ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Variétés complexes et tenseur de Bergmann

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 2 (1965), p. 345-407

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_345_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 345-408.

VARIÉTÉS COMPLEXES ET TENSEUR DE BERGMANN

par André LICHNEROWICZ

Introduction.

Dans une série de travaux classiques, S. Bergmann [2], [3] a introduit, sur les domaines bornés de C^n, un noyau invariant par les transformations holomorphes et une métrique correspondante. Dans un mémoire récent, S. Kobayashi [7], suivant une suggestion d'E. Calabi, a défini sur une variété complexe W_n (de tenseur $\mathcal{J}$ de structure complexe) une $2n$-forme K qui généralise le noyau classique de Bergmann. Il utilise à cet effet l'espace F des n-formes holomorphes de carrés intégrables sur W_n et il étudie les cas où de la forme K, on peut déduire une « métrique de Bergmann » définie positive.

Une variété complexe W_n est dite ici *normale* si la forme K ne s'annule en aucun point de W_n. Il est alors possible de déduire de K un tenseur t de type (1, 1), invariant comme K par les transformations holomorphes de W_n, et auquel nous donnons le nom de *tenseur de Bergmann.* Si t est défini positif, on retrouve le cas étudié par Kobayashi. Le but du présent article est au contraire d'étudier certaines des circonstances qui se présentent dans le cas où t n'est pas supposé défini.

Cet article est divisé en quatre chapitres. Le chapitre I rappelle la définition du noyau de Bergmann selon Kobayashi. Il ne comporte pas de résultats nouveaux, mais contient, dans un souci de clarté, des démonstrations détaillées ne figurant pas en général dans la littérature. Le chapitre II porte sur le tenseur t de Bergmann d'une variété complexe normale W_n et sur la 2-forme associée τ. Le résultat principal est le suivant : si X est une transformation infinitésimale holomorphe complète de W_n et si $\mathfrak{J}X$ est aussi complète, X annule τ et laisse invariante toute n-forme holomorphe de carré intégrable. Si τ^n n'est pas identiquement nulle, il ne peut donc exister de telle transformation infinitésimale X non nulle. Ce théorème répond à une question posée par Kobayashi [7] et constitue une généralisation d'un théorème classique d'Henri Cartan concernant les domaines bornés de C^n.

Le chapitre III est relatif à l'étude de l'application canonique j d'une variété complexe normale W_n dans l'espace projectif complexe $P(F^*)$, en général de dimension infinie. Cette application j a été étudiée par plusieurs auteurs dont Kobayashi et le tenseur de Bergmann n'est autre que l'image réciproque par j du tenseur métrique canonique de $P(F^*)$. Par suite pour que $t = 0$, il faut et il suffit qu'il existe une n-forme holomorphe normée, unique à un facteur près, forme qui soit non nulle en tout point de W_n. Les transformations holomorphes μ de W_n induisent naturellement des isométries holomorphes $\tilde{\mu}$ de $P(F^*)$ et toute transformation infinitésimale holomorphe complète de W_n est projetable par j sur $j(W_n)$.

Pour qu'une transformation holomorphe de W_n induise l'identité sur $j(W_n)$ (et par suite sur $P(F^*)$), il faut et il suffit qu'elle multiplie tout élément de F par un facteur constant complexe de module 1. Ce résultat explique le théorème du chapitre II.

Le chapitre IV étudie le cas où la variété complexe normale W_n admet un groupe discontinu uniforme D de transformations holomorphes; l'espace W_n/D est alors une variété complexe compacte admettant W_n pour revêtement. Des extensions de théorèmes de Kobayashi sont obtenues. En particulier, si $C_1(W_n/D) \neq 0$ (C_1 première classe de Chern), il n'existe pas sur W_n de transformations infinitésimales holomorphes non nulles invariantes par D. On étudie le cas où W_n/D admet une métrique kählérienne; s'il en est ainsi, on établit à l'aide du théorème d'E. Hopf que pour W_n/D et pour toute métrique kählérienne, le groupe d'isotropie H des isométries est nécessairement fini et le plus grand groupe connexe G_0 d'isométries est abélien. Si $\chi(W_n/D) \neq 0$, G_0 est réduit à l'identité.

Certains des résultats de cet article ont été annoncés dans une note aux Compte Rendus (*C. R. Acad. Sc.*, **259**, 2737, 1964).

I. NOYAU DE BERGMANN.

1. L'élément de volume naturel de C^n.

Considérons l'espace vectoriel complexe C^n rapporté à ses coordonnées canoniques $\{z^\alpha\}$ (α, tout indice grec $= 1, 2, \dots, n$). Nous poserons dans la suite :

$$z^{\bar{\alpha}} = \bar{z}^\alpha \quad (\bar{\alpha} \dots, \text{tout indice grec} = n + 1, \dots, 2n)$$

et introduisons les parties réelles et imaginaires de z^α sous la forme :

$$(1, 1) \qquad z^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^\alpha + iy^\alpha)$$

où x^α, $y^\alpha \in R$. L'espace C^n est ainsi appliqué sur R^{2n}. On a :

$$dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2}(dx^\alpha + i\, dy^\alpha)(dx^\alpha - i\, dy^\alpha)$$

soit

$$dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\alpha}} = -i\, dx^\alpha \wedge dy^\alpha.$$

On déduit que l'élément de volume naturel de C^n :

$$(1,2) \qquad \eta = dx^1 \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^n$$

peut s'écrire :

$$\eta = \frac{(-1)^n}{i^n} dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{n}}.$$

Par transpositions, on aboutit ainsi à la formule :

$$(1,3) \quad \eta = \varepsilon_n\, dz^1 \wedge dz^2 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{1}} \wedge dz^{\bar{2}} \wedge \cdots \wedge dz^{\bar{n}}$$

où

$$\varepsilon_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{i^n}.$$

On vérifie immédiatement que $\varepsilon_n = 1$ pour n pair, $\varepsilon_n = i$ pour n impair.

2. Le cas d'un domainee borné de C^n.

Considérons dans C^n un domaine V, c'est-à-dire un ouvert connexe de C^n. Nous allons résumer brièvement les résultats obtenus pour un tel domaine par S. Bergmann. Soit F l'ensemble des fonctions holomorphes φ sur V telles que :

$$\left|\int_V |\varphi|^2 dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \ldots \wedge dz^{\bar{n}}\right| = \int_V |\varphi|^2 \eta < \infty .$$

On sait que F admet une structure naturelle d'espace de Hilbert complexe. Soit $\{\varphi_A\}$ $(A = 0, 1, \ldots)$ une base orthonormée de F. Si l'on forme :

$$K(z, \bar{\zeta}) = \sum_{A=0}^{\infty} \varphi_A(z)\bar{\varphi}_A(\bar{\zeta}) \quad (z, \zeta \in V)$$

on démontre que $K(z, \bar{\zeta})$ est une fonction holomorphe de z et $\bar{\zeta}$ indépendante du choix de la base orthonormée envisagée. Il est clair que $K(z, \bar{z})$ est toujours positive ou nulle.

Supposons que V soit un *domaine borné* de C^n; $K(z, \bar{z})$ est alors toujours strictement positif et nous pouvons définir un tenseur t par :

$$t_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar{\beta}}} = \log K(z, \bar{z}) = \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log K(z, \bar{z})$$
$$\left(\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \qquad \partial_{\bar{\beta}} = \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\beta}}}\right).$$

On montre que ce tenseur t définit sur V une métrique kählerienne définie positive, invariante par toute transformation holomorphe de V. Au tenseur t canoniquement associé au domaine borné V on donne le nom de *tenseur de Bergmann* du domaine V (Bergmann [2], [3]).

Cette notion de tenseur de Bergmann a été généralisée par E. Calabi et S. Kobayashi [7] à une large classe de variétés analytiques complexes; le but du présent article est l'étude de certains aspects de cette généralisation.

Notons dès à présent que le domaine V envisagé admet une n-forme canonique holomorphe $dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$ et qu'il est possible de traduire la définition que nous venons de donner du tenseur de Bergmann de V en termes de n-formes holomorphes $\varphi\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$. Dans le cas d'une variété analytique complexe générale, il n'existe pas de coordonnées canoniques globales ni de n-forme holomorphe canonique et c'est pourquoi nous serons amenés à substituer aux fonctions holomorphes envisagées des n-formes holomorphes.

3. Variétés analytiques complexes.

a) Soit W_n une variété différentiable connexe paracompacte de dimension topologique $2n$. Nous appelons système de coordonnées locales complexes — ou carte locale complexe — pour W_n une représentation topologique ψ_U d'un domaine U de W_n dans C^n

$$\psi_U : z \in U \to \{z^\alpha\} \in C^n.$$

U est dit le domaine du système de coordonnées; les n complexes $\{z^\alpha\}$ sont appelés les coordonnées complexes du point z de W_n dans la carte considérée.

La variété W_n admet une *structure analytique complexe* s'il existe un ensemble A de cartes complexes — ou atlas — satisfaisant aux conditions suivantes :

1) *la réunion des domaines des cartes de* A *est identique à* W_n.

2) *Si* U *et* V *sont deux domaines de cartes de* A *et si* $z \in U \cap V$, *les coordonnées complexes* $\{z^\alpha\}$ *de* z *dans* U *sont des fonctions holomorphes, à jacobien* J^U_V *non nul, des coordonnées complexes* $\{z^{\lambda'}\}$ *du même point* z *dans l'autre carte.*

La structure analytique complexe de W_n est définie par un atlas maximal relativement aux conditions 1 et 2. Nous décrirons brièvement cette situation en disant que W_n est *une variété analytique complexe de dimension complexe n.*

Si $\overline{A}$ est l'atlas correspondant aux

$$\overline{\psi}_U : z \in U \to \{z^{\bar\alpha}\} \in C^n$$

$\overline{A}$ définit sur la variété une structure analytique complexe dite conjuguée de la précédente. Nous noterons $\overline{W}_n$ la variété munie de cette structure complexe.

b) Si $\{z^\alpha\}$ désigne des coordonnées locales complexes, les $2n$ nombres réels $\{x^\alpha, y^\alpha\}$ qui s'en déduisent par (1-1) sont dits les coordonnées locales réelles *associées* aux coordonnées complexes $\{z^\alpha\}$. Si $z \in U \cap V$, les coordonnées réelles du point z associées à l'une des cartes complexes sont des fonctions analytiques réelles, à jacobien non nul, des coordonnées réelles de z associées à l'autre carte. Il en résulte qu'une structure analytique complexe portée par W_n induit sur cette variété une structure analytique réelle ou de classe C^ω. La structure analytique complexe est dite *subordonnée* à cette structure analytique réelle, ou plus généralement, à la structure différentiable C^∞ correspondante.

c) Soit T_z et T_z^* les espaces vectoriels tangents en z à W_n, T_z^c et $(T_z^c)^*$ leurs complexifiés. Si, pour z appartenant au domaine U d'un système de coordonnées locales complexes, nous substituons aux $2n$ coordonnées réelles associées $\{x^\alpha, y^\alpha\}$, les $2n$ nombres complexes $\{z^\alpha, z^{\bar\alpha}\}$ — ou plus brièvement $\{z^k\}$ $(k = 1, \ldots 2n)$ — les formes $\{dz^\alpha, dz^{\bar\alpha}\}$ définissent en $z \in U$ un repère de $(T_z^c)^*$ et, par dualité, on obtient un repère $\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\bar\alpha}\}$ de T_z^c. Nous dirons que $\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\bar\alpha}\}$ et $\{dz^\alpha, dz^{\bar\alpha}\}$ sont respectivement *le repère et le corepère naturels* au point z du système de coordonnées locales envisagé.

Si z appartient à l'intersection $U \cap V$ des domaines de deux cartes complexes, les repères et corepères naturels correspondants sont reliés par les formules :

$$(3,1) \qquad dz^\alpha = A^\alpha_{\beta'}\, dz^{\beta'}, \qquad \varepsilon_{\beta'} = A^\alpha_{\beta'}\varepsilon_\alpha$$

où $A = (A^\alpha_{\beta'})$ est la matrice régulière $n \times n$ à éléments complexes définie par :

$$A^\alpha_{\beta'} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^{\beta'}}.$$

Il résulte de (3,1) que le système des n vecteurs ε_α engendre un sous-espace S_x^c de T_x^c ne dépendant que de la structure analytique complexe donnée sur W_n. Ainsi la donnée d'une structure analytique complexe sur W_n définit en chaque point z de la variété une *structure complexe de l'espace tangent.*

Cette structure peut aussi être définie en z par l'opérateur $\mathfrak{J}_z$, de carré Id, sur T_z défini de la manière suivante : si v de composantes v^α, $v^{\bar\alpha}$ appartient à T_z, on a :

$$(\mathfrak{J}_z v)^\alpha = i v^\alpha, \qquad (\mathfrak{J}_z v)^{\bar\alpha} = -\, i v^{\bar\alpha}.$$

Nous désignons par $\mathfrak{J}$ le champ des opérateurs $\mathfrak{J}_z$, champ qui ne dépend que de la structure analytique complexe. Inversement le champ $\mathfrak{J}$ caractérise en un certain sens la structure analytique complexe envisagée sur W_n. On établit en effet aisément le résultat suivant : si deux structures analytiques complexes subordonnées à la même structure différentiable définissent sur W_n le même champ $\mathfrak{J}$ elles coïncident.

d) Sur les domaines U et V de deux cartes complexes, considérons les $2n$-formes locales η_U et η_V définies à partir des coordonnées réelles associées aux cartes par (1,2). Si $z \in U \cap V$, il résulte de la formule (1,3) que :

$$\eta_U = J^U_V \bar{J}^U_V \eta_V = |J^U_V|^2 \eta_V$$

où $J^U_V = \text{dét. A}$. Le jacobien $|J^U_V|^2$ de passage d'un système de coordonnées réelles associées à un autre est donc strictement positif.

Il en résulte que la variété analytique complexe W_n admet une *orientation naturelle* définie en prenant comme positifs les repères naturels correspondants aux coordonnées réelles associées et c'est cette orientation que nous adoptons.

4. L'espace de Hilbert F.

a) Une *n-forme holomorphe* α sur W_n est une n-forme complexe qui peut s'écrire localement sur le domaine U d'un système de coordonnées complexes :

$$\alpha_U = a_U(z)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$$

où les $a_U(z)$ sont des fonctions holomorphes des coordonnées complexes $\{z^\alpha\}$ dans U. Si $z \in U \cap V$, on a :

$$a_V(z) = J^U_V a_U(z).$$

Soit F *l'ensemble des n-formes holomorphes telles que :*

$$(4,1) \qquad \left| \int_{W_n} \alpha \wedge \bar{\alpha} \right| < \infty$$

où $\overline{\alpha}$ désigne la forme complexe conjuguée de α, et introduisons le *produit scalaire :*

$$(4,2) \qquad \langle\alpha, \beta\rangle = \varepsilon_n \int_{W_n} \alpha \wedge \overline{\beta} \quad (\alpha, \beta \in F).$$

Supposons W_n munie d'un recouvrement localement fini par des domaines U_i de coordonnées locales tels que les $\overline{U}_i$ soient compacts. Il existe alors une partition $\{\varphi_i\}$ de l'unité subordonnée au recouvrement $\{U_i\}$: chaque fonction $\varphi_i \geqslant 0$ a un support compact contenu dans U_i et $\sum\limits_i \varphi_i = 1$. Avec des notations pour β semblables à celles utilisées pour α, on a :

$$(4,3) \qquad \langle\alpha, \beta\rangle = \sum_i \int_{U_i} a_{U_i}(z)\overline{b_{U_i}(z)}\varphi_i(z)\eta_{U_i}(z)$$

$\langle\alpha, \alpha\rangle$ est manifestement défini positif et un raisonnement standard montre que F est, pour (4,2), un espace de Hilbert complexe (Kobayashi [7]).

b) Une *transformation holomorphe* μ de la variété complexe W_n est une transformation de W_n qui laisse invariante sa structure : si z admet les coordonnées complexes $\{z^\beta\}$ et $\zeta = \mu(z)$ les coordonnées complexes $\{\zeta^\alpha\}$, les ζ^α sont des fonctions holomorphes locales, à jacobien $J(\mu)$ non nul, des z^β : $\zeta^\alpha = \mu^\alpha(z^\beta)$.

Si β est une n-forme holomorphe, on a pour $\zeta \in U_i$:

$$\beta_{U_i} = b_{U_i}(\zeta)\, d\zeta^1 \wedge \cdots \wedge d\zeta^n \quad (\zeta \in U_i).$$

L'image réciproque $\mu^*\beta$ de la forme β par μ vérifie :

$$(4,4) \qquad (\mu^*\beta)_{\mu^{-1}U_i} = b_{U_i}\{\mu(z)\}\, J(\mu) dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$$
$$(z \in \mu^{-1}U_i).$$

Les $\{\mu^{-1}U_i\}$ définissent encore un recouvrement localement fini de W_n tel que les $\mu^{-1}U_i$ soient compacts et les fonctions $\{\varphi_i \circ \mu\}$ constituent une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On a d'après (4,3) :

$$(4,5) \qquad \langle\alpha, \beta\rangle = \sum_i \int_{U_i} a_{U_i}(\zeta)\overline{b_{U_i}(\zeta)}\varphi_i(\zeta)\eta_{U_i}(\zeta)$$

et aussi d'après la remarque précédente :

$$\langle \mu^*\alpha, \mu^*\beta \rangle = \sum_i \int_{\mu^{-1}U_i} a_{U_i}\{\mu(z)\} \overline{b_{U_i}\{\mu(z)\}} J(\mu)\overline{J(\mu)}[\varphi_i \circ \mu](z)\eta_{\mu^{-1}U_i}(z).$$

En effectuant dans les intégrales du second membre de (4,5) le changement de variables $\zeta^\alpha = \mu^\alpha(z^\beta)$ il vient :

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i \int_{\mu^{-1}U_i} a_{U_i}\{\mu(z)\} \overline{b_{U_i}\{\mu(z)\}} [\varphi_i \circ \mu](z) J(\mu)\overline{J(\mu)}\eta_{\mu^{-1}U_i}(z).$$

Il en résulte :

$$(4,6) \qquad \langle \mu^*\alpha, \mu^*\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

THÉORÈME. — *Le produit scalaire* (4,2) *est invariant par l'action des transformations holomorphes* μ *de* W_n.

5. Décomposition de l'espace F relativement à un point z.

Choisissons dans la variété W_n un point z et *désignons par* $F'(z)$ *le sous-espace de* F *défini par les n-formes* $\gamma \in F$ *qui s'annulent en* z. Si $F'(z) = F$ tout élément de F s'annule au point z considéré. Nous allons étudier le cas où $F'(z) \neq F$.

S'il en est ainsi, il existe des éléments non nuls de F orthogonaux à $F'(z)$. Soit α_0 un tel élément; on a $\alpha_0(z) \neq 0$ sinon α_0 appartiendrait à $F'(z)$ et étant orthogonale à elle-même serait nulle. Nous pouvons supposer α_0 *normé* et vérifiant ainsi les relations :

$$(5,1) \quad \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle = 1, \qquad \langle \alpha_0, \gamma \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in F'(z).$$

Si β est un élément arbitraire de F, il existe une constante complexe $c = \beta(z)/\alpha_0(z)$ telle que la forme $\gamma = \beta - c\alpha_0$ s'annule en z et par suite appartienne à $F'(z)$. Ainsi tout élément β de F peut s'écrire :

$$(5,2) \qquad \beta = c\alpha_0 + \gamma \quad (c \in C, \gamma \in F'(z)).$$

Si $D(z)$ est le sous-espace de dimension complexe 1 engendré par α_0, on a $D(z) \cap F'(z) = 0$ et d'après (5,2), l'espace de Hilbert

F est la somme directe :

$$(5,3) \qquad \mathrm{F} = \mathrm{F}'(z) \oplus \mathrm{D}(z)$$

$\mathrm{D}(z)$ est l'*orthocomplément* de $\mathrm{F}'(z)$ dans F.

Soit $\hat{\alpha}_0 \in \mathrm{F}$ une n-forme quelconque vérifiant les relations (5,1); $\hat{\alpha}_0$ appartient à $\mathrm{D}(z)$

$$\hat{\alpha}_0 = c\alpha_0 \quad (c \in \mathrm{C})$$

et $\hat{\alpha}_0$ étant normée, on a $|c| = 1$, c'est-à-dire $c = e^{i\omega} (\omega \in \mathrm{R})$. *Ainsi les relations* (5,1) *définissent la n-forme* α_0 *à un facteur* $e^{i\omega}$ *constant près de module* 1.

6. Étude d'une série construite à partir d'une base orthonormée de F.

a) Désignons par $\{\beta_{\mathrm{A}}\}$ ($\mathrm{A} = 0, 1, \ldots,$) une base orthonormée arbitraire de l'espace de Hilbert F. Nous nous proposons d'étudier la convergence sur $\mathrm{W}_n \times \overline{\mathrm{W}}_n$ de la série

$$(6,1) \qquad \sum_{\mathrm{A}=0}^{\infty} \beta_{\mathrm{A}}(z) \wedge \overline{\beta_{\mathrm{A}}(\zeta)} \quad (z, \zeta \in \mathrm{W}_n).$$

Si U est un domaine d'un système de coordonnées locales et si $z \in \mathrm{U}$, nous posons :

$$(\beta_{\mathrm{A}})_{\mathrm{U}}(z) = (b_{\mathrm{A}})_{\mathrm{U}}(z)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

Par suite si U et V sont deux domaines de coordonnées locales, la série (6,1) peut s'écrire pour $(z, \zeta) \in \mathrm{U} \times \mathrm{V}$

$$(6,2) \qquad \left\{ \sum_{\mathrm{A}=0}^{\infty} (b_{\mathrm{A}})_{\mathrm{U}}(z) (\overline{b_{\mathrm{A}}})_{\mathrm{V}}(\zeta) \right\} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\zeta^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge d\zeta^{\bar{n}}.$$

Pour étudier la convergence de cette série, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. — *Soit* $z = \{z^\alpha\}$ *un point de* C^n, B *un polycylindre fermé de* C^n *lieu du point* $\zeta = \{\zeta^\alpha\}$ *tel que* $|\zeta^\alpha - z^\alpha| \leqslant r^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots n$). *Si* $\varphi(\zeta)$ *est une fonction holomorphe sur* B, *on a l'inégalité*

$$(6,3) \qquad \int_{\mathrm{B}} |\varphi(\zeta)|^2 \eta \geqslant |\varphi(z)|^2 \int_{\mathrm{B}} \eta.$$

Par translation, on peut supposer sans nuire à la généralité $z = \{0\}$. On vérifie immédiatement que :

$$(6,4) \qquad \int_B (z^1)^{m_1} \dots (z^n)^{m_n} (z^{\bar{1}})^{p_1} \dots (z^{\bar{n}})^{p_n} \eta = 0$$

si la suite $(m_1, \dots, m_n)$ est distincte de la suite $(p_1, \dots, p_n)$. La fonction φ admet un développement de Taylor uniformément convergent dans B :

$$\varphi(\zeta) = \varphi(0) + \sum_{\alpha=1}^{n} [\partial_\alpha \varphi](0)\zeta^\alpha + \cdots$$

En évaluant $\varphi\bar{\varphi}$ et en intégrant sur B, il vient, compte-tenu de (6,4) :

$$\int_B |\varphi(\zeta)|^2 \eta = |\varphi(0)|^2 \int_B \eta + \sum_{\alpha=1}^{n} |[\partial_\alpha \varphi](0)|^2 \int_B |\zeta^\alpha|^2 \eta + \cdots$$

et l'inégalité (6,3) en résulte (Bergmann [3]).

b) z appartenant à U, domaine de coordonnées locales de W_n, proposons-nous de majorer :

$$\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2 = \sum_{A,B=0}^{p} \langle \beta_A, \beta_B \rangle \overline{(b_A)_U(z)} (b_B)_U(z)$$

ce qui peut s'écrire, ζ étant la variable d'intégration sur W_n :

$$(6,5) \quad \sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2$$
$$= \varepsilon_n \int_{W_n} \left\{ \sum_{A=0}^{p} \beta_A(\zeta) \overline{(b_A)_U(z)} \right\} \wedge \overline{\left\{ \sum_{B=0}^{p} \beta_B(\zeta) \overline{(b_B)_U(z)} \right\}}.$$

Soit B_z un polycylindre fermé contenu dans U lieu du point $\zeta = \{\zeta^\alpha\}$ de U tel que $|\zeta^\alpha - z^\alpha| \leqslant r^\alpha$.

De (6,5) il résulte :

$$\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2 \geqslant \varepsilon_n \int_B \left\{ \sum_{A=0}^{p} \beta_A(\zeta) \overline{(b_A)_U(z)} \right\} \wedge \overline{\left\{ \sum_{B=0}^{p} \beta_B(\zeta) \overline{(b_B)_U(z)} \right\}}$$

soit ζ appartenant à U :

$$\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2 \geqslant \int_B \left| \sum_{A=0}^{p} (b_A)_U(\zeta) \overline{(b_A)_U(z)} \right|^2 \eta_U(\zeta).$$

D'après le lemme appliqué à la fonction

$$\varphi(\zeta^\alpha) = \sum_{A=0}^{p} (b_A)_U(\zeta)\,\overline{(b_A)_U(z)}$$

il vient

$$\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2 \geqslant C^2(B_z)\left|\sum_{A=0}^{p} (b_A)_U(z)\,\overline{(b_A)_U(z)}\right|^2$$

où l'on a posé :

$$(6,6) \qquad C^2(B_z) = \int_{B_z} \eta_U > 0.$$

On obtient ainsi :

$$C^2(B_z)\left[\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2\right]^2 \leqslant \sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2$$

soit l'inégalité de majoration.

$$(6,7) \qquad \sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2 \leqslant \frac{1}{C^2(B_z)}.$$

c) Si U et V sont deux domaines de coordonnées locales de W_n, on a en vertu de l'inégalité de Schwarz, pour un couple $z, \zeta \in U \times V$:

$$\left[\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)\,\overline{(b_A)_V(\zeta)}|\right]^2 \leqslant \left[\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2\right]\left[\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_V(\zeta)|^2\right].$$

Par suite si B_z et B'_ζ sont deux polycylindres fermés respectivement contenus dans U et dans V et ayant pour origines respectives z et ζ, on a d'après (6,7) :

$$\sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)\,\overline{(b_A)_V(\zeta)}| \leqslant \frac{1}{C(B_z)\,C(B'_\zeta)}.$$

Donnons-nous deux polycylindres fermés fixes arbitraires $B \subset U$ et $B' \subset V$. Posons :

$$h(B) = \operatorname*{Inf}_{z \in B} C(B_z), \qquad h(B') = \operatorname*{Inf}_{\zeta \in B'} C(B'_\zeta).$$

On a pour tout $(z, \zeta) \in B \times B'$

$$(6,8) \qquad \sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)\,\overline{(b_A)_V(\zeta)}| \leqslant \frac{1}{h(B)h(B')}.$$

Considérons la série :

$$(6,9) \qquad \sum_{A=0}^{\infty} (b_A)_U(z)\, \overline{(b_A)_V(\zeta)}.$$

On déduit de (6,8)

1° que la série (6,9) *converge absolument* sur $B \times B'$;

2° que cette série de fonctions holomorphes en z et $\bar{\zeta}$ est *bornée dans son ensemble* dans $B \times B'$.

D'un théorème classique de Montel-Vitali, il résulte qu'elle *converge uniformément* dans $B \times B'$. Ainsi (6,9) définit dans $B \times B'$ une fonction holomorphe de z et $\bar{\zeta}$ et *peut être dérivée terme à terme* à l'intérieur de $B \times B'$. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 1. — *Si* $\{\beta_A\}$ $(A = 0, 1, \ldots)$ *est une base orthonormée de* F, *la série*

$$\sum_{A=0}^{\infty} \beta_A(z) \wedge \overline{\beta_A(\zeta)}$$

converge absolument et définit sur $W_n \times \overline{W}_n$ *une forme* $K(z, \zeta)$ *holomorphe en* z *et* $\bar{\zeta}$.

d) Soit α un élément de F, C_A $(A = 0, 1, \ldots)$ les coefficients de Fourier de α relativement à la base orthonormée $\{\beta_A\}$ de F :

$$C_A = \langle \alpha, \beta_A \rangle.$$

Les $\{\beta_A\}$ formant une base orthonormée de F, on a la relation de Parseval :

$$(6,10) \qquad \sum_{A=0}^{\infty} |C_A|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

La série

$$\sum_{A=0}^{\infty} C_A \beta_A$$

converge en moyenne quadratique vers α. Étudions sa convergence ordinaire en un point z de W_n ou, si U est un domaine de coordonnées locales contenant z, la convergence de la série

$$(6,11) \qquad \sum_{A=0}^{\infty} C_A (b_A)_U(z).$$

Il vient d'après l'inégalité de Schwarz :

$$\left[\sum_{A=0}^{p} |C_A(b_A)_U(z)|\right]^2 \leqslant \sum_{A=0}^{p} |C_A|^2 \sum_{A=0}^{p} |(b_A)_U(z)|^2$$

soit d'après (6,10) :

$$\left[\sum_{A=0}^{p} |C_A(b_A)_U(z)|\right]^2 \leqslant \langle \alpha, \alpha \rangle \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_U(z)|^2$$

où la série du second membre est convergente d'après (6,7). La série (6,11) est ainsi absolument convergente. Soit $B \subset U$ un polycylindre fermé fixe. Le même raisonnement donne :

$$\left[\sum_{A=p}^{\infty} |C_A(b_A)_U(z)|\right]^2 \leqslant \sum_{A=p}^{\infty} |C_A|^2 \sum_{A=p}^{\infty} (b_A)_U(z)|^2$$

soit avec les notations de (6,8)

$$\left[\sum_{A=p}^{\infty} C_A(b_A)_U(z)|\right]^2 \leqslant \frac{1}{h(B)^2} \sum_{A=p}^{\infty} |C_A|^2$$

(6,11) converge uniformément dans B. La série de Fourier de α définit donc une n-forme holomorphe qui ne peut que coïncider avec α.

Théorème 2. — *Si* $\{\beta_A\}$ *est une base orthonormée de* F, *la série de Fourier correspondant à* $\{\beta_A\}$ *de tout élément* α *de* F *converge sur* W_n *et représente la n-forme* α :

$$(6,12) \qquad \alpha = \sum_{A=p}^{\infty} C_A \beta_A \quad (C_A = \langle \alpha, \beta_A \rangle).$$

7. Forme et noyau de Bergmann.

a) Soient $\{\beta_A\}$, $\{\beta'_B\}$ (A, B = 0, 1, ...) deux bases orthonormées de l'espace de Hilbert F. Nous poserons :

$$C_{AB} = \langle \beta_A, \beta'_B \rangle.$$

Du théorème 2 du paragraphe 6, on déduit :

$$(7,1) \qquad \beta_A = \sum_{B=0}^{\infty} C_{AB} \beta'_B$$

et aussi comme $\overline{C}_{AB} = \langle \beta'_B, \beta_A \rangle$

(7,2) $$\beta'_B = \sum_{A=0}^{\infty} \overline{C}_{AB}\beta_A.$$

D'après l'égalité de Parseval, il vient :

$$\sum_{A=0}^{\infty} \overline{C}_{AB}C_{AC} = \langle \beta'_B, \beta'_C \rangle$$

soit

(7,3) $$\sum_{A=0}^{\infty} \overline{C}_{AB}C_{AC} = \delta_{BC}.$$

Cela posé, considérons la forme $K(z, \zeta)$ définie par :

$$K(z, \overline{\zeta}) = \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A(z) \wedge \overline{\beta_A(\zeta)}.$$

D'après (7,1), il vient :

$$K(z, \overline{\zeta}) = \sum_{A=0}^{\infty} \left(\sum_{B=0}^{\infty} C_{AB}\beta'_B(z) \right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{\infty} \overline{C_{AC}\beta'_C(\zeta)} \right)$$

soit : $$K(z, \overline{\zeta}) = \sum_{B, C=0}^{\infty} \left(\sum_{A=0}^{\infty} C_{AB}\overline{C}_{AC} \right) \beta'_B(z) \wedge \overline{\beta'_C(\zeta)}.$$

De (7,3) il résulte :

$$K(z, \overline{\zeta}) = \sum_{B, C=0}^{\infty} \delta_{BC}\beta'_B(z) \wedge \overline{\beta'_C(\zeta)}.$$

On obtient :

(7,4) $$K(z, \overline{\zeta}) = \sum_{B=0}^{\infty} \beta'_B(z) \wedge \overline{\beta'_B(\zeta)}.$$

Ainsi la forme $K(z, \overline{\zeta})$ *est indépendante du choix de la base orthonormée de* F *à partir de laquelle on l'a définie.*

b) En faisant $\zeta = z$, on définit ainsi une $2n$-forme sur la variété analytique complexe W_n

(7,5) $$K(z, \overline{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A(z) \wedge \overline{\beta_A(z)}.$$

A cette $2n$-forme $K(z, \overline{z})$ *on donnera le nom de forme de Bergmann* de la variété W_n.

Sur le domaine U d'un système de coordonnées locales posons

(7,6) $$K_U(z, \overline{z}) = k_U(z, \overline{z})\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{\overline{1}} \wedge \cdots \wedge dz^{\overline{n}}.$$

Si $z \in U \cap V$, il vient immédiatement :

$$k_V(z, \bar{z}) = |J_V^U|^2 \, k_U(z, \bar{z}). \tag{7,7}$$

Il en résulte que les $k_U(z, \bar{z})$ définissent sur W_n une *densité scalaire* k de poids 1. A k on donnera le nom de *noyau de Bergmann* de la variété analytique complexe W_n.

Avec les notations du paragraphe 6, il est clair que l'on a :

$$k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_U(z)|^2. \tag{7,8}$$

c) Soit μ une transformation holomorphe de W_n, $\{\beta_A\}$ une base orthonormée de l'espace de Hilbert F. On a :

$$\langle \beta_A, \beta_B \rangle = \delta_{AB}.$$

De l'invariance par μ du produit scalaire, il résulte :

$$\langle \mu^*\beta_A, \mu^*\beta_B \rangle = \delta_{AB}.$$

Les $\{\mu^*\beta_A\}$ forment donc aussi un système orthonormé. Si $\alpha \in F$, les composantes de α dans ce système sont :

$$C_A = \langle \alpha, \mu^*\beta_A \rangle = \langle \mu^{-1*}\alpha, \beta_A \rangle.$$

Le système $\{\beta_A\}$ étant complet, on a :

$$\sum_{A=0}^{\infty} |C_A|^2 = \langle \mu^{-1*}\alpha, \mu^{-1*}\alpha \rangle$$

et par suite la relation de Parseval :

$$\sum_{A=0}^{\infty} |C_A|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle.$$

Ainsi si $\{\beta_A\}$ est une base orthonormée de F, il en est de même pour $\{\mu^*\beta_A\}$. Le transformé de $K(z, \bar{z})$ par μ, soit

$$\mu^*K(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} \mu^*\beta_A(z) \wedge \overline{\mu^*\beta_A(z)}$$

ne peut différer de $K(z, \bar{z})$ d'après l'indépendance de K par rapport au choix d'une base orthonormée de F. Nous obtenons :

THÉORÈME. — *La forme de Bergmann* K *et par suite le noyau de Bergmann* k *d'une variété complexe* W_n *sont invariants par toute transformation holomorphe* μ *de la variété* W_n.

8. $F'(z)$ et la forme de Bergmann.

a) Choisissons un point z de W_n et reprenons les notations du paragraphe 5. Si $F'(z) = F$, tout élément de F s'annule en z et en ce point

$$K(z, \bar{z}) = 0.$$

Si $z \in U$, domaine de coordonnées locales :

$$k_U(z, \bar{z}) = 0.$$

Si $F'(z) \neq F$, soit α_0 un élément de F vérifiant les relations :

$$(8,1) \quad \langle \alpha, \alpha_0 \rangle = 1, \qquad \langle \alpha_0, \gamma \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \gamma \in F'(z).$$

Il existe des bases orthonormées de F dont le premier élément est α_0. Les autres éléments $\{\alpha_A\}$ $(A = 1, 2, \ldots)$ appartiennent à $F'(z)$. Ainsi

$$(8,2) \quad \alpha_0(z) \neq 0, \qquad \alpha_1(z) = \cdots = \alpha_A(z) = \cdots = 0.$$

Nous dirons qu'*une telle base orthonormée de* F *est adaptée au point* z choisi. Pour une telle base orthonormée adaptée à z, on a en ce point

$$K(z, \bar{z}) = \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)}$$

et si $z \in U$

$$k_U(z, \bar{z}) = |(a_0)_U(z)|^2 > 0$$

k est donc nul en z si $F'(z) = F$, *strictement positif en z si* $F'(z) \neq F$.

b) Soit U un domaine de coordonnées locales contenant le point z choisi, α et β deux éléments de l'espace F. On a :

$$\alpha_U(z) = a_U(z)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n,$$
$$\beta_U(z) = b_U(z)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

Supposons qu'en z :

$$(8,3) \qquad |b_U(z)|^2 \leqslant |a_U(z)|^2.$$

Soit V un autre domaine de coordonnées locales contenant z. De la relation entre les composantes $a_U(z)$ et $a_V(z)$ il résulte :

$$|b_V(z)|^2 \leqslant |a_V(z)|^2 \quad (z \in U \cap V)$$

et l'inégalité (8,3) est indépendante du domaine de coordonnées locales choisi. Lorsque cette inégalité est satisfaite nous écrirons :

$$\beta(z) \wedge \overline{\beta(z)} \leqslant \alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)}.$$

Cette relation d'ordre introduite relativement au point z, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *z étant un point choisi de W_n, on a :*

$$K(z, \bar{z}) = \operatorname*{Max}_{\langle \alpha, \alpha \rangle = 1} \alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)}. \tag{8,4}$$

Pour $K(z, \bar{z}) \neq 0$ *ce maximum est atteint par les formes* α_0 *vérifiant* (8,1) *et définies à un facteur constant près de module* 1.

En effet si $F'(z) = F$, on a

$$\alpha(z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in F, \qquad K(z, \bar{z}) = 0$$

et la relation (8,4) est triviale.

Si $F'(z) \neq F$, tout élément α de F peut s'écrire :

$$\alpha = c\alpha_0 + \gamma \quad (\gamma \in F'(z)).$$

Si α est normée :

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = |c|^2 + \langle \gamma, \gamma \rangle = 1.$$

Il en résulte :

$$\alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)} = |c|^2 \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)} = \{1 - \langle \gamma, \gamma \rangle\} \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)}.$$

Ainsi

$$\alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)} = \{1 - \langle \gamma, \gamma \rangle\} K(z, \bar{z}). \tag{8,5}$$

Le premier membre de (8,5) est maximum pour $\langle \gamma, \gamma \rangle = 0$, ce qui établit (8,4). Le maximum est atteint pour les formes $\alpha = C\alpha_0$, où $|C| = 1$, c'est-à-dire pour les formes vérifiant les relations (8,1).

9. Forme de Bergmann d'un domaine.

Nous allons rappeler quelques applications du théorème précédent.

Soit D un domaine, c'est-à-dire un ouvert connexe, de la variété analytique complexe W_n et désignons par K la forme de Bergmann relative à W_n, par K_D celle relative au domaine D.

Si $z \in D$, supposons $K(z, \bar{z}) \neq 0$. Soit $\{\alpha_A\}$ une base adaptée à z de l'espace F relatif à W_n. Avec les notations antérieures :

$$(9,1) \qquad K(z, \bar{z}) = \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)}.$$

D'autre part la restriction à D de la n-forme α_0 est une n-forme holomorphe sur D, que nous noterons encore α_0, et qui est telle que :

$$\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_D \leqslant \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} = 1.$$

Posons :

$$c^2 = \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_D \quad (\text{avec } 0 < c \leqslant 1).$$

On voit que

$$\left\langle \frac{\alpha_0}{c}, \quad \frac{\alpha_0}{c} \right\rangle_D = 1.$$

Il en résulte, en vertu du théorème précédent appliqué à D,

$$\frac{1}{c^2}\, \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)} \leqslant K_D(z, \bar{z})$$

soit, d'après (9,1),

$$K(z, \bar{z}') \leqslant c^2 K_D(z, \bar{z}).$$

Il vient ainsi :

$$(9,2) \qquad K(z, \bar{z}) \leqslant K_D(z, \bar{z})$$

où l'inégalité est entendue au sens du paragraphe 8, b.

Si $K(z, \bar{z}) = 0$, l'inégalité (9,2) est trivialement satisfaite. Nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Soit* D *un domaine de la variété analytique complexe* W_n *et soient* K *et* K_D *les formes de Bergmann respectives de* W_n *et* D. *Pour* $z \in D$, *on a au sens du paragraphe* 8, b

$$K(z, \bar{z}) \leqslant K_D(z, \bar{z}).$$

10. Forme de Bergmann d'une variété produit.

Soient W_n et W'_p deux variétés analytiques complexes de dimensions complexes respectives n et p. La variété produit $W_n \times W'_p$ est une variété complexe de dimension $n + p$. Toute forme de W_n (resp. W'_p) s'identifie de manière naturelle à une forme de $W_n \times W'_p$. Avec cette identification, nous nous proposons d'établir le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Si* W_n *et* W'_p *sont deux variétés complexes de formes de Bergmann* K_{W_n} *et* $K_{W'_p}$, *la variété* $W_n \times W'_p$ *admet la forme de Bergmann.*

$$(10,1) \qquad K_{W_n \times W'_p} = (-1)^{np} K_{W_n} \wedge K_{W'_p}.$$

a) Pour établir ce théorème, nous ferons d'abord les remarques suivantes. Soit F_{W_n} (resp. $F_{W'_p}$, $F_{W_n \times W'_p}$) l'espace des n-formes (resp. p-formes, $(n+p)$-formes) holomorphes de carrés intégrables de W_n (resp. de W'_p, $W_n \times W'_p$). Si $\alpha \in F_{W_n}$, $\alpha' \in F_{W'_p}$, il est clair que $\alpha \wedge \alpha'$ est une $(n+p)$-forme holomorphe sur $W_n \times W'_p$. De plus :

$$\left| \int_{W_n \times W'_p} \alpha(z) \wedge \alpha'(z') \wedge \overline{\alpha(z)} \wedge \overline{\alpha'(z')} \right|$$
$$= \left| \int_{W_n} \alpha(z) \wedge \overline{\alpha(z)} \right| \left| \int_{W'_p} \alpha'(z') \wedge \overline{\alpha'(z')} \right| < \infty$$

et $\alpha \wedge \alpha'$ *appartient à* $F_{W_n \times W'_p}$.

Considérons d'autre part une forme $\beta \in F_{W_n \times W'_p}$. Si

$$\zeta = (z, z') \in W_n \times W'_p$$

et si, U, U' sont des domaines de coordonnées locales de W_n et W'_p contenant respectivement z et z', on a :

$$\beta(\zeta) = \beta(z, z') = b_{U \times U'}(z, z') dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{1'} \wedge \cdots \wedge dz^{p'}.$$

Le point z' étant fixé, considérons la n-forme sur U :

$$[\beta_{z'}]_U(z) = b_{U \times U'}(z, z') dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

Les $[\beta_{z'}]_U$ déterminent une n-forme $\beta_{z'}$ holomorphe sur W_n, définie à un facteur près fonction holomorphe de z' dépendant du choix de U'. En introduisant sur W'_p un recouvrement $\{U'_i\}$ analogue à celui du paragraphe 4 et une partition correspondante de l'unité $\{\varphi_i\}$, il vient avec des notations évidentes :

$$\left| \int_{W_n \times W'_p} \beta(z, z') \wedge \overline{(\beta(z, z')} \right|$$
$$= \left| \sum_i \int_{U'_i} \varphi_i(z') \eta_{U'_i}(z') \int_{W_n} [\beta_{z'}(z) \wedge \overline{\beta_{z'}(z)}]_i \right| < \infty.$$

Il en résulte que $\beta_{z'} \in F_{W_n}$.

b) Cela posé, supposons qu'au point $\zeta_0 = (z_0, z'_0) \in W_n \times W'_p$, on ait :

$$K_{W_n \times W'_p}(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) = 0. \tag{10,2}$$

Il en résulte que quels que soient $\alpha \in F_{W_n}$, $\alpha' \in F_{W'_p}$, la forme $\alpha \wedge \alpha'$ s'annule en ζ_0

$$\alpha(z_0) \wedge \alpha'(z'_0) = 0.$$

S'il existe $\alpha' \in F_{W'_p}$ tel que $\alpha'(z'_0) \neq 0$, on en déduit $\alpha(z_0) = 0$ pour tout $\alpha \in F_{W_n}$ et par suite

$$K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) = 0.$$

Ainsi (10,2) *entraîne ou bien* $K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) = 0$ *ou bien* $K_{W'_p}(z'_0, \bar{z}'_0) = 0$.

Inversement supposons que pour $z_0 \in W_n$:

$$K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) = 0. \tag{10,3}$$

Choisissons un point arbitraire z'_0 de W'_p. Si $\beta \in F_{W_n \times W'_p}$, la forme $\beta_{z'_0}$ de F_{W_n} est, d'après (10,3) telle que $\beta_{z'_0}(z_0) = 0$. Il en résulte $\beta(z_0, z'_0) = 0$ pour tout β et (10,2) est satisfaite pour $\zeta_0 = (z_0, z'_0)$.

La formule (10,1) est donc vérifiée, si l'on suppose que l'une des trois formes de Bergmann s'annule.

c) Supposons maintenant que pour $\zeta_0 = (z_0, z'_0)$, aucune des trois formes de Bergmann ne s'annule. Il existe des formes $\alpha_0 \in F_{W_n}$, $\alpha'_0 \in F_{W'_p}$ telles que :

$$\langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} = 1, \qquad \langle \alpha_0, \gamma \rangle_{W_n} = 0$$

pour toute $\gamma \in F_{W_n}$ telle que $\gamma(z_0) = 0$ et

$$\langle \alpha'_0, \alpha'_0 \rangle_{W'_p} = 1, \qquad \langle \alpha'_0, \gamma' \rangle_{W'_p} = 0$$

pour toute $\gamma' \in F_{W'_p}$ telle que $\gamma'(z'_0) = 0$ et il vient :

$$\begin{aligned} K_{W_n}(z_0, \bar{z}_0) &= \alpha_0(z_0) \wedge \overline{\alpha_0(z_0)}, \\ K_{W'_p}(z'_0), \bar{z}'_0) &= \alpha'_0(z'_0) \wedge \overline{\alpha'_0 . (z'_0)}. \end{aligned} \tag{10,4}$$

Cela posé, soit δ un élément de $F_{W_n \times W'_p}$ tel que $\delta(z_0, z'_0) = 0$ donc que $\delta_{z'_0}(z_0) = 0$. Considérons la p-forme définie par :

$$\gamma'(z') = \int_{W_n} \delta(z, z') \wedge \overline{\alpha_0(z)}.$$

C'est une p-forme holomorphe sur W'_p. De l'inégalité de Schwarz, il résulte :

$$\varepsilon_p \gamma' \wedge \bar{\gamma}' \leqslant \left[\varepsilon_n \int_{W_n} \alpha_0(z) \wedge \overline{\alpha_0(z)}\right] \left[(-1)^{np} \varepsilon_n \varepsilon_p \int_{W_n} \delta(z, z') \wedge \overline{\delta(z, z')}\right]$$

soit comme :

$$\frac{\varepsilon_{n+p}}{\varepsilon_n \varepsilon_p} = (-1)^{np} \tag{10,5}$$

il vient :

$$\varepsilon_p \gamma' \wedge \bar{\gamma}' \leqslant \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} \varepsilon_{n+p} \int_{W_n} \delta(z, z') \wedge \overline{\delta(z, z')}.$$

En intégrant sur W'_p, on obtient :

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle_{W'_p} \leqslant \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} \langle \delta, \delta \rangle_{W_n \times W'_p} < \infty.$$

Ainsi γ' appartient à $F_{W'_p}$. Comme $\delta_{z'}(z_0) = 0$, $\delta_{z'_0}$ est orthogonale à α'_0 dans $F_{W'_p}$, c'est-à-dire :

$$\int_{W_n \times W'_p} \delta(z, z') \wedge \overline{\alpha_0(z)} \wedge \overline{\alpha'_0(z')} = 0.$$

On obtient ainsi

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \delta \rangle_{W_n \times W'_p} = 0 \tag{10,6}$$

pour tout $\delta \in F_{W_n \times W'_p}$ tel que $\delta(z_0, z'_0) = 0$.

Étudions d'autre part

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = \varepsilon_{n+p} \int_{W_n \times W'_p} \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \wedge \bar{\alpha}_0 \wedge \bar{\alpha}'_0.$$

Il vient :

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = (-1)^{np} \varepsilon_{n+p} \int_{W_n \times W'_p} \alpha_0 \wedge \bar{\alpha}_0 \wedge \alpha'_0 \wedge \bar{\alpha}'_0$$

c'est-à-dire :

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = \frac{(-1)^{np} \varepsilon_{n+p}}{\varepsilon_n \varepsilon_p} \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle_{W_n} \langle \alpha'_0, \alpha'_0 \rangle_{W'_p}.$$

On obtient ainsi d'après (10,5) :

$$\langle \alpha_0 \wedge \alpha'_0, \alpha_0 \wedge \alpha'_0 \rangle_{W_n \times W'_p} = 1. \tag{10,7}$$

Les relations (10-6) et (10-7) montrent que :

$$K_{W_n \times W'_p}(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) = \alpha_0(z_0) \wedge \alpha'_0(z'_0) \wedge \overline{\alpha_0(z_0)} \wedge \overline{\alpha'_0(z'_0)}$$

soit :

$$K_{W_n \times W'_p}(\zeta_0, \bar{\zeta}_0) = (-1)^{np} \alpha_0(z_0) \wedge \overline{\alpha_0(z_0)} \wedge \alpha'_0(z'_0) \wedge \overline{\alpha'_0(z'_0)}$$

ce qui, d'après (10,4), fournit la relation énoncée.

II. TENSEUR INVARIANT DE BERGMANN.

11. Variété complexe normale et tenseur de Bergmann.

a) Soit K la $2n$-forme de Bergmann de la variété analytique complexe W_n. Sur le domaine U d'un système de coordonnées locales, nous avons posé :

$$(11,1) \qquad K_U(z, \bar{z}) = k_U(z, \bar{z})\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge dz^{\bar{1}} \wedge \cdots \wedge dz^{\bar{n}}.$$

Soient U et V deux domaines de coordonnées locales notées $\{z^\alpha\}$ et $\{z^{\lambda'}\}$; si $z \in U \cap V$ nous posons :

$$A^\alpha_{\lambda'} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial z^{\lambda'}}, \qquad A^{\bar{\alpha}}_{\bar{\lambda}'} = \frac{\partial z^{\bar{\alpha}}}{\partial z^{\bar{\lambda}'}}.$$

La matrice $A^U_V = (A^\alpha_{\lambda'})$ admet pour déterminant le jacobien $J^U_V = \text{dét}\,(A^\alpha_{\lambda'})$ qui est localement une fonction holomorphe. Les k_U définissent *le noyau k de Bergmann* de W_n : pour $z \in U \cap V$

$$(11,2) \qquad k_V(z, \bar{z}) = k_U(z, \bar{z}) J^U_V \overline{J^U_V}.$$

Si $\{\beta_A\}$ est une base orthonormée de F, rappelons qu'on a avec les notations du paragraphe 6 :

$$(11,3) \qquad k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_U(z)|^2 \geqslant 0.$$

b) Nous ne nous intéressons dans la suite qu'aux variétés analytiques complexes W_n *normales* au sens suivant :

DÉFINITION. — *Une variété analytique complexe* W_n *est dite normale si sa forme de Bergmann* $K(z, \bar{z})$ *est différente de zéro en tout point* z *de* W_n.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, d'après le paragraphe 8 *a*, qu'en tout point z de W_n on ait $F'(z) \neq F$, c'est-à-dire qu'il existe un élément tel que $\alpha(z) \neq 0$. Le noyau k est alors toujours strictement positif.

La variété W_n *étant supposée normale*, étudions les quantités définies, sur les différents voisinages de coordonnées locales, par la formule :

$$(11,4) \qquad (t_U)_{\alpha\bar{\beta}} = \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U.$$

Si $z \in U \cap V$, on a avec les notations précédentes :

$$(t_V)_{\lambda'\bar{\mu}'} = \partial_{\lambda'\bar{\mu}'} \log k_V.$$

Or d'après (11,2) :

$$\log k_V = \log k_U + \log J_V^U + \log \bar{J}_V^U.$$

Par dérivation il vient :

$$\partial_{\lambda'\bar{\mu}'} \log k_V = \partial_{\lambda'\bar{\mu}'} \log k_U = A_{\lambda'}^{\alpha} A_{\bar{\mu}'}^{\bar{\beta}} \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U.$$

Il en résulte :

$$(11,5) \qquad (t_V)_{\lambda'\bar{\mu}'}(z) = A_{\lambda'}^{\alpha} A_{\bar{\mu}'}^{\bar{\beta}} (t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) \quad (z \in U \cap V).$$

On voit que les (11,4) sont les composantes d'un *tenseur covariant symétrique t* de W_n de type (1,1) par rapport à la structure complexe. A ce tenseur t, on donne le nom de *tenseur de Bergmann de la variété complexe normale* W_n.

Du théorème du paragraphe 10, il résulte que si W_n et W'_p sont deux variétés complexes normales, $W_n \times W'_p$ est normale et admet pour tenseur de Bergmann *la somme* naturelle des tenseurs de Bergmann des deux variétés facteurs.

c) Soit μ une *transformation holomorphe* de la variété normale W_n; si $z \in U$ admet les coordonnées complexes $\{z^\alpha\}$, $\zeta = \mu(z) \in \mu U$ les coordonnées complexes $\{\zeta^{\lambda'}\}$, les $\zeta^{\lambda'}$ sont des fonctions holomorphes locales, à jacobien $J(\mu)$ non nul des z^α.

L'invariance par μ du noyau k de Bergmann se traduit par la relation :

$$(11,6) \qquad k_{\mu U}[\mu(z), \overline{\mu(z)}] J(\mu) \overline{J(\mu)} = k_U(z, \bar{z}).$$

Étudions l'image réciproque par μ du tenseur covariant t. Il vient :

$$[(\mu^* t)_U]_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{\partial \zeta^{\lambda'}}{\partial z^\alpha} \frac{\partial \zeta^{\bar{\mu}'}}{\partial z^{\bar{\beta}}} \partial_{\lambda'\bar{\mu}'} \log k_{\mu U}[\mu(z), \overline{\mu(z)}].$$

De (11,6) il résulte :

$$[(\mu^* t)_U]_{\alpha\bar\beta}(z) = \partial_{\alpha\bar\beta} \log k_{\mu U}[\mu(z), \overline{\mu(z)}] = \partial_{\alpha\bar\beta} \log k_U(z, \bar z)$$

c'est-à-dire :

$$(11,7) \qquad [(\mu^* t)_U]_{\alpha\bar\beta}(z) = [t_U]_{\alpha\bar\beta}(z).$$

Nous aboutissons ainsi au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le tenseur de Bergmann d'une variété complexe normale* W_n *est invariant par toute transformation holomorphe* μ *de la variété* W_n :

$$\mu^* t = t.$$

12. La 2-forme τ.

a) A tout tenseur symétrique de type (1,1) d'une variété analytique complexe, on peut associer une 2-forme de même type. Au tenseur t de Bergmann, nous associons ainsi la 2-forme τ définie localement par

$$(12,1) \qquad \tau_U = -(2\pi)^{-1} i (t_U)_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge dz^{\bar\beta}$$

où U est un domaine de coordonnées locales. D'après la définition de t, il est clair que *la 2-forme réelle* τ *est fermée*

$$(12,2) \qquad d\tau = 0.$$

Nous nous proposons d'étudier la classe de cohomologie de degré 2 définie par τ.

b) Supposons W_n munie d'une métrique ds^2 hermitienne, définie positive, auxiliaire. Cette métrique peut s'écrire localement sur U :

$$(12,3) \qquad ds^2 = 2 g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha\, dz^{\bar\beta}.$$

Introduisons la connexion canonique complexe (ω^α_β, $\omega^\alpha_{\bar\beta} = 0$) de Chern définie par cette métrique. Relativement aux coordonnées locales $\{z^\alpha\}$ sur U, cette connexion admet les coefficients $\Gamma^\alpha_{\beta k}$, $\Gamma^\alpha_{\bar\beta k}$ ($k = 1, \ldots, 2n$) avec (Lichnerowicz [12], pp. 243-247)

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\beta k}\, dz^k, \qquad \omega^\alpha_{\bar\beta} = \Gamma^\alpha_{\bar\beta k}\, dz^k = 0$$

où :

(12,4) $$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = g^{\alpha\bar{\rho}}\partial_{\gamma} g_{\beta\bar{\rho}}, \qquad \Gamma^{\alpha}_{\beta\bar{\gamma}} = 0$$

et

(12,5) $$\Gamma^{\alpha}_{\bar{\beta}k} = 0.$$

Par complexe conjugaison, on a :

$$\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} = g^{\bar{\alpha}\rho}\partial_{\bar{\gamma}} g_{\bar{\beta}\rho}, \qquad \Gamma^{\bar{\alpha}}_{\bar{\beta}\gamma} = 0$$

et

$$\Gamma^{\bar{\alpha}}_{\beta k} = 0.$$

La courbure de la connexion est définie sur U par les 2-formes locales :

(12,6) $$\Omega^{\alpha}_{\beta} = d\omega^{\alpha}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{\rho} \wedge \omega^{\rho}_{\beta}$$

qui s'écrivent

(12,7) $$\Omega^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta,\lambda\bar{\mu}}\, dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}}$$

où les $R^{\alpha}_{\beta,\lambda\bar{\mu}}$ sont les composantes du tenseur de courbure. D'après une formule classique, ces composantes ont pour valeur :

$$R^{\alpha}_{\beta,\lambda\bar{\mu}} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\beta\bar{\mu}} - \partial_{\bar{\mu}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{k\lambda}\Gamma^{k}_{\beta\bar{\mu}} - \Gamma^{\alpha}_{k\bar{\mu}}\Gamma^{k}_{\beta\lambda}$$

soit d'après (12,4) et (12,5)

(12,8) $$R^{\alpha}_{\beta,\lambda\bar{\mu}} = - \partial_{\bar{\mu}}\Gamma^{\alpha}_{\beta\lambda} = - \partial_{\bar{\mu}}(g^{\alpha\bar{\rho}}\partial_{\lambda} g_{\beta\bar{\rho}}).$$

De (12,6) on déduit par contraction :

(12,9) $$\psi_U = (2\pi)^{-1} i\Omega^{\alpha}_{\alpha} = d[(2\pi)^{-1} i\omega^{\alpha}_{\alpha}].$$

Les ψ_U définissent sur W_n *une 2-forme réelle fermée* ψ. On sait que ψ *appartient à la première classe de cohomologie de Chern* $C_1(W_n)$.

De (12,8) on déduit :

$$R^{\alpha}_{\alpha,\lambda\bar{\mu}} = - \partial_{\bar{\mu}}(g^{\alpha\bar{\rho}}\partial_{\lambda} g_{\alpha\bar{\rho}}) = - \partial_{\lambda\bar{\mu}} \log \sqrt{g}$$

où g est le discriminant de la métrique. On obtient ainsi pour définir ψ :

(12,10) $$\psi_U = - (2\pi)^{-1} i\partial_{\lambda\bar{\mu}} \log \sqrt{g}\, dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}}.$$

c) Nous nous proposons de comparer les classes de cohomologie de τ et ψ; $\sqrt{g}$ définit sur W_n une densité scalaire de poids 1. Posons :

$$k = f\sqrt{g}$$

où f est *un scalaire strictement positif*. Par dérivation, il vient :

$$\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U = \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log \sqrt{g} + \partial_{\alpha\bar{\beta}} \log f.$$

Ainsi sur le domaine U :

$$(12,11) \qquad \tau_U = \psi_U - (2\pi)^{-1} i\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log f\, dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

Soit M le classique opérateur sur les formes, défini pour les formes de type (p, q) par :

$$M\alpha_{p,q} = (p - q)i\alpha_{p,q}.$$

On en déduit sur U :

$$Md \log f = i\partial_\alpha \log f\, dz^\alpha - i\partial_{\bar{\beta}} \log f\, dz^{\bar{\beta}}.$$

Par différentiation extérieure, il vient :

$$dM\, d \log f = -2i\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log f\, dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

La formule (12,11) peut ainsi s'écrire sur W_n :

$$(12,12) \qquad \tau = \psi + d[(4\pi)^{-1}\, Md \log f]$$

et l'on voit que τ et ψ appartiennent à la même classe de cohomologie. Nous sommes ainsi conduits au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si* W_n *est une variété complexe normale, la* 2-*forme* τ *définie par* (12,1) *à partir du tenseur de Bergmann appartient à la classe de Chern* $C_1(W_n)$ *de la variété.*

13. Expression du tenseur de Bergmann.

Selon Kobayashi [7] proposons-nous d'indiquer une expression du tenseur de Bergmann en un point z de W_n, en termes d'une base orthonormée de F adaptée à z.

a) Soit d'abord $\{\beta_A\}$ une base orthonormée arbitraire de F.

Sur un domaine U de coordonnées locales $\{z^\alpha\}$, nous avons posé :

$$(\beta_A)_U(z) = (b_A)_U(z)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \quad (z \in U)$$

et

$$(13,1) \qquad k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} (b_A)_U(z)\overline{(b_A)_U(z)}.$$

L'étude du paragraphe 6 nous permet de dériver (13,1) terme à terme. Il vient ainsi

$$(13,2) \qquad \partial_\alpha k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z)\, (\bar{b}_A)_U(\bar{z}),$$

$$\partial_{\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} (b_A)_U(z)\, \partial_{\bar{\beta}} (\bar{b}_A)_U(\bar{z})$$

et par suite

$$(13,3) \qquad \partial_{\alpha\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} (\bar{b}_A)_U(\bar{z}).$$

Or

$$\partial_{\bar{\beta}} \log k_U(z, \bar{z}) = \frac{\partial_{\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})}$$

et ainsi :

$$\partial_{\alpha\bar{\beta}} \log k_U(z, \bar{z}) = \frac{\partial_{\alpha\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})} - \frac{\partial_\alpha k_U(z, \bar{z}) \partial_{\bar{\beta}} k_U(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})}.$$

Il résulte de (13,2) et (13,3) :

$$(13,4) \quad (t_U)_{\alpha\bar{\beta}}(z) = \frac{\sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} (\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U(z, \bar{z})} - \frac{\sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (b_A)_U(z) (\bar{b}_A)_U(\bar{z}) \sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z) \partial_{\bar{\beta}} (\bar{b}_B)_U(\bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})}.$$

b) Soit maintenant $\{\alpha_A\}$ une base orthonormée de F adaptée au point z envisagé. Avec les notations du paragraphe 8, on a :

$$(a_0)_U(z) \neq 0, \qquad (a_1)_U(z) = \cdots = (a_A)_U(z) = \cdots = 0$$

et

$$(13,5) \qquad k_U(z, \bar{z}) = (a_0)_U(z)\, (\bar{a}_0)_U(\bar{z}).$$

Écrite dans cette base particulière, la formule (13,4) devient :

$$(t_U)_{\alpha\bar\beta}(z) = \frac{1}{k_U(z, \bar z)} \partial_\alpha(a_0)_U(z)\partial_{\bar\beta}(\bar a_0)_U(\bar z) + \frac{1}{k_U(z, \bar z)} \left(\sum_{A=1}^{\infty} \partial_\alpha(a_A)_U(z)\partial_{\bar\beta}(\bar a_A)_U(\bar z)\right) - \frac{1}{k_U^2(z, \bar z)} (a_0)_U(z)(\bar a_0)_U(\bar z)\partial_\alpha(a_0)_U(z)\partial_{\bar\beta}(\bar a_0)_U(\bar z).$$

D'après (13,5), les premiers et derniers termes du second membre se détruisent et il vient :

$$(13,6) \qquad (t_U)_{\alpha\bar\beta}(z) = \frac{1}{k_U(z, \bar z)}\left(\sum_{A=1}^{\infty} \partial_\alpha(a_A)_U(z)\partial_{\bar\beta}(\overline{a_A})_U(\bar z)\right).$$

Désignons par $V = (V_U^\alpha, V_U^{\bar\rho})$ un vecteur en $z \in W_n$. Le tenseur t de Bergmann définit en ce point la forme hermitienne

$$t(z, V) = (t_U)_{\alpha\bar\beta}(z)V_U^\alpha V_U^{\bar\beta}$$

qui s'écrit d'après (13,6)

$$(13,7) \qquad t(z, V) = \frac{1}{k_U(z, \bar z)}\left[\sum_{A=0}^{\infty} \left|V_U^\alpha\partial_\alpha(a_A)_U(z)\right|^2\right].$$

D'après (13,7) le tenseur t définit ainsi sur W_n *une forme hermitienne positive.*

14. Rang du tenseur de Bergmann.

Nous nous proposons d'interpréter le rang en z du tenseur t de Bergmann ou de la forme hermitienne correspondante.

a) Désignons par $\mathcal{L}(X)$ l'opérateur de transformation infinitésimale par un champ de vecteurs X arbitraire de la variété W_n. Nous introduisons dans la suite le sous-espace $F''(z)$ de $F'(z)$ défini par les éléments $\alpha \in F'(z)$ tels que :

$$(14,1) \qquad [\mathcal{L}(X)\alpha](z) = 0$$

pour tout champ X. Si, U étant un domaine de coordonnées locales contenant z,

$$\alpha_U = a_U dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$$

on a, d'après une formule classique concernant les transformations infinitésimales :

$$(14,2)\qquad \{[\mathfrak{L}(X)\alpha]_{n,0}\}_U = (X^\alpha_U \partial_\alpha a_U + \partial_\alpha X^\alpha_U a_U)\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n.$$

Comme $a_U(z) = 0$, $\mathfrak{L}(X)\alpha$ a pour composante au point z, $[X^\alpha_U \partial_\alpha a_U](z)$. Ainsi les éléments de $F''(z)$ sont les éléments de F tels que :

$$(14,3)\qquad a_U(z) = 0, \qquad [\partial_\alpha a_U](z) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

b) Désignons par $V(z)$ l'orthocomplément de $F''(z)$ dans $F'(z)$ et soit $\{\alpha_B\}$ $(B = 1, \ldots, p)$ un système orthonormé d'éléments de $V(z)$. Supposons qu'il existe des nombres complexes $\{C^B\}(B = 1, \ldots, p)$ tels que :

$$\sum_{B=1}^{p} C^B[\partial_\alpha(a_B)_U]\,(z) = 0.$$

On en déduit que l'élément de $V(z)$:

$$\alpha = \sum_{\beta=1}^{p} C^B \alpha_B$$

appartient aussi à $F''(z)$, donc est identiquement nul et $C^B = 0$ $(B = 1, \ldots, \rho)$. Ainsi la matrice $p \times n$ d'éléments $\{[\partial_\alpha(a_B)_U](z)\}$ est de rang p et nécessairement p est inférieur ou égal à n. Il en résulte que :

$$r(z) = \dim V(z) \leqslant n.$$

c) Cela posé, prenons pour base orthonormée de $F'(z)$ une base orthonormée $\{\alpha_A\}$ $(A = 1, \ldots, r(z))$ de $V(z)$ complétée par une base orthonormée de $F''(z)$. La formule (13,6) s'écrit alors :

$$(14,4)\qquad (t_U)_{\alpha\bar\beta}(z) = \frac{1}{k_U(z, \bar z)}\left(\sum_{A=1}^{r(z)} \partial_\alpha(a_A)_U(z)\partial_{\bar\beta}(\bar a_A)_U(\bar z)\right)$$

et la formule (13,7) :

$$(14,5)\qquad t(z, V) = \frac{1}{k_U(z, \bar z)}\left[\sum_{A=1}^{r(z)} |V^\alpha_U \partial_\alpha(a_A)_U(z)|^2\right]$$

où les $r(z)$ carrés mis en évidence sont indépendants. Ainsi t ou τ est au point z de rang $r(z)$. Nous énonçons

THÉORÈME. — *Le rang du tenseur de Bergmann ou de la forme associée τ en un point z de W_n est égal à la dimension $r(z)$ de l'orthocomplément $V(z)$ de $F''(z)$ dans $F'(z)$.*

d) Choisissons un point z_0 de W_n; $\tau^{r(z_0)}$ étant différent de 0 en z_0, et cette forme étant analytique réelle, elle ne peut être identiquement nulle sur aucun ouvert connexe de W_n, sinon, d'après l'analyticité, elle serait identiquement nulle sur W_n. Ainsi le support $S(\tau^{r(z_0)})$ de la forme $\tau^{r(z_0)}$ est toute la variété :

$$S(\tau^{r(z_0)}) = W_n.$$

Nous appelons *rang global du tenseur de Bergmann*, ou de la forme associée τ, le plus grand entier r tel que

$$S(\tau^r) = W_n.$$

Il est clair que :

$$r = \operatorname*{Max}_{z \in W_n} r(z).$$

15. Transformations infinitésimales holomorphes complètes.

a) Une transformation infinitésimale X de W_n est dite *holomorphe* si elle laisse invariant le champ $\mathfrak{J}$ d'opérateurs attaché à la structure complexe (paragraphe 3), c'est-à-dire si

$$\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J} = 0. \tag{15,1}$$

Dans un domaine U de coordonnées locales complexes, $\mathfrak{J}$ a pour composantes relativement aux coordonnées :

$$\mathfrak{J}^{\alpha}_{\beta} = i\delta^{\alpha}_{\beta}, \qquad \mathfrak{J}^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = -i\delta^{\bar\alpha}_{\bar\beta}, \qquad \mathfrak{J}^{\alpha}_{\bar\beta} = \mathfrak{J}^{\bar\alpha}_{\beta} = 0.$$

On en déduit que pour tout X :

$$[\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^{\alpha}_{\beta} = 0, \qquad [\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^{\bar\alpha}_{\bar\beta} = 0$$

et

$$[\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^{\alpha}_{\bar\beta} = X^{j}_{U}\partial_j\mathfrak{J}^{\alpha}_{\bar\beta} - \partial_j X^{\alpha}_{U}\mathfrak{J}^{j}_{\bar\beta} + \partial_{\bar\beta}X^{j}_{U}\mathfrak{J}^{\alpha}_{j} \quad (j = 1, 2, \ldots 2n)$$

soit

$$[\mathfrak{L}(X)\mathfrak{J}]^{\alpha}_{\bar\beta} = 2i\partial_{\bar\beta}X^{\alpha}_{U}.$$

Par suite, pour que X définisse *une transformation infinitésimale holomorphe*, il faut et il suffit que, dans tout domaine de coordonnées locales complexes, les composantes $\{X^{\alpha}_{U}\}$ soient localement des fonctions holomorphes. Si X est holomorphe et si α est une n-forme holomorphe, $\mathcal{L}(X)\alpha$ est aussi une n-forme holomorphe.

On notera que si X *définit une transformation infinitésimale holomorphe, il en est de même pour le champ de vecteurs* $\mathcal{J}X$.

b) Une transformation infinitésimale X de W_n est dite *complète* si elle engendre un groupe à un paramètre $\exp(uX)$ de transformations globales de la variété W_n. Pour que ce groupe laisse invariant un objet géométrique, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour la transformation infinitésimale X. En particulier, si X est une *transformation infinitésimale holomorphe complète*, le groupe, à un paramètre correspondant laisse $\mathcal{J}$ invariant et par suite se compose de transformations *holomorphes* de W_n.

Pour une telle transformation infinitésimale, les transformations holomorphes $\exp(uX)$ laissent invariants la 2-forme τ et le noyau k de Bergmann. On en déduit :

$$(15,2) \qquad \mathcal{L}(X)\tau = 0$$

et

$$(15,3) \qquad \mathcal{L}(X)k = 0.$$

Si $i(X)$ est l'opérateur de produit intérieur par X, on sait que pour une forme τ :

$$\mathcal{L}(X)\tau = (di(X) + i(X)d)\tau.$$

La forme τ étant fermée, (15,2) se traduit par :

$$di(X)\tau = 0.$$

Ainsi, *si* X *est une transformation infinitésimale holomorphe complète,* $i(X)\tau$ *est une 1-forme fermée.*

Explicitons maintenant (15,3) dans un domaine U de coordonnées locales. Pour la densité scalaire k, on a :

$$[\mathcal{L}(X)k]_U = X^j_U \partial_j k_U + \partial_j X^j_U k_U$$

(15,3) peut donc se traduire localement par :

$$X^j_U \partial_j \log k_U + \partial_j X^j_U = 0.$$

Soit en distinguant les deux types d'indices :

$$(15,4) \quad (X^\alpha_U \partial_\alpha \log k_U + \partial_\alpha X^\alpha_U) + (X^{\bar\alpha}_U \partial_{\bar\alpha} \log k_U + \partial_{\bar\alpha} X^{\bar\alpha}_U) = 0.$$

c) Nous nous proposons d'établir un théorème important concernant les transformations infinitésimales complètes holomorphes X telles que *la transformation infinitésimale holomorphe* $\mathfrak{J}$X *soit aussi complète*. S'il en est ainsi, la relation (15,4) appliquée à $\mathfrak{J}$X s'écrit :

$$i(X_U^\alpha \partial_\alpha \log k_U + \partial_\alpha X_U^\alpha) - i(\overline{X_U^\alpha} \partial_{\bar\alpha} \log k_U + \partial_{\bar\alpha} \overline{X_U^\alpha}) = 0.$$

Il en résulte que dans ce cas :

$$(15,5) \qquad X_U^\alpha \partial_\alpha \log k_U + \partial_\alpha X_U^\alpha = 0.$$

Compte tenu du caractère holomorphe des X_U^α, il vient par dérivation en $z^{\bar\beta}$:

$$(15,6) \qquad X_U^\alpha (t_U)_{\alpha\bar\beta} = 0$$

qui traduit localement la relation :

$$(15,7) \qquad i(X)t = 0$$

équivalente à :

$$i(X)\tau = 0.$$

d) Un point z de W_n étant arbitrairement choisi, soit $\{\alpha_A\}$ une base orthonormée de F adaptée à z.

De (15,7), il résulte

$$t(z, X(z)) = 0$$

et d'après l'expression (13,7) de la forme hermitienne définie par t, on a en z :

$$[X_U^\alpha \partial_\alpha (a_A)_U](z) = 0 \quad (A = 1, \cdots \infty)$$

qui, d'après (14,2), exprime que :

$$[\mathcal{L}(X)\alpha_A](z) = 0 \quad (A = 1, \cdots \infty).$$

Ainsi si $\gamma \in F'(z)$, on a :

$$(15,8) \qquad [\mathcal{L}(X)\gamma](z) = 0.$$

Explicitons maintenant la formule (15,5) en termes de la base orthonormée de F adaptée à z choisi. Il vient :

$$X_U^\alpha(z)\left[\sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha (a_A)_U(z)\, (\bar a_A)_U(\bar z)\right] + \partial_\alpha X_U^\alpha(z)\left[\sum_{A=0}^{\infty} (a_A)_U(z) (\bar a_A)_U(\bar z)\right] = 0.$$

Soit, compte tenu des propriétés de la base adaptée :

$$[X^{\alpha}_{U}\partial_{\alpha}(a_0)_U + \partial_{\alpha}X^{\alpha}_{U}(a_0)_U](z)(\overline{a}_0)_U(\overline{z}) = 0$$

où $(\overline{a}_0)_U(\overline{z})$ est différent de zéro. Ainsi :

$$[X^{\alpha}_{U}\partial_{\alpha}(a_0)_U + \partial_{\alpha}X^{\alpha}_{U}(a_0)_U](z) = 0$$

c'est-à-dire, d'après (14,2),

$$[\mathcal{L}(X)\alpha_0](z) = 0.$$

Si β est un élément arbitraire de F, on a d'après (5,2) :

$$\beta = c\alpha_0 + \gamma \quad \{c \in C, \gamma \in F'(z)\}$$

et par suite :

$$[\mathcal{L}(X)\beta](z) = c[\mathcal{L}(X)\alpha_0](z) + [\mathcal{L}(X)\gamma](z) = 0.$$

Ainsi en tout point de la variété W_n, $\mathcal{L}(X)\beta = 0$. Nous énonçons :

Théorème. — *Si* X *est une transformation infinitésimale holomorphe complète de la variété complexe normale* W_n *et si* $\mathcal{J}X$ *est aussi complète, on a* :

$$i(X)\tau = 0 \tag{15,9}$$

et toute n-forme holomorphe β *de carré intégrable est invariante par* X :

$$\mathcal{L}(X)\beta = 0 \quad (\beta \in F). \tag{15,10}$$

e) De ce théorème résultent immédiatement deux corollaires intéressants. Supposons que τ^n ne soit pas identiquement nul sur W_n, c'est-à-dire que τ admette un rang global égal à n au sens du paragraphe 14. Soit alors U un domaine de W_n sur lequel τ^n ne s'annule pas. Si X et $\mathcal{J}X$ définissent deux transformations infinitésimales holomorphes complètes, il résulte du théorème précédent que X est nécessairement identiquement nul sur U et, par analyticité, est identiquement nul sur W_n.

Supposons en particulier que la classe de Chern $C_1(W_n)$ soit telle que $C_1(W_n)^n \neq 0$; la forme τ^n appartient à $C_1(W_n)^n$ et par suite ne s'annule pas identiquement sur W_n. On se trouve donc ramené à la situation précédente. Nous énonçons

COROLLAIRE 1. — *Si* τ^n *n'est pas identiquement nul, en particulier si* $C_1(W_n)^n \neq 0$, *il ne peut exister de transformation infinitésimale holomorphe complète* X *non nulle telle que* $\mathfrak{J}X$ *soit aussi complète.*

Ce corollaire répond en particulier à une question de Kobayashi ([7], p. 274) et constitue une généralisation du théorème classique d'Henri Cartan [5] concernant les domaines bornés de C^n. Dans ce cas, en effet, le tenseur t est partout de rang n.

f) Supposons *compacte* la variété complexe normale W_n.

D'après les propriétés classiques des 2-formes, on a

$$\int_{W_n} \tau^n \geqslant 0$$

l'intégrale n'étant nulle que si τ^n est identiquement nulle. S'il n'en est pas ainsi, τ^n est nécessairement non holomorphe à zéro sur W_n et $C_1(W_n)^n \neq 0$. Ainsi, pour que $C_1(W_n)^n$ soit différent de zéro, il faut et il suffit que τ^n soit non identiquement nulle.

Sous l'hypothèse de compacité de W_n, le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n est un groupe de Lie complexe, d'après un théorème classique de Bochner et Montgomery. Toute transformation infinitésimale de W_n est ici complète. Si X est une transformation infinitésimale holomorphe, X et $\mathfrak{J}X$ sont toutes deux holomorphes complètes. On en déduit :

COROLLAIRE 2. — *Soit* W_n *une variété complexe normale compacte. Si* X *est une transformation infinitésimale holomorphe de* W_n, *on a*

$$i(X)\tau = 0 \tag{15,11}$$

et

$$\mathfrak{L}(X)\alpha = 0 \tag{15,12}$$

pour toute n-forme holomorphe α. (15,10) et (15,12) tiennent *pour toute variété complexe* comme on le voit par un raisonnement analogue à celui du corollaire 1.

Il est d'ailleurs immédiat d'établir (15,12) directement. Si $C_1(W_n)^n \neq 0$, le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n est discret d'après (15,11). Il est même sans doute fini en accord avec un théorème de Kobayashi [8].

16. Cas d'un espace homogène complexe.

Supposons que $W_n = G/H$ soit un *espace homogène complexe*; G est ainsi un groupe de transformations holomorphes de W_n opérant transitivement sur cette variété. Soit X une transformation infinitésimale de W_n *holomorphe et invariante par* G. Il est aisé de montrer que X est nécessairement complète.

En effet soit z_0 un point choisi de W_n et supposons que $\exp(uX)z_0$ soit défini pour $|u| < \varepsilon$. Si z est un point arbitraire de W_n, il existe un élément μ de G tel que $z = \mu(z_0)$. Alors :

$$\exp(uX)z = \mu[\exp(uX)z_0]$$

est aussi défini pour $|u| < \varepsilon$, puisque X est invariant par G. Il en résulte que la transformation infinitésimale X est complète.

La transformation infinitésimale holomorphe $\mathfrak{J}X$ est aussi *invariante par* G, donc aussi complète.

Du théorème du paragraphe 15, on déduit ainsi :

Théorème. — *Soit* $W_n = G/H$ *espace homogène complexe, supposé variété complexe normale. Si* X *est une transformation infinitésimale holomorphe de* W_n *invariante par* G, *on a*

$$i(X)\tau = 0$$

et

$$\mathcal{L}(X)\alpha = 0 \quad (\alpha \in F).$$

Il en est en particulier ainsi si X *est un élément de l'algèbre de Lie du centre de* G. En particulier si τ^n n'est pas nulle, le centre de G est nécessairement discret (Koszul).

III. IMMERSION D'UNE VARIÉTÉ COMPLEXE NORMALE.

17. Définition de l'immersion j dans $P(F^*)$.

a) Désignons par F^* l'espace de Hilbert dual de F et rapportons-le à une base orthonormée $\{\lambda^A\}$ $(A = 0, 1, \ldots)$. Un élément λ de F^* peut s'écrire :

$$(17,1) \qquad \lambda = \sum_{A=0}^{\infty} c_A \lambda^A \quad (c_A \in C)$$

avec

$$(17,2) \qquad \sum_{A=0}^{\infty} |c_A|^2 < \infty.$$

Introduisons dans F^* la relation d'équivalence r définie de la manière suivante : si λ, $\lambda' \in F^*$, λ' est dit équivalent à λ au sens de r, s'il existe un nombre complexe $c \in C$ tel que $\lambda' = c\lambda$. L'espace quotient de $F^* - \{0\}$ par la relation d'équivalence r est l'espace projectif complexe $P(F^*)$, en général de dimension infinie.

Soit $S(F^*)$ la sphère de F^* centrée à l'origine et de rayon 1, lieu des points (17,1) tels que :

$$\sum_{A=0}^{\infty} |c_A|^2 = 1.$$

L'espace $P(F^*)$ peut être considéré comme espace quotient de $S(F^*)$ par la restriction à cette sphère de la relation d'équivalence r ; chaque classe d'équivalence dans $S(F^*)$ est alors un cercle. Il est bien connu que $P(F^*)$ admet une structure uniforme et une « structure différentiable généralisée » naturelles déduites de celles de F par l'intermédiaire du sous-espace $S(F^*)$ de F^*.

b) On sait que, dans le cas de dimension finie, l'espace projectif complexe admet une métrique kählerienne canonique, dite métrique de Fubini. Il est aisé d'étendre à la présente situation les raisonnements concernant cette métrique. Appliquons l'inégalité de Schwarz au produit scalaire au sens de F^*

$$\bar{\lambda} \frac{d\lambda}{du}$$

où $\lambda \in S(F^*)$ et où $\dfrac{d\lambda}{du}$ est un vecteur tangent. Il vient :

$$\left|\bar{\lambda} \frac{d\lambda}{du}\right|^2 \leqslant |\lambda|^2 \left|\frac{d\lambda}{du}\right|^2 = \left|\frac{d\lambda}{du}\right|^2.$$

Il en résulte que la métrique définie sur $S(F^*)$ par :

$$(17,3) \qquad d\sigma^2 = d\lambda\, d\bar{\lambda} - (\bar{\lambda}\, d\lambda)\,(\lambda\, d\bar{\lambda})$$

est bien définie positive. Elle peut s'écrire plus explicitement :

$$(17,4) \quad d\sigma^2 = \sum_{A=0}^{\infty} dc_A\, d\bar{c}_A - \left(\sum_{A=0}^{\infty} \bar{c}_A\, dc_A\right)\left(\sum_{B=0}^{\infty} c_B\, d\bar{c}_B\right).$$

On démontre, comme dans le cas d'un espace projectif de dimension finie, que $d\sigma^2$ passe au quotient sur $P(F^*)$, et définit sur cet espace une « métrique de Fubini » ds^2 pour laquelle $P(F^*)$, muni de sa structure uniforme, est un espace métrique complet. Nous désignons par g le tenseur métrique sur $P(F^*)$ associé à la métrique ds^2.

c) Nous notons $B(\alpha, \lambda)$ $(\alpha \in F,\ \lambda \in F^*)$ la forme bilinéaire de dualité entre F et F^*.

Soit U un domaine de coordonnées locales de la variété complexe normale W_n. Considérons l'application $\hat{\jmath}_U$ de U dans F^* construite de la manière suivante : à tout point $z \in U$, nous faisons correspondre la forme linéaire $\lambda_U = \hat{\jmath}_U(z)$ sur F, élément de F^*, définie avec les notations antérieures par :

$$(17,5) \qquad B(\alpha, \lambda_U) = a_U(z).$$

Dire que W_n est normale revient à dire que $\lambda_U = \hat{\jmath}_U(z)$ ne coïncide jamais avec l'élément nul de F^*. Ainsi $\lambda_U \in F^* - \{0\}$. Si V est un autre domaine de coordonnées locales et si $z \in U \cap V$, il correspond à ce point, considéré comme appartenant à V, l'élément $\lambda_V = \hat{\jmath}_V(z)$ de $F^* - \{0\}$ défini par :

$$B(\alpha, \lambda_V) = a_V(z) \quad (\alpha \in F).$$

Or nous savons que :

$$a_V(z) = J_V^U(z) a_U(z).$$

Il en résulte :

$$(17,6) \qquad \hat{\jmath}_V(z) = J_V^U(z)\hat{\jmath}_U(z).$$

Considérons maintenant les applications $r \circ \hat{\jmath}_U$ et $r \circ \hat{\jmath}_V$ respectivement de U et V dans $P(F^*)$. D'après (17,6), il vient :

$$(17,7) \qquad [r \circ \hat{\jmath}_V](z) = [r \circ \hat{\jmath}_U](z).$$

De (17,7) on déduit que les $r \circ \hat{j}_U$ définissent une application canonique globale ou *immersion canonique* [1] *j de la variété complexe normale W_n dans $P(F^*)$; j est manifestement continue.*

18. Interprétation du tenseur de Bergmann.

a) Supposons l'espace de Hilbert F rapporté à une base orthonormée $\{\beta_A\}$ et F^* à la base duale $\{\lambda^B\}$. On a

$$B(\beta_A, \lambda^B) = \delta_A^B. \tag{18,1}$$

Reprenons le domaine U de coordonnées locales. Si $z \in U$, l'élément de F^*

$$\hat{j}_U(z) = \lambda_U = \sum_{B=0}^{\infty} c_B \lambda^B \tag{18,2}$$

a des composantes c_B qu'il est aisé d'évaluer. On a immédiatement :

$$B(\beta_A, \lambda_U) = B\left(\beta_A, \sum_{B=0}^{\infty} c_B \lambda^B\right) = \sum_{B=0}^{\infty} c_B B(\beta_A, \lambda^B)$$

soit d'après (18,1) :

$$B(\beta_A, \lambda_U) = c_A.$$

Or, d'après (17,5) qui définit λ_U,

$$B(\beta_A, \lambda_U) = (b_A)_U(z).$$

Nous obtenons ainsi :

$$c_A = (b_A)_U(z). \tag{18,3}$$

L'espace F^* admet une structure analytique complexe généralisée, en un sens évident, et, par passage au quotient sur $F^* - \{0\}$, il en est de même pour $P(F^*)$. D'après (18,3) les composantes de $\hat{j}_U(z)$ sont des fonctions holomorphes locales des coordonnées $\{z^\alpha\}$ dans U. Par passage au quotient par r, on voit que *l'immersion canonique j est une application analytique complexe de W_n dans $P(F^*)$.*

b) Proposons-nous d'évaluer le tenseur j^*g de W_n, image réciproque par j du tenseur métrique de $P(F^*)$. Comme

$$k_U(z, \bar{z}) = \sum_{A=0}^{\infty} |(b_A)_U(z)|^2$$

[1] Immersion n'est pas pris au sens de Chevalley qui correspondrait à la situation du paragraphe 19 *c*.

il en résulte que $j_U(z) = \lambda_U$ est équivalent par r à l'élément de $S(F^*)$ de composantes :

$$c_A = \frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})}. \tag{18,4}$$

De (17,4) et (18,4), on déduit :

$$(j^* ds^2)_U = \sum_{A=0}^{\infty} d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \cdot d\frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} - \left[\sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})}\right] \cdot \left[\sum_{B=0}^{\infty} \frac{(b_B)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} d\frac{(\bar{b}_B)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})}\right].$$

Or

$$d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} = \frac{1}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})}\left[d(b_A)_U(z) - \frac{1}{2}(b_A)_U(z)\frac{dk_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})}\right].$$

Il en résulte :

$$\sum_{A=0}^{\infty} d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} \cdot d\frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty} d(b_A)_U(z)\, d(\bar{b}_A)_U(\bar{z})$$
$$- \frac{1}{2}\frac{dk_U(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty}[(\bar{b}_A)_U(\bar{z})d(b_A)_U(z) + (b_A)_U(z)d(\bar{b}_A)_U(\bar{z})]$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{dk_U^2(z, \bar{z})}{k_U^3(z, \bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty}(b_A)_U(z)(\bar{b}_A)_U(\bar{z}).$$

On obtient ainsi :

$$\sum_{A=0}^{\infty} d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})}\, d\frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty} d(b_A)_U(z)d(\bar{b}_A)_U(\bar{z}) - \frac{1}{4}\frac{dk_U^2(z, \bar{z})}{k_U^2(z, \bar{z})}. \tag{18,5}$$

D'autre part :

$$\sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})}\, d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z, \bar{z})} = \frac{1}{k_U(z, \bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty}(\bar{b}_A)_U(\bar{z})\, d(b_A)_U(z) - \frac{1}{2}\frac{dk_U(z, \bar{z})}{k_U(z, \bar{z})}.$$

Il en résulte par produit par l'expression complexe conjuguée :

$$\left|\sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z,\bar{z})} d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z,\bar{z})}\right|^2$$
$$= \frac{1}{k_U^2(z,\bar{z})}\left[\sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z})d(b_A)_U(z)\right]\left[\sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z)d(\bar{b}_B)_U(\bar{z})\right]$$
$$+ \frac{1}{4}\frac{dk_U^2(z,\bar{z})}{k_U^2(z,\bar{z})} - \frac{1}{2}\frac{dk_U(z,\bar{z})}{k_U^2(z,\bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty}[(\bar{b}_A)_U(\bar{z})d(b_A)_U(z)$$
$$+ (b_A)_U(z)d(\bar{b}_A)_U(\bar{z})]$$

soit

$$(18,6)\quad \left|\sum_{A=0}^{\infty} \frac{(\bar{b}_A)_U(\bar{z})}{k_U^{\frac{1}{2}}(z,\bar{z})} d\frac{(b_A)_U(z)}{k_U^{\frac{1}{2}}(z,\bar{z})}\right|^2$$
$$= \frac{1}{k_U^2(z,\bar{z})}\left[\sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z})d(b_A)_U(z)\right]\left[\sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z)d(\bar{b}_B)_U(\bar{z})\right]$$
$$- \frac{1}{4}\frac{dk_U^2(z,\bar{z})}{k_U^2(z,\bar{z})}.$$

De (18,5) et (18,6) on déduit :

$$(j^*ds^2)_U = \frac{1}{k_U(z,\bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty} d(b_A)_U(z)d(\bar{b}_A)_U(\bar{z})$$
$$- \frac{1}{k_U^2(z,\bar{z})}\left[\sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z})d(b_A)_U(z)\right]\left[\sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z)d(\bar{b}_B)_U(\bar{z})\right].$$

On obtient ainsi :

$$(18,7)\quad ((j^*g)_U)_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{k_U(z,\bar{z})}\sum_{A=0}^{\infty} \partial_\alpha(b_A)_U(z)\partial_{\bar{\beta}}(\bar{b}_A)_U(\bar{z})$$
$$- \frac{1}{k_U^2(z,\bar{z})}\left[\sum_{A=0}^{\infty} (\bar{b}_A)_U(\bar{z})\partial_A(b_A)_U(z)\right]\left[\sum_{B=0}^{\infty} (b_B)_U(z)\partial_{\bar{\beta}}(\bar{b}_B)_U(\bar{z})\right]$$

c'est-à-dire d'après la formule (13,4)

$$j^*g = t.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Si* W_n *est une variété complexe normale, son tenseur de Bergmann* t *est l'image réciproque* $t = j^*g$ *du tenseur métrique* g *de* $P(F^*)$ *par l'immersion canonique* j *de* W_n *dans* $P(F^*)$.

19. Propriétés de l'immersion canonique j.

a) Proposons-nous d'étudier les couples de points z, z' de W_n tels que :

$$j(z) = j(z'). \tag{19,1}$$

S'il en est ainsi soit γ un élément de $F'(z)$. Si U est un domaine de coordonnées locales contenant z, on a :

$$B(\gamma, \hat{j}_U(z)) = 0.$$

De l'hypothèse faite, il résulte que si V est un domaine de coordonnées locales contenant z', on a :

$$B(\gamma, \hat{j}_V(z')) = 0$$

et par suite $\gamma \in F'(z')$. Ainsi $F'(z) \subset F'(z')$ et de même $F'(z') \subset F'(z)$. On en déduit que $F'(z) = F'(z')$.

Réciproquement supposons seulement que :

$$F'(z) \subset F'(z'). \tag{19,2}$$

On sait que si α_0 est un élément de F normé et orthogonal à $F'(z)$, tout élément α de F peut s'écrire

$$\alpha = c\alpha_0 + \gamma \quad (c \in C,\ \gamma \in F'(z) \subset F'(z')).$$

On en déduit, avec les mêmes notations que précédemment,

$$B(\alpha, \hat{j}_U(z)) = cB(\alpha_0, \hat{j}_U(z)), \qquad B(\alpha_0, \hat{j}_U(z)) \neq 0$$

et

$$B(\alpha, \hat{j}_V(z')) = cB(\alpha_0, \hat{j}_V(z')).$$

Il en résulte

$$B(\alpha, \hat{j}_V(z')) = hB(\alpha, \hat{j}_U(z)) \tag{19,3}$$

où h est le nombre complexe :

$$h = \frac{B(\alpha_0, \hat{j}_V(z'))}{B(\alpha_0, \hat{j}_U(z))}$$

qui est indépendant de l'élément α de F; la relation (19,3) exprime que :

$$j(z') = j(z).$$

Nous obtenons :

THÉORÈME. — *Si j est l'immersion canonique de* W_n *dans* $P(F^*)$, *pour que, pour* $z, z' \in W_n$:

$$j(z) = j(z')$$

il faut et il suffit que :

$$F'(z) \subset F'(z')$$

et l'on a alors $F'(z) = F'(z')$.

b) On définit, comme dans le cas des espaces de dimension finie, l'application linéaire j' tangente à j. En chaque point z de W_n, elle définit un endomorphisme de l'espace vectoriel tangent à W_n en z dans l'espace tangent à $P(F^*)$ en $j(z)$. Des deux théorèmes précédents, on déduit aisément des propriétés de j et j'.

Si V_z est un vecteur tangent en $z \in W_n$, on a d'après le théorème du paragraphe 18 :

$$t(z, V_z) = g(j(z), j'(V_z))$$

où au second membre figure la forme hermitienne définie positive déterminée par g. D'après cette relation, *pour qu'un champ* X *de vecteurs de* W_n *vérifie* $i(X)t = 0$, *il faut et il suffit que* $j'(X) = 0$. Le rang $r(z)$ du tenseur de Bergmann en z est égal au rang de j' en ce point.

Étudions en particulier à quelle condition le tenseur de Bergmann est identiquement nul. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que j' soit identiquement nul, c'est-à-dire que $j =$ const. ou que $j(W_n)$ soit réduit à un point. Ainsi, pour que t soit nul, il faut et il suffit d'après le théorème précédent que $F'(z)$ soit le même sous-espace F' de F en tout point z de W_n. Mais les éléments γ de F' sont alors identiquement nuls et par suite $F' = 0$. S'il en est ainsi, l'espace F est de dimension 1 et admet pour éléments les n-formes holomorphes de carrés intégrables $\alpha = c\alpha_0$ où $c \in C$ et où α_0 est normée et non nulle en tout point de W_n. La forme de Bergmann de W_n s'écrit dans ce cas :

$$K = \alpha_0 \wedge \bar{\alpha}_0.$$

Réciproquement s'il en est ainsi, il est clair que le tenseur de Bergmann est nul. Nous obtenons ainsi le corollaire suivant, qu'il est aisé d'établir par voie directe.

Corollaire. — *Pour que le tenseur de Bergmann d'une variété complexe normale* W_n *soit identiquement nul, il faut et il suffit que dim* $P(F^*) = 0$. *On a alors* $F = \{\alpha = c\alpha_0\}$ *où* $c \in C$ *et où* α_0 *est une n-forme holomorphe normée, non nulle en tout point de* W_n.

c) Pour que le tenseur t soit partout de rang n, il faut et il suffit qu'il en soit de même pour j', c'est-à-dire que j' soit *toujours régulière :* si V_z est un vecteur en un point z de W_n, la relation :

$$j'(z, V_z) = 0$$

implique toujours :

$$V_z = 0.$$

S'il en est ainsi, la forme hermitienne déterminée par t est *définie positive* et détermine une métrique kählerienne sur W_n qui est la « métrique canonique de Bergmann ». C'est le cas étudié principalement par Kobayashi (hypothèse A_2 dans sa terminologie).

d) Étudions à quelle condition *l'immersion canonique j est injective.* Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que :

$$j(z') = j(z)$$

implique

$$z' = z$$

ou que $F'(z') = F'(z)$ implique $z' = z$. Supposons $z' \neq z$; d'après le *a*) de ce paragraphe, on ne peut avoir $F'(z') \subset F'(z)$, sinon $j(z') = j(z)$ et $z' = z$. Ainsi si j est injective, il existe au moins un élément $\alpha \in F'(z')$ n'appartenant pas à $F'(z)$ donc tel que $\alpha(z) \neq 0$.

Inversement supposons W_n telle que, pour tout couple (z, z') de points de W_n $(z \neq z')$, il existe un élément α de F tel que :

$$\alpha(z) \neq 0, \qquad \alpha(z') = 0.$$

La variété W_n est automatiquement normale et j est injective puisque $F'(z') = F'(z)$ implique $z' = z$. Nous énonçons :

Théorème. — *Pour que l'immersion canonique j soit injective, il faut et il suffit que la variété complexe* W_n *admette la propriété suivante : pour tout couple de points* (z, z') *de* W_n $(z \neq z')$, *il existe* *une forme* α *de* F *telle que :*

$$(19,4) \qquad \alpha(z) \neq 0, \qquad \alpha(z') = 0.$$

Plaçons-nous dans l'hypothèse où j *est injective.* Alors j' ne peut être singulière sur aucun domaine U de W_n. En effet s'il en était ainsi, il existerait un champ de vecteurs X sur U, différent de zéro en un point z_0 de U et tel que $j'(X)$ soit nul sur U. Faisons agir exp (UX) sur le point z_0. Pour $|u| < \varepsilon$, où ε est un nombre positif convenable, on a :

$$\exp [uj'(X)]j(z_0) = j [\exp (uX)z_0].$$

Comme $j'(X) = 0$ sur U, le premier membre, donc le second, est égal à $j(z_0)$; l'application j étant supposée injective :

$$j [\exp (uX)z_0] = j(z_0) \quad |u| < \varepsilon$$

entraîne

$$\exp (uX)z_0 = z_0 \quad |u| < \varepsilon.$$

Il résulte que $X(z_0)$ est nécessairement nul, ce qui implique contradiction. Le tenseur de Bergmann est de rang global n sur W_n.

Ainsi *si l'immersion* j *est injective, le support de* τ^n *coïncide avec* W_n. *Dans ce cas, la transformation infinitésimale holomorphe* X *et son image* $\mathfrak{J}$X *ne peuvent être simultanément complètes.* En particulier si W_n est normale compacte et j injective, le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes de W_n est réduit à l'identité.

20. Cas d'un espace homogène complexe compact.

Supposons que $W_n = G/H$ (G connexe effectif) soit un espace homogène complexe compact. Pour une variété W_n compacte, nous désignons, selon une notation classique, par $b_{n,0}(W_n)$ la dimension (finie) de l'espace F des n-formes holomorphes sur cette variété.

D'après (15,12) toute n-forme holomorphe α de la variété compacte W_n est invariante par le groupe transitif G de transformations holomorphes. Par suite α ne peut s'annuler en aucun point z de W_n sans être identiquement nulle. Il en résulte que $F'(z) = 0$ pour tout z.

On voit ainsi que, ou bien la variété W_n n'est pas normale :

$$b_{n,0}(W_n) = 0$$

et K est identiquement nulle, ou bien la variété est normale :

$$b_{n,0}(W_n) = 1$$

et dim $P(F^*) = 0$, le tenseur de Bergmann t est nul. Ainsi :

THÉORÈME. — *Si* $W_n = G/H$ *est un espace homogène complexe compact, ou bien* $b_{n,0}(W_n) = 0$ *et le noyau de Bergmann est nul, ou bien* $b_{n,0}(W_n) = 1$ *et le tenseur de Bergmann est nul. Si* $C_1(W_n) \neq 0$, *c'est le premier cas qui se produit.*

21. Transformations holomorphes et immersion *j*.

a) Reprenons une variété complexe normale W_n arbitraire et soit μ une transformation holomorphe de W_n. A tout élément α de F, μ fait correspondre l'élément $\mu^*\alpha$ de F et opère ainsi sur F. Il en résulte que la transformation μ opère aussi naturellement sur l'espace F^* dual de F. A tout élément λ de F^* correspond ainsi l'élément noté $\hat{\mu}\lambda$ défini de la manière suivante : quel que soit $\alpha \in F$

$$B(\alpha, \hat{\mu}\lambda) = B(\mu^*\alpha, \lambda). \tag{21,1}$$

Si $\lambda \in F^* - \{0\}$, il en est de même pour $\hat{\mu}\lambda$.
Si $\lambda' = c\lambda$, on a :

$$B(\alpha, \hat{\mu}(c\lambda)) = B(\mu^*\alpha, c\lambda) = cB(\mu^*\alpha, \lambda) = cB(\alpha, \hat{\mu}\lambda)$$

soit

$$B(\alpha, \hat{\mu}(c\lambda)) = B(\alpha, c\hat{\mu}\lambda).$$

Ainsi :

$$\hat{\mu}(c\lambda) = c\hat{\mu}\lambda$$

et par passage au quotient, on voit que μ opère naturellement, par une transformation notée $\tilde{\mu}$, sur l'espace projectif complexe $P(F^*)$; $\tilde{\mu}$ est manifestement une isométrie de $P(F^*)$.

μ^* respecte la structure analytique de F : si $\{\beta_A\}$ est une base orthonormée de F, $\mu^*\alpha$ a les mêmes composantes dans la base orthonormée $\{\mu^*\beta_A\}$ que α dans la base $\{\beta_A\}$. Par suite $\hat{\mu}$ respecte la structure analytique de F^* et il en est de même par passage au quotient pour $\tilde{\mu}$ et la structure analytique de $P(F^*)$. Ainsi $\tilde{\mu}$ est une *transformation holomorphe de* $P(F^*)$.

b) Étudions la relation existant entre μ, j et $\tilde{\mu}$. Soit U un domaine de coordonnées locales $\{\zeta^\alpha\}$ de W_n. Si $\alpha \in F$ et si $\zeta \in U$:

$$\alpha_U(\zeta) = a_U(\zeta)\, d\zeta^1 \wedge \cdots \wedge d\zeta^n. \tag{21,2}$$

Si $\zeta = \mu(z)$ (avec $z \in \mu^{-1}U$), on peut écrire (21,2) sous la forme :

$$\alpha_U\{\mu(z)\} = a_U\{\mu(z)\}\, d\zeta^1 \wedge \cdots \wedge d\zeta^n$$

et la forme $\hat{j}_U\{\mu(z)\} \in F^*$ est définie par :

$$B(\alpha, \hat{j}_U\{\mu(z)\}) = a_U\{\mu(z)\} \quad z \in \mu^{-1}U. \tag{21,3}$$

Évaluons d'autre part :

$$B(\alpha, \hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\}) = B(\mu^*\alpha, \hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)). \tag{21,4}$$

Nous avons vu que, avec les notations du paragraphe 4, *b* :

$$[\mu^*\alpha]_{\mu^{-1}U}(z) = a_U\{\mu(z)\}\ \{J(\mu)\}_z\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$$

où les $\{z^\alpha\}$ sont les coordonnées locales de z dans $\mu^{-1}U$. Il en résulte

$$B(\alpha, \hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\}) = \{J(\mu)\}_z a_U\{\mu(z)\}.$$

Ainsi pour tout $\alpha \in F$

$$B(\alpha, \hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\}) = \{J(\mu)\}_z B(\alpha, \hat{j}_U\{\mu(z)\})$$

ce qui exprime que :

$$\hat{\mu}\{\hat{j}_{\mu^{-1}U}(z)\} = \{J(\mu)\}_z \hat{j}_U\{\mu(z)\}.$$

Par passage au quotient à $P(F^*)$ au moyen de la relation r, il vient :

$$\tilde{\mu} \circ j = j \circ \mu. \tag{21,5}$$

Si $z \in W_n$, (21,5) donne :

$$\tilde{\mu}\{j(z)\} = j\{\mu(z)\}.$$

Par suite la transformation $\tilde{\mu}$ holomorphe laisse invariant $j(W_n)$.

c) Désignons par X une transformation infinitésimale *holomorphe complète* de W_n qui engendre un groupe à un paramètre $\exp(uX)$ de transformations holomorphes de cette variété. A ce groupe correspond le groupe à un paramètre $[\exp(uX)]^{\sim}$ de transformations holomorphes de $P(F^*)$. Ce dernier groupe est engendré par un champ de vecteurs $\tilde{X}$ de $P(F^*)$. De (21,5) on déduit :

$$\exp(u\tilde{X}) \circ j = j \circ \exp(uX).$$

Si z_0 est un point de W_n, on a :

$$j[\exp(uX)z_0] = \exp(u\tilde{X})j(z_0).$$

On en déduit par dérivation en u :

$$j(z_0, X(z_0)) = \tilde{X}\{j(z_0)\}. \tag{21,6}$$

D'après (21,6), les images par j' des différents vecteurs du champ X aux différents points de W_n qui se projettent au même point de $j(W_n)$, coïncident. Ainsi :

THÉORÈME. — *Toute transformation infinitésimale* X *holomorphe complète de la variété complexe normale* W_n *est projetable sur* $j(W_n)$ *par l'immersion canonique* j *et la projection* $j'(X)$ *est la restriction de* $\tilde{X}$ *à* $j(W_n)$.

d) Soit Y un champ de vecteurs de W_n tel que :

$$i(Y)\tau = 0 \tag{21,7}$$

ou — ce qui est équivalent — tel que $j'(Y) = 0$.

Si μ est une transformation holomorphe de W_n, il résulte de l'invariance de τ par μ :

$$i(\mu Y)\tau = 0. \tag{21,8}$$

Si X est une transformation infinitésimale holomorphe complète de W_n, on a de même, puisque $\mathcal{L}(X)\tau = 0$:

$$i(\mathcal{L}(X)Y)\tau = 0$$

c'est-à-dire

$$i([X, Y])\tau = 0. \tag{21,9}$$

Plus généralement (voir théorème précédent) soit X une transformation infinitésimale de W_n *projetable sur* $j(W_n)$ *par* j;

Y étant aussi projetable puisque $j(Y) = 0$, le crochet $[X, Y]$ est projetable et l'on a :

$$j'([X, Y]) = [j'(X), j'(Y)] = 0.$$

Ainsi

$$(21,10) \qquad i([X, Y])\tau = 0.$$

Considérons en particulier une algèbre de Lie L de transformations infinitésimales de W_n projetable par j. Le sous-espace de L défini par les transformations infinitésimales Y telles que $i(Y)\tau = 0$ est *un idéal* de L. Si G est un groupe de Lie de transformations holomorphes de W_n, les transformations infinitésimales Y de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G qui annulent τ forment *un idéal* I *de* $\underline{G}$.

22. Transformations holomorphes induisant l'identité sur $j(W_n)$.

a) Étudions les transformations holomorphes ν de la variété complexe normale W_n telles que la restriction de $\tilde{\nu}$ à $j(W_n)$ se réduise à l'identité. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que, pour tout $z \in W_n$

$$(22,1) \qquad \tilde{\nu}\{j(z)\} = j(z).$$

Soit U un domaine de coordonnées locales de W_n. La relation (22,1) peut se traduire de la manière suivante : il existe sur chaque U une fonction $\varphi_{U,\nu}$ ne s'annulant pas telle que :

$$\hat{\nu}\{\hat{j}_U(z)\} = \varphi_{U,\nu}(z)\hat{j}_U(z) \quad (z \in U).$$

On doit donc avoir pour tout élément α de F :

$$B(\alpha, \hat{\nu}\{\hat{j}_U(z)\}) = B(\alpha, \varphi_{U,\nu}(z)\hat{j}_U(z))$$

soit :

$$B(\nu^*\alpha, \hat{j}_U(z)) = \varphi_{U,\nu}(z)B(\alpha, \hat{j}_U(z)).$$

D'après la définition des $\hat{j}_U$, si sur U :

$$\alpha_U = a_U \, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$$

on a :

$$B(\alpha, \hat{j}_U(z)) = a_U(z)$$

et

$$B(\nu^*\alpha, \hat{j}_U(z)) = a_{\nu U}(\nu z)J(\nu)_z.$$

Il en résulte :

$$a_{\nu U}(\nu z) J(\nu)_z \, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n = \varphi_{U,\nu}(z) a_U(z) \, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$$

qui exprime que, sur U :

$$(\nu^* \alpha)_U = \varphi_{U,\nu} \alpha_U \quad (\varphi_{U,\nu}(z) \neq 0 \text{ pour } z \in U).$$

En introduisant un recouvrement de W_n, par des domaines de coordonnées locales, on voit que les transformations holomorphes ν étudiées sont telles qu'il existe sur W_n une fonction φ_ν ne s'annulant pas telle que, pour tout $\alpha \in F$,

$$\nu^* \alpha = \varphi_\nu \alpha. \tag{22,2}$$

D'après (22,2), φ_ν est une *fonction holomorphe* sur W_n.

La transformation holomorphe ν de W_n doit laisser invariante la $2n$-forme de Bergmann :

$$K = \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A \wedge \overline{\beta}_A$$

où $\{\beta_A\}$ est une base orthonormée de F. Or d'après (22,2) :

$$\nu^* K = \sum_{A=0}^{\infty} \nu^* \beta_A \wedge \overline{\nu^* \beta_A} = \varphi_\nu \overline{\varphi}_\nu \sum_{A=0}^{\infty} \beta_A \wedge \overline{\beta}_A$$

soit :

$$\nu^* K = |\varphi_\nu|^2 K.$$

Il en résulte que la fonction holomorphe φ_ν est de module 1 et par suite se réduit à une constante;

$$\varphi_\nu = \exp(i\theta(\nu)) \quad (\theta(\nu) \in R).$$

Ainsi les transformations ν étudiées sont les transformations holomorphes telles que, pour tout $\alpha \in F$

$$\nu^* \alpha = \exp(i\theta(\nu)) \alpha. \tag{22,3}$$

Il est aisé de voir que les transformations holomorphes ν satisfaisant à la condition (22,3) sont telles que $\tilde{\nu}$ n'est autre que l'identité sur $P(F)^*$ tout entier. En effet si $\lambda \in F^*$, on a pour tout α :

$$B(\alpha, \tilde{\nu}\lambda) = B(\nu^* \alpha, \lambda) = \exp(i\theta(\nu)) B(\alpha, \lambda) = B(\alpha, \exp(i\theta(\nu))\lambda).$$

On en déduit que pour tout λ :

$$\tilde{\nu}\lambda = \exp\,(i\theta(\nu))\lambda$$

et par passage à $P(F^*)$

$$\tilde{\nu} = \mathrm{Id}.$$

Si μ_1 et μ_2 sont deux transformations holomorphes de W_n telles que les restrictions de $\tilde{\mu}_1$ et $\tilde{\mu}_2$ à $j(W_n)$ coïncident, la restriction à $j(W_n)$ de $\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2^{-1}$ est l'identité et par suite $\tilde{\mu}_1\tilde{\mu}_2^{-1} = \mathrm{Id}.$ sur $P(F^*)$. Nous obtenons ainsi :

THÉORÈME. — 1° *Pour qu'une transformation holomorphe* ν *de* W_n *induise l'identité sur* $j(W_n)$, *il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle* $\theta(\nu)$ *telle que, pour tout* $\alpha \in F$:

$$\nu^*\alpha = \exp\,(i\theta(\nu))\alpha.$$

2° *Deux transformations holomorphes* μ_1 *et* μ_2 *de* W_n *telles que les restrictions de* $\tilde{\mu}_1$ *et* $\tilde{\mu}_2$ *à* $j(W_n)$ *coïncident sont telles que* $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ *sur* $P(F^*)$.

En particulier, d'après le 1° toute transformation holomorphe ν laissant invariantes les n-formes d'éléments de F induit l'identité sur $P(F^*)$.

b) Soit X une transformation infinitésimale *holomorphe complète* telle que le groupe à un paramètre $\exp\,(uX)$ qu'elle engendre induise l'identité sur $j(W_n)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le champ $j'(X)$ de $j(W_n)$ soit nul ou que :

$$i(X)\tau = 0. \tag{22,4}$$

S'il en est ainsi $\exp\,(uX) = \mathrm{Id}.$ sur $P(F^*)$ et par suite $\tilde{X} = 0$.

D'après (22,3), pour tout $\alpha \in F$

$$\exp\,(uX)^*\alpha = \exp\,[i\theta(u)]\alpha$$

où $\theta(u)$ est une fonction à valeurs réelles dérivable. Il en résulte :

$$\frac{\exp\,(uX)^*\alpha - \alpha}{u} = \frac{\exp\,[i\theta(u)] - 1}{u}\,\alpha.$$

En prenant la limite des deux membres pour $u = 0$, il vient :

$$\mathcal{L}(X)\alpha = ih\alpha \quad (h \in R) \tag{22,5}$$

et inversement :

$$(22,6) \qquad \exp(uX)^*\alpha = \exp(ihu)\alpha.$$

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant que l'on pourrait établir par voie directe.

Corollaire. — 1° *Pour qu'une transformation infinitésimale holomorphe complète* X *de* W_n *vérifie*

$$i(X)\tau = 0$$

il faut et il suffit qu'il existe une constante réelle h telle que, pour tout $\alpha \in F$:

$$\mathfrak{L}(X)\alpha = ih\alpha.$$

2° *Si deux transformations infinitésimales* X_1 *et* X_2 *holomorphes complètes de* W_n *sont telles que :*

$$i(X_1)\tau = i(X_2)\tau$$

on a $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_2$ *sur* P(F*).

Si $h = 0$, $\mathfrak{L}(X)\alpha = 0$ implique $\mathfrak{L}(\mathfrak{J}X)\alpha = 0$ et $\mathfrak{J}X$ laisse invariant le noyau de Bergmann. C'est la situation que nous avons analysée antérieurement (voir paragraphe 15).

c) Supposons que $W_n = G/H$ (G effectif) soit un *espace homogène complexe*, supposé variété complexe normale ($F \neq 0$). Si $\mu \in G$, $\tilde{\mu}$ appartient à un groupe $\tilde{G}$ d'isométries holomorphes de P(F*) homomorphe à G. Si z, $z' \in W_n$, il existe $\mu \in G$ tel que $z' = \mu(z)$. De (21,5) on déduit :

$$\tilde{\mu}\{j(z)\} = j\{\mu(z)\}$$

soit

$$\tilde{\mu}\{j(z)\} = j(z').$$

Ainsi $\tilde{G}$ opère transitivement sur $j(W_n)$ et $j(W_n)$ peut être identifié à l'espace homogène $\tilde{G}/\tilde{H}$ (²).

Le noyau K de l'homomorphisme $G \to \tilde{G}$ est défini par le sous-groupe des éléments ν de G tels que $\tilde{\nu} = \mathrm{Id}$. Il existe alors une constante réelle $\theta(\nu)$ telle que, pour tout $\alpha \in F$:

$$(22,7) \qquad \nu^*(\alpha) = \exp(i\theta(\nu))\alpha.$$

On vérifie directement que K est sous-groupe invariant

(²) Nous étudierons ailleurs la fibration correspondante.

dans G : si $\mu \in G$ et si $\nu \in K$, on a en appliquant (22,7) à l'élément $\mu^*\alpha$ de F :

$$\mu^{-1*}\nu^*\mu^*\alpha = \exp(i\theta(\nu))\mu^{-1*}\mu^*\alpha = \exp(i\theta(\nu))\alpha.$$

On voit de même que K admet en particulier comme sous-groupe le sous-groupe J invariant dans G, défini par les éléments ν de G tels que, pour tout $\alpha \in F$:

$$\nu^*\alpha = \alpha.$$

IV. GROUPES DISCONTINUS UNIFORMES.

23. Notion de groupe discontinu uniforme.

a) Étant donné une variété complexe W_n, considérons un groupe discret D de transformations holomorphes de W_n. Ce groupe D définit dans W_n une relation d'équivalence : z et z' sont congrus modulo D s'il existe un élément μ de D tel que $z' = \mu(z)$. Nous supposons que D satisfait aux deux hypothèses suivantes :

1) Soient z, z' deux points de W_n *non congrus modulo* D. Il existe alors un voisinage U de z et un voisinage U′ de z' tels que, pour tout $\mu \in D$

$$U \cap \mu(U') = \emptyset.$$

2) Si z_0 est un point quelconque de W_n, le seul élément de D qui laisse z_0 fixe est l'identité e et il existe un voisinage V de z_0 tel que si $z \in V$ et $\mu(z) \in V (\mu \in D)$, on ait nécessairement $\mu = e$.

Lorsqu'il en est ainsi, l'espace-quotient W_n/D admet une structure naturelle de variété complexe de dimension n (sans singularité) ; W_n est un revêtement de W_n/D. Si de plus *la variété* W_n/D *est compacte*, nous dirons que *le groupe* D *est un groupe discontinu uniforme* de transformations holomorphes de W_n.

C'est le cas que nous envisageons ici.

b) A l'hypothèse 2, il est possible de substituer l'hypothèse plus générale suivante :

2′) Si z_0 est un point quelconque de W_n, le sous-groupe d'isotropie $D(z_0)$ de D relatif à z_0 *est fini* et il existe un voisinage V de z_0, *stable par* $D(z_0)$ ($\mu_0(V) \subset V$ pour tout $\mu_0 \in D(z_0)$) tel que si $z \in V$ et $\mu(z) \in V(\mu \in D)$, on ait nécessairement $\mu \in D(z_0)$.

S'il en est ainsi, l'espace-quotient W_n/D est ce qu'on nomme une V-variété (Satako, Baily). Un certain nombre de résultats établis ici s'étendent au cas des V-variétés *compactes*.

c) D étant un *groupe discontinu uniforme* de transformations holomorphes de W_n, désignons par p la projection canonique :

$$p : W_n \to W_n/D.$$

Pour tout élément μ de D, on a :

$$p \circ \mu = p. \tag{23,1}$$

En passant aux applications linéaires tangentes, il vient pour $\mu \in D$

$$p' \circ \mu' = p'. \tag{23,2}$$

24. Transformations infinitésimales holomorphes invariantes par D.

a) Soit W_n une variété complexe admettant *un groupe discontinu uniforme* D.

Supposons que X soit une transformation infinitésimale de W_n invariante par D. Si $z \in W_n$, on a pour tout $\mu \in D$

$$X[\mu(z)] = \mu' X(z) \quad (\mu \in D). \tag{24,1}$$

De (23,2) il résulte :

$$p' X[\mu(z)] = p' \mu' X(z) = p' X(z).$$

On en déduit que *le champ de vecteurs* X *est projetable sur* W_n/D *par* p. Nous désignons par $p'(X)$ sa projection. Inversement tout champ Y de W_n/D se remonte en un champ X de W_n invariant par D.

De la compacité de W_n/D, il résulte qu'*une telle transformation infinitésimale* X *est toujours complète*. En effet sur la variété compacte W_n/D, la transformation infinitésimale $p'(X)$ est complète. D'autre part supposons que pour $z_0 \in W_n$, $\exp(uX)z_0$ est défini pour $|u| < \varepsilon$. Si $\mu \in D$:

$$\exp(uX)\mu(z_0) = \mu[\exp(uX)z_0]$$

est aussi défini pour $|u| < \varepsilon$. En combinant ces deux remarques, on voit qu'il existe un nombre positif ε tel que $\exp(uX)z$ soit défini pour tout z et pour $|u| < \varepsilon$. Par suite X est complète.

b) Considérons la transformation infinitésimale $\mathfrak{J}X$ de W_n. Tout élément μ de D étant holomorphe, on a pour $z \in W_n$:

$$\mathfrak{J}_{\mu(z)} \circ \mu' = \mu' \circ \mathfrak{J}_z \quad (\mu \in D).$$

De (24,1) il résulte :

$$\mathfrak{J}_{\mu(z)} X[\mu(z)] = \mathfrak{J}_{\mu(z)} \mu' X(z) = \mu' \mathfrak{J}_z X(z)$$

et $\mathfrak{J}X$ est aussi *invariante par* D. Par suite, si X est de plus *holomorphe*, les deux transformations infinitésimales X et $\mathfrak{J}X$ sont holomorphes et complètes. Du théorème du paragraphe 15, il résulte ainsi :

THÉORÈME. — *Soit* W_n *une variété complexe admettant un groupe discontinu uniforme* D *de transformations holomorphes.*

1° *Toute transformation infinitésimale holomorphe* X *de* W_n *invariante par* D *est telle que* X *et* $\mathfrak{J}X$ *sont toutes deux holomorphes complètes.*

2° *Si* W_n *est en outre normale, toute transformation infinitésimale holomorphe* X *de* W_n *invariante par* D *est telle que :*

$$i(X)\tau = 0$$

et laisse invariante toute n-forme holomorphe de carré intégrable.

c) Supposons toujours W_n normale; D se composant de transformations holomorphes, le noyau k de Bergmann et la 2-forme τ de W_n sont invariants par D. Par passage au quotient, τ définit une 2-forme fermée $\tilde{\tau}$ de type (1, 1) sur la variété W_n/D. Aux points correspondants, τ et $\tilde{\tau}$ ont même rang.

Soit g une métrique hermitienne auxiliaire sur W_n/D ; l'image réciproque par p de $\sqrt{g}$ définit sur W_n un noyau invariant par D. Posons :

$$k = fp^*\sqrt{g} \tag{24,2}$$

f est un scalaire de W_n strictement positif invariant par D, donc est l'image réciproque $f = p^*\tilde{f}$ d'un scalaire $\tilde{f}$ strictement positif de W_n/D. Un calcul identique à celui du paragraphe 12 donne sur la variété W_n/D :

$$(24,3) \qquad \tilde{\tau} = \psi = d[(4\pi)^{-1} \mathrm{M} d \log \tilde{f}]$$

où ψ est la 2-forme de Chern associée à la métrique de W_n/D. Ainsi $\tilde{\tau}$ *appartient à la classe de Chern* $C_1(W_n/D)$.

Pour que τ^n ne soit pas identiquement nul, il faut et il suffit que $\tilde{\tau}^n$ ne le soit pas, c'est-à-dire d'après la compacité de W_n/D, que $C_1(W_n/D)^n$ soit *différent de zéro* (voir paragraphe 15, *f*). Nous obtenons ainsi :

COROLLAIRE. — *Si* W_n *normale admet un groupe discontinu uniforme* D *de transformations holomorphes et si* $C_1(W_n/D)^n \neq 0$ (*ou* $\tau^n \not\equiv 0$) *il n'existe pas sur* W_n *de transformation infinitésimale holomorphe non nulle invariante par* D.

Soit G un groupe de Lie, contenant D, de transformations holomorphes de W_n. L'algèbre de Lie du centre de G se compose de transformations infinitésimales holomorphes commutant avec D. Par suite, *sous les hypothèses du corollaire précédent, le centre de tout groupe de Lie contenant* D *de transformations holomorphes de* W_n *est discret.*

Ce résultat constitue une extension d'un théorème de Kobayashi (théorème 5-5 de [7]).

25. Classe C_1 de Chern et courbure dans le cas kählerien.

Dans la suite, nous admettons que la variété compacte W_n/D envisagée admet *une métrique kählerienne g*. Nous désignons par F la 2-forme fondamentale associée. Sur un domaine U de coordonnées locales $\{z^\alpha\}$ de W_n/D, on a :

$$[ds^2]_U = 2g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha\, dz^{\bar{\beta}}$$

et la 2-forme F s'écrit :

$$F_U = i g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}}.$$

a) A côté de l'opérateur M (voir paragraphe 12) sur les formes, nous introduisons l'opérateur $\Lambda = i(F)$ et rappelons la formule de commutation (Lichnerowicz, [12], p. 272).

$$(25,1) \qquad d\Lambda - \Lambda d = \delta \mathrm{M} - \mathrm{M}\delta$$

où d est l'opérateur de différentiation extérieure et δ celui de codifférentiation. Si β est une 1-forme sur W_n/D, on a manifestement :

$$M\delta\beta = 0, \qquad \Lambda\beta = 0$$

et il résulte de (25,1)

$$\Lambda\, d\beta = -\delta M\beta. \tag{25,2}$$

Soit η la $2n$-forme élément de volume définie sur W_n/D par la métrique. Par intégration de (25,2) sur W_n/D, on a :

$$\int_{W_n/D} (\Lambda\, d\beta)\eta = -\int_{W_n/D} (\delta M\beta)\eta.$$

Soit, d'après la formule de Stokes :

$$\int_{W_n/D} (\Lambda\, d\beta)\eta = 0 \tag{25,3}$$

pour toute 1-forme β de W_n/D.

b) Cela posé, partons de la formule (24,3) que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\tilde{\tau} = \psi + d\beta$$

où β est une 1-forme de W_n/D. On en déduit :

$$\Lambda\psi = \Lambda\tilde{\tau} - \Lambda\, d\beta.$$

Par intégration sur W_n/D et compte tenu de (25,3), il vient :

$$\int_{W_n/D} (\Lambda\psi)\eta = \int_{W_n/D} (\Lambda\tilde{\tau})\eta. \tag{25,4}$$

Sur un domaine U de coordonnées locales de W_n/D, ψ est donné ici par (voir (12,9))

$$\psi_U = (2\pi)^{-1} i R^{\alpha}_{\alpha,\lambda\bar{\mu}}\, dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}} = (2\pi)^{-1} i R_{\lambda\bar{\mu}}\, dz^{\alpha} \wedge dz^{\bar{\mu}}$$

où $R_{\lambda\bar{\mu}}$ désigne le tenseur de Ricci de la connexion kählerienne (voir Lichnerowicz [12]). On en déduit :

$$[\Lambda\psi]_U = (2\pi)^{-1} F^{\lambda\bar{\mu}} i R_{\lambda\bar{\mu}} = -(2\pi)^{-1} i g^{\lambda\bar{\mu}} i R_{\lambda\bar{\mu}} = (2\pi)^{-1} g^{\lambda\bar{\mu}} R_{\lambda\bar{\mu}}.$$

Il vient ainsi :

$$[\Lambda\psi] = (4\pi)^{-1} R \tag{25,3}$$

où R est la courbure scalaire de la variété kählerienne. De même, l'expression locale de $\tilde{\tau}$ étant la même que celle de τ :

$$[\Lambda\tilde{\tau}]_U = -(2\pi)^{-1}F^{\lambda\bar{\mu}}it_{\lambda\bar{\mu}} = -(2\pi)^{-1}g^{\lambda\bar{\mu}}t_{\lambda\bar{\mu}}.$$

Il en résulte :

$$\Lambda\tilde{\tau} = -(4\pi)^{-1}\mathrm{Tr}\, t \tag{25,6}$$

où $\mathrm{Tr}\, t$ est la trace du tenseur de Bergmann relativement à la métrique envisagée. D'après le caractère positif de t, sa trace est positive ou nulle et n'est nulle que si le tenseur de Bergmann t est nul. La relation (25,4) s'écrit ainsi :

$$\int_{W_n/D} R\eta = \int_{W_n/D} (\mathrm{Tr}\, t)\eta \leqslant 0 \tag{25,7}$$

l'égalité n'étant atteinte que si le tenseur de Bergmann de W_n est identiquement nul.

c) Supposons $C_1(W_n/D) = 0$. Il existe alors sur la variété W_n/D une 1-forme β telle que :

$$\tilde{\tau} = d\beta.$$

Il en résulte d'après (25,3) :

$$\int_{W_n/D} (\Lambda\tilde{\tau})\eta = 0$$

soit :

$$\int_{W_n/D} [\mathrm{Tr}\, t]\eta = 0$$

et par suite $t = 0$. Nous obtenons ainsi :

THÉORÈME. — *Si la variété complexe normale* W_n *admet un groupe discontinu uniforme* D *de transformations holomorphes et si* W_n/D *est kählerienne, pour que la classe de Chern* $C_1(W_n/D)$ *soit nulle, il faut et il suffit que le tenseur de Bergmann de* W_n *soit nul ou que :*

$$\int_{W_n/D} R\theta = 0.$$

26. Transformations infinitésimales holomorphes et isométries infinitésimales dans le cas kählerien.

a) Plaçons-nous dans les mêmes hypothèses : W_n normale admet un groupe discontinu uniforme D de transformations holomorphes et la variété W_n/D est kählerienne.

Soit X une transformation infinitésimale holomorphe de W_n invariante par D. Par abus de langage, nous l'identifierons avec sa projection et dirons encore que X est une transformation infinitésimale holomorphe de W_n/D. Nous avons vu que X est complète sur W_n ainsi que $\mathfrak{J}X$. Sur un domaine U de coordonnées locales de W_n, X vérifie ainsi la relation (15,5), soit :

$$(26,1) \qquad \partial_\alpha X^\alpha_U + X^\alpha_U \partial_\alpha \log k_U = 0$$

où k est le noyau de Bergmann de W_n. Or d'après (24,2) :

$$k_U = f[p^* \sqrt{g}]_U$$

où $f > 0$ est invariant par D. Sur pU, la projection de X admet toujours comme composantes les X^α_U et (26,1) peut s'écrire :

$$(26,2) \qquad \partial_\alpha X^\alpha_U + X^\lambda_U \partial_\lambda \log [\sqrt{g}]_U + X^\alpha_U \partial_\alpha \log \tilde{f} = 0.$$

Or dans la connexion kählerienne envisagée :

$$\partial_\lambda \log [\sqrt{g}]_U = (\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda})_U$$

et par suite, si ∇ est l'opération de dérivation covariante dans la connexion kählerienne :

$$\nabla_\alpha X^\alpha_U = \partial_\alpha X^\alpha_U + (\Gamma^\alpha_{\alpha\lambda})_U X^\lambda_U = \partial_\alpha X^\alpha_U + X^\lambda_U \partial_\lambda \log [\sqrt{g}]_U.$$

Pour simplifier les notations, nous posons :

$$\log \tilde{f} = \varphi$$

où φ est un scalaire *réel* de W_n/D. Nous pouvons ainsi mettre (26,2) sous la forme :

$$(26,3) \qquad \nabla_\alpha X^\alpha_U + X^\alpha_U \partial_\alpha \varphi = 0$$

ou sous la forme complexe conjuguée :

$$\nabla_{\bar{\alpha}} X^{\bar{\alpha}}_{\mathrm{U}} + X^{\bar{\alpha}}_{\mathrm{U}} \partial_{\bar{\alpha}} \varphi = 0. \tag{26,4}$$

Soit ξ *la* 1-*forme de* W_n/D *associée à* $p'(X)$ *par la dualité définie par la métrique.* Par abus de langage, nous dirons que ξ définit une transformation infinitésimale holomorphe de W_n/D ou une transformation infinitésimale holomorphe de W_n invariante par D. Par décomposition selon les types, on a :

$$\xi = \xi_{(1,0)} + \xi_{(0,1)}.$$

La relation (26,4) peut s'écrire :

$$-\nabla^{\alpha}(\xi_{\mathrm{U}})_{\alpha} = \partial^{\alpha}\varphi(\xi_{\mathrm{U}})_{\alpha}$$

soit, sous forme intrinsèque :

$$\delta'\xi_{(1,0)} = i(d\varphi)\xi_{(1,0)} \tag{26,5}$$

où d' et d'' sont les parties respectivement de type (1,0) et (0,1) de d, δ' et δ'' les parties respectivement de type $(-1,0)$ et $(0,-1)$ de δ.

b) Sur la variété kählerienne compacte W_n/D, décomposons la forme $\xi_{(1,0)}$ selon la décomposition de G. de Rham. On sait (Lichnerowicz [13], [14]) que :

$$\xi_{(1,0)} = d'\rho + h_{(1,0)} \tag{26,6}$$

où ρ est un scalaire complexe et où $h_{(1,0)}$ est une 1-forme holomorphe de W_n/D qui est la partie harmonique de $\xi_{(1,0)}$ et vérifie :

$$d'h_{(1,0)} = 0, \qquad \delta'h_{(1,0)} = 0. \tag{26,7}$$

Si l'on introduit le produit scalaire global de formes de W_n/D, il vient :

$$\langle \xi_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = \langle d'\rho, h_{(1,0)} \rangle + \langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle$$

soit d'après (26,7)

$$\langle \xi_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = \langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle$$

On obtient ainsi :

$$\langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = \int_{W_{n/D}} i(\xi) h_{(1,0)} \eta. \tag{26,8}$$

Notons que $i(\xi)h_{(1,0)}$ est une fonction holomorphe sur la variété complexe compacte W_n/D et par suite se réduit à une constante :

$$(26,9) \qquad i(\xi)h_{(1,0)} = C$$

(26,8) s'écrit donc :

$$\langle h_{(1,0)}, h_{(1,0)} \rangle = C \int_{W_n/D} \eta$$

et pour que $h_{(1,0)}$ soit nul il faut et il suffit que la constante $C = i(\xi)h_{(1,0)}$ soit nulle.

Cela posé, la relation (26,5) s'écrit puisque $\delta' h_{(1,0)} = 0$

$$\delta' \, d' \rho = i\,(d\varphi)\xi_{(1,0)}.$$

Mais sur une variété kählerienne, on a pour le Laplacien

$$\Delta = 2(d'\delta' + \delta' d').$$

Nous obtenons ainsi pour les formes ξ qui définissent une transformation infinitésimale holomorphe de W_n/D :

$$(26,10) \qquad \Delta\rho = 2i(d\varphi)\,(d'\rho + h_{(1,0)}).$$

c) Supposons en particulier que ξ définisse une isométrie infinitésimale de W_n/D. On sait (voir Lichnerowicz [14]) que pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que ρ soit imaginaire pur. Nous posons $\rho = iu$ où u est à valeurs réelles.

Si ξ est *sans partie harmonique* ($h_{(1,0)} = 0$), (26,10) s'écrit :

$$\Delta u = 2i(d\varphi)\, d'u.$$

Par passage à la relation complexe conjuguée on a :

$$\Delta u = 2i(d\varphi)\, d''u.$$

Par addition membre à membre de ces deux relations, il vient :

$$(26,11) \qquad \Delta u - i(d\varphi)\, du = 0.$$

Ainsi le scalaire réel u vérifie sur la variété compacte W_n/D l'équation à coefficients réels de type elliptique (26,11). Il atteint sur cette variété son maximum et, d'après le théorème classique d'E. Hopf, il se réduit nécessairement à une constante. Il en résulte que, sous les hypothèses faites, $\xi = 0$.

d) Nous avons supposé au *c*) que ξ est à partie harmonique nulle. Il existe un certain nombre de cas où nous sommes assurés qu'il en est ainsi. Nous désignons par G le groupe des isométries de la métrique kählerienne envisagée sur W_n/D et par G_0 la composante connexe de l'identité de G.

1° Soit H le groupe des isométries de W_n/D qui laissent invariant un point pz_0 de cette variété (groupe d'isotropie). Si ξ définit, par la dualité définie par la métrique, un élément de l'algèbre de Lie $\underline{H}$ de H, ξ s'annule en pz_0 et, d'après le *b*, est à partie harmonique nulle.

Il en résulte que $\underline{H} = 0$ et que le groupe H, discret et compact, est nécessairement fini.

2° Si $\underline{G}$ est l'algèbre de Lie de G ou G_0, on sait (voir Lichnerowicz [14]) que l'idéal dérivé $[\underline{G}, \underline{G}]$ de G est défini par des formes ξ à partie harmonique nulle. Il en résulte :

$$[\underline{G}, \underline{G}] = 0$$

et le groupe G_0 est nécessairement abélien.

3° Supposons que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(W_n/D)$ de la variété compacte W_n/D soit différente de zéro. Tout champ de vecteurs ou toute 1-forme de cette variété admet alors nécessairement un zéro et, d'après le *b*,) la constante C est nulle pour toute 1-forme ξ définissant un élément de $\underline{G}$. Il en résulte que $\underline{G} = 0$ et que par suite le groupe G discret et compact est nécessairement fini. Il en est de même trivialement si $b_1(W_n/D) = 0$.

Nous énonçons :

THÉORÈME. — *Soit* W_n *une variété complexe normale admettant un groupe discontinu uniforme* D *de transformations holomorphes. Pour* W_n/D *et pour toute métrique kählerienne de cette variété, le groupe d'isotropie* H *des isométries est fini et le plus grand groupe connexe* G_0 *d'isométries est abélien.*

Si, de plus, $b_1(W_n/D) = 0$ *ou* $\chi(W_n/D) \neq 0$, *le groupe* G_0 *est réduit à l'identité* ([3]).

([3]) *Ajouté en épreuves.* De ce théorème, il résulte par un raisonnement classique que, pour W_n/D, *le plus grand groupe connexe de transformations holomorphes est résoluble.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. L. Baily, The decomposition theorem for V. manifolds, *Amer. J. Math.*, 78 (1956), 862-888.

[2] S. Bergmann, Uber die Kernfunction eines Bereiches und ihr Verhalten am Rande, *J. Reine Angew. Math.*, 169 (1933), 1-42 et 172 (1935), 89-128.

[3] S. Bergmann, Sur les fonctions orthogonales de plusieurs variables complexes, *Mem. Sci. Math.*, Paris, 106 (1947).

[4] E. Cartan, Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11 (1935), 116-162.

[5] H. Cartan, Sur les groupes de transformations analytiques, *Actual. Scient.*, 198 (1935).

[6] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, *Coll. sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles (1953).

[7] S. Kobayashi, Geometry of bounded domains, *Transl. of Amer. Math. Soc.*, 92 (1959), 267-290.

[8] S. Kobayashi, On the automorphism group of a certain class of algebraic manifolds, *Tohoku Math. J.*, 11 (1959), 184-190.

[9] S. Kobayashi, On compact Kälher manifolds with positive definite Ricci tensor, *Ann. of Math.*, 74 (1961), 570-573.

[10] J. L. Koszul, Sur la forme hermitienne canonique des espaces homogènes complexes, *Canad. J. Math.*, 7, (1955), 562-576.

[11] A. Lichnerowicz, Espaces homogènes kähleriens, *Actes Coll. Inst. Géom. diff.*, Strasbourg (1953). Sur les groupes d'automorphismes de certaines variétés kählériennes, *C..R. Acad. Sc.*, 239 (1954), 1344.

[12] A. Lichnerowicz, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Rome (1955).

[13] A. Lichnerowicz, Sur les transformations analytiques des variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sc.*, 244 (1957), 3011 et 247 (1958), 855.

[14] A. Lichnerowicz, Isométries et transformations analytiques d'une variété kählérienne compacte, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 427-437.

[15] I. Satake, On a generalization of the notion of manifold, *Proc. Nat. Acad. U.S.A.*, 42 (1956), 359-363.

Manuscrit reçu en mars 1965.

André Lichnerowicz,
6, avenue Paul-Appell,
Paris (14e).