\alpha'} a_{\alpha_n}|_{x_n=0})_{\alpha\in I_j}))_{j\leqslant k-1})\end{aligned}$$

On conclut par une variante du théorème de Borel [26].

Lemme 3.6. — *Il existe une application*

$$\begin{aligned}B : (H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))^{\mathbb{N}} \to H^\infty(\mathbb{R}^n_+)\\ (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto a\end{aligned}$$

telle que

(1) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\partial_n^k a|_{x_n=0} = a_k$,*

(2) *Il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m \geqslant 0$ tel que pour toute famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (H^\infty(\mathbb{R}^{n-1}))^{\mathbb{N}}$,*

$$\|a\|_{H^m(\mathbb{R}^n_+)} \leqslant C_m \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \|a_k\|_{H^m(\mathbb{R}^{n-1})} + C. \tag{3.7}$$

Le deuxième point du lemme précédent n'est pas utile ici mais servira dans le paragraphe 5.1. □

La démonstration prouve le résultat suivant, qui précise les degrés de liberté dont on dispose sur les traces au bord des dérivées normales de la donnée initiale.

Proposition 3.7. — *Il existe des fonctions $(\mathcal{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telle que, pour $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, les assertions suivantes soient équivalentes :*

(1) *La fonction a vérifie les relations $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$,*

(2) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a*

$$(\partial_n^k a)(y, 0) \in \mathcal{A}_k(y, (\partial_x^\alpha a)(y, 0))_{\alpha\in I_k}) + \ker \underline{M},$$

où $I_k := \{\alpha \in \mathbb{N}^n : \quad |\alpha| \leqslant k, \alpha_n \neq k\}$.

Remarque 3.8. — Dans le cas linéaire, on peut fournir une preuve un peu différente se ramenant au cas où $\mathbf{u}$ est nul dans le passé. En particulier, on verra que les profils $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ vérifient des problèmes linéaires.

Une preuve du théorème 3.2 et de la proposition 2.2 est donnée en annexe.

4. Preuve du théorème 2.1

On utilise encore une fois une réduction à un problème dans le demi-espace. On applique ensuite la stratégie de [26] : on commence par prouver l'existence de solutions approchées sous la forme de développements BKW, puis on conclut par un théorème d'approximation. Les trois sous-sections suivantes présentent respectivement ces trois étapes. La seconde (respectivement la troisième) est synthétisée par le théorème 4.3 (resp. 4.4), dont la preuve constitue le paragraphe 6 (resp. 5).

4.1. Réduction à un problème dans le demi-espace

On a que u^ε est solution de $P^\varepsilon(T)$ si et seulement si $\mathbf{u}^\varepsilon$ est solution de

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \tag{4.1}$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{u}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{u}^\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{4.2}$$

où

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{u} := \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} - (\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) + \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}\mathbf{u}),$$
$$\boldsymbol{\mathcal{E}} := \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial_i \mathbf{E}_{i,j} \partial_j$$
$$\mathbf{E}_{i,j} := \begin{bmatrix} E_{i,j}^+ & 0 \\ 0 & (-1)^{\delta_{in}}(-1)^{\delta_{jn}} E_{i,j}^- \end{bmatrix},$$

δ désigne le symbole de Kronecker et

$$\mathbf{N} := \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -\mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \end{bmatrix}$$

où la matrice Id est de taille $N \times N$. La condition (4.2) est une condition de raccord sur Γ. Puisque l'opérateur est d'ordre 2, cette condition concerne la continuité de la fonction et de sa dérivée normale.

On notera

$$\mathcal{N}_\theta(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta^+, \mathbb{R}^{2N})), \quad \mathcal{N}_z(T) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_z^+, \mathbb{R}^{2N})).$$

On introduit l'espace

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+) := \Big\{\boldsymbol{\mathcal{U}}(t,x,\theta,z) = \boldsymbol{\mathcal{U}}_a(t,x) + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b(t,x,\theta) + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c(t,x,z) \\ \text{où } \boldsymbol{\mathcal{U}}_a \in H^\infty(\Omega_T^+, \mathbb{R}^{2N}), \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}_b \in \mathcal{N}_\theta(T), \quad \boldsymbol{\mathcal{U}}_c \in \mathcal{N}_z(T)\Big\}$$

Bien sûr, si $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\Omega_T)$, la fonction $\boldsymbol{\mathcal{U}} := \begin{bmatrix}\mathcal{U}^+ \\ \mathcal{U}^-\end{bmatrix}$, où, pour tout $(t,x,\theta,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{U}^+(t,x,\theta,z) := U(t,x,\theta,z), \quad \mathcal{U}^-(t,x,\theta,z) := \mathcal{U}(t,y,-x_n,-\theta,-z),$$

est dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$.

Une réciproque est donnée par la proposition suivante

Proposition 4.1. — *Soit $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{P}(\Omega_T^+)$, $\boldsymbol{\mathcal{U}} := \begin{bmatrix}\mathcal{U}^+ \\ \mathcal{U}^-\end{bmatrix}$. Il existe $\mathcal{U} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T)$ tel que, pour tout $(t,x,\theta,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$,*

$$\mathcal{U}(t,x,\theta,z) = \mathcal{U}^+(t,x,\theta,z), \quad \mathcal{U}(t,y,-x_n,-\theta,-z) = \mathcal{U}^-(t,x,\theta,z).$$

Démonstration. — On commence par énoncer la variante suivante du lemme 6.5 :

Lemme 4.2. — *Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$. Il existe une fonction $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$, $(x,\theta) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \mapsto a(x,\theta) \in \mathbb{R}^N$, telle que, pour tout entier naturel k, $\partial_\theta^k a|_{\theta=0} = a_k$.*

La démonstration du lemme 4.2 suit directement celle du lemme 6.5. On ne la détaille pas ici. Le lemme 4.2 assure l'existence de $\overline{\mathcal{U}_b}^\pm$ dans $H^\infty(\Omega_T^\pm, \mathcal{S}(\mathbb{R}^-))$ et de $\overline{\mathcal{U}_c}^\pm$ dans $H^\infty(\Omega_T^\pm, \mathcal{S}(\mathbb{R}^-))$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $(t,x) \in \Omega_T^\pm$,

$$\partial_\theta^k \overline{\mathcal{U}_b}^\pm|_{\theta=0^\pm} = \partial_\theta^k \mathcal{U}_{\pm,b}|_{\theta=0^\pm},$$
$$\partial_\theta^k \overline{\mathcal{U}_c}^\pm|_{z=0^\pm} = \partial_\theta^k \mathcal{U}_c^\pm|_{z=0^\pm}.$$

On définit alors $\mathcal{U} := \mathcal{U}_a + \mathcal{U}_b + \mathcal{U}_c$ avec

$$\mathcal{U}_a := \begin{cases} \mathcal{U}_a^+ & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \mathcal{U}_a^- & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^- \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_b := \begin{cases} \mathcal{U}_b^\pm & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_\theta^+ \\ \overline{\mathcal{U}_b^\pm} & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_\theta^- \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_c := \begin{cases} \mathcal{U}_c^\pm & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_z^+ \\ \overline{\mathcal{U}_c^\pm} & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^\pm \times \mathbb{R}_z^-. \end{cases}$$

Attirons l'attention du lecteur sur le fait que dans les théorèmes énoncés dans cet article, on évalue les profils en

$$(t,x,z,\theta)=(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}),$$

c'est-à-dire avec x_n, θ et z de même signe. La proposition 4.1 montre que l'on peut déplier un profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}\in\mathcal{P}(\Omega_T^+)$ en un profil $\mathcal{U}\in\mathcal{P}(\Omega_T)$ en ne faisant porter une singularité que sur la seule ligne de (dé)pliage $\{x_n=0\}$.

On introduit l'ensemble

$$\boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T):=\Big\{(\mathbf{u}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1}\in(H^m(\Omega_T^+))^{]0,1]}:\\ \exists\varepsilon'\in]0,1],\quad\sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon']}\|\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T}<\infty\Big\}$$

où

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T}:=\sum_{k=0}^m\varepsilon^{max(0,k-\frac12)}\,|\partial_n^k\mathbf{u}^\varepsilon|^+_{m-k,T}.$$

On a bien sûr que $(a^\varepsilon)_\varepsilon\in\mathcal{G}^m(T)\Leftrightarrow(\mathbf{a}^\varepsilon)_\varepsilon\in\boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T)$.

On cherche $\mathbf{u}^\varepsilon$ sous la forme

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t,x)=\sum_{j=0}^k\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})+\sqrt{\varepsilon}^{k+1}\,\mathbf{R}_\varepsilon(t,x).$$

On introduit aussi

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T):=\Big\{(\mathbf{u}^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1}\in(H^m(\Omega_T^+))^{]0,1]}:\sup_{\varepsilon\in]0,1]}|\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T}<\infty\Big\}$$

où

$$|\mathbf{u}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T}:=\sum_{k=0}^m|(\varepsilon\partial_n)^k\mathbf{u}^\varepsilon|^+_{m-k,T}.$$

Une propriété remarquable de $\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T)$ est la suivante : soit $\boldsymbol{\mathcal{V}}_b$ dans $\mathcal{N}_\theta(T)$ et $\boldsymbol{\mathcal{V}}_c$ dans $\mathcal{N}_z(T)$ alors la famille $(\mathbf{b}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par

$$\mathbf{b}^\varepsilon(t,x):=\varepsilon^{-\frac14}\,\boldsymbol{\mathcal{V}}_b(t,x,\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})+\varepsilon^{\frac14}\,\boldsymbol{\mathcal{V}}_c(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon})\tag{4.3}$$

est pour tout $m\in\mathbb{N}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T)$.

Nous allons maintenant énoncer deux théorèmes synthétisant les résultats des deux grandes étapes de la démonstration du théorème 2.1. Les preuves suivent dans les paragraphes suivants.

4.2. Solutions approchées

Le théorème suivant assure l'existence de solutions approchées sous forme de développements de la forme (4.1) de tout ordre. Par commodité, il est utile d'introduire un profil de couche limite non caractéristique supplémentaire. On introduit aussi, pour tout $T \geqslant 0$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$, les espaces :

$$\mathcal{B}^s(T) := \Big\{ (v_\varepsilon)_\varepsilon \in (H^s(\Gamma_T))^{]0,1]} : \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} \|v^\varepsilon\|_{H^s(\Gamma_T)} < \infty \Big\}.$$

Théorème 4.3. — *Il existe T_1 dans $]0,T_0]$ tel que pour tout entier naturel k, il existe $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ famille de profils de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega^+_{T_1})$, $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{k+1}_c$ dans $\mathcal{N}_z(T)$ tel que la famille $(\mathbf{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par*

$$\mathbf{a}^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}) + \sqrt{\varepsilon}^{k+1} \boldsymbol{\mathcal{U}}^{k+1}_c(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}) \tag{4.4}$$

vérifie

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{a}^\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}^{k+\frac{1}{2}} \mathbf{R}_\varepsilon \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_{T_1} \tag{4.5}$$

$$\mathbf{N} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{a}^\varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\varepsilon}^k R^\varepsilon_{cl,1} \\ \sqrt{\varepsilon}^{k-1} R^\varepsilon_{cl,2} \end{bmatrix} \qquad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_1} \tag{4.6}$$

où, pour tout entier naturel m, $(\mathbf{R}_\varepsilon)_\varepsilon$ est dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T_1)$, $(R^\varepsilon_{cl,1})_\varepsilon$ et $(R^\varepsilon_{cl,2})_\varepsilon$ sont dans $\mathcal{B}^m(T)$. Les profils $\boldsymbol{\mathcal{U}}^0_c$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c$ sont identiquement nuls. De plus, les profils $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j)_{0\leqslant j\leqslant k}$ vérifient les points 2 et 3 du théorème 2.1.

La preuve du théorème 4.3 constitue le paragraphe 6.

4.3. Théorème d'approximation

Le théorème suivant prouve l'existence d'une famille de solutions exactes de la famille de problèmes (4.1)-(4.2) admettant un développement asymptotique dont la partie principale est une famille de solutions approchées des équations (4.1) et (4.2). On note

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}^m(T) := \Big\{ (\mathbf{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in (W^{m,\infty}(\Omega^+_T))^{]0,1]} : \\ \sup_{\varepsilon\in]0,1]} \sum_{k,l:\ l+k\leqslant m} \|(\varepsilon\partial_n)^k Z^l \mathbf{a}^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega^+_T)} \leqslant \infty \Big\}.$$

THÉORÈME 4.4. — *Soit* $M > \frac{1}{4}$. *Alors si* $(\mathbf{a}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{A}}^m(T)$ *est une famille de solutions approchées de (4.1)-(4.2) au sens où*

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}^\varepsilon \mathbf{a}^\varepsilon = \varepsilon^M \mathbf{g}^\varepsilon \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \tag{4.7}$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{a}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{a}^\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{4.8}$$

avec $(\mathbf{g}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *dans* $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T)$ *alors il existe un réel* $\varepsilon_0 \in]0,1]$ *et une famille* $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ *de solutions exactes de (4.1)-(4.2) telle que*

$$(\varepsilon^{-M}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}^\varepsilon))_{\varepsilon\in]0,1]} \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T).$$

Ce théorème est une variante du théorème d'approximation prouvé dans [26]. Seules les conditions aux limites sont différentes. Le point clé est que le linéarisé de (4.7)-(4.8) est bien posé dans L^2 [16]. Les estimations sont ensuite dérivées comme dans [26].

On note alors que pour $k \geqslant 2$ la solution approchée donnée par le théorème 4.3 vérifie presque les hypothèses du théorème précédent. Seule la condition (4.8) n'est pas vérifiée. Mais l'erreur étant d'ordre $\sqrt{\varepsilon}^{k-1}$, on peut — quitte à faire un relèvement et à le retrancher de la solution du théorème 4.3 — supposer que les hypothèses du théorème 4.4 sont satisfaites. □

Signalons qu'il suffisait de montrer le point 1 du théorème 2.1 pour k grand, la forme du développement elle-même permettant ensuite de conclure pour un k quelconque. Comme l'explique [26], l'argument précèdent présente cependant des défauts qui sont ici occultés par le cadre simplifié de l'article. En effet, si l'on considère ici, par commodité, des profils de régularité infinie en dehors du front d'onde, on se convainc aisément que la construction successive des profils consomme de la régularité. Par ailleurs, si l'on considère des données initiales (ou dans le passé) plus générales, il est intéressant de savoir combien de profils il est nécessaire de prescrire. Dans cette optique, la démarche proposée ici semble assez robuste puisque l'on utilise le théorème 4.3 avec seulement $k = 2$. C'est la raison qui nous à conduit à minimiser l'hypothèse sur M dans le théorème 4.4. La limitation $M > \frac{1}{4}$ provient de la manière dont est traitée la non linéarité. Celle-ci est contrôlée par une norme L^∞ qui est obtenue à l'aide d'un plongement Sobolev (proposition 5.7). On renvoie le lecteur à [26] pour plus de détails à ce sujet.

5. Preuve du théorème 4.4

Nous scindons la preuve en deux parties, traitant préliminairement la question des données initiales.

5.1. Données initiales

On s'intéressera, pour une famille de données initiales $(\mathbf{u_0^\varepsilon})_{\varepsilon\in]0,1]}$ donnée, aux solutions régulières $(u^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1}$ de (4.1), (4.2) vérifiant :

$$\mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{u_0^\varepsilon} \text{ quand } \quad t = 0.$$

Pour qu'il soit possible d'obtenir une solution régulière, des relations de compatibilité entre données initiales et données au bord doivent être vérifiées. A l'ordre 0, cela donne :

$$(R_0^\varepsilon) : \quad \mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{u_0^\varepsilon}\\ \partial_n \mathbf{u_0^\varepsilon}\end{bmatrix}|_{x_n=0} = 0.$$

De plus, notant $\mathbf{A}(t,x,\partial_x) := \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \mathbf{A}_i(t,x)\partial_i$, (4.1) peut se réécrire

$$\mathbf{A}_0\partial_t\mathbf{u}^\varepsilon = -(\mathbf{A} - \varepsilon\boldsymbol{\mathcal{E}})\mathbf{u}^\varepsilon + \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}^\varepsilon) + \mathbf{f}(t,x).$$

$\partial_t\mathbf{u}^\varepsilon$, et par conséquent aussi les dérivées temporelles d'ordres supérieurs, peuvent ainsi se réexprimer en fonction des dérivées spatiales. Ainsi si à la donnée initiale $\mathbf{u_0^\varepsilon}$ correspond une solution régulière $\mathbf{u}^\varepsilon$ de (4.1), les $\partial_t^j\mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0}$ sont déterminés univoquement en fonction de $\mathbf{u_0^\varepsilon}$ et des données du système. On peut donc introduire *a priori* sans ambiguité les valeurs $\mathbf{u_j^\varepsilon}$ attendues pour $\partial_t^j\mathbf{u}^\varepsilon|_{t=0}$. On définit alors la relation de compatibilité à l'ordre j :

$$(R_j^\varepsilon) : \quad \mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{u_j^\varepsilon}\\ \partial_n \mathbf{u_j^\varepsilon}\end{bmatrix}|_{x_n=0} = 0.$$

Introduisons les normes :

$$\|u\|_{H^s_{co}(\mathbb{R}^n_+)} := \sum_{j\leqslant s} \|Z'^j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n_+)},$$

où Z' désigne une dérivation prise parmi $(Z_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, et les espaces :

$$\mathcal{G}^s_{init} := \Big\{(\mathbf{u_0^\varepsilon})_{\varepsilon\in]0,1]} \in (H^s(\mathbb{R}^n_+))^{]0,1]} : \\ \sup_{\varepsilon\in]0,1]} \big(\|\mathbf{u_0^\varepsilon}\|_{H^s_{co}(\mathbb{R}^n_+)} + \sum_{k=1}^{s} \varepsilon^{k-\frac12}\|\partial_n^k\mathbf{u_0^\varepsilon}\|_{H^{s-k}_{co}(\mathbb{R}^n_+)}\big) < \infty\Big\}.$$

PROPOSITION 5.1. — *Sous les hypothèse du théorème 4.4, il existe une famille de restes initiaux* $(\mathbf{r}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ *dans* $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}^m_{init}$ *tel que pour tout* $\varepsilon \in]0,1]$, *la donnée initiale* $\mathbf{u}^\varepsilon_0$ *définie, pour* x *dans* $\mathbb{R}^n_+$, *par*

$$\mathbf{u}^\varepsilon_0(x) := \mathbf{a}^\varepsilon(0,x) + \varepsilon^M\,\mathbf{r}^\varepsilon(x) \tag{5.1}$$

vérifie les relations de compatibilité $(R^\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. — On suit la méthode de la preuve de la proposition 3.3 de [26]. On déduit de (4.7) l'existence de fonctions $(\mathcal{H}^j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, de classe C^∞, telles que

$$\begin{aligned}(\partial^j_t \mathbf{a}^\varepsilon)(0,x) = \varepsilon^j(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}_{nn})^j(0,x).(\partial^{2j}_n \mathbf{a}^\varepsilon)(0,x)\\ + \mathcal{H}^j(\varepsilon,x,(\partial^\alpha \mathbf{a}^\varepsilon(0,x))_{\alpha\in I_j}) - \varepsilon^M(\partial^j_t \mathbf{g}_\varepsilon)(0,x)\end{aligned} \tag{5.2}$$

où $I_j := \{\alpha\in\mathbb{N}^n : |\alpha|\leqslant 2j; \alpha_n \neq 2j\}$.

On cherche $\mathbf{r}^\varepsilon$ telle que les fonctions $(\mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{j})_{j\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{0}(x) := \mathbf{a}^\varepsilon(0,x) + \varepsilon^M\,\mathbf{r}^\varepsilon(x)$$

et, pour $j\geqslant 1$, par

$$\mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{j}(x) := \varepsilon^j(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}_{nn})^j(0,x).(\partial^{2j}_n \mathbf{u}^\varepsilon)(0,x) + \mathcal{H}^j(\varepsilon,x,(\partial^\alpha \mathbf{u}^\varepsilon(0,x))_{\alpha\in I_j})$$

vérifient, pour tout $j\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{j}\\ \partial_n \mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{j}\end{bmatrix}|_{x_n=0} = 0.$$

Compte tenu de (5.2) et de (4.8), celà revient à des identités de la forme

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{r}^\varepsilon_\mathbf{j}\\ \partial_n \mathbf{r}^\varepsilon_\mathbf{j}\end{bmatrix}|_{x_n=0} = 0 \tag{5.3}$$

où

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^\varepsilon_\mathbf{j} :=\ & \varepsilon^j(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}_{nn})^j(0,x).(\partial^{2j}_n \mathbf{r}^\varepsilon)(0,x)\\ &+ \sum_{\alpha\in I_j} \mathcal{H}^{\flat,\alpha}(\varepsilon,x,\varepsilon^M(\partial^\alpha \mathbf{r}^\varepsilon(0,x))_{\alpha\in I_j},(\partial^\alpha \mathbf{a}^\varepsilon(0,x))_{\alpha\in I_j}).\partial^\alpha \mathbf{r}^\varepsilon(0,x)\\ &- (\partial^j_t \mathbf{g}_\varepsilon)(0,x).\end{aligned}$$

On note $N_0 := \begin{bmatrix}\mathrm{Id} & -\mathrm{Id}\end{bmatrix}$ et $N_1 := \begin{bmatrix}\mathrm{Id} & \mathrm{Id}\end{bmatrix}$ où Id est la matrice identité de taille $N\times N$. Ainsi, on a

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix}N_0 & 0\\ O & N_1\end{bmatrix},$$

où 0 est une matrice de N lignes et $2N$ colonnes remplie de 0.

On montre, par récurrence que l'on peut construire une famille de fonctions $(\mathfrak{r}^\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de $H^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ telles que

$$\begin{aligned}\varepsilon^j(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}_{nn})^j(0,y,0).\mathfrak{r}^\varepsilon_{2j}(y)&\\ +\sum_{\alpha\in I_j} g^\alpha(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha}'}\mathfrak{r}^\varepsilon_{\tilde{\alpha_n}}(y))_{\tilde{\alpha}\in I_j},(\partial^{\tilde{\alpha}}\mathbf{a}^\varepsilon|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde{\alpha}\in I_j})&\\ -(\partial_t^j\mathbf{g}_\varepsilon)(0,y,0)\in\ker N_0&\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varepsilon^j(\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}_{nn})^j(0,y,0).\mathfrak{r}^\varepsilon_{2j+1}(y)+\varepsilon^j\partial_n((\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{E}_{nn})^j)(0,y,0).\mathfrak{r}^\varepsilon_{2j}&\\ +\sum_{\alpha\in I_j}\{\tilde{g}^\alpha(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha}'}\mathfrak{r}^\varepsilon_{\tilde{\alpha_n}}(y))_{\tilde{\alpha}\in I_j},(\partial^{\tilde{\alpha}}\mathbf{a}^\varepsilon|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde{\alpha}\in I_j})&\\ +D_r g^\alpha(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha}'}\mathfrak{r}^\varepsilon_{\tilde{\alpha_n}}(y))_{\tilde{\alpha}\in I_j},(\partial^{\tilde{\alpha}}\mathbf{a}^\varepsilon|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde{\alpha}\in I_j}).\partial^{\alpha'}\mathfrak{r}^\varepsilon_{\alpha_n+1}(y)&\\ +D_a g^\alpha(\varepsilon,y,\varepsilon^M(\partial^{\tilde{\alpha}'}\mathfrak{r}^\varepsilon_{\tilde{\alpha_n}}(y))_{\tilde{\alpha}\in I_j},(\partial^{\tilde{\alpha}}\mathbf{a}^\varepsilon|_{\substack{t=0\\x_n=0}})_{\tilde{\alpha}\in I_j}).\partial^{\alpha'}\mathfrak{r}^\varepsilon_{\alpha_n+1}(y)\}&\\ -(\partial_t^j\partial_n\mathbf{g}_\varepsilon)(0,y,0)\in\ker N_1&\end{aligned}$$

où $\alpha=(\alpha',\alpha_n)$, $\tilde{\alpha}=(\tilde{\alpha}',\tilde{\alpha}_n)$, $g^\alpha(\varepsilon,y,r,a):=\mathcal{H}^{\flat,\alpha}(\varepsilon,y,0,\varepsilon^M r,a).r$, $\tilde{g}^\alpha(\varepsilon,y,r,a):=\partial_n\mathcal{H}^{\flat,\alpha}(\varepsilon,y,0,\varepsilon^M r,a).r$, $D_r g$ (respectivement $D_a g$) désigne la dérivée par rapport à r de g (respectivement par rapport à a de $g^\alpha(\varepsilon,y,r,a)$).

$$\forall m\in\mathbb{N},\quad \sup_{\varepsilon\in]0,1]} N(\varepsilon,m)<\infty \tag{5.4}$$
$$\text{où } N(\varepsilon,m):=\|\mathfrak{r}^\varepsilon_0\|_{H^m(\mathbb{R}^{n-1})}+\sum_{k=1}^m\varepsilon^{k-\frac12}\|\mathfrak{r}^\varepsilon_k\|_{H^{m-k}(\mathbb{R}^{n-1})}$$

On ne détaille pas l'obtention de (5.4) qui utilise des inégalités de type Moser - Gargliardo-Nirenberg.

Pour chaque $\varepsilon\in]0,1]$, le lemme de Borel 3.6 assure l'existence de $\mathbf{r}^\varepsilon$ dans $H^\infty(\Omega_T^+)$ tel que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $\partial_n^j\mathbf{r}^\varepsilon|_{x_n=0}=\mathfrak{r}^\varepsilon_j$. L'identité (5.3) est ainsi vérifiée pour tout $j\in\mathbb{N}$. Ainsi la famille $(\mathbf{u}^\varepsilon_0)_{\varepsilon\in]0,1]}$ définie par (5.1) vérifie les relations de compatibilité $(R^\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus, l'estimation (3.7) combinée à (5.4) assure que la famille $(\mathbf{u}^\varepsilon_0)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est dans $\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{G}^m_{init}$.

□

La démonstration assure le résultat suivant :

Proposition 5.2. — *Ils existent des fonctions $\mathcal{C}_j$, de classe C^∞, telles que pour tout $\varepsilon\in]0,1]$, pour toute donnée initiale $\mathbf{u}^\varepsilon_\mathbf{0}\in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, les assertions* 1 *et* 2 *qui suivent sont équivalentes :*

(1) *La fonction* $\mathbf{u_0^\varepsilon}$ *vérifie les relations de compatibilité* $(R_k^\varepsilon)_{k\in\mathbb{N}}$.

(2) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$, *pour tout* $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, *le vecteur* $(\partial_n^k \mathbf{u_0^\varepsilon})(y,0)$ *appartient au sous-espace affine* $c_k^\varepsilon(y) + F_k(y)$ *de* $\mathbb{R}^{2N}$, *où* $c_k^\varepsilon(y)$ *désigne le vecteur de* $\mathbb{R}^{2N}$ *défini par*

$$c_k^\varepsilon(y) := \begin{cases} \mathcal{C}_{2j}\left(\varepsilon, y, ((\partial^\alpha \mathbf{a}^\varepsilon)(0,y,0))_{\alpha\in I_j}, ((\partial^\alpha \mathbf{u_0^\varepsilon})(y,0))_{\alpha\in I_j}\right) & \text{si } j = 2k \\ \mathcal{C}_{2j+1}\left(\varepsilon, y, ((\partial^\alpha \mathbf{a}^\varepsilon)(0,y,0))_{\alpha\in I_j^\sharp}, ((\partial^\alpha \mathbf{u_0^\varepsilon})(y,0))_{\alpha\in I_j^\sharp}\right) & \text{si } j = 2k+1, \end{cases}$$

$F_k(y)$ *désigne le sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^{2N}$ *défini par*

$$F_k(y) := \begin{cases} \mathbf{E}_{nn}^{-j}(0,y,0) \ker N_0 & \text{si } j = 2k, \\ \mathbf{E}_{nn}^{-j}(0,y,0) \ker N_1 & \text{si } \ j = 2k+1, \end{cases}$$

et I_j *et* $I_j^\sharp$ *désignent respectivement les ensembles*

$$I_j := \left\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leqslant 2j,\ \alpha_n \neq 2j\right\}$$
$$I_j^\sharp := \left\{\alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leqslant 2j+1,\ \alpha_i \leqslant 2j \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant n\right\}.$$

5.2. Approximation

L'existence d'une famille de données initiales adéquates étant attestée par la proposition 5.1, on travaille dans la suite dans le cas de données nulles dans le passé. En effet, si l'on dispose d'une famille de données initiales

$$\mathbf{u}_0^\varepsilon(x) := \mathbf{a}^\varepsilon(0,x) + \varepsilon^M \mathbf{r}^\varepsilon(x)$$

donnée par la proposition 5.1, le lemme de Borel 3.6 assure, pour tout ε, l'existence de $\mathbf{w}^{\varepsilon,\natural}$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\partial_t^j \mathbf{w}^{\varepsilon,\natural}|_{t=0} = \mathbf{r}_j^\varepsilon$, où $\mathbf{r}_j^\varepsilon$ est définie comme dans la preuve de la proposition 5.1. On travaille alors avec $\tilde{\mathbf{w}}^\varepsilon = \mathbf{w}^\varepsilon - \mathbf{w}^{\varepsilon,\natural}$. L'appartenance de $\mathbf{r}^\varepsilon$ à $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{init}^m$ assure que $\tilde{\mathbf{w}}^\varepsilon$ vérifie le même type de problème que $\mathbf{w}^\varepsilon$ avec un terme source modifié $\tilde{\mathbf{g}}^\varepsilon$ qui est toujours dans $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{G}^m$. Notons $\mathbf{w}^\varepsilon := \varepsilon^{-M}(\mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{a}^\varepsilon)$ et considèrons le problème

$$(5.5)\qquad (\boldsymbol{\mathcal{H}} - \varepsilon\boldsymbol{\mathcal{E}})\mathbf{w}^\varepsilon = \mathbf{G}(t,x,\mathbf{a}^\varepsilon,\varepsilon^M\mathbf{w}^\varepsilon)\mathbf{w}^\varepsilon + \mathbf{g}^\varepsilon \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+$$

$$(5.6)\qquad \mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{w}^\varepsilon \\ \partial_n \mathbf{w}^\varepsilon \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T$$

$$(5.7)\qquad \mathbf{w}^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } t = 0$$

où $\mathbf{G}$ est telle que $\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}+\mathbf{v}) - \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) = \mathbf{G}(t,x,\mathbf{u},\mathbf{v}).\mathbf{v}$. Considérons $m > \frac{n}{2}$. Notons que si le problème est non linéaire, les non linéarités sont multipliées par des ε, ce qui assure l'existence de solutions en temps long. On commence par établir des estimations conormales pour la famille de problèmes linéaires :

$$(-\varepsilon\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{H}})\mathbf{w}^\varepsilon = \mathbf{f}^\varepsilon \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \tag{5.8}$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\mathbf{w}^\varepsilon\\ \partial_n \mathbf{w}^\varepsilon\end{bmatrix} = 0 \qquad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \tag{5.9}$$

$$\mathbf{w}^\varepsilon = 0 \qquad \text{quand } t = 0. \tag{5.10}$$

On définit, pour $\lambda \geqslant 1$ et m entier naturel, les normes à poids :

$$|\mathbf{w}\|_{0,\lambda,T} := \|e^{-\lambda t}\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega_T^+)}, \quad |\mathbf{w}\|_{m,\lambda,T} := \sum_{k\leqslant m} \lambda^{m-k}|Z^k\mathbf{w}\|_{0,\lambda,T}.$$

On note $\langle .,.\rangle_{0,\lambda,T}$ (respectivement $(.,.)_{0,\lambda,T}$) le produit scalaire dans $L^2(\Omega_T^+)$ (resp. $L^2(\Gamma_T)$), muni de la mesure $e^{-2\lambda t}dtdx$ (resp. $e^{-2\lambda t}dtdy$). Lorsque deux fonctions u et v sont dans $L^2(\Omega_T^+)$, on notera abusivement $(u,v)_{0,\lambda,T}$ le produit scalaire de leurs restrictions $(u|_{x_n=0}, v|_{x_n=0})_{0,\lambda,T}$. On note aussi $(.,.)_{0,\lambda,T}$ pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. On omettra dans les lignes qui suivent l'indice ε de $\mathbf{w}^\varepsilon$ et $\mathbf{f}^\varepsilon$. Cela ne doit pas entraîner de confusion.

Proposition 5.3. — *Soit m un entier naturel. Il existe $\lambda_m \geqslant 1$ tel que pour $\lambda \geqslant \lambda_m$ et pout tout $\varepsilon \in]0,1]$:*

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}\|^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}\|^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_m|\mathbf{f}\|^2_{m,\lambda,T} \tag{5.11}$$

Démonstration. — On commence par montrer le cas $m = 0$. Pour cela, pour tout temps $t \in (0,T)$, on multiplie l'équation (5.8) à gauche par ${}^t\mathbf{w}$ et on intégre sur $x \in \mathbb{R}^n_+$. On écrit $\boldsymbol{\mathcal{H}} := \boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat + \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_n$ où

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat := \sum_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A_i} Z_i + \boldsymbol{A}^\flat_{\boldsymbol{n}} Z_n, \quad \boldsymbol{A_n} = \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}} + x_n \boldsymbol{A}^\flat_{\boldsymbol{n}}.$$

Rappelons que $\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}$ est la trace de $\boldsymbol{A}_n$ sur Γ. C'est une matrice symétrique. Par conséquent, une intégration par partie donne

$$\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\mathbf{w}\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_n\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\int_{x\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t\mathbf{w}\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{w}.$$

Notant $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} w^+\\ w^-\end{bmatrix}$, la condition aux limites (5.6) se traduit par

$$w^+|_{x_n=0} = w^-|_{x_n=0}, \quad \partial_n w^+|_{x_n=0} = -\partial_n w^-|_{x_n=0}. \tag{5.12}$$

Ainsi

$$({}^t\mathbf{w}\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\mathbf{w})|_{x_n=0} = ({}^t w^+ \mathring{A}_n w^+)|_{x_n=0} - ({}^t w^- \mathring{A}_n w^-)|_{x_n=0} = 0$$

et $\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\mathbf{w}\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_n\mathbf{w} = 0$. D'autres intégrations par parties donnent les identités suivantes :

$$\begin{aligned}-\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\mathbf{w}.\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_n^2\mathbf{w} &= \int_{x\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t\mathbf{w}\partial_n\mathring{\mathbf{E}}_{nn}.\mathbf{w}\\ &\quad+\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\partial_n\mathbf{w}.\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_n\mathbf{w},\\ -\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\mathbf{w}.\sum_{j=1}^{n-1}\partial_n\mathring{\mathbf{E}}_{nj}\partial_j\mathbf{w} &= \sum_{j=1}^{n-1}\int_{x\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t\mathbf{w}\mathring{\mathbf{E}}_{nj}.\partial_j\mathbf{w}\\ &\quad+\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\partial_n\mathbf{w}.\sum_{j=1}^{n-1}\mathring{\mathbf{E}}_{nj}\partial_j\mathbf{w},\\ -\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\mathbf{w}.\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n; i\neq n}\partial_i\mathring{\mathbf{E}}_{ij}\partial_j\mathbf{w} &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n; i\neq n}\int_{x\in\mathbb{R}^n_+} {}^t\partial_i\mathbf{w}.\mathring{\mathbf{E}}_{ij}\partial_j\mathbf{w}.\end{aligned}$$

Pour $1\leqslant j\leqslant n$, en utilisant la structure par blocs de $\mathring{\mathbf{E}}_{nj}$ (cf. Section 4.1) et des conditions aux limites (5.12), on a

$$\begin{aligned}({}^t\mathbf{w}.\mathring{\mathbf{E}}_{nj}\partial_j\mathbf{w})|_{x_n=0} &= ({}^tw^+.E^+_{nj}\partial_j w^+)|_{x_n=0} + (-1)^{\delta_{jn}}({}^tw^-.E^-_{nj}\partial_j w^-)|_{x_n=0}\\ &= 0.\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}-\int_{x\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}} {}^t\mathbf{w}.\boldsymbol{\mathcal{E}}\mathbf{w} &= \int_{x\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} {}^t\partial_i\mathbf{w}.\mathbf{E}_{ij}\partial_j\mathbf{w},\\ &\geqslant \delta\int_{x\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}}|\nabla_x\mathbf{w}|^2\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse 1.2. On a, pour tout temps $t\in(0,T)$,

$$\partial_t\int_{x\in\mathbb{R}^n_+}\mathbf{w}^2 + \delta\int_{x\in\mathbb{R}^n_+}|\nabla_x\mathbf{w}|^2 \leqslant c\int_{x\in\mathbb{R}^n}\mathbf{w}^2 + \int_{x\in\mathbb{R}^n} f.\mathbf{w}.$$

On multiplie par $e^{-2\lambda t}$ et on intégre pour $t\in(0,T)$. On obtient ainsi l'existence d'un réel $\lambda_0\geqslant 1$ tel que pour $\lambda\geqslant\lambda_0$,

$$\varepsilon|\nabla_x\mathbf{w}\|^2_{0,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}\|^2_{0,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_0|\langle\mathbf{f},\mathbf{w}\rangle_{0,\lambda,T}|. \tag{5.13}$$

et donc (5.11) dans le cas $m=0$.

On procède ensuite par récurrence sur m, suivant [10], [26]. Supposons l'estimation (5.11) établie avec $0,1,\ldots,m-1$ en lieu et place de m. Pour $\alpha := (\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^{n+1}$, on note, au cours de cette démonstration, $Z^\alpha :=$

$Z_0^{\alpha_0} \cdots Z_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha| := \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$. Remarquons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'opérateur $\partial_n (x_n \partial_n)^k$ est de la forme

$$\partial_n + x_n \cdot (\text{Opérateur en } \partial_n, x_n \partial_n)\,,$$

on a

$$\partial_n (x_n \partial_n)^k w^+|_{x_n=0} = -\partial_n (x_n \partial_n)^k w^-|_{x_n=0}.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, l'opérateur de dérivation Z^α commutent donc exactement avec les conditions aux limites sur Γ_T. Ainsi, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$, $|\alpha| \leqslant m$, $Z^\alpha \mathbf{w}$ est solution de

$$\begin{aligned} (-\varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{H}}) Z^\alpha \mathbf{w} &= \tilde{\mathbf{f}} && \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ \mathbf{N} \begin{bmatrix} Z^\alpha \mathbf{w} \\ \partial_n Z^\alpha \mathbf{w} \end{bmatrix} &= 0 && \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ Z^\alpha \mathbf{w} &= 0 && \text{quand } t = 0 \end{aligned}$$

où le second membre $\tilde{\mathbf{f}}$ vaut $\tilde{\mathbf{f}} := Z^\alpha \mathbf{f} + [\boldsymbol{\mathcal{H}}, Z^\alpha]\mathbf{w} + [-\varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}, Z^\alpha]\mathbf{w}$.

Appliquant l'estimation (5.13), et multipliant par $\lambda^{2(m-|\alpha|)}$, on a :

$$\varepsilon (\lambda^{m-|\alpha|} |\nabla_x Z^\alpha \mathbf{w}\|_{0,\lambda,T})^2 + \lambda (\lambda^{m-|\alpha|} |Z^\alpha \mathbf{w}\|_{0,\lambda,T})^2 \\ \leqslant \lambda^{-1} \lambda_0 \lambda^{2(m-|\alpha|)} |\langle \tilde{\mathbf{f}}, Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T}|.$$

Pour contrôler le membre de gauche, il nous faut majorer les termes

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} |\langle Z^\alpha \mathbf{f}, Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{5.14}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} |\langle [\boldsymbol{\mathcal{H}}, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{5.15}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} |\langle [-\varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}}, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T}|. \tag{5.16}$$

Le terme (5.14) se majore par

$$(\lambda^{m-|\alpha|} |Z^\alpha \mathbf{f}\|^2_{0,\lambda,T}).(\lambda^{m-|\alpha|} |Z^\alpha \mathbf{w}\|^2_{0,\lambda,T})$$

puis par

$$\lambda^{-1} c_\delta \lambda^{m-|\alpha|} |Z^\alpha \mathbf{f}\|^2_{0,\lambda,T} + \lambda \delta \lambda^{m-|\alpha|} |Z^\alpha \mathbf{w}\|^2_{0,\lambda,T},$$

pour un δ assez petit de façon à ce que le terme en v soit absorbé dans le membre de gauche.

Considèrons maintenant le terme (5.16). Pour le majorer, il suffit de majorer une somme de termes dont les « plus mauvais » contiennent deux dérivées normales ∂_n et sont de la forme :

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)} |\langle [-\varepsilon \partial_n \mathbf{E}_{n,n} \partial_n, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T}|.$$

Le commutateur $[\partial_n \mathbf{E}_{n,n} \partial_n, Z^\alpha]$ est de la forme

$$\sum_{i \in I} \phi_i(x_n) \partial_n \mathbf{A}_i \partial_n Z^{\alpha_i} \tag{5.17}$$

où les matrices $\mathbf{A}_i(t,x)$ sont carrées de tailles $2N$, C^∞, bornées, ainsi que leurs dérivées, diagonales par blocs de la forme

$$\mathbf{A}_i := \begin{bmatrix} A_i^+ & 0 \\ 0 & A_i^- \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A_i^+|_{x_n=0} = A_i^-|_{x_n=0}; \tag{5.18}$$

Les fonctions ϕ_i sont scalaires, C^∞, bornées, ainsi que leurs dérivées. L'ensemble I est fini et pour tout $i \in I$, $|\alpha_i| \leqslant |\alpha| - 1$.

Plus précisemment, les matrices $\mathbf{A}_i(t,x)$ sont des combinaisons linéaires de dérivées conormales de matrices $\mathbf{E}_{n,n}$ avec pour coefficients des fonctions scalaires C^∞, bornée ainsi que leurs dérivées.

Notons, pour tout $i \in I$, I_i le terme

$$I_i := \lambda^{2(m-|\alpha|)} |\langle \varepsilon \partial_n \mathbf{A}_i \partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T}|.$$

Intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} \langle \partial_n \mathbf{A}_i \partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T} = -&\langle \mathbf{A}_i \partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}, \partial_n Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T} \\ &- (\mathbf{A}_i \partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w})_{0,\lambda,T}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Utilisant la structure de $\mathbf{A}_i$, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_i \partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w})_{0,\lambda,T} = &(A_i^+ \partial_n Z^{\alpha_i} w^+, Z^\alpha w^+)_{0,\lambda,T} \\ &+ (A_i^- \partial_n Z^{\alpha_i} w^-, Z^\alpha w^-)_{0,\lambda,T}. \end{aligned}$$

Tenant compte des conditions aux limites, on a, en $x_n = 0$,

$$\partial_n Z^{\alpha_i} w^+ = -\partial_n Z^{\alpha_i} w^-, \quad Z^{\alpha_i} w^+ = Z^{\alpha_i} w^-.$$

Combinées aux conditions (5.18), on a

$$(\mathbf{A}_i \partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w})_{0,\lambda,T} = 0$$

et l'identité (5.19) donna alors

$$\begin{aligned} I_i &= \lambda^{2(m-|\alpha|)} |\varepsilon \langle \partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}, \partial_n Z^\alpha \mathbf{w} \rangle_{0,\lambda,T}| \\ &\leqslant \text{Cste } \varepsilon \lambda^{2(m-|\alpha|)} |\partial_n Z^{\alpha_i} \mathbf{w}\|_{0,\lambda,T} |\partial_n Z^\alpha \mathbf{w}\|_{0,\lambda,T}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $i \in I$, $|\alpha_i| \leqslant |\alpha| - 1$. On a donc

$$\begin{aligned} I &\leqslant \sum_{i \in I} I_i \\ &\leqslant \text{Cste } \varepsilon |\partial_n \mathbf{w}\|_{m-1,\lambda,T} |\partial_n \mathbf{w}\|_{m,\lambda,T} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} |\partial_n \mathbf{w}\|^2_{m,\lambda,T} + C\varepsilon |\partial_n \mathbf{w}\|^2_{m-1,\lambda,T} \end{aligned}$$

Le terme $\frac{\varepsilon}{2} |\partial_n \mathbf{w}\|^2_{m,\lambda,T}$ est ainsi absorbé dans le membre de gauche. Le terme $\varepsilon |\partial_n \mathbf{w}\|^2_{m-1,\lambda,T}$ est majoré par le membre de droite de l'estimation (5.11) d'après l'hypothèse de récurrence.

Il reste à contrôler le terme (5.15). Pour cela, on doit contrôler des termes de la forme

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle [\mathbf{A}_i Z_i, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w}\rangle_{0,\lambda,T}| \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{5.20}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle [\mathbf{A}_n^\flat Z_n, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w}\rangle_{0,\lambda,T}|, \tag{5.21}$$

$$\lambda^{2(m-|\alpha|)}|\langle [\mathring{\mathbf{A}}_n \partial_n, Z^\alpha]\mathbf{w}, Z^\alpha \mathbf{w}\rangle_{0,\lambda,T}|. \tag{5.22}$$

Les termes (5.20) et (5.21) se majorent par $cte|\mathbf{w}\|^2_{m,\lambda}$ et sont absorbés dans le membre de gauche de (5.11). Pour le terme (5.22), on remarque que l'on a, par l'équation,

$$\mathring{\mathbf{A}}_n \partial_n \mathbf{w} = -\boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat \mathbf{w} + \varepsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} \mathbf{w} + \mathbf{f},$$

ce qui nous ramène à des cas précédents. □

On utilise la famille de schémas itératifs $(\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu})_{0<\varepsilon\leqslant 1,\nu\geqslant 0}$ définie par $\mathbf{w}^{\varepsilon,0} := 0$ et

$$\begin{aligned}
(-\varepsilon\boldsymbol{\mathcal{E}} + \boldsymbol{\mathcal{H}})\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1} &= \mathbf{G}(t,x,\mathbf{a}^\varepsilon, \varepsilon^M \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu})\mathbf{w}^{\nu+1} + \mathbf{g}^\varepsilon && \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+,\\
\mathbf{N}\begin{bmatrix} \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1} \\ \partial_n \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\end{bmatrix} &= 0 && \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T,\\
\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1} &= 0 && \text{quand } t = 0.
\end{aligned}$$

On notera dans la suite $\|\cdot\|_\infty$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega_T)}$.

Proposition 5.4. — *Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $\lambda_1 > 0$ tel que si $\varepsilon^M\|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}\|_\infty \leqslant \mu$ alors*

$$\begin{aligned}
&\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T}\\
&\quad\leqslant \lambda^{-1}\lambda_1\left(|\mathbf{g}^\varepsilon\|^2_{m,\lambda,T} + (|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M\|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_\infty|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}\|_{m,\lambda,T})^2\right).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Démonstration. — Il s'agit d'estimer en norme $|.\|^2_{0,\lambda,T}$ des termes de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|}Z^\alpha(\mathbf{G}(t,x,\mathbf{a}^\varepsilon,\varepsilon^M\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu})\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}). \tag{5.24}$$

Lorsqu'on développe (5.24), on obtient deux types de termes :

– ceux où $\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}$ n'est pas dérivé. Ils sont contrôlés par

$$cte|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T}$$

et pour λ assez grand sont absorbés dans le membre de gauche de (5.23).

– ceux où $\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}$ est dérivé. Ils sont de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|}\Phi^\varepsilon(t,x)Z^{\beta_1}\mathbf{a}^\varepsilon\cdots Z^{\beta_i}\mathbf{a}^\varepsilon Z^{\gamma_1}(\varepsilon^M\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu})\cdots Z^{\gamma_j}(\varepsilon^M\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu})Z^\delta\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}$$

où $\Phi^\varepsilon(t,x)$ est uniformément borné dans L^∞ et

$$|\beta_1| + \dots + |\beta_i| + |\gamma_1| + \dots + |\gamma_j| + |\delta| \leqslant |\alpha|.$$

On doit donc majorer en $|\cdot\|^2_{0,\lambda,T}$ des termes de la forme

$$\lambda^{m-|\alpha|} Z^{\gamma_1}(\varepsilon^M \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}) \cdots Z^{\gamma_j}(\varepsilon^M \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}) Z^\delta \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}. \tag{5.25}$$

On utilise les inégalités de Moser suivantes [10] :

Lemme 5.5. — *Soient m un entier naturel, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l$ des fonctions de $H^m(\Omega_T)$ et $\alpha := (\alpha_1, \dots \alpha_l)$ dans $\mathbb{N}^l$ avec $|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_l| \leqslant m$. Alors, pour tout $\lambda \geqslant 1$, on a :*

$$\lambda^{m-|\alpha|} |Z_1^\alpha \mathbf{a}_1 \dots Z_l^\alpha \mathbf{a}_l\|_{0,\lambda,T} \leqslant c \sum_j (\Pi_{i\neq j} \|\mathbf{a}_i\|_\infty) |\mathbf{a}_j\|_{m,\lambda,T}.$$

La constante c étant indépendante des $\mathbf{a}_i$.

Le terme (5.25) se majore alors par

$$cte(|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M \|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_\infty |\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}\|_{m,\lambda,T})^2$$

ce qui achève la preuve. □

La proposition précédente utilise une norme L^∞ pour contrôler la nonlinéarité dans les estimations conormales. Nous allons maintenant voir comment majorer à son tour cette norme L^∞ par plongement de Sobolev. L'idée est d'être économe en ε et en dérivées normales. On se tourne donc, à l'instar de [26], vers des plongements de Sobolev anisotropes. La proposition qui suit est démontrée par O. Guès dans [10].

Proposition 5.6. — *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $\mathbf{w}$ dans $H^m(\Omega_T)$*

$$\|\mathbf{w}\|_\infty \leqslant \rho T e^{\lambda T}(|\mathbf{w}\|_{m,\lambda,T} + |\partial_n \mathbf{w}\|_{m,\lambda,T}).$$

On en déduit par un simple changement de variable

Proposition 5.7. — *Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $\mathbf{w} \in H^m(\Omega_T)$, pour tout $\varepsilon \in [0,1]$*

$$\varepsilon^{\frac14} \|\mathbf{w}\|_\infty \leqslant \rho T e^{\lambda T}(|\mathbf{w}\|_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon} |\partial_n \mathbf{w}\|_{m,\lambda,T}).$$

Fixons un réel $\mu > 0$ arbitraire, un réel λ_1 donné par la proposition 5.4, $\lambda \geqslant 2\lambda_1$ et $h := \sup_{0<\varepsilon\leqslant 1} |\mathbf{g}^\varepsilon\|_{m,\lambda,T}$. On choisit alors $0 < \varepsilon_0 < 1$ assez petit pour que

$$\varepsilon_0^{M-\frac14} h \rho T e^{\lambda T} \leqslant min(\mu, 1). \tag{5.26}$$

Proposition 5.8. — *La famille* $(\mathbf{w}^{\nu})_{\varepsilon,\nu}$ *satisfait, pour tout entier naturel* ν*, pour tout* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\varepsilon^M \|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}\|_{\infty} \leqslant \mu, \quad \|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu}\|_{m,\lambda,T} \leqslant h.$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur ν. La proposition est vraie pour $\nu = 0$. Supposons la vraie pour ν quelconque. Alors par la proposition 5.4, on a

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + (|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^M h\|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{\infty})^2).$$

On utilise la proposition 5.7 pour contrôler $\|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{\infty}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} &+ \lambda|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} \\ &\leqslant \lambda^{-1}\lambda_1\Big(h^2 + (|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} + \varepsilon^{M-\frac14} h\rho T e^{\lambda T} \\ &\qquad \times (|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T})^2\Big)\end{aligned}$$

donc

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + (2|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} + \sqrt{\varepsilon}|\partial_n \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T})^2)$$

et, par suite,

$$\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + 8|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} + 2\varepsilon|\partial_n \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T})$$

d'où

$$\frac{1}{2}\varepsilon|\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} + \lambda|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T} \leqslant \lambda^{-1}\lambda_1(h^2 + 8|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|^2_{m,\lambda,T})$$

ainsi $|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{h}{2}$ et $\sqrt{\varepsilon}|\nabla_x \mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{h}{2}$ d'où

$$\varepsilon^M\|\mathbf{w}^{\varepsilon,\nu+1}\|_{\infty} \leqslant \varepsilon^{M-\frac14}\rho T e^{\lambda T} h \leqslant \mu.$$

□

On obtient alors classiquement une solution régulière de (5.5))-(5.6)-(5.7 qui vérifie par passage à la limite ($\nu \to +\infty$) $\varepsilon^M\|\mathbf{w}^{\varepsilon}\|_{\infty} = O(1)$ et $|\mathbf{w}^{\varepsilon}\|_{m,\lambda,T} = O(1)$. Les dérivées normales itérées sont estimées ensuite par récurrence par l'équation.

On a ainsi obtenu un réel ε_0 et une famille $(\mathbf{w}^\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ solution de (5.5)-(5.6)-(5.7) vérifiant $\sup_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]} \|\mathbf{w}^\varepsilon|^\varepsilon_{m,T} < \infty$. Notons que le choix de ε_0 dépend de m car dans (5.26), la quantité h dépend de m. Cependant, la théorie classique des systèmes paraboliques, et en particulier le critère d'explosion, assure que les $(\mathbf{w}_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]}$ sont dans $H^\infty(\Omega_T^+)$.

6. Preuve du théorème 4.3

Dans cette section, nous prouvons le théorème 4.3. La preuve est technique et se fait en plusieurs étapes. La première sous-section établit une propriété de préservation par composition non linéaire de l'espace de profil $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$. Dans les sous-sections 6.2 (resp. 6.3), on substitue le développement

$$\sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

à la place de $\mathbf{u}^\varepsilon$ dans (4.1) (resp. (4.2)). La question est de savoir quels sont les profils $\boldsymbol{\mathcal{U}}^j$ qui fournissent une famille de solutions approchées (au sens donné par le théorème 4.3). On résout pour cela une cascade d'équations de profils. La sous-section 6.4 (resp. 6.5) donne des résultats sur les équations vérifiées par les profils de couches limites caractéristiques (resp. non caractéristiques). Dans la sous-section 6.6, on résout effectivement, en cascade, les équations de profils. La sous-section 6.7 conclut la preuve.

6.1. Composition non linéaire des profils

On commence par donner une définition qui donne un sens rigoureux aux développements que nous allons utiliser.

Définition 6.1. — *On dira qu'une famille de fonctions régulières $(\mathbf{u}^\varepsilon)_\varepsilon$ satisfait*

$$\mathbf{u}^\varepsilon \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

pour une suite donnée de profils $\boldsymbol{\mathcal{U}}^j$ de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ si pour tout k entier naturel, la famille $(\mathbf{r}_k^\varepsilon)_{0<\varepsilon\leqslant 1}$ définie par

$$\mathbf{r}_k^\varepsilon := \mathbf{u}^\varepsilon - \sum_{j=0}^{k} \sqrt{\varepsilon}^j \boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

est dans $\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{\mathcal{G}}^m(T)$.

L'espace $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ a la propriété de préservation par composition non linéaire suivante :

Proposition 6.2. — *Soit* $(\mathbf{u}^\varepsilon)_{\varepsilon>\mathbf{0}}$ *une famille de fonctions de*

$$H^\infty(\Omega_T^+, \mathbb{R}^{2N})$$

satisfaisant

$$\mathbf{u}^\varepsilon \sim \sum_{\mathbf{j}\geqslant\mathbf{0}} \sqrt{\varepsilon}^{\mathbf{j}} \boldsymbol{\mathcal{U}}^{\mathbf{j}}(\mathbf{t}, \mathbf{x}, \frac{\mathbf{x_n}}{\varepsilon}, \frac{\mathbf{x_n}}{\sqrt{\varepsilon}})$$

pour une suite donnée de profils $\boldsymbol{\mathcal{U}}^j := \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0$ *de* $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ *et* $\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u})$ *une fonction* $C^\infty(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R}^{2N})$ *telle que* $\mathbf{F}(t,x,0) = 0$*. Alors,*

(1) *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, la fonction* $(t,x) \mapsto \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{t},\mathbf{x}))$ *est dans* $H^\infty(\Omega_T^+, \mathbb{R}^{2N})$*. De plus, il existe des profils* $(\boldsymbol{\mathcal{V}}^j)_{j\geqslant 0}$ *dans* $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ *tels que*

$$\mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}^\varepsilon(t,x)) \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \boldsymbol{\mathcal{V}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon}, \frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}).$$

(2) *Le profil* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^0$ *se décompose en* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^0 = \boldsymbol{\mathcal{V}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{V}}_b^0 + \boldsymbol{\mathcal{V}}_c^0$ *avec*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{V}}_a^0 &:= \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}_b^0 &:= \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}_c^0 &:= \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^0).
\end{aligned}$$

Lorsque $\mathbf{u}$ *est dans* $\mathcal{N}_\theta(T)$*,* $\mathring{\mathbf{u}}$ *désigne la trace de* $\mathbf{u}$ *en* $\theta = 0$*.*

(3) *Pour tout* $j \geqslant 1$*, il existe des fonctions* (Q_a^j, Q_b^j, Q_c^j)*,* C^∞ *de leurs arguments, tels que le profil* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j$ *se décompose en* $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j = \boldsymbol{\mathcal{V}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j + \boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j$ *avec*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{V}}_a^j &:= \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + Q_a^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k)_{k\leqslant j-1}),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j &:= \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0).(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j) - \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j\\
&\qquad + Q_b^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k,\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^k)_{k\leqslant j-1}),\\
\boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j &:= Q_c^j(t,x,z,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k,\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^k)_{k\leqslant j}, (\partial_\theta^i \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^k)_{i+k\leqslant j}).
\end{aligned}$$

De plus $Q_a^1 = Q_b^1 = 0$*.*

L'esprit de la proposition est le suivant : notre analyse fait intervenir des développements avec des profils et un reste. Aussi, la propriété d'algèbre n'est pas essentielle si l'erreur commise peut être incluse dans le reste. La stratégie de la démonstration se résume ainsi : on introduit la plus petite algèbre contenant $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$. Celle-ci contient des profils dépendants à la fois de $\frac{x_n}{\varepsilon}$ et de $\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}}$. C'est un développement avec de tels profils que l'on obtient à priori par composition non linéaire. On redéveloppe les profils couplés en un développement de couche limite non caractéristique en contrôlant l'erreur à tout ordre.

Démonstration. — Considérons

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(\Omega_T^+) := H^\infty(\Omega_T^+, \mathbb{R}^{2N}) \oplus \mathcal{N}_\theta(T) \oplus H^\infty(\Omega_T^+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_\theta^+ \times \mathbb{R}_z^+, \mathbb{R}^{2N}))$$

et étendons la définition 6.1 à de tels profils. $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(\Omega_T^+)$ est l'espace considéré par O. Guès dans [10]. C'est la plus petite algèbre contenant $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$.

On a, pour $(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j)_{j\geqslant 0}$ famille de profils de $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$,

$$\mathbf{F}(t,x,\sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \boldsymbol{\mathcal{U}}^j) \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j \,\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j$$

où $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^0 := \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}^0)$ et, pour $j \geqslant 1$, $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j := \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k)_{k\leqslant j})$ avec, pour tout $(t,x,(u^k)_{0\leqslant k\leqslant j}) \in \Omega_T^+ \times (\mathbb{R}^{2N})^{j+1}$,

$$\tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(u^k)_{0\leqslant k\leqslant j}) := \sum_{n=1}^{j} \sum_{k_1+\cdots+k_n=j} \frac{1}{n!} D_u^n \mathbf{F}(t,x,u^0)(u^{k_1},\ldots,u^{k_n}),$$

la somme portant sur des $k_i \neq 0$ pour i compris entre 1 et n.

Les $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j$ sont dans $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(\Omega_T^+)$ et se décomposent en $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_a^j + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_b^j + \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_c^j$ avec

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_a^j &:= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k)_{k\leqslant j}),\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_b^j &:= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k+\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^k)_{k\leqslant j}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k)_{k\leqslant j}),\\
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_c^j &:= \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}^k)_{k\leqslant j}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k+\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^k)_{k\leqslant j}).
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant redévelopper les termes $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_c^j$ en développements de couches limites non caractéristiques. Avant cela, on réalise une manipulation préliminaire qui sera importante pour asurer la décroissance rapide des profils du développement obtenu. Elle consiste essentiellement à factoriser par des termes de couches limites non caractéristiques. Effectuant un développement de Taylor en θ, on a l'existence de matrices de taille $2N \times 2N$ régulières $(\tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat})_{0\leqslant k\leqslant j}$ telles que pour tout (t,x) dans Ω_T^+, pour tout $\mathfrak{u} := (u_k)_{0\leqslant k\leqslant j}$ et $\mathfrak{v} := (v_k)_{0\leqslant k\leqslant j}$ vecteurs de $(\mathbb{R}^{2N})^{j+1}$,

$$\tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,\mathfrak{u}+\mathfrak{v}) - \tilde{\mathbf{V}}^j(t,x,\mathfrak{u}) = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{u},\mathfrak{v}).v_k.$$

Ainsi, notant $\mathfrak{U}_d := (U_d^k)_{0\leqslant k\leqslant j}$, où d désigne a, b ou c, on a

$$\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_c^j = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a+\mathfrak{U}_b,\mathfrak{U}_c).\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^k.$$

Or pour tout $0 \leqslant k \leqslant j$, le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^k$ admet pour développement de Taylor : $\sum_{i\geqslant 0} \frac{\theta^i}{i!}\partial_\theta^i \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^k$. Le profil $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}^j$ admet donc également un développement de Taylor de la forme $\sum_{i\geqslant 0} \theta^i\, \boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,i}$ avec

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,0} = \sum_{k=0}^{j} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a + \mathring{\mathfrak{U}}_b, \mathfrak{U}_c).\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^k$$

et, pour $j \geqslant 1$,

$$\boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,i} = \sum \frac{1}{\Pi_{l=0}^N \frac{1}{n_l!}} \sum_{k=0}^{j} D_u^{\mathfrak{n}} \tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,\mathfrak{U}_a + \mathring{\mathfrak{U}}_b, \mathfrak{U}_c).\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^k.\mathfrak{u}^0 \cdots \mathfrak{u}^N.$$

Dans l'expression précédente, la somme porte sur l'ensemble des indices $\mathfrak{n} := (n_0, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^{N+1}$ et des indices $(k_m^l)_{l/n_l>0} \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sum_{l=0}^N \sum_{m=1}^{n_l} k_m^l = i$. On a désigné par $D_u^{\mathfrak{n}}$ le produit de dérivées $D_u^{\mathfrak{n}} := D_{u_0}^{n_0} \cdots D_{u_N}^{n_N}$ où, pour $0 \leqslant l \leqslant N$, $D_{u_l}^{n_l}$ est la dérivée d'ordre n_l par rapport à la variable u^l de

$$\tilde{\mathbf{V}}^{j,k,\flat}(t,x,(u^l)_{0\leqslant k\leqslant j}, \mathfrak{U}_c).$$

Cette dérivée est évaluée en $\mathfrak{u}^l := (u^{l,k_1^l}, \dots, u^{l,k_{n_l}^l})$ où $u^{k,l} = \frac{\partial_\theta^l \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^k}{l!}$.

Par suite, on a $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_c^j \sim \sum_{i\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^i\, \tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}^{j,i}$ avec $\tilde{\boldsymbol{\mathcal{W}}}^{j,i} := z^i\, \boldsymbol{\mathcal{W}}^{j,i}$ dans $\mathcal{N}_z(T)$.

Notant $\boldsymbol{\mathcal{V}}_a^j := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_a^j$, $\quad \boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j := \tilde{\boldsymbol{\mathcal{V}}}_b^j$, $\boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j := \sum_{i+k=j} \boldsymbol{\mathcal{W}}^{k,i}$ et $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j := \boldsymbol{\mathcal{V}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j + \boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j$ on a que $\boldsymbol{\mathcal{V}}^j \in \boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$, qu'il existe Q_c^j tel que

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j := Q_c^j(t,x,z,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^k, \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^k)_{0\leqslant k\leqslant j}, (\partial_\theta^i \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^k)_{i+k\leqslant j})$$

et que $\sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \boldsymbol{\mathcal{U}}^j \sim \sum_{j\geqslant 0} \sqrt{\varepsilon}^j\, \boldsymbol{\mathcal{V}}^j$ □

La proposition suivante complète la proposition 6.2. C'est un corollaire de la démonstration de cette dernière où sont explicitées les fonctions Q^j. Ces propriétés seront utiles dans la démonstration du point 3 du théorème 2.1.

Proposition 6.3. — *Si les* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{2j+1})_{0\leqslant j\leqslant [\frac{r}{2}]}$ *sont nuls, alors les* $(\boldsymbol{\mathcal{V}}_a^{2j+1})_{0\leqslant j\leqslant [\frac{r}{2}]}$ *le sont aussi. Si les* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$ *(resp. les* $(\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$*) alors les* $(\boldsymbol{\mathcal{V}}_b^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$ *(resp. les* $(\boldsymbol{\mathcal{V}}_c^j)_{0\leqslant j\leqslant r}$*) le sont aussi.*

La preuve de la proposition 6.2 est reportée à la fin de l'article.

6.2. L'ansatz de résolution

Un développement de Taylor au premier ordre assure l'existence de matrices $\mathbf{A}_n^\flat(t,x)$ (respectivement $\mathbf{E}_{nn}^\flat(t,x)$) de taille $2N \times 2N$ avec une régularité C^∞ en (t,x) tel que $\mathbf{A}_n = \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}} + x_n \mathbf{A}_n^\flat$ (resp. $\mathbf{E}_{n,n} = \mathring{\boldsymbol{E}}_{n,n} + x_n \mathbf{E}_{n,n}^\flat$).

Remarquons que pour tout profil $\mathcal{U}_b \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ (respectivement $\mathcal{U}_c \in \mathcal{N}_z(T_0)$), la fonction $\theta\partial_\theta\mathcal{U}_b$ (resp. $z\partial_z\mathcal{U}_c$) est encore dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ (resp. $\mathcal{N}_z(T_0)$). De plus, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_n\partial_\theta\mathcal{U}_b &\sim \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_\theta\mathcal{U}_b + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{A}_n^\flat\mathcal{U}_b,\\
\mathbf{A}_n\partial_z\mathcal{U}_c &\sim \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_z\mathcal{U}_c + \varepsilon\mathbf{A}_n^\flat z\partial_z\mathcal{U}_c,\\
\mathbf{E}_{nn}\partial_\theta\mathcal{U}_b &\sim \mathring{\boldsymbol{E}}_{n,n}\partial_\theta\mathcal{U}_b + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E}_{n,n}^\flat\theta\partial_\theta\mathcal{U}_b,\\
\mathbf{E}_{nn}\partial_z\mathcal{U}_c &\sim \mathring{\boldsymbol{E}}_{n,n}\partial_z\mathcal{U}_c + \mathbf{E}_{n,n}^\flat z\partial_z\mathcal{U}_c.
\end{aligned}$$

La substitution du développement

$$\sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

à la place de $\mathbf{u}^\varepsilon$ dans (4.1) donne, par la proposition précédente un développement (l'ansatz de résolution)

$$\sum_{j\geqslant -2}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{F}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$$

où les profils $\boldsymbol{\mathcal{F}}^j$ sont dans $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\Omega_T^+)$ et se décomposent de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^{-2} = \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{-2} = 0, \qquad \boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-2} = \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 - \mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_{zz}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0,\\
&\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^{-1} = 0, \qquad \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{-1} = \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0, \qquad \boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-1} = \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1 - \mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_{zz}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1,\\
&\quad\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^0 = \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0) - \mathbf{f}(t,x),\\
&\quad\boldsymbol{\mathcal{F}}_b^0 = \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^1 + \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 + \mathbf{A}_n^\flat\theta\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 - \mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_{\theta\theta}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0\\
&\qquad\qquad - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0) + \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0),\\
&\quad\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^0 = \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 - \mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_{zz}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 + q_c^0,
\end{aligned}$$

et pour $j \geqslant 1$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^j &= \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j - \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + q_a^j,\\
\boldsymbol{\mathcal{F}}_b^j &= \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} + \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j + \mathbf{A}_n^\flat\theta\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j - \mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_{\theta\theta}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j\\
&\qquad - \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0)(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j) + \mathbf{F}'_u(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + q_b^j,\\
\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^j &= \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} - \mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_{zz}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} + q_c^j,
\end{aligned}$$

où l'on a regroupé un certain nombre de termes de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
&q_c^0 := -\mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0) + \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j),\\
&q_a^1 := 0, \qquad q_b^1 := 0,\\
&q_c^1 := -Q_c^1(t,x,z,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j)_{j\leqslant 1}), (\partial_\theta^i \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j)_{i+j\leqslant 1}),
\end{aligned}
$$

et, pour $k \geqslant 2$,

$$
\begin{aligned}
q_a^k &:= -\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{k-2} - Q_a^k(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j)_{j\leqslant k-1}),\\
q_b^k &:= -\boldsymbol{\mathcal{E}}_b\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{k-1} - \boldsymbol{E}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{k-2} - Q_b^k(t,x,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j,\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j)_{j\leqslant k-1}),\\
q_c^k &:= (\boldsymbol{\mathcal{H}} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_c)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^k - \boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{k-2}\\
&\qquad - Q_c^k(t,x,z,(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j,\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^j)_{j\leqslant k}, (\partial_\theta^i \mathring{\boldsymbol{\mathcal{U}}}_b^j)_{i+j\leqslant k}),
\end{aligned}
$$

où $\boldsymbol{\mathcal{E}}_b$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}}_c$ désignent respectivement les opérateurs

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{E}}_b &:= \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{E}_{in} + \boldsymbol{E}_{ni})\partial_\theta\partial_i,\\
\boldsymbol{\mathcal{E}}_c &:= \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{E}_{in} + \boldsymbol{E}_{ni})\partial_z\partial_i.
\end{aligned}
$$

6.3. L'ansatz de résolution des conditions aux limites

Rappelons que l'on note $N_0 := \begin{bmatrix}\mathrm{Id} & -\mathrm{Id}\end{bmatrix}$ et $N_1 := \begin{bmatrix}\mathrm{Id} & \mathrm{Id}\end{bmatrix}$ où Id est la matrice identité de taille $N \times N$. Ainsi, on a

$$
\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix},
$$

où 0 est une matrice de N lignes et $2N$ colonnes remplie de 0. La condition aux limites (4.2) se réécrit donc :

$$
N_0\mathbf{u}^\varepsilon = N_1\partial_n\mathbf{u}^\varepsilon = 0 \quad \text{quand} \quad (t,x) \in \Gamma_T.
$$

La substitution du développement $\sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{U}}^j(t,x,\frac{x_n}{\varepsilon},\frac{x_n}{\sqrt{\varepsilon}})$ à $\mathbf{u}^\varepsilon$ dans (4.2) donne l'ansatz de résolution des conditions aux limite

$$
\begin{bmatrix} \sum_{j\geqslant 0}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl0}^j(t,y) \\ \sum_{j\geqslant -2}\sqrt{\varepsilon}^j\,\boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl1}^j(t,y) \end{bmatrix}
$$

où

$$
\boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl1}^{-2} := N_1\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0|_{x_n=z=0}, \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_{cl1}^{-1} := N_1(\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1|_{x_n=z=0} + \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0|_{x_n=\theta=0})
$$

et pour $j \geqslant 0$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl0} := N_0 \boldsymbol{\mathcal{U}}^j|_{x_n=\theta=z=0},$$
$$\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl1} := N_1(\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c|_{x_n=z=0} + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b|_{x_n=\theta=0} + \partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1}|_{x_n=\theta=z=0}).$$

On note $\boldsymbol{\Pi}_0 := \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \Pi_0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{Id} := \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix}$.

Définissons les problèmes $(S^{-1}_{cl}(T))$:

$$N_1 \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_c|_{z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T, \tag{6.1}$$

$(S^0_{cl}(T))$:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\mathcal{U}}^0|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T, \tag{6.2}$$
$$N_0 \boldsymbol{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{U}}^0|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T, \tag{6.3}$$
$$N_1(\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^1_c + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^0_b)|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T, \tag{6.4}$$

et pour $j \geqslant 1$, $(S^j_{cl}(T))$:

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\mathcal{U}}^j|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T, \tag{6.5}$$
$$N_0 \boldsymbol{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{U}}^j|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T, \tag{6.6}$$
$$N_1(\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b + \partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1})|_{\theta=z=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T. \tag{6.7}$$

On notera que $N_0 = N_0\boldsymbol{\Pi}_0 + M$. On a choisi comme dans [26] de garder une dépendance en x_n au niveau de la couche limite et de faire baver les conditions aux limites (6.1), (6.3), (6.4), (6.6), (6.7).

Remarquons que si le problème (S^{-1}_{cl}) est vérifié alors $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-2}_{cl1}$ est nul. Pour $j \geqslant 0$, si (S^j_{cl}) est vérifié alors $\boldsymbol{\mathcal{F}}^{j-1}_{cl1}$ et $\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl0}$ sont nuls. La résolution des $(S^j_{cl}(T))_{j\geqslant -1}$ assure l'annulation des $(\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl0})_{j\geqslant 0}$ et $(\boldsymbol{\mathcal{F}}^j_{cl1})_{j\geqslant -2}$.

6.4. Problème hyperbolique-parabolique

On donne ici un résultat pour une équation de type hyperbolique-parabolique (cf. [10]). Ceci nous sera utile au moment de résoudre les équations de profils vérifiées par les termes de couche limite caractéristique (cf. sous-section 6.6).

Considèrons $T_0 > 0$, les matrices de taille $2N \times 2N$: $\mathbf{K} := {}^t\boldsymbol{\Pi}_0 \mathbf{A}^\flat_n \boldsymbol{\Pi}_0$, $\mathbf{E} := {}^t\boldsymbol{\Pi}_0 \mathring{\mathbf{E}}_{nn} \boldsymbol{\Pi}_0$ et l'opérateur $\mathbb{H} := {}^t\boldsymbol{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{H}} \boldsymbol{\Pi}_0 + \boldsymbol{K}\theta\partial_\theta$ qui est un opérateur symétrique hyperbolique sur l'espace des fonctions W telles que $(\mathrm{Id} - \boldsymbol{\Pi}_0)W = 0$.

On considère, pour $0 < T \leqslant T_0$, le problème mixte :

(6.8) $$(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, W = 0, \qquad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+,$$

(6.9) $$(-\mathbf{E}\partial_\theta^2 + \mathbb{H})W = \mathbf{\Pi}_0 f(t,x,p,W) \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+,$$

(6.10) $$\mathbf{N} \begin{bmatrix} W \\ \partial_\theta W \end{bmatrix} |_{\theta=0} = \mathbf{N} b \qquad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+,$$

(6.11) $$W = a \qquad \text{quand } (t,x,\theta) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_\theta^+,$$

où $f(t,x,p,W)$ est une fonction de classe C^∞, à valeurs dans $\mathbb{R}^{2N}$ et vérifiant $f(t,x,0,0) = 0$. La fonction $p(t,x,\theta)$ joue le rôle de paramètre et appartient à $\mathcal{N}_\theta(T_0)$. On suppose que b est dans $H^\infty(\Omega_T^+)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{4N}$, et vérifie

(6.12) $$\mathbf{N}(\mathrm{Id} - \underline{\mathbf{\Pi}}_0)\, b = 0$$

où l'on a noté $\underline{\mathbf{\Pi}}_0$ les matrices de taille $4N \times 4N$ définies par

(6.13) $$\underline{\mathbf{\Pi}}_0 := \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_0 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Pi}_0 \end{bmatrix}.$$

La donnée initiale a est dans l'espace $H^\infty(\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_\theta^+)$ et vérifie

(6.14) $$(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)|_{t=0}\, a = 0.$$

Notons que les conditions (6.12) et (6.14) sont nécessaires à l'existence de solutions régulières de (6.8), (6.9) et (6.11). En effet, si W est solution régulière de (6.8), (6.9) et (6.11), avec $T > 0$, alors par restriction à $t = 0$ et application de $(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\,|_{t=0}$, on obtient la condition (6.14) sur la donnée initiale a. Pour obtenir la condition (6.12) sur la donnée au bord b, on prend la restriction à $\theta = 0$ et on applique les matrices $\mathrm{Id} - \underline{\mathbf{\Pi}}_0$. Remarquant que les matrices $\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0$ commutent avec la matrice constante N et avec l'opérateur de dérivation ∂_θ, on a bien la condition (6.12).

Examinons maintenant la compatibilité des données initiales et au bord sur le coin $\{t = \theta = 0\}$: si W est solution régulière de (6.8), (6.9), (6.10) et (6.11), avec $T > 0$, alors il existe des fonctions $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^{2N})^{k(k+1)} &\to \mathbb{R}^{2N} \\ (x,\theta,(u_{i,j})_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}) &\mapsto I_k(x,\theta,(u_{i,j})_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}) \end{aligned}$$

de classe C^∞ telles que les fonctions $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$W_k(x,\theta) := (\partial_t^k W)(0,x,\theta)$$

vérifient

$$W_k(x,\theta) = I_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}). \tag{6.15}$$

Si, de plus, W est solution de (6.10), on a nécessairement sur le coin $\{t = \theta = 0\}$

$$\begin{bmatrix} W_k \\ \partial_\theta W_k \end{bmatrix} |_{\theta=0} = \mathbf{N} b_k,$$

où les fonctions $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ sont définies par $b_k(x) := (\partial_t^k b)(0,x)$.

Ainsi la donnée initiale a doit satisfaire les relations de compatibilité $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} a_k \\ \partial_\theta a_k \end{bmatrix} |_{\theta=0} = \mathbf{N} b_k, \tag{R'_k}$$

où les fonctions $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in H^\infty(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$, sont définies par

$$a_k(x,\theta) := I_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}).$$

La réciproque est contenue dans le théorème suivant

Théorème 6.4. — *Soit $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction a vérifie les relations $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$,*
2. *Il existe $T \in]0,T_0]$ et $W \in \mathcal{N}_\theta(T)$ solution régulière de* (6.8), (6.9), (6.10) *et* (6.11).

La relation (R'_k) dépend des termes sources par l'intermédiaire des $(\partial_t^l f)_{l\leqslant k-1}$, $(D_p^{(l)} f)_{l\leqslant k-1}$, $(D_W^{(l)} f)_{l\leqslant k-1}$ et $(\partial_t^l b)_{l\leqslant k}$.

De même que pour le problème mixte hyperbolique, on a le résultat d'existence de données compatibles à tout ordre :

Proposition 6.5. — *Il existe $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$ vérifiant les relations $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Démonstration. — On commence par remarquer qu'il existe des fonctions $(\tilde{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles que pour tout $(x,\theta,a) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+ \times H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

$$\begin{aligned} I_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k}) \\ = \mathbf{E}^k(0,x)\partial_\theta^{2k} a + \tilde{I}_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k, j<2k}). \end{aligned} \tag{6.16}$$

On note, pour tout couple d'entiers positifs (i,j) vérifiant $i+j/2\leqslant k$, $D_{u_{i,j}}I_k$ la différentielle partielle de I_k par rapport à sa variable $u_{i,j}$. À toute fonction $a\in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, associons la fonction

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_a : \mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^{2N})^{k(k+1)}\\ (x,\theta)&\mapsto \mathfrak{x}_a(x,\theta):=(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a(x,\theta))_{i+\frac{j}{2}\leqslant k,j<2k}).\end{aligned}$$

On a

$$\partial_\theta(I_k(\mathfrak{x}_a))=(\partial_\theta I_k)(\mathfrak{x}_a)+\sum_{i+\frac{j}{2}\leqslant k} D_{u_{i,j}}I_k(\mathfrak{x}_a).\partial_x^i\partial_\theta^{j+1}a.$$

Par conséquent, il existe des fonctions $(\check{I}_k)_{k\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^{2N})^{k(k+1)-1}\to\mathbb{R}^{2N}\\ &(x,\theta,(u_{i,j})_{i+\frac{j}{2}\leqslant k,\ j<2k+1})\mapsto \check{I}_k(x,\theta,(u_{i,j})_{i+\frac{j}{2}\leqslant k,\ j<2k+1})\end{aligned}$$

de classe C^∞ telles que pour tout $(x,\theta,a)\in\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}_+\times H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,

$$\partial_\theta(I_k(\mathfrak{x}_a))=\mathbf{E}^k(0,x)\partial_\theta^{2k+1}a+\check{I}_k(x,\theta,(\partial_x^i\partial_\theta^j a)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k+1,\ j<2k+1}). \tag{6.17}$$

Lemme 6.6. — *Il existe une suite de fonctions $(\mathfrak{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}\in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ telles que, pour tout $k\in\mathbb{N}$,*

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} I_k(x,0,(\partial_x^i\mathfrak{a}_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k})\\ \mathbf{E}^k_{nn}(0,x)\mathfrak{a}_{2k+1}+\check{I}_k(x,0,(\partial_x^i\mathfrak{a}_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k+1,j<2k+1})\end{bmatrix}=b_k. \tag{6.18}$$

Démonstration. — On note, pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$b_k=\begin{bmatrix}b_{0,k}\\ b_{1,k}\end{bmatrix},$$

$c_{0,k}$ (respectivement $c_{1,k}$) un antécédent par N_0 (resp. N_1). Tenant compte de (6.16), la relation (6.18) équivaut à

$$N_0(\mathbf{E}^k(0,x)\mathfrak{a}_{2k}+\tilde{I}_k(x,0,(\partial_x^i\mathfrak{a}_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k,j<2k}))=b_{0,k}, \tag{6.19}$$

$$N_1(\mathbf{E}^k(0,x)\mathfrak{a}_{2k+1}+\check{I}_k(x,0,(\partial_x^i\mathfrak{a}_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k+1,j<2k+1}))=b_{1,k}. \tag{6.20}$$

On procède par récurrence. Pour montrer les relations (6.19) et (6.20) pour $k=0$, on prend $(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{a}_1):=(c_{0,0},c_{1,0})$. Supposons que l'on ait défini des fonctions $(\mathfrak{a}_j)_{0\leqslant j<2k}$ vérifiant les relations (6.19) et (6.20). On définit alors deux fonctions de $H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ par

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_{2k}&:=\mathbf{E}^{-k}(0,x)(c_{0,k}-\tilde{I}_k(x,0,(\partial_x^i\mathfrak{a}_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k,j<2k})),\\ \mathfrak{a}_{2k+1}&:=\mathbf{E}^{-k}(0,x)(c_{1,k}-\check{I}_k(x,0,(\partial_x^i\mathfrak{a}_j)_{i+\frac{j}{2}\leqslant k+1,j<2k+1})).\end{aligned}$$

□

Le lemme 4.2 assure l'existence d'une fonction $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}_+))$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\partial_\theta^k a)|_{\theta=0} = \mathfrak{a}_k$. Utilisant les identités (6.17), on peut reformuler les relations (6.18). On obtient ainsi que la fonction a vérifie les relations $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Notons qu'un examen attentif de la preuve conduit à un résultat similaire à celui de la proposition 3.7 :

Proposition 6.7. — *Il existe des fonctions $(\mathcal{A}'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de classe C^∞ telles que, pour $a \in H^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, les assertions suivantes soient équivalentes :*

(1) *La fonction a vérifie les relations $(R'_k)_{k\in\mathbb{N}}$,*

(2) *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a*

$$(\partial_\theta^{2k} a)(x,0) \in \mathcal{A}'_{2k}(x, (\partial_x^i \partial_\theta^j a)(x,0))_{i+\frac{j}{2}\leqslant k, j<2k}) + \mathbf{E}^{-k}(0,x)\ker N_0,$$

$$(\partial_\theta^{2k+1} a)(x,0) \in \mathcal{A}'_{2k+1}(x, (\partial_x^i \partial_\theta^j a)(x,0))_{i+\frac{j}{2}\leqslant k+\frac{1}{2}, j\leqslant 2k}) + \mathbf{E}^{-k}(0,x)\ker N_1.$$

On peut caractériser le temps d'existence maximal des solutions régulières du théorème 6.4.

Théorème 6.8. — *Lorsque l'assertion* 2 *du théorème 6.4 est vérifiée, si T est pris maximal et si $T > T_0$ alors $\|W\|_{L^\infty(\Omega_t\times\mathbb{R}^+_\theta)} \to +\infty$ quand $t \to T^-$. Dans le cas où l'équation* (6.9) *est linéaire, on peut prendre $T = T_0$.*

Le problème mixte (6.8), (6.9), (6.10) et (6.11) est très proche du problème étudié et résolu dans [10]. Le changement essentiel concerne les conditions aux limites. Nous allons ici seulement montrer comment la méthode de [10] s'adapte au cas qui nous intéresse ici. La proposition 6.5 assurant l'existence de données initiales compatibles à tout ordre, on se contente de traiter le cas où pour tout entier naturel k, la trace $W|_{t=0}$ est identiquement nulle.

6.4.1. Réduction à une condition aux limites homogène

On écrit

$$b := \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

et on considère $q \in \mathcal{N}_\theta(T_0)$ tel que $q|_{\theta=0} = b_0$ et $\partial_\theta q|_{\theta=0} = b_1$. Un tel q existe : prendre par exemple

$$q(t,x,\theta) := (2b_0 + b_1)e^{-\theta} - (b_0 + b_1)e^{-2\theta}.$$

Notant $\Phi := W - q$, on a alors que W vérifie (6.8) si et seulement si $(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\,\Phi = 0$, que W vérifie (6.10) si et seulement si

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix}\Phi\\ \partial_\theta\Phi\end{bmatrix} = 0$$

et que W vérifie (6.9) si et seulement si

$$(-\mathbf{E}\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\Phi = {}^t\mathbf{\Pi}_0 f(t,x,p,\Phi+q) - (-\mathbf{E}\partial_\theta^2 + \mathbb{H})q \qquad \text{quand } (t,x,\theta)\in\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+$$

Le second membre, dans l'égalité précédente, peut se mettre sous la forme ${}^t\mathbf{\Pi}_0\tilde{f}(t,x,\tilde{p},\Phi)$ où $\tilde{f}$, $\tilde{p}$ vérifient les mêmes hypothèses que f et p. On peut ainsi se ramener au cas où b est nul.

6.4.2. Réduction matricielle

Introduisons une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel) de $\mathbb{R}^N$, $(e_1(t,x),\ldots,e_N(t,x))$ où les $e_i(t,x)$ sont des fonctions C^∞ telles que $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant d_0}$ est une base de $\ker\mathring{A}_n$. Soit U la matrice $N\times N$ orthogonale dont les colonnes sont les $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$. On a ainsi que U est dans $C^\infty(\mathbb{R}^{1+n},O(\mathbb{R}^N))$, où $O(\mathbb{R}^N)$ désigne le groupe des matrices $N\times N$ orthogonales. Considèrons les matrices, de taille $2N\times 2N$,

$$\mathbf{U} := \begin{bmatrix}U & 0\\ 0 & U\end{bmatrix},$$

et T la matrice de symétrie :

$$T := \begin{bmatrix}\mathrm{Id}_{d_0} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d_0} & 0\\ 0 & \mathrm{Id}_{N-d_0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id}_{N-d_0}\end{bmatrix}.$$

Considèrons la nouvelle inconnue $\tilde{W}(t,x) := T\mathbf{U}^{-1}(t,x)W(t,x)$. On note $\tilde{W}_I := (\tilde{W}_1,\ldots,\tilde{W}_{2d_0})\in\mathbb{R}^{2d_0}$ et $\tilde{W}_{II} := (\tilde{W}_{2d_0+1},\ldots,\tilde{W}_{2N})\in\mathbb{R}^{2(N-d_0)}$.

Lemme 6.9. — *La condition de polarisation* (6.8) *s'écrit*

$$\tilde{W}_{II} = 0 \text{ quand } (t,x,\theta)\in\Omega_T^+\times\mathbb{R}_\theta^+$$

tandis que la condition aux limites (6.10) *s'écrit*

$$\tilde{N}\begin{bmatrix}\tilde{W}_I\\ \partial_\theta\tilde{W}_I\end{bmatrix} = 0 \text{ quand } (t,x,\theta)\in\Omega_T^+\times\{0\}$$

avec

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id} & -\mathrm{Id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} & \mathrm{Id} \end{bmatrix}$$

où les matrices Id *et* 0 *sont de taille* $d_0 \times d_0$.

Démonstration. — En effet, écrivant

$$\begin{aligned} \check{W}_\pm &:= U^{-1} W_\pm =:^t (\check{W}_{\pm,1}, \dots, \check{W}_{\pm,N}), \\ \check{W}_{\pm,I} &= (\check{W}_{\pm,1}, \dots, \check{W}_{\pm,d_0}) \in \mathbb{R}^{d_0}, \\ \check{W}_{\pm,II} &= (\check{W}_{\pm,d_0+1}, \dots, \check{W}_{\pm,N}) \in \mathbb{R}^{N-d_0}, \end{aligned}$$

la condition de polarisation (6.8) s'écrit :

$$\check{W}_{II}^{+} = \check{W}_{II}^{-} = 0 \text{ quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+$$

et la condition aux limites (6.10) s'écrit :

$$\mathbf{N} \begin{bmatrix} \check{W} \\ \partial_\theta \check{W} \end{bmatrix} = 0 \text{ quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \{0\}.$$

On remarque alors que

$$\tilde{W}_I = \begin{bmatrix} \check{W}_{+,I} \\ \check{W}_{-,I} \end{bmatrix}, \qquad \check{W}_{II} = \begin{bmatrix} \check{W}_{+,II} \\ \check{W}_{-,II} \end{bmatrix}.$$

□

Multipliant (6.9) à gauche par ${}^t(\mathbf{U}T)$, on obtient alors un système équivalent $2d_0 \times 2d_0$ de la forme

$$(-\mathbf{E}^{[I]} \partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]}) \tilde{W}_I = q(t,x,p,\tilde{W}_I).$$

L'opérateur $\mathbb{H}^{[I]}$ est un opérateur symétrique hyperbolique qui s'écrit :

$$\mathbb{H}^{[I]} = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} C_j(t,x) \partial_j + C_{n+1}(t,x) \theta \partial_\theta.$$

Les matrices $C_j(t,x)$ sont symétriques de taille $2d_0 \times 2d_0$ extraites respectivement des matrices ${}^t(\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{U}T) \mathbf{A}_j (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{U}T)(t,x)$ si $j \leqslant n$ et, si $j = n+1$, ${}^t(\mathbf{U}T) \mathbf{K} (\mathbf{U}T)(t,x)$. La matrice C_0 est définie positive. Les matrices $\mathbf{E}^{[I]}(t,y)$ sont de taille $2d_0 \times 2d_0$ extraites${}^t(\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{U}T) \mathbf{E} (\mathbf{\Pi}_0 \mathbf{U}T)(t,y)$. Elles sont symétriques définies positives. Elles sont de la forme

$$\mathbf{E}^{[I]} := \begin{bmatrix} \mathbf{E}_+^{[I]} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_-^{[I]} \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{E}_+^{[I]} = \mathbf{E}_-^{[I]}$. On est donc ramené au problème

$$\begin{aligned}
(-\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]})W = q(t,x,p,W) &\quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \\
\mathbf{N}\begin{bmatrix} W \\ \partial_\theta W \end{bmatrix}|_{\theta=0} = 0 &\quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\
W = 0 &\quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+
\end{aligned}$$

où W est à valeurs dans $\mathbb{R}^{2d_0}$.

6.4.3. Estimation L^2 pour le problème linéaire

On introduit les normes à poids :

$$\|W\|_{L^2_\lambda(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)} = \|e^{-\lambda t} W\|_{L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)}$$

et l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_\lambda(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)}$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$ muni de la mesure $e^{-2\lambda t} dt dx d\theta$. Lorsque deux fonctions, disons W_1 et W_2, sont dans $L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$, on notera, par abus, $\langle W_1, W_2 \rangle_{0,\lambda,T}$ le produit scalaire de leurs restrictions à $\theta = 0$. On considère le problème linéaire :

$$(-\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]})W = h \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \tag{6.21}$$

$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} W \\ \partial_\theta W \end{bmatrix}|_{\theta=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \tag{6.22}$$

$$W = 0 \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+. \tag{6.23}$$

Proposition 6.10. — *Il existe un unique W dans $L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$ tel que $\partial_\theta W$ est dans $L^2(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)$ solution de* (6.21))*-(6.22)-(6.23. De plus, il existe $c > 0$ tel que pour tout $\lambda \geqslant c$, on a*

$$\|\partial_\theta W\|^2_{L^2_\lambda(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)} + \lambda \|W\|^2_{L^2_\lambda(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)} \leqslant c |\langle h, W \rangle_{L^2_\lambda(\Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+)}|. \tag{6.24}$$

Démonstration. — On se contente ici de montrer l'inégalité d'énergie (6.24). L'existence et l'unicité d'une solution au problème (6.21)-(6.22)-(6.23) s'en déduisent par les arguments de [10]. On multiplie (6.21) à gauche par ${}^tW$ et on intégre par parties en remarquant que :

(i) L'opérateur $-\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]}$ est tangent à $\{x_n = 0\}$ (Cela provient de l'identité ${}^t\Pi_0 \mathring{A}_n \Pi_0 = 0$ qui montre que l'opérateur $\mathbb{H}$ est tangent à $\{x_n = 0\}$),

(ii) L'opérateur $\mathbb{H}^{[I]}$ est tangent à $\{\theta = 0\}$,

(iii) $-\int_{\theta>0} {}^tW.\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2 W = \int_{\theta>0} {}^t\partial_\theta W.\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta W + ({}^tW.\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta W)|_{\theta=0}$.

Notant $W = \begin{bmatrix} W_+ \\ W_- \end{bmatrix}$, (6.22) se traduit par

$$W_+ = W_-, \quad \partial_\theta W_+ = -\partial_\theta W_- \quad \text{quand } \theta = 0.$$

Ainsi

$$({}^tW.\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta W)|_{\theta=0} = {}^tW_+.\mathbf{E}_+^{[I]}\partial_\theta W_+ +^t W_-.\mathbf{E}_-^{[I]}\partial_\theta W_- = 0.$$

□

6.4.4. Estimation des dérivés pour le problème linéaire

Pour tout entier naturel m, on introduit les normes à poids :

$$\|W\|_{m,\lambda,T} := \sum_{|\alpha|\leqslant m} \lambda^{m-|\alpha|} \|\partial_0^{\alpha_0} \cdots \partial_n^{\alpha_n} (\theta\partial_\theta)^{\alpha_{n+1}} W\|_{L^2_\lambda(\Omega_T \times \mathbb{R}_\theta^+)},$$

$$|W|_{m,\lambda,T} := \sum_{|\alpha|\leqslant m} \lambda^{m-|\alpha|} \|\partial_0^{\alpha_0} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \partial_\theta^{\alpha_{n+1}} W\|_{L^2_\lambda(\Omega_T \times \mathbb{R}_\theta^+)}$$

où $\alpha := (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1})$ est dans $\mathbb{N}^{n+2}$.

Proposition 6.11. — *Il existe $\lambda_m \geqslant 1$ tel que, pour tout $\lambda \geqslant \lambda_m$,*

$$|W|_{m,\lambda,T} + \|W\|_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{\lambda_m}{\lambda}(|h|_{m,\lambda,T} + \|h\|_{m,\lambda,T}).$$

Démonstration. — On commence par estimer les dérivées conormales au bord $\{\theta = 0\}$. Le point important est que les conditions aux limites (6.22) aient de bonnes propriétés de commutation avec les dérivées conormales : en effet, pour tout entier naturel n, $\partial_\theta(\theta\partial_\theta)^n$ est de la forme

$$\partial_\theta + \theta.\left(\text{Opérateur en } \partial_\theta, \theta\partial_\theta\right).$$

On a donc que

$$\partial_\theta(\theta\partial_\theta)^n W_+ = -\partial_\theta(\theta\partial_\theta)^n W_- \quad \text{quand } \theta = 0.$$

Plus généralement, notant $Z_{n+1} := \theta\partial_\theta$ et pour $\alpha := (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n+1})$, $Z^\alpha := Z_0^{\alpha_0} \cdots Z_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{n+2}, |\alpha| \leqslant m$, que $Z^\alpha W$ est solution de

$$(-\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2 + \mathbb{H}^{[I]})Z^\alpha W = \tilde{h} \quad \text{quand } (t, x, \theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \tag{6.25}$$

$$\mathbf{N} \begin{bmatrix} Z^\alpha W \\ \partial_\theta Z^\alpha W \end{bmatrix} |_{\theta=0} = 0 \quad \text{quand } (t, x) \in \Omega_T^+ \tag{6.26}$$

$$Z^\alpha W = 0 \quad \text{quand } (t, x, \theta) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \tag{6.27}$$

où $\tilde{h} := Z^\alpha h + [\mathbb{H}^{[1]}, Z^\alpha]W + [-\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2, Z^\alpha]W$.

Notons que l'un des intérêts de la réduction matricielle précédente était d'éliminer les problèmes de commutation des opérateurs de dérivation avec la condition de polarisation (6.8).

Le deuxième terme du membre de droite de (6.25) se majore par

$$cte\lambda^{-1}(\|h\|_{m,\lambda,T} + \|W\|_{m,\lambda,T})\|W\|_{m,\lambda,T}.$$

Pour le troisième terme, puisque $[\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2, \partial_i] = 0$ si $i \in \{0, \dots, n\}$ et $[\partial_\theta^2, \theta\partial_\theta] = 2\partial_\theta^2$, le commutateur $[\partial_\theta^2, Z^\alpha]$ s'écrit comme une somme de termes de la forme $\mathbf{A}\partial_\theta^2 Z^\beta W$ où les matrices $\mathbf{A}(t,x)$ sont carrées de tailles $2N$, C^∞, bornées, ainsi que leurs dérivées, diagonales par blocs de la forme

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{bmatrix} \quad \text{avec } A^+ = A^- \text{ et } |\beta| \leqslant |\alpha| - 1. \tag{6.28}$$

Plus précisément, les matrices $\mathbf{A}(t,x)$ sont des combinaisons linéaires de dérivées conormales de matrices $\mathbf{E}^{[I]}$ avec pour coefficients des fonctions scalaires C^∞, bornée ainsi que leurs dérivées.

En intégrant par parties en θ, on a

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}\partial_\theta^2 Z^\beta W, Z^\alpha W\rangle_{L^2_\lambda} &= \langle \partial_\theta^2 Z^\beta W, {}^t\mathbf{A} Z^\alpha W\rangle_{L^2_\lambda} \\ &= -\langle \partial_\theta Z^\beta W, \partial_\theta {}^t\mathbf{A} Z^\alpha W\rangle_{L^2_\lambda} \\ &\quad - \langle \mathbf{A}\partial_\theta Z^\beta W, Z^\alpha W\rangle_{0,\lambda,T}.\end{aligned}$$

Tirant parti de (6.26), on obtient $\langle \mathbf{A}\partial_\theta Z^\beta W, Z^\alpha W\rangle_{0,\lambda,T} = 0$. Le troisième terme du membre de droite de (6.25) se majore donc par

$$cte\lambda^{-1}\|\partial_\theta W\|_{m-1,\lambda,T}\|\partial_\theta W\|_{m,\lambda,T} \leqslant cte\lambda^{-2}\|\partial_\theta W\|^2_{m,\lambda,T}.$$

En sommant ces inégalités, on obtient donc pour λ assez grand

$$\|\partial_\theta W\|^2_{m,\lambda,T} + \lambda\|W\|^2_{m,\lambda,T} \leqslant \frac{c_m}{\lambda}(\|h\|_{m,\lambda,T} + \|W\|_{m,\lambda,T})\|W\|_{m,\lambda,T}$$

et, quitte à augmenter c_m, pour $\lambda \geqslant c_m$,

$$\sqrt{\lambda}\|\partial_\theta W\|_{m,\lambda,T} + \lambda\|W\|_{m,\lambda,T} \leqslant c_m\|h\|_{m,\lambda,T}.$$

On estime ensuite les dérivées normales, remarquant que l'on peut réécrire l'équation : $\mathbf{E}^{[I]}\partial_\theta^2 W = -h + \mathbb{H}^{[I]} W$. □

6.4.5. Conclusion

On procède ensuite comme dans [10], utilisant un schéma itératif et des inégalités de type Gagliardo-Nirenberg, pour résoudre le problème non linéaire. On montre également à l'aide d'estimations sur le linéarisé et du schéma itératif, la décroissance rapide de la solution. La condition d'explosion provient de ce que la non linéarité est contrôlée, dans le shéma itératif, à l'aide de la norme L^∞.

6.5. Couche limite non caractéristique

L'étude des couches limites non caractéristiques fait intervenir des équations de la forme

$$(-\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{E}}_{nn}^{-1}\mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}} = \Phi \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \tag{6.29}$$

où $\Phi \in \mathcal{N}_z(T)$ et des conditions aux limites de la forme :

$$N_1\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}} = K \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \{0\} \tag{6.30}$$

où K est dans $H^\infty(\Omega_T^+)$, à valeurs dans $\mathbb{R}^N$. Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire linéaire en z paramétrée par (t,x). Introduisons les matrices $2N \times 2N$:

$$\mathrm{Pol}_c := \begin{bmatrix} \Pi_- & 0 \\ 0 & \Pi_+ \end{bmatrix}. \tag{6.31}$$

Proposition 6.12.

(1) *Les matrices* Pol_c *commutent avec* $(-\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{E}}_{nn}^{-1}\mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)$.

(2) *Si* $\Phi = 0$ *et* $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_z(T)$ *solution de* (6.29) *alors* $\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.

(3) *Si* $\mathrm{Pol}_c\,\Phi = 0$ *alors* (6.29) *admet une et une seule solution* $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_z(T)$ *telle que* $\mathrm{Pol}_c\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.

(4) *Si* $(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\,\Phi = 0$ *et si* $(\mathrm{Id} - \Pi_0)\,K = 0$ *alors (6.29)-(6.30) admet une et une seule solution* $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_z(T)$ *telle que* $(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.

Remarquons que dans le cas du point 2, on peut dire que le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est polarisé selon Pol_c. Revenant au problème dans tout l'espace, cela signifie que $\mathcal{U}$ est polarisée selon Π_- (resp. Π_+) pour $x_n > 0$ (resp. $x_n > 0$) i.e. $(\mathrm{Id} - \Pi_-)\mathcal{U} = 0$ (resp. $(\mathrm{Id} - \Pi_+)\mathcal{U} = 0$). L'esprit des points 3 et 4 est que pour la partie polarisée ie $\mathrm{Pol}_c\mathcal{U}$, il est possible de prescrire une condition en $z = 0$, ce qui n'est pas possible pour $(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$.

Démonstration. — Notons $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ une base de $\mathbb{R}^N$ de vecteurs propres de $\mathring{E}_{n,n}^{-1}\mathring{A}_n$ de valeurs propres associées $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$. On notera respectivement I_+, I_- et I_0 les ensembles des indices i pour lesquels la valeur propre correspondante λ_i vérifie $\lambda_i > 0$, $\lambda_i < 0$ et $\lambda_i = 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^N$ quelconque, on écrit $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$. On a donc $\Pi_+ x = \sum_{i\in I_+} x_i e_i$, $\mathring{E}_{nn}^{-1}\mathring{A}_n x = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i e_i$ et $\mathring{A}_n \Pi_+ x = \sum_{i\in I_+} \lambda_i x_i e_i = \Pi_+ \mathring{E}_{nn}^{-1}\mathring{A}_n x$. Ainsi, les matrices

$\mathring{E}_{nn}^{-1}\mathring{A}_n$ et Π_+ commutent. On procède de même avec Π_-. Par suite, la matrice Pol_c commute avec l'opérateur $(-\partial_z^2 + \mathring{\boldsymbol{E}}_{nn}^{-1}\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\partial_z)$.

Pour le point 2, si $\Phi = 0$ et la fonction $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est solution de (6.29) alors $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ peut s'écrire sous la forme

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+ \\ \mathcal{U}_- \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathcal{U}_\pm(t,x,z) := \sum_{i=1}^N \alpha_i^\pm(t,x) e^{\pm\lambda_i(t,x)z} e_i(t,x),$$

où les fonctions $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ sont scalaires. Une telle fonction $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ est dans $\mathcal{N}_z(T)$ si et seulement si $\alpha_i^\pm = 0$ pour tout $i \notin I_\mp$ c'est-à-dire si et seulement si $(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$. La condition de décroissance à l'infini permet de conclure.

Pour le point 3, on commence par résoudre le problème :

$$\text{(6.32)} \qquad \begin{cases} \text{Trouver } \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} \in \mathcal{N}_z(T) \text{ tel que} \\ (-\partial_z + \mathring{\mathbf{E}}_{nn}^{-1}\mathring{\boldsymbol{A}}_n)\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \Phi \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \\ \mathrm{Pol}_c \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = 0 \quad \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \end{cases}$$

où $\Phi \in \mathcal{N}_z(T)$ vérifie $\mathrm{Pol}_c\,\Phi = 0$. On écrit $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix}$ avec

$$\Phi_\pm(t,x,z) = \sum_{i\notin I_\pm} \Phi_i^\pm(t,x,z) e_i(t,x)$$

où les fonctions $(\Phi_i^\pm)_i$ sont scalaires, régulières en (t,x,z), à décroissance rapide en z. La méthode de variation de la constante consiste à chercher une solution $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]}$ au problème (6.32) sous la forme

$$\text{(6.33)} \qquad \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+^{[1]} \\ \mathcal{U}_-^{[1]} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathcal{U}_\pm^{[1]} = \alpha_i^\pm(t,x,z) e^{\pm\lambda_i(t,x)z} e_i(t,x)$$

où les fonctions scalaires $\alpha_i^\pm$ vérifient les EDO en z, paramétrées par (t,x), $-e^{\pm\lambda_i(t,x)z}\partial_z\alpha_i^\pm(t,x,z) = \Phi_i^\pm(t,x,z)$. On utilise alors une version à paramètres du lemme suivant dans lequel on a choisi, par souci de simplicité, de ne faire figurer que la variable z :

Lemme 6.13. — *Soit Φ une fonction scalaire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$ et λ un réel positif. La fonction $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi}(z) := e^{\lambda z}\int_z^\infty \Phi(z')e^{-\lambda z'}dz'$ est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$.*

Démonstration. — On écarte d'emblée le cas $\lambda = 0$, qui est trivial. Définissons, pour tout entier naturel l, l'assertion de récurrence :

$$(\Pi(l)) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad z^k\tilde{\Phi}^{(l)}(z) \in L^2(\mathbb{R}_z^+).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|\tilde{\Phi}(z)|^2 \leqslant e^{2\lambda z} \int_z^\infty |\Phi(z')|^2 dz' . \int_z^\infty e^{-2\lambda z'} dz' \leqslant \frac{1}{2\lambda} \int_z^\infty |\Phi(z')|^2 dz'$$

Ainsi, pour tout entier naturel k,

$$\int_{z>0} z^{2k} |\tilde{\Phi}(z)|^2 dz \leqslant \frac{1}{2\lambda} \int_{z>0} z^{2k} \int_z^\infty |\Phi(z')|^2 dz' dz,$$
$$\int_{z>0} z^{2k} |\tilde{\Phi}(z)|^2 dz \leqslant \frac{1}{2\lambda} \int_{z>0} \int_z^\infty z'^{2k} |\Phi(z')|^2 dz' dz.$$

Comme $\int_{z'>0} \int_0^{z'} z'^{2k} |\tilde{\Phi}(z')|^2 dz dz' = \int_{z'>0} z'^{2k+1} |\tilde{\Phi}(z')|^2 dz' < \infty$ car $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^+)$, le principe de Fubini assure que $z^k \tilde{\Phi}(z)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^+)$. Ainsi l'assertion $\Pi(0)$ est vérifiée.

Supposons l'assertion $\Pi(l)$ vérifiée, alors on remarque que $\tilde{\Phi}' = \lambda\tilde{\Phi} - \Phi$. Dérivant l fois , on a $\tilde{\Phi}^{(l+1)} = \lambda\tilde{\Phi}^{(l)} - \Phi^{(l)}$. Par conséquent, la fonction $z^k \tilde{\Phi}^{(l)}(z)$ est dans $L^2(\mathbb{R}^+)$, pour tout entier naturel k. Le principe de récurrence assure que l'assertion $\Pi(l)$ est vraie pour tout entier naturel l, ce qui achève de démontrer le lemme. □

Ainsi le problème (6.32) admet une et une seule solution $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]}$ de la forme (6.33) avec

$$\alpha_i^\pm(t,x,z) = \int_z^\infty \Phi_i^\pm(t,x,z') e^{\mp\lambda_i(t,x)z'} dz'.$$

Aussi l'unique solution $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ dans $\mathcal{N}_z(T)$ de (6.29) telle que $\mathrm{Pol}_c \boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$ est donnée par

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+ \\ \mathcal{U}_- \end{bmatrix}$$

avec $\mathcal{U}_\pm(t,x,z) = \sum_{i \notin I_\mp} \beta_i^\pm(t,x,z) e_i(t,x)$ où la fonction scalaire $\beta_i^\pm$ est la primitive (en z) de $\alpha_i^\pm e^{\pm\lambda_i z}$ qui s'annule en $z = \infty$.

Pour le point 4, la stratégie est similaire au point précédent : on commence par chercher un profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} \in \mathcal{N}_z(T)$ solution du problème

$$\begin{cases} (-\partial_z + \mathring{\mathbf{E}}_{nn}^{-1} \mathring{\boldsymbol{A}}_n) \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \Phi & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \\ N_1 \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = K & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \{0\} \\ (\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c) \boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = 0 & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \end{cases}$$

par la méthode de variation de la constante. Puisque $(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\,\Phi = 0$, Φ s'écrit

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_+ \\ \Phi_- \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \Phi_\pm(t,x,z) = \sum_{i \in I_\mp} \Phi_i^\pm(t,x,z) e_i(t,x).$$

Puisque $\Pi_0 K = 0$, K peut s'écrire

$$K(t,x) = \sum_{i \neq I_0} K_i(t,x) e_i(t,x).$$

Les fonctions $(\Phi_i^{\pm})_{i \in I_{\mp}}$ et $(K_i)_{i \notin I_0}$ sont scalaires régulières en (t,x,z) et les $(\Phi_i^{\pm})_{i \in I_{\mp}}$ sont à décroissance rapide en z. On cherche le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]}$ sous la forme $\boldsymbol{\mathcal{U}}^{[1]} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}_+^{[1]} \\ \boldsymbol{\mathcal{U}}_-^{[1]} \end{bmatrix}$ où

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}_{\pm}^{[1]}(t,x,z) = \sum_{i \in I_{\mp}} \alpha_i^{\pm}(t,x,z) e^{\pm \lambda_i(t,x) z} e_i(t,x)$$

avec, pour $i \in I_{\mp}$,

$$\begin{aligned} -e^{\pm \lambda_i(t,x) z} \partial_z \alpha_i^{\pm}(t,x,z) &= \Phi_i^{\pm}(t,x,z) && \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+, \\ \alpha_i^{\pm} &= K_i && \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \{0\}. \end{aligned}$$

On utilise le lemme suivant :

Lemme 6.14. — *Soit Φ une fonction scalaire dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ et λ un réel strictement n'egatif. La fonction $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi}(z) := e^{\lambda z} \int_0^z \Phi(z') e^{-\lambda z'} dz'$ est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$.*

Démonstration. — Définissons, pour tout entier naturel l, l'assertion de récurrence :

$$(\Pi(l)) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad z^k \tilde{\Phi}^{(l)}(z) \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $|\tilde{\Phi}^{(l)}(z)|^2 \leqslant C e^{2\lambda z}$. Ainsi $\Pi(0)$ est vérifiée. Supposons $\Pi(l)$ et remarquons que $\tilde{\Phi}' = \lambda \tilde{\Phi} + \Phi'$. On déduit $\Pi(l+1)$ comme dans le lemme précédent. □

Aussi l'unique solution $\boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}_z(T)$ de (6.29)-(6.30) telle que

$$(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c) \boldsymbol{\mathcal{U}} = 0$$

est donnée par

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_+ \\ \mathcal{U}_- \end{bmatrix}$$

où $\mathcal{U}_{\pm}(t,x,z) = \sum_{i \in I_{\mp}} \beta_i^{\pm}(t,x,z) e_i(t,x)$ où $\beta_i^{\pm}$ est la primitive (en z) de $\alpha_i^{\pm} e^{\pm \lambda_i z}$ qui s'annule en $z = +\infty$ avec

$$\alpha_i^{\pm}(t,x,z) = \int_0^z e^{\mp \lambda_i(t,x) z'} \Phi_i^{\pm}(z') dz' + K_i(t,x).$$

□

Notons que l'on peut préciser la décroissance des profils de couches limites non caractéristiques mises en jeu dans cet article. Pour une telle étude, dans un contexte voisin, on renvoie à [26].

6.6. Le tableau de la cascade

On considère alors, pour $j \geqslant -1$, les problèmes

$$(S^j(T)) \quad \boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{j-1} = {}^t(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{j-1} = \mathbf{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^j = \boldsymbol{\mathcal{F}}_a^j = 0 \quad \text{quand } (t,x,\theta,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \times \mathbb{R}_z^+$$

et on illustre notre statégie de résolution en cascade par le tableau suivant :

		(S^{-1})	(S^0)	(S^1)	$\dots$
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-2}$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-2}$				
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{-1}$		$\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{-1}$; ${}^t(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{-1}$			
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{0}$		$\mathbf{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^0$; $\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^0$	$\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^{0}$; ${}^t(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^{0}$		
$\boldsymbol{\mathcal{F}}^{1}$			$\mathbf{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^1$; $\boldsymbol{\mathcal{F}}_a^1$		$\dots$

Chaque terme de la première colonne est la somme de la ligne correspondante. Lors de la résolution du problème (S^j), les profils inconnus sont $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j$, $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$. Notons que ce tableau présente une différence essentielle avec celui de [26] : les profils $\boldsymbol{\mathcal{F}}_c$ sont ici décalés d'une colonne vers la gauche.

Lorsque les problèmes $(S^j(T))_{0 \leqslant j \leqslant N}$ sont vérifiés, les premiers termes non nuls de l'ansatz de résolution sont

$$\sqrt{\varepsilon}^N (\boldsymbol{\mathcal{F}}_c^N + {}^t(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, \boldsymbol{\mathcal{F}}_b^N).$$

On a ainsi un reste de la forme $\sqrt{\varepsilon}^{N+\frac{1}{2}} \mathbf{R}_\varepsilon$, avec $\mathbf{R}_\varepsilon \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^m(T_1)$, pour tout entier naturel m.

Voyons comment résoudre les problèmes $(S^j(T))$-$(S^j_{cl}(T))$ pour $j \geqslant -1$. Les cas $j = -1$ et $j = 0$, particuliers, sont détaillés. Rappelons, pour le confort du lecteur, que le problème $(S^{-1}_{cl}(T))$ est constitué de l'équation (6.1), le problème $(S^0_{cl}(T))$ est constitué des equations (6.2), (6.3) et (6.4). Enfin, pour $j \geqslant 1$, le problème $(S^j_{cl}(T))$ est constitué des equations (6.5), (6.6) et (6.7).

6.6.1. $(S^{-1}(T))$ et $(S^{-1}_{cl}(T))$

Le profil $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0$ doit satisfaire le problème

$$\begin{cases} -\mathring{\mathbf{E}}_{\mathbf{nn}} \partial_z^2 \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}} \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 = 0 & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \\ N_1 \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0|_{z=0} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

dont l'unique solution est $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 = 0$.

6.6.2. $(S^0(T))$ et $(S_{cl}^0(T))$

Définissons les problèmes

$$\tag{6.34} \begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 = \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0) + \mathbf{f}(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T, \end{cases}$$

$$\tag{6.35} \begin{cases} \left.\begin{aligned} {}^t(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 = 0 \\ (-\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 = \Upsilon \end{aligned}\right\} & \text{pour } (t,x,\theta) \text{ dans } \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \\ \mathbf{N}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 \\ \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 \end{bmatrix}|_{\theta=0} = -\mathbf{N}\mathbf{\Pi}_0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

où $\Upsilon := {}^t\mathbf{\Pi}_0(\mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0))$ et

$$\tag{6.36} \begin{cases} (-\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1 = 0 & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \\ N_1\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1|_{z=0} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

Résoudre $(S^0(T))$ et $(S_{cl}^0(T))$ revient à résoudre le problème limite (6.34) puis dans l'ordre que l'on veut les problèmes (6.35) et (6.36), ce que l'on note $\begin{matrix}(6.35)\\(6.36)\end{matrix}$. En effet, compte-tenu des conditions de polarisation

$$(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 = 0 \text{ et } (\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1 = 0$$

(cf. proposition 6.12 2.), la condition aux limites

$$N_1(\partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0|_{\theta=0} + \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1|_{z=0}) = 0$$

est équivalente à

$$N_1\partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0|_{\theta=0} = N_1\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1|_{z=0} = 0.$$

On constate que (6.34) n'est autre que le problème hyperbolique constitué des équations (3.1) et (3.2). On prend $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 := \mathbf{u}^0$. L'unique solution du problème (6.36) est $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^1 = 0$.

Aux ordres supérieurs, les différents types de termes composant les profils sont couplés par les conditions aux limites. La résolution des problèmes $(S^j(T))$-$(S_{cl}^j(T))$, pour $j \geqslant 1$, s'en trouve compliquée.

6.6.3. $(S^j(T))$-$(S^j_{cl}(T))$; $j \geqslant 1$

Pour chaque $j \geqslant 1$, lors de la résolution $(S^j(T))$, on est confronté au problème suivant :

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j &= \Phi_a^j && \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\
\mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_\theta(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j &= \Phi_{b,1}^j && \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \\
(-\mathbf{E}\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\mathbf{\Pi}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j &= \Phi_{b,2}^j && \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+ \\
(-\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_n\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1} &= \Phi_c^{j+1} && \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

où les membres de gauche valent :

$$
\begin{aligned}
\Phi_a^j &:= -q_a^j + \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u}^0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j, \\
\Phi_c^{j+1} &:= -q_c^{j-1}, \\
\Phi_{b,1}^j &:= -(\mathrm{Id} - {}^t\mathbf{\Pi}_0)\,(\boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j-1} + \mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}}\theta\partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j-1} - \partial_\theta^2\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j-1} + q_b^{j-1}), \\
\Phi_{b,2}^j &:= {}^t\mathbf{\Pi}_0\big(-\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j + \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u}^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0)\cdot(\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j) \\
&\qquad - \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u}^0)\cdot\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j - q_b^j\big).
\end{aligned}
$$

La fonction Φ_a^j est dans $H^\infty(\Omega_T^+)$, les fonctions $\Phi_{b,1}^j$ et $\Phi_{b,2}^j$ dans $\mathcal{N}_\theta(T_0)$ et Φ_c^{j+1} dans $\mathcal{N}_z(T_0)$. Les termes Φ^j contiennent donc des termes d'ordre 0 en les profils des membres de gauche et des termes sources.

Définissons, pour $(t,x,z) \in \Omega_T \times \mathbb{R}_z^+$,

$$
(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)(-\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1} = (\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\,\Phi_c^{j+1}.
\tag{6.38}
$$

Les équations (6.37) et (6.38) jouent un rôle important dans la résolution des problèmes $(S^j(T))$ et $(S^j_{cl}(T))$. En effet, on a dit que la difficulté provenait du couplage induit par les conditions aux limites. Or les équations (6.37) et (6.38) déterminent univoquement $(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ et $(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$. Cela provient d'une part de ce que l'opérateur de dérivation ∂_θ réalise un automorphisme de $\mathcal{N}_\theta(T)$ et d'autre part des propriétés 1 et 3 de la proposition 6.12. Les traces

$$
(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0} \text{ et } (\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\,\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0}
$$

sont donc imposées par l'équation et ne peuvent pas être prescrites. Ces traces vont être compensées (dans la condition (6.5)) par la partie régulière du profil. Les relations (6.6) et (6.7) sont, quant à elles, assurées par les profils de couche limite.

Pour chaque $j \geqslant 1$, lors de la résolution $(S^j_{cl}(T))$, on est confronté au problème suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\boldsymbol{\mathcal{U}}^j = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \\ N_0 \mathbf{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b|_{\theta=0} = -N_0 \mathbf{\Pi}_0 (\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a + \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_c|_{z=0}) & \\ N_1 \mathbf{\Pi}_0 \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b = -N_1 \mathbf{\Pi}_0 (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c|_{z=0}) & \\ N_1 (\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c|_{z=0} = -N_1 (\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b|_{z=0}) & \\ & \text{quand} (t,x) \in \Omega^+_T \end{cases}$$

Pour chaque $j \geqslant 1$, définissons les problèmes

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a = \Phi^j_a & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a = -M(\boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b|_{\theta=0} + \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_c|_{z=0}) & \\ & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases} \tag{6.39}$$

et

$$\begin{cases} (-\mathbf{E}\partial^2_\theta + \mathbb{H})\mathbf{\Pi}_0 \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b = \Phi^j_{b,2} & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_\theta, \\ \mathbf{N}\mathbf{\Pi}_0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b \\ \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b \end{bmatrix} |_{\theta=0} = -\mathbf{N}\mathbf{\Pi}_0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_a + \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_c|_{z=0} \\ \partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c|_{z=0} \end{bmatrix} & \\ & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T \end{cases} \tag{6.40}$$

et

$$\begin{cases} \mathrm{Pol}_c(-\mathbf{E}\partial^2_z + \mathbf{\mathring{A}_n}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c = \mathrm{Pol}_c\, \Phi^{j+1}_c & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega^+_T \times \mathbb{R}^+_z, \\ N_1(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c|_{z=0} = -N_1(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\, (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b|_{\theta=0}) & \\ & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_T. \end{cases} \tag{6.41}$$

La condition aux limites précédente peut se réécrire sous la forme (6.30) avec

$$K = -\begin{bmatrix} 0 & \Pi_- \\ \Pi_+ & 0 \end{bmatrix} \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j+1}_c|_{z=0} - \begin{bmatrix} \Pi_- & \Pi_- \\ \Pi_+ & \Pi_+ \end{bmatrix} (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}^j_b|_{\theta=0}).$$

En effet, commençons par remarquer que $\ker(\mathrm{Id} - \Pi_0) = \ker(\Pi_+ + \Pi_-)$. Par application des projections

$$\mathbf{\Pi}_- := \begin{bmatrix} \Pi_- & 0 \\ 0 & \Pi_- \end{bmatrix},\ \mathbf{\Pi}_+ := \begin{bmatrix} \Pi_+ & 0 \\ 0 & \Pi_+ \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{\Pi}_0,$$

la condition aux limites

$$N_1(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\,\partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0} = -N_1(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\,(\partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}) \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+$$

est équivalente à

$$\begin{cases} \Pi_-^\natural \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0} = \Pi_-^\natural (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}) \\ \Pi_+^\natural \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}|_{z=0} = \Pi_+^\natural (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{U}}^{j-1} + \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}) \end{cases} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+,$$

où $\Pi_\pm^\natural := \begin{bmatrix} \Pi_\pm & \Pi_\pm \end{bmatrix}$. Notons que l'on a $(\mathrm{Id} - \mathrm{Pol}_c)\,K = 0$.

Résoudre $(S^j(T))$ et $(S_{cl}^j(T))$ revient à résoudre successivement $\begin{matrix}(6.37)\\(6.38)\end{matrix}$ puis (6.39) et enfin $\begin{matrix}(6.40)\\(6.41)\end{matrix}$. Remarquons notamment que la résolution de (6.39) n'exige la connaissance que d'une partie de $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$, à savoir $M\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j|_{\theta=0}$ et cette quantité est déterminée par (6.37). Les problèmes (6.40) et (6.41) sont bien découplés puisque le problème (6.40) ne dépend de $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$ que par l'intermédiaire de $\mathbf{\Pi}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+1}$ qui est déterminé par (6.38) et le problème (6.41) ne dépend de $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ que par l'intermédiaire de $(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi_0})\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^j$ qui est déterminé par (6.37). Dans notre analyse, le couplage entre couche limite caractéristique et non caractéristique se fait donc par l'intermédiaire de la partie régulière du profil.

6.7. Conclusion

Les théorèmes 3.2 et 6.4, les propositions 3.4, 6.5 et 6.12 assurent l'existence d'un temps T_1 et de solutions aux problèmes $(S^j(T_1))$-$(S_{cl}^j(T_1))$ pour $j \geqslant 0$. Le temps T_1 ne dépend que de $\boldsymbol{\mathcal{U}}^0$ car seuls $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0$ vérifient des problèmes non linéaires. L'erreur commise est contrôlée par la proposition 6.2.

7. Preuve du point 3 du théorème 2.1

Définissons l'assertion de récurrence :

$$(\Pi(n)) \qquad \begin{cases} \mathcal{U}_a^{2j+1} = 0 & \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}], \\ \mathcal{U}_b^j = 0 & \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n, \\ \mathcal{U}_c^j = 0 & \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant n+2, \\ \mathcal{U}_a^{2j} \text{ est } C^{r-2j} & \text{pour } 0 \leqslant j \leqslant [\frac{n}{2}]. \end{cases}$$

Montrons l'assertion $\Pi(0)$: le fait que $\mathcal{U}_c^0 = \mathcal{U}_c^1 = 0$ est acquis. Tenant compte de la continuité de u^0, le problème (6.40) se réécrit :

$$\begin{cases} (\mathrm{Id} - \mathbf{P}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 = 0 \\ (-\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 = \Upsilon \end{cases} \quad \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+$$
$$\mathbf{N}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 \\ \partial_\theta \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0 \end{bmatrix} |_{\theta=0} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+$$

Rappelons que $\Upsilon = {}^t\mathbf{\Pi}_0(\mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0 + \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^0) - \mathbf{F}(t,x,\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^0))$. Ainsi, on peut prendre $\mathcal{U}_b^0 = 0$. On a alors $\Phi_{b,1}^1 = 0$. Ainsi, par (6.37), on obtient

$$(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^1 = 0$$

et le problème (6.39) pour $j = 1$ se réécrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 = \mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u^0}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases}$$

On peut ainsi prendre $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^1 = 0$. Comme par la proposition 2.2, la fonction $(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\mathbf{u^0}$ est de classe C^{r+1} et que $\Phi_c^2 = -q_c^0 = 0$ car $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^0 = 0$, le problème (6.41) pour $j = 1$ se réécrit :

$$\begin{cases} (-\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 = 0 & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \\ N_1\partial_z\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2|_{z=0} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

L'unique solution de ce problème est $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^2 = 0$. L'assertion $\Pi(0)$ est montrée. Si $r = 0$, c'est fini. Supposons maintenant que $r \neq 0$ et procèdons par récurrence finie. Supposons vérifiées les assertions $\Pi(k)$ pour $0 \leqslant k \leqslant j$ où $j \leqslant r - 1$ et montrons $\Pi(j+1)$. Par la proposition 6.3, on a $\Phi_{b,1}^{j+1} = 0$ d'où par (6.37), que $(\mathrm{Id} - \mathbf{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = 0$. Distinguons deux cas :

- *Si j est pair*, on a, par hypothèse, d'une part que $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = 0$ et d'autre part que $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j$ est C^{r-j}. Comme $r - j \geqslant 1$, cela implique que

  $$N_1\partial_n\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T$$

  avec l'hypothèse de récurrence et la proposition 6.3, on a $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} = 0$ et $q_b^{j+1} = 0$. Ainsi le problème (6.40) avec $j+1$ en lieu et place de j se réécrit :

$$\begin{cases} (-\mathbf{E}\partial_\theta^2 + \mathbb{H})\mathbf{\Pi}_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = {}^t\mathbf{\Pi}_0\mathbf{F}'_u(t,x,\mathbf{u^0}) \cdot \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} & \text{quand } (t,x,\theta) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_\theta^+, \\ \mathbf{N}\mathbf{\Pi}_0 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} \\ \partial_\theta\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} \end{bmatrix} |_{\theta=0} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

On peut ainsi prendre $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = 0$. Par la proposition 6.3, il vient $\Phi_{b,1}^{j+2} = 0$, et donc, par (6.37), $(\mathrm{Id} - \boldsymbol{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+2} = 0$. Comme par la proposition 6.3, on a $\Phi_c^{j+3} = 0$, (6.41) avec $j+2$ en lieu et place de j se réécrit :

$$\begin{cases} (-\mathring{\mathbf{E}}_{nn}\partial_z^2 + \mathring{\mathbf{A}}_{\mathbf{n}}\partial_z)\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3} = 0 & \text{quand } (t,x,z) \in \Omega_T^+ \times \mathbb{R}_z^+ \\ N_1 \partial_z \boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3}|_{z=0} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \end{cases}$$

d'où $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3} = 0$. L'assertion $\Pi(j+1)$ est dans ce cas démontrée.

- *Si j est impair*, on a, par hypothèse, $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^j = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j-1}$ est $C^{r-(j-1)}$. Il s'en suit que q_a^{j+1} est $C^{r-(j-1)-2}$. Le problème (6.39) avec $j+1$ en lieu et place de j s'écrivant :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = \mathbf{F}_u'(t,x,\mathbf{u^0}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} + q_a^{j+1} & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases}$$

on a, par la proposition 2.2, que $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1}$ est $C^{r-(j-1)-2}$. Comme $r-(j-1)-2 = r-j-1 \geqslant 0$, on a

$$N_0\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+1} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T$$

avec l'hypothèse de récurrence et la proposition 6.3, on a $q_b^{j+1} = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+2} = 0$. Ainsi (6.40) avec $j+1$ en lieu et place de j prend la même forme que dans le cas où j est pair. On en déduit, de même, que l'on peut prendre $\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+1} = 0$, puis que $(\mathrm{Id} - \boldsymbol{\Pi}_0)\boldsymbol{\mathcal{U}}_b^{j+2} = 0$ et $\boldsymbol{\mathcal{U}}_c^{j+3} = 0$. Par la proposition 6.3, on obtient $q_a^{j+2} = 0$, et donc (6.39) avec $j+2$ en lieu et place de j s'écrit :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} = \mathbf{F}_u'(t,x,\mathbf{u^0}).\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} & \text{quand } (t,x) \in \Omega_T^+ \\ M\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_T \end{cases}$$

On prend $\boldsymbol{\mathcal{U}}_a^{j+2} = 0$ et l'hérédité de l'assertion $\Pi(j)$ est prouvée.

Annexe A. Preuve du théorème 3.2 et de la proposition 2.2

On introduit des espaces de régularité Sobolev anisotrope pour lesquels une dérivée normale vaut deux dérivées conormales.

Définition A.1. — *Soit* $H^{0,m}(\Omega_T^+) := \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega_T^+) : \ \forall l \leqslant k, Z^l\mathbf{u} \in L^2(\Omega_T^+)\}$ *;* $E^{m,T} := \{\mathbf{u} \in H^{0,m}(\Omega_T^+) : \ \partial_n^k \mathbf{u} \in H^{0,m-2k}(\Omega_T^+) \quad \forall 0 \leqslant 2k \leqslant m\}$ *muni de la famille de normes à poids :*

$$|\mathbf{u}|_{m,\lambda,T}^E := \sum_{0 \leqslant k+2l \leqslant m} \lambda^{m-k-2l} \|e^{-\lambda t} Z^k \partial_n^l \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_T^+)}$$

où λ est un réel plus grand que 1.

On a le résultat suivant qui prouve en particulier le théorème 3.2

Théorème A.2. — *Si* $\mathbf{f}$ *est dans* $E^{m,\infty}$ *alors il existe* T_0 *strictement positif et une et une seule* $\mathbf{u} \in E^{m,T_0}$ *solution de*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t,x,\mathbf{u}) + \mathbf{f}(t,x) & \text{quand } (t,x) \in \Omega^+_{T_0} \\ \underline{M}(t,y)\mathbf{u} = 0 & \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \\ \mathbf{u} = 0 & \text{quand } t = 0 \end{cases}$$

Si T est pris maximal et si T est fini, alors $\lim_{t\to T^*} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega_t)} = +\infty$. *Dans le cas linéaire, on peut prendre* $T = \infty$.

La preuve repose de manière essentielle sur une estimation pour le problème linéaire :

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{quand } (t,x) \in \Omega_{T_0} \tag{A.1}$$
$$M\mathbf{u} = 0 \quad \text{quand } (t,x) \in \Gamma_{T_0} \tag{A.2}$$
$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{quand } t = 0. \tag{A.3}$$

Compte-tenu de l'hypothèse 1.1, on a l'existence de $O(t,y)$ matrices $N \times N$ inversibles C^∞ de leurs arguments telles que ${}^tO\mathring{A}_nO = \mathfrak{D}$ où $\mathfrak{D}$ est la matrice diagonale par blocs $\mathfrak{D} := \operatorname{diag}(\mathrm{Id}_{d_+}, -\mathrm{Id}_{d_-}, 0_{d_0})$. Définissons les matrices diagonales par blocs $\boldsymbol{O} := \operatorname{diag}(O,O)$ et $\boldsymbol{\mathfrak{D}} := \operatorname{diag}(\mathfrak{D}, -\mathfrak{D})$. Introduisons la matrice de permutations par blocs :

$$\mathbf{Q} := \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{d_+} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{d_-} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d_0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d_+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d_-} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d_0} \end{bmatrix}.$$

Remarquons que

$${}^t\mathbf{Q}\boldsymbol{\mathfrak{D}}\mathbf{Q} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}$$

où $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ est la matrice diagonale $\boldsymbol{\mathfrak{C}} := \operatorname{diag}(\mathrm{Id}_{d_+}, -\mathrm{Id}_{d_-}, -\mathrm{Id}_{d_+}, -\mathrm{Id}_{d_-}, 0_{2d_0})$.

Effectuant le changement de variables consistant à remplacer u par $(\mathbf{OQ})^{-1}u$ et multipliant à gauche par ${}^t(\mathbf{OQ})$, on se ramène au cas où

$$\boldsymbol{\mathring{A}_n} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}, \quad M := \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{N-d_0} & \mathrm{Id}_{N-d_0} & 0_{2d_0} \end{bmatrix}.$$

La preuve du théorème 3.2 ne nécessite nullement de prendre en considération la symétrie du problème. Aussi, nous ne ferons que la distinction entre les composantes qui sont caractéristiques et celles qui ne le sont pas.

On note $\mathbf{u} := \begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \mathbf{w}\end{bmatrix}$ où $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{w}$) est un vecteur colonne de $\mathbb{R}^{2(N-d_0)}$ (resp. $\mathbb{R}^{2d_0}$).

Théorème A.3. — *On a les estimations*

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists \lambda_m \geqslant 1 : \quad \forall \lambda \geqslant \lambda_m, \quad |\mathbf{u}|^E_{m,\lambda,T_0} \leqslant \frac{\lambda}{\lambda_m} |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}.$$

Démonstration. — Il s'agit d'estimer pour $2k + |l| \leqslant m$ le terme

$$\lambda^{m-2k-l} |\partial_n^k Z^l \mathbf{u}|^E_{0,\lambda,T_0}.$$

Estimation L^2. — C'est un cas particulier de [22].

$k = 0$. — $Z^l \mathbf{u}$ vérifie (A.1)-(A.2)-(A.3) avec $\bar{\mathbf{f}} := Z^l \mathbf{f} + [\mathcal{H}, Z^l]\mathbf{u}$ en lieu et place de $\mathbf{f}$.

Le commutateur $[\mathcal{H}, Z^l]\mathbf{u}$ peut être estimé facilement, notamment parceque l'on s'est ramené au cas $\mathring{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{n}} = \mathfrak{C}$. On obtient que $\bar{\mathbf{f}}$ est dans L^2 d'où par l'estimation L^2 que

$$\lambda^{m-2k-l} |Z^l \mathbf{u}|^E_{0,\lambda,T_0} \leqslant \frac{C}{\lambda} |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}.$$

$k \neq 0$. — On estime séparément les dérivées de $\mathbf{v}$ et celles de $\mathbf{w}$. On écrit

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat + \mathring{\boldsymbol{A}}_n \partial_n, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}^\flat = \sum_{j=0}^n \mathbf{A}^j(t,x) Z_j + \mathbf{B}(t,x)$$

et si $\mathbf{D}$ est une matrice $2N \times 2N$, on écrira

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}^{[1]} & \mathbf{D}^{[2]}\\ \mathbf{D}^{[3]} & \mathbf{D}^{[4]}\end{bmatrix}$$

où $\mathbf{D}^{[4]}$ est de taille $2d_0 \times 2d_0$. En écrivant les matrices par blocs, (A.1) se réécrit :

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{j,[1]} Z_j \mathbf{v} + \sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{j,[2]} Z_j \mathbf{w} + \mathbf{B}^{[1]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[2]}\mathbf{w} + \mathfrak{C}^{[1]}\partial_n \mathbf{v} = \mathbf{f}^{[1]}$$

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{j,[3]} Z_j \mathbf{v} + \sum_{j=0}^n \mathbf{A}^{j,[4]} Z_j \mathbf{w} + \mathbf{B}^{[3]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[4]}\mathbf{w} = \mathbf{f}^{[2]}$$

ce que l'on abrège en

$$\mathbf{A}^{[1]} Z\mathbf{v} + \mathbf{A}^{[2]} Z\mathbf{w} + \mathbf{B}^{[1]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[2]}\mathbf{w} + \mathfrak{C}^{[1]}\partial_n \mathbf{v} = \mathbf{f}^{[1]} \tag{A.4}$$

$$\mathbf{A}^{[3]} Z\mathbf{v} + \mathbf{A}^{[4]} Z\mathbf{w} + \mathbf{B}^{[3]}\mathbf{v} + \mathbf{B}^{[4]}\mathbf{w} = \mathbf{f}^{[2]} \tag{A.5}$$

où $\mathfrak{C}^{[1]} = \operatorname{diag}(\mathrm{Id}_{d_+}, -\mathrm{Id}_{d_-}, -\mathrm{Id}_{d_+}, \mathrm{Id}_{d_-})$.

v. — On a $|\partial_n \mathbf{v}|^E_{m-2,\lambda,T_0} \leqslant \frac{1}{\lambda}|\partial_n \mathbf{v}|^E_{m-1,\lambda,T_0}$. De plus, $|\partial_n \mathbf{v}|^E_{m-1,\lambda,T_0}$ peut être estimé grâce à (A.4).

w. — Notons $\boldsymbol{\mathcal{X}} := \mathbf{A}^{[4]}Z + \mathbf{B}^{[4]}$. $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ est un opérateur symétrique hyperbolique linéaire agissant sur des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_0}$. Le bord $\{x_n = 0\}$ est totalement caractéristique pour l'opérateur $\boldsymbol{\mathcal{X}}$. Alors (A.5) se réécrit

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w} = \mathbf{f}^{[2]} - \mathbf{A}^{[3]}Z\mathbf{v} - \mathbf{B}^{[3]}\mathbf{v}.$$

Ainsi,

$$|\partial_n \boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w}|^E_{m-2,\lambda,T_0} \leqslant C(|\mathbf{u}|^E_{m,\lambda,T_0} + |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}). \tag{A.6}$$

Ensuite, on a que $\boldsymbol{\mathcal{X}}\partial_n^k Z^l \mathbf{w}$ vérifie $\boldsymbol{\mathcal{X}}\partial_n^k Z^l \mathbf{w} = \bar{\mathbf{f}}$ où $\bar{\mathbf{f}} := \partial_n^k Z^l \boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w} + [\boldsymbol{\mathcal{X}}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}$. Ecrivant $k = k' + 1$, on a

$$\bar{\mathbf{f}} := (\partial_n)^{k'} Z^l (\partial_n \boldsymbol{\mathcal{X}}\mathbf{w}) + [\boldsymbol{\mathcal{X}}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}$$

Le premier terme est contrôlé par (A.6) ($2k' + l \leqslant m - 2$). Pour le second, on écrit

$$[\boldsymbol{\mathcal{X}}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w} = [\mathbf{A}^{[4]}Z, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w} + [\mathbf{B}^{[4]}, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}.$$

Voyons comment contrôler le premier terme qui est le « pire » (il contient une dérivée supplémentaire). $[\mathbf{A}^{[4]}Z, \partial_n^k Z^l]\mathbf{w}$ est une somme de terme de types

$$((\partial_n)^{k_1} Z^{l_1} \mathbf{A}^{[4]})((\partial_n)^{k_2} Z^{l_2} Z)\mathbf{w}$$

avec $k_1 + k_2 = k$, $l_1 + l_2 = l$ et $0 < 2k_1 + |l_1| < m$. L'estimation L^2 appliquée à $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ donne alors l'existence de $\lambda_m \geqslant 1$ tel que

$$\forall \lambda \geqslant \lambda_m \quad |(\partial_n)^k Z^l \mathbf{w}|_2 \leqslant \frac{C}{\lambda}(|\mathbf{u}|^E_{m,\lambda,T_0} + |\mathbf{f}|^E_{m,\lambda,T_0}).$$

□

Pour montrer la proposition 2.2, on prend en compte la symétrie. On renvoie à [25] pour la preuve de la continuité de u. Suivant les effets de la permutation $\mathbf{Q}$, on remarque que les $(\mathbf{A}^{[\mathbf{i}]})_{1\leqslant i\leqslant 4}$, les $(\mathbf{B}^{[\mathbf{i}]})_{1\leqslant i\leqslant 4}$ et $\boldsymbol{\mathfrak{C}}^{[1]}$ sont diagonaux par blocs de la forme

$$\mathbf{A}^{[\mathbf{i}]} = \begin{bmatrix} A^{[i]} & 0 \\ 0 & A^{[i]} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{[\mathbf{i}]} = \begin{bmatrix} B^{[i]} & 0 \\ 0 & B^{[i]} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathfrak{C}}^{[1]} = \begin{bmatrix} \mathfrak{C}^{[1]} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{C}^{[1]} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ peut aussi s'écrire

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \mathcal{X} & 0 \\ 0 & \mathcal{X} \end{bmatrix}.$$

Les équations (A.4) et (A.5) se découplent ainsi en quatre équations :

$$A^{[1]}Zv_\pm + A^{[2]}Zw_\pm + B^{[1]}v_\pm + B^{[2]}w_\pm \pm \mathfrak{C}^{[1]}\partial_n v_\pm = f^{[1]}_\pm \tag{A.7}$$

$$\mathcal{X}w_\pm = f^{[2]}_\pm - A^{[3]}Zv_\pm - B^{[3]}v_\pm \tag{A.8}$$

où

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_+ \\ v_- \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_+ \\ w_- \end{bmatrix}.$$

Dans le cas semilinéaire, il convient de remplacer, pour $i = 1$ ou 2, $f^{[i]}_\pm(t,x)$ par $f^{[i]}_\pm(t,x) + F^{[i]}_\pm(t,x,\mathbf{u})$. On soustrait alors les deux égalités données par (A.7), ainsi que celles données par (A.8), ce qui donne respectivement

$$A^{[1]}Z[v] + A^{[2]}Z[w] + B^{[1]}[v] + B^{[2]}[w] + \mathfrak{C}^{[1]}(\partial_n v_+ + \partial_n v_-) \\ = [f^{[1]}] + [F^{[1]}]$$

et

$$\mathcal{X}[v] = [f^{[2]}] + [F^{[2]}] - A^{[3]}Z[v] - B^{[3]}[v],$$

où, pour

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix},$$

$[u]$ désigne $[u] = u_+ - u_-$. La propagation de la régularité de u et la seconde assertion de la proposition 2.2 se montre alors par récurrence en notant que $\mathfrak{C}^{[1]}$ est inversible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. Bardos, D. Brézis & H. Brezis, « Perturbations singulières et prolongements maximaux d'opérateurs positifs », *Arch. Rational Mech. Anal.* **53** (1973/74), p. 69-100.

[2] C. Bardos, « Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **3** (1970), p. 185-233.

[3] C. Bardos & J. Rauch, « Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems », *Trans. Amer. Math. Soc.* **270** (1982), nº 2, p. 377-408.

[4] G. Carbou, P. Fabrie & O. Guès, « Couche limite dans un modèle de ferromagnétisme », *Comm. Partial Differential Equations* **27** (2002), nº 7-8, p. 1467-1495.

[5] ———, « On the ferromagnetism equations in the non static case », *Commun. Pure Appl. Anal.* **3** (2004), nº 3, p. 367-393.

[6] M. Gisclon, « Étude des conditions aux limites pour un système strictement hyperbolique, via l'approximation parabolique », *J. Math. Pures Appl. (9)* **75** (1996), nº 5, p. 485-508.

[7] J. Goodman & Z. P. Xin, « Viscous limits for piecewise smooth solutions to systems of conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **121** (1992), n° 3, p. 235-265.

[8] E. Grenier & O. Guès, « Boundary layers for viscous perturbations of noncharacteristic quasilinear hyperbolic problems », *J. Differential Equations* **143** (1998), n° 1, p. 110-146.

[9] O. Guès, « Problème mixte hyperbolique quasi-linéaire caractéristique », *Comm. Partial Differential Equations* **15** (1990), n° 5, p. 595-645.

[10] ———, « Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995), n° 4, p. 973-1006.

[11] O. Guès, G. Métivier, M. Williams & K. Zumbrun, « Multidimensional viscous shocks. II. The small viscosity limit », *Comm. Pure Appl. Math.* **57** (2004), n° 2, p. 141-218.

[12] ———, « Existence and stability of multidimensional shock fronts in the vanishing viscosity limit », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **175** (2005), n° 2, p. 151-244.

[13] O. Guès & M. Williams, « Curved shocks as viscous limits : a boundary problem approach », *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002), n° 2, p. 421-450.

[14] T. Kato, « Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbf{R}^3$ », *J. Functional Analysis* **9** (1972), p. 296-305.

[15] S. Klainerman & A. Majda, « Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids », *Comm. Pure Appl. Math.* **34** (1981), n° 4, p. 481-524.

[16] H.-O. Kreiss & J. Lorenz, *Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, Pure and Applied Mathematics, vol. 136, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989, xii+402 pages.

[17] G. Métivier, « The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data », *Duke Math. J.* **53** (1986), n° 4, p. 983-1011.

[18] ———, « Problèmes de Cauchy et ondes non linéaires », in *Journées “Équations aux dérivées partielles” (Saint Jean de Monts, 1986)*, École Polytech., Palaiseau, 1986 (exposé n° I, 29 pages).

[19] ———, « Ondes soniques », *J. Math. Pures Appl. (9)* **70** (1991), n° 2, p. 197-268.

[20] G. Métivier & K. Zumbrun, « Large viscous boundary layers for noncharacteristic nonlinear hyperbolic problems », *Mem. Amer. Math. Soc.* **175** (2005), n° 826, p. vi+107.

[21] J. Rauch, « Boundary value problems as limits of problems in all space », in *Séminaire Goulaouic-Schwartz (1978/1979)*, École Polytech., Palaiseau, 1979 (exposé n° 3, 17 pages).

[22] J. Rauch, « Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity », *Trans. Amer. Math. Soc.* **291** (1985), n° 1, p. 167-187.

[23] F. Rousset, « Viscous approximation of strong shocks of systems of conservation laws », *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), n° 2, p. 492-519 (electronic).

[24] F. Rousset, « Inviscid boundary conditions and stability of viscous boundary layers », *Asymptot. Anal.* **26** (2001), n° 3-4, p. 285-306.

[25] D. Serre, *Systèmes de lois de conservation. I*, Fondations. [Foundations], Diderot Editeur, Paris, 1996, Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves], xii+300 pages.

[26] F. Sueur, « Couches limites semilinéaires », à paraître aux *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*.

[27] ———, « Couches limites : un problème inverse », à paraître dans *Communications in PDE*.

Manuscrit reçu le 16 septembre 2004,
accepté le 31 janvier 2005.

Franck SUEUR
Université de Provence
Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
Centre de mathématiques et d'informatique
39 rue F. Joliot-Curie
13453 Marseille (France)
Franck.Sueur@cmi.univ-mrs.fr