ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Guillaume ROND

Approximation diophantienne dans les corps de séries en plusieurs variables

Tome 56, nº 2 (2006), p. 299-308.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_2_299_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
56, 2 (2006) 299-308

APPROXIMATION DIOPHANTIENNE DANS LES CORPS DE SÉRIES EN PLUSIEURS VARIABLES

par Guillaume ROND

Résumé. — Nous montrons ici un théorème d'approximation diophantienne entre le corps des séries formelles en plusieurs variables et son complété pour la topologie de Krull.

Abstract. — We prove a theorem of diophantine approximation between the field of formal power series in several variables and its completion for the Krull topology.

1. Introduction

La motivation de cet article est d'étudier le problème de la divisibilité dans l'anneau des séries formelles ou convergentes en plusieurs variables, problème qui apparait dans l'étude des singularités d'un point de vue analytique. Si x et y sont deux éléments de $\Bbbk[[T]]$, nous avons toujours $x/y \in \Bbbk[[T]]$ ou $y/x \in \Bbbk[[T]]$. Cela vient du fait que $\Bbbk[[T]]$ est un anneau de valuation. La valuation considérée ici est la valuation $\mathfrak{m}$-adique, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de l'anneau $\Bbbk[[T]]$. Dans le cas des séries en plusieurs variables, si x et y sont deux éléments de $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$, il est en général faux que $x/y \in \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ ou $y/x \in \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$. Nous pouvons donner deux exemples des conséquences de ce problème de "manque de divisiblité".

Le premier est lié au problème des coins introduit par M. Lejeune-Jalabert ([6], voir aussi [9]), que l'on peut résumer comme suit. Soit $(X, 0)$ un germe de singularité de surface et soit $(\mathfrak{X}, 0)$ sa désingularisation minimale. Un arc sur $(X, 0)$ est la donnée d'un morphisme φ de $(\operatorname{Spec}\Bbbk[[T]], 0)$

Mots-clés : approximation diophantienne, approximation de Artin, fonction de Artin.
Classification math. : 11J25, 13B40, 14B05, 32S99.

vers $(X, 0)$, et un coin sur $(X, 0)$ est la donnée d'un morphisme φ de $(\operatorname{Spec}\Bbbk[[T_1, T_2]], 0)$ vers $(X, 0)$. Un arc peut toujours se relever sur un éclaté de $(X, 0)$ de centre régulier si son point générique n'est pas inclu dans le centre de l'éclatement (c'est-à-dire si son point générique peut se relever). Ceci découle du critère de propreté des morphismes propres, mais nous pouvons le voir aussi “à la main”. Si l'anneau des fonctions sur $(X, 0)$ est $\Bbbk\{X_1, ..., X_n\}/(f_1, ..., f_p)$, un arc φ est la donnée de n séries $x_1(T)$,..., $x_n(T)$ qui vérifient $f_i(x(T)) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant p$. Si $I = (x_1, ..., x_q)$ est le centre de l'éclatement et qu'il existe $j \leqslant q$ tel que $x_j(T) \neq 0$, nous pouvons, quitte à réordonner les x_j, supposer que

$$\operatorname{ord}(x_q(T))) \geqslant \operatorname{ord}(x_{q-1}(T)) \geqslant \cdots \geqslant \operatorname{ord}(x_1(T)) \neq +\infty$$

où ord est la valuation $\mathfrak{m}$-adique sur $\Bbbk[[T]]$. En l'origine de la carte $x_1 \neq 0$, un relevé de φ est donc donné par les séries

$$x_1(T),\, x_2(T)/x_1(T), ..., x_q(T)/x_1(T),\, x_{q+1}(T), ..., x_n(T).$$

Le problème des coins consiste à savoir si un coin en position “suffisamment générale” peut toujours se relever en un coin sur $(\mathfrak{X}, 0)$. Un coin en position "suffisamment générale" est un coin $\varphi(T_1, T_2)$ tel que l'arc $\varphi(T_1, 0)$ soit transversal au lieu singulier de $(X, 0)$. En général un coin ne se relève pas sur un éclaté, du fait que si l'on peut ordonner les $x_j(T_1, T_2)$ à l'aide de ord, la valuation $\mathfrak{m}$-adique sur $\Bbbk[[T_1, T_2]]$, nous ne pouvons effectuer la division comme précédemment pour les séries en une variable.

Le second exemple réside dans le comportement de la fonction de Artin d'un idéal I de $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]][X_1, ..., X_n]$. Si $I = (f_1(X), ..., f_p(X))$, cette fonction est la plus petite fonction numérique de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall i \in \mathbb{N}\ \forall x \in \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]^n \text{ tels que}$$

$$\Big(\forall l \quad f_l(x) \in \mathfrak{m}^{\beta(i)+1}\Big) \Longrightarrow \big(\exists\, \overline{x} \in x + \mathfrak{m}^{i+1} \text{ tel que } \forall l \quad f_l(\overline{x}) = 0\big)$$

où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\Bbbk[[T_1, ...,, T_N]]$. Son existence découle de [1]. Si $N = 1$, la fonction de Artin de I est toujours bornée par une fonction affine [2] et cela peut s'interpréter en terme d'inégalité de type Łojasiewicz sur l'espace des arcs (*cf.* [3] proposition 3.1 par exemple). La preuve de ce résultat découle du fait que nous avons une inégalité $\beta(i) \leqslant 2\beta'(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, où β (resp. β') est la fonction de Artin de I (resp. de l'idéal jacobien de I vu comme un idéal de polynômes à coefficients dans $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$). Là encore, cette majoration se montre en utilisant le fait que x divise y dans $\Bbbk[[T]]$ si $\operatorname{ord}(x) \leqslant \operatorname{ord}(y)$.

Si $N \geqslant 2$, l'inégalité précédente est fausse, et la fonction de Artin d'un idéal I comme précédemment n'est pas toujours bornée par une fonction affine [10].

Une question qui se pose alors naturellement est de savoir se qui "se passe" quand on divise dans $\mathcal{O}_N := \Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ (ou $\mathcal{O}_N := \Bbbk\{T_1, ..., T_N\}$ si $\Bbbk$ est muni d'une norme). Plus précisément nous allons comparer l'anneau $\mathcal{O}_N$ avec le complété de l'anneau de valuation qui domine $\mathcal{O}_N$ pour la valuation $\mathfrak{m}$-adique, qui lui est de la forme $\mathbb{K}[[T]]$, avec $\mathbb{K}$ un corps. Nous allons donner ici une manière d'appréhender ce problème de "manque de divisibilité", à l'aide d'un théorème d'approximation diophantienne entre $\mathbb{K}_N$, le corps des séries en plusieurs variables, et $\widehat{\mathbb{K}}_N$, son complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Dans [10], nous avons montré qu'étudier le comportement de la fonction de Artin des polynômes homogènes, à coefficients dans l'anneau de séries formelles ou convergentes en plusieurs variables sur un corps $\Bbbk$, dont le seul zéro est $(0, ..., 0)$, est équivalent à un tel problème d'approximation diophantienne.

Nous montrons ici le théorème suivant (les notations sont données à la suite) :

Théorème 1.1. — *Soit $z \in \widehat{\mathbb{K}}_N$ algébrique sur $\mathbb{K}_N$ tel que $z \notin \mathbb{K}_N$. Alors il existe $a \geqslant 1$ et $K \geqslant 0$ tels que*

$$\left| z - \frac{x}{y} \right| \geqslant K|y|^a, \ \forall x, y \in \mathcal{O}_N. \tag{1.1}$$

Nous utilisons alors ce résultat pour montrer le théorème suivant qui donne une réponse à une question qui nous a été posée par M. Hickel :

Théorème 1.2. — *Soit $P(X, Y)$ un polynôme homogène en X et Y à coefficients dans $\mathcal{O}_N$. Alors P admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.*

1.1. Notations

Soient N un entier positif non nul et $\Bbbk$ un corps ; nous utiliserons les notations suivantes :

- $\mathcal{O}_N$ est l'anneau des séries, en N variables, formelles $\Bbbk[[T_1, ..., T_N]]$ ou convergentes $\Bbbk\{T_1, ..., T_N\}$ (si $\Bbbk$ est muni d'une norme) selon le cas et indifféremment.

– $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_N$ et ord est la valuation $\mathfrak{m}$-adique sur $\mathcal{O}_N$. Cette valuation définit une norme $|\ |$ sur $\mathcal{O}_N$ en posant $|x| = e^{-\mathrm{ord}(x)}$ et cette norme induit une topologie appelée topologie $\mathfrak{m}$-adique.
– $V_N := \left\{ \frac{x}{y} \,/\, x,\, y \in \mathcal{O}_N \text{ et } \mathrm{ord}(x) \geqslant \mathrm{ord}(y) \right\}$, l'anneau de valuation discrète qui domine $\mathcal{O}_N$ pour ord. Nous noterons $\mathfrak{m}'$ son idéal maximal.
– Notons $\widehat{V}_N$ le complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique de V_N. Nous avons $\widehat{V}_N = \Bbbk\left(\frac{T_1}{T_N}, \dots, \frac{T_{N-1}}{T_N}\right)[[T_N]]$. En effet cet anneau correspond au complété de l'éclatement le long de $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{O}_N$. Nous noterons $\widehat{\mathfrak{m}}$ l'idéal maximal de cet anneau, ord l'extension de la valuation $\mathfrak{m}$-adique et $|\ |$ l'extension de la norme associée.
– $\mathbb{K}_N$ et $\widehat{\mathbb{K}}_N$ sont respectivement les corps de fractions de $\mathcal{O}_N$ et de $\widehat{V}_N$. On peut remarquer que $\widehat{\mathbb{K}}_N$ est le complété de $\mathbb{K}$ pour la norme $|\ |$.

Remarque 1.3. — Il existe une théorie de l'approximation diophantienne entre le corps des polynômes en une variable et le corps des séries en 1 variables (*cf.* [5] pour une introduction), trés similaire à celle entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. La différence fondamentale entre l'approximation diophantienne que nous traitons ici et celle entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ réside dans le fait que les éléments non nuls de $\mathbb{Z}$ sont de norme supérieure ou égale à 1, alors que les éléments non nuls de $\mathcal{O}_N$ sont tous de norme inférieure ou égale à 1. En particulier il n'existe pas de version du théorème de Liouville dans notre cadre (*cf.* remarque 1.4).

Remarque 1.4. — Dans [10], nous avons donné une suite d'éléments $x_p \in \widehat{\mathbb{K}}_N$, pour $p \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1, 2\}$, de degré 2 sur $\mathbb{K}_N$, pour lesquels il existe $u_{p,k}$ et $v_{p,k}$ tels que $\left| x_p - \frac{u_{k,p}}{v_{k,p}} \right| = C_p |v_k|^{\frac{p}{2}-1}$ et $\mathrm{ord}(v_{p,k})$ tend vers $+\infty$ avec k, où C_p est une constante qui dépend de p. Nous voyons donc que, contrairement au cas des nombres réels algébriques, la meilleure borne a telle qu'il existe K avec

$$\left| x - \frac{u}{v} \right| > K|v|^a, \ \forall u,\, v \in R$$

ne peut pas être bornée par le degré de l'extension de $\mathbb{K}_N$ par x. Il n'existe donc pas de version du théorème de Liouville pour les extensions finies de $\mathbb{K}_N$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$.

Je tiens à remercier ici M. Hickel et M. Spivakovsky pour leurs conseils et commentaires à propos de ce travail.

2. Preuve du théorème principal

Nous nous sommes inspiré là de la preuve de la proposition 5.1 de [4]. Nous utilisons en particulier le théorème d'Izumi sur les Inégalités Complémentaires Linéaires associées à l'ordre $\mathfrak{m}$-adique sur un anneau local analytiquement irréductible (*cf.* [4] et [8]). Pour cela, nous allons tout d'abord introduire les notations suivantes :

Soit $z \in \widehat{\mathbb{K}}_N \backslash \mathbb{K}_N$ algébrique sur $\mathbb{K}_N$. Soit $Q(Z)$ un polynôme irréductible de $\mathcal{O}_N[Z]$ annulant z. Ce polynôme engendre l'idéal des polynômes de $\mathbb{K}_N[Z]$ s'annulant en z. Nous pouvons écrire $Q(Z) = a_0 + a_1 Z + \cdots + a_d Z^d$ avec $d \geqslant 2$. Nous noterons $P(X, Y) := a_0 Y^d + a_1 X Y^{d-1} + \cdots + a_d X^d$. Considérons les extensions suivantes :

$$\mathcal{O}_N \longrightarrow \mathcal{O}_{N+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{N+1}/(Q(Z)) = \mathcal{O}$$

où $\mathcal{O}_{N+1} = \Bbbk[[T_1, ..., T_N, Z]]$. Notons ord la valuation $(T_1, ..., T_N, Z)$-adique sur $\mathcal{O}_{N+1}$ qui étend la valuation ord définie précédemment et $\text{ord}_{\mathcal{O}}$ l'ordre $(T_1, ..., T_N, Z)$-adique sur $\mathcal{O}$. Considérons $\overline{Q(Z)}$, le terme initial de $Q(Z)$ pour la valuation ord sur $\mathcal{O}_{N+1}$. Nous avons alors

$$Gr_{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}}\mathcal{O} = \frac{\left(Gr_{\mathfrak{m}}\mathcal{O}_N \otimes_{\Bbbk} \left(\Bbbk \oplus (Z)/(Z)^2 \oplus (Z)^2/(Z)^3 \oplus \cdots\right)\right)}{(\overline{Q(Z)})}.$$

Tout d'abord, nous allons nous ramener au cas où $\mathcal{O}$ est intègre et $\overline{Q(Z)} = Z^d$. Nous serons alors sous les hypothèses du théorème d'Izumi que nous pourrons donc utiliser.

Pour tout $u \in \mathcal{O}_N$, nous notons $Q_u(Z) = u^d a_d^{d-1} Q(Z/u a_d)$. Nous avons

$$Q_u(Z) = a_0 u^d a_d^{d-1} + a_1 u^{d-1} a_d^{d-2} Z + \cdots + Z^d.$$

Le polynôme $Q_u(Z)$ est dans $\mathcal{O}_N[Z]$, unitaire, et irréductible comme polynôme de $\mathbb{K}_N[Z]$ car $Q(Z)$ est irréductible. Donc $Q_u(Z)$ est irréductible dans $\mathcal{O}_N[Z]$. Fixons u de telle manière à ce que $\overline{Q_u(Z)} = Z^d$ et tel que $\text{ord}(u) \geqslant 1$ (il suffit de choisir u d'ordre grand). Le polynôme $Q_u(Z)$ est un polynôme distingué car $\text{ord}(u) \geqslant 1$. Donc $Q_u(Z)$ est irréductible dans $\mathcal{O}_{N+1}$ ([11], lemme 1.7) et $\mathcal{O}$ est intègre. Les zéros de $Q_u(Z)$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$ sont les $u a_d z_i$ où les z_i sont les zéros de $Q(Z)$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$. Soit z un zéro de $Q(Z)$ dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$. Si nous avons $\left|\frac{x}{y} - u a_d z\right| \geqslant K|y|^a$, $\forall x, y \in \mathcal{O}_N$, alors nous avons $\left|\frac{x}{y} - z\right| \geqslant \frac{K}{|u a_d|}|y|^a$, $\forall x, y \in \mathcal{O}_N$.

Nous pouvons donc supposer que $\mathcal{O}$ est intègre et que $\overline{Q(Z)} = Z^d$, ce que nous ferons à partir de maintenant.

Notons $z_1, ..., z_p$ les différentes solutions de $Q(Z)$ autres que z dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$, et fixons x et y dans $\mathcal{O}_N$. Notons $\overline{Z}$ l'image de Z dans $\mathcal{O}$.

Notons $r := \max\{\mathrm{ord}(z), \mathrm{ord}(z-z_k), k=1,..,p\}$ si $p \neq 0$ et $r = \mathrm{ord}(z)$ sinon. Supposons que $\mathrm{ord}((x/y)-z) > r$. En particulier $\mathrm{ord}(x)-\mathrm{ord}(y) = \mathrm{ord}(z)$. Notons $C := \mathrm{ord}(x)-\mathrm{ord}(y) = \mathrm{ord}(z)$.

Nous avons $Y^d Q\left(\frac{X}{Y}\right) = P(X,Y)$. Or $Q(\overline{Z}) = 0$ dans l'anneau $\mathcal{O}$ qui est intègre, donc $Q(T) = (T-\overline{Z})(b_{d-1}T^{d-1} + b_{d-2}T^{d-2} + \cdots + b_0)$ dans $\mathcal{O}[T]$, et donc $P(X,Y) = (X-\overline{Z}Y)(b_{d-1}X^{d-1} + b_{d-2}X^{d-2}Y + \cdots + b_0Y^{d-1})$ dans $\mathcal{O}[X,Y]$. En développant l'expression précédente nous voyons que :

$$\begin{aligned} &b_{d-1} = a_d \\ &b_i = a_{i+1} + \overline{Z}b_{i+1},\ 1 \leqslant i \leqslant d-2 \\ &b_0 = -a_0/\overline{Z}. \end{aligned}$$

D'où

$$b_i := \overline{Z}^{d-i-1}a_d + \overline{Z}^{d-i-2}a_{d-1} + \cdots + a_{i+1}.$$

Notons

$$h := b_{d-1}x^{d-1} + b_{d-2}x^{d-2}y + \cdots + b_0y^{d-1}.$$

Nous avons alors $(x-\overline{Z}y)h = P(x,y)$ dans $\mathcal{O}$. Nous pouvons écrire

$$h = \frac{P(x,y)-a_0y^d}{x} + \frac{P(x,y)-a_0y^d-a_1xy^{d-1}}{x^2}y\overline{Z} + \cdots + \frac{P(x,y)-a_0y^d-a_1xy^{d-1}-\cdots-a_{d-1}x^{d-1}y}{x^d}(y\overline{Z})^{d-1}.$$

Notons

$$f_i := \frac{P(x,y)-a_0y^d-\cdots-a_ix^iy^{d-i}}{x^{i+1}}y^i.$$

Nous avons alors $h = f_0 + f_1\overline{Z} + \cdots + f_{d-1}\overline{Z}^{d-1}$ et les f_i sont dans $\mathcal{O}_N$.

L'anneau $\mathcal{O}$ étant intègre, d'après le théorème d'Izumi [4], il existe deux constantes $A \geqslant 1$ et $B \geqslant 0$ telles que

$$A(\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(x-\overline{Z}y) + \mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(h)) + B \geqslant \mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(P(x,y)) \geqslant \mathrm{ord}(P(x,y)). \tag{2.1}$$

Deux cas se présentent alors :

Cas 1 : Soit $\mathrm{ord}(P(x,y)) \leqslant \mathrm{ord}(a_0y^d)$, et alors dans ce cas

$$\mathrm{ord}(P(x,y)) \leqslant d\,\mathrm{ord}(y) + \mathrm{ord}(a_0). \tag{2.2}$$

Cas 2 : Soit $\mathrm{ord}(P(x,y)) > \mathrm{ord}(a_0y^d)$. Soit $g = g_0 + g_1\overline{Z} + \cdots + g_{d-1}\overline{Z}^{d-1}$ avec les $g_i \in \mathcal{O}_N$. Alors l'image de g dans $Gr_{\mathfrak{m}_{\mathcal{O}}}$ est non nulle puisque $\overline{Q(Z)}$ est de degré d en Z. Donc $\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(g) = \min_i\{\mathrm{ord}(g_i)+i\}$. En particulier,

$$\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(h) \leqslant \mathrm{ord}\left(\frac{P(x,y)-a_0y^d}{x}\right) = d\,\mathrm{ord}(y) - \mathrm{ord}(x) + \mathrm{ord}(a_0).$$

D'autre part $\mathrm{ord}_{\mathcal{O}}(x-\overline{Z}y) = \min\{\mathrm{ord}(x),\, \mathrm{ord}(y)+1\}$. Donc, d'après l'équation (2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}(P(x,\, y)) \quad &\leqslant \quad Ad\,\mathrm{ord}(y) - A\,\mathrm{ord}(x) + A\,\min\{\mathrm{ord}(x),\, \mathrm{ord}(y)+1\} \\ &\qquad\qquad + A\mathrm{ord}(a_0) + B.\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\mathrm{ord}(P(x,\, y)) \leqslant Ad\,\mathrm{ord}(y) + A\mathrm{ord}(a_0) + B. \tag{2.3}$$

Conclusion. — Si $\mathrm{ord}((x/y)-z) > r$, alors il existe deux constantes, a et b telles que

$$\mathrm{ord}(P(x,\, y)) \leqslant a\,\mathrm{ord}(y) + b.$$

Or $P(x,\, y) = y^d Q(x/y)$. Nous pouvons écrire $Q(Z)$ sous la forme

$$Q(Z) = R(Z)\prod_{k=1}^{p}(Z-z_k)^{n_k}.(Z-z)^n$$

avec R un polynôme de degré q en Z qui n'admet pas de zéro dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$. Nous avons alors $\mathrm{ord}(R(x/y)) \geqslant c$ pour une constante c indépendante de x et de y car $\mathrm{ord}(x/y) = C$ est fixé. Comme $\mathrm{ord}((x/y)-z) > r$, nous avons $\mathrm{ord}((x/y)-z_k) \leqslant r$. D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{ord}(Q(x/y)) \quad &\geqslant \quad c + \sum_{k=1}^{p} n_k \min\{\mathrm{ord}(x/y),\, \mathrm{ord}(z_k)\} + n\,\mathrm{ord}((x/y)-z) \\ &\geqslant \quad c + \sum_{k=1}^{p} n_k \min\{C,\, \mathrm{ord}(z_k)\} + n\,\mathrm{ord}((x/y)-z).\end{aligned}$$

Notons $D = c + \sum_{k=1}^{p} n_k \min\{C,\, \mathrm{ord}(z_k)\}$. Nous obtenons alors

$$(a-d)\mathrm{ord}(y) + b \geqslant n\,\mathrm{ord}((x/y)-z) + D$$

où encore

$$\left|\frac{x}{y} - z\right| \geqslant K|y|^{\alpha}$$

avec $K := e^{(D-b)/n}$ et $\alpha := (a-d)/n$. Si $\mathrm{ord}((x/y)-z) \leqslant r$, nous avons alors $\left|\frac{x}{y} - z\right| \geqslant K'$ avec $K' := e^{-r}$. Dans tous les cas nous avons l'inégalité voulue. $\square$

3. Application à l'étude de fonctions de Artin

Nous pouvons alors donner le résultat suivant :

Théorème 3.1. — *Soit $P(X, Y)$ un polynôme homogène en X et Y à coefficients dans $\mathcal{O}_N$. Alors P admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine.*

Exemple 3.2. — Soit $Q(Z) \in \mathcal{O}_N[Z]$ un polynôme unitaire n'ayant aucune racine dans $\mathcal{O}_N$. Par exemple $Q(Z) = Z^d - T_1^{d+1}$ ou $Q(Z) = Z^d - (T_1^d + T_2^{d+1})$. Définissons $P(X, Y) := Y^d Q(X/Y)$. Le polynôme P est homogène en X et Y et n'admet pas d'autre solution dans $\mathcal{O}_N$ que $(0, 0)$. Un tel polynôme admet donc une fonction de Artin bornée par une fonction affine. Ceci peut s'énoncer sous la forme suivante : il existe a et b deux constantes telles que

$$\forall x, y \in \mathcal{O}_N, \quad \operatorname{ord}(P(x, y)) \leqslant a \min\{\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y)\} + b.$$

En notant $|(x, y)| := \max\{|x|, |y|\}$, ceci peut encore se réénoncer en terme d'inégalité de type Łojasiewicz : c'est-à-dire qu'il existe $K > 0$ et $a \geqslant 1$ tels que

$$|P(x, y)| \geqslant K|(x, y)|^a, \quad \forall x, y \in \mathcal{O}_N.$$

La preuve du théorème nous permet de dire que l'on peut choisir α égal à d dans le premier cas (car $Q(Z)$ n'a pas de zéro dans $\widehat{V}_N$). Dans le second cas α est strictement plus grand que d car $Q(Z)$ admet des zéro dans $\widehat{V}_N$.

Preuve. — Soit P comme dans l'énoncé et $x, y \in \mathcal{O}_N$. Quitte à renommer les variables, nous pouvons supposer que $\operatorname{ord}(y) \leqslant \operatorname{ord}(x)$. Nous avons alors

$$P(x, y) = y^d P\left(1, \frac{x}{y}\right).$$

Notons alors $Q(Y)$ le polynôme $P(1, Y)$.

i) Supposons que Q n'a pas de racine dans $\widehat{V}_N$. Comme $\widehat{V}_N$ est de la forme $\mathbb{K}[[T]]$ où $\mathbb{K}$ est un corps et T une variable formelle, d'après le théorème de Greenberg (*cf.* [2]), Q admet une fonction de Artin bornée par une constante c et dans ce cas nous obtenons alors $\operatorname{ord}\left(P\left(1, \frac{x}{y}\right)\right) < c + 1$. Donc

$$\operatorname{ord}(P(x, y)) < d \operatorname{ord}(y) + c + 1 .$$

ii) Si Q a des racines dans $\widehat{V}_N$, toujours d'après [2], Q admet une fonction de Artin bornée par une fonction affine $i \longmapsto \lambda i + \mu$ où $\lambda \leqslant d$. Remarquons que Q n'a qu'un nombre fini de racines car $\widehat{V}_N$ est intègre. Soit z un zéro de Q dans $\widehat{\mathbb{K}}_N$, plus proche de x/y que tous les autres zéros de Q pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Comme $i \longmapsto \lambda i + \mu$ majore la fonction de Artin de Q, nous avons

$$\operatorname{ord}\left(Q\left(\frac{x}{y}\right)\right) \leqslant \lambda \operatorname{ord}\left(z - \frac{x}{y}\right) + \mu.$$

- Si $z \in V_N$, alors $z = u/v$ avec u et v dans $\mathcal{O}_N$ premiers entre eux, et

$$\operatorname{ord}\left(z - \frac{x}{y}\right) = \operatorname{ord}\left(\frac{uy - vx}{vy}\right).$$

Donc

$$\operatorname{ord}(P(x, y)) \leqslant (d - \lambda)\operatorname{ord}(y) + \lambda\operatorname{ord}(uy - vx) + (\mu - \lambda\operatorname{ord}(v)).$$

D'après le lemme d'Artin-Rees, il existe $i_0 \geqslant 0$ ne dépendant que de u et v, tel que

$$(u, v) \cap \mathfrak{m}^{i+i_0} \subset (u, v)\mathfrak{m}^i \tag{3.1}$$

pour tout entier i positif. Donc si $\operatorname{ord}(uy - vx) \geqslant i + i_0$, alors il existe ε_1 et ε_2 dans $\mathfrak{m}^i$ tels que $uy - vx = u\varepsilon_1 - v\varepsilon_2$. En posant $\overline{x} = x - \varepsilon_1$ et $\overline{y} = y - \varepsilon_1$, alors $u\overline{y} - v\overline{x} = 0$ et $\overline{x} - x, \overline{y} - y \in \mathfrak{m}^i$. Nous choisirons dorénavant une constante i_0 pour laquelle l'inclusion (3.1) ci-dessus est vérifiée pour tout (u, v), où u/v est une racine de Q et u et v sont premiers entre eux. Comme Q n'a qu'un nombre fini de racines, une telle constante existe.

- Si $z \notin V_N$, d'après le théorème 1.1, il existe a et b tels que

$$\operatorname{ord}\left(z - \frac{x}{y}\right) \leqslant a \operatorname{ord} y + b.$$

Donc nous avons :

$$\operatorname{ord}(P(x, y)) \leqslant \lambda \operatorname{ord}\left(z - \frac{x}{y}\right) + d\operatorname{ord}(y) + \mu \leqslant (a\lambda + d)\operatorname{ord} y + \lambda b + \mu.$$

Nous pouvons faire le même raisonnement si $\operatorname{ord}(y) \geqslant \operatorname{ord}(x)$. Donc dans tous les cas nous avons :

$$\operatorname{ord}(P(x, y)) \leqslant A \min\{\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y)\} + B \max_{u/v \text{ zéro de } Q} \operatorname{ord}(uy - vx) + C$$

où A, B et C sont des constantes, et u/v est un zéro de Q dans $\mathbb{K}_N$ avec u et v premiers entre eux dans $\mathcal{O}_N$.

Supposons que nous ayons $\operatorname{ord}(P(x, y) \geqslant 2\max\{A, B\}(i + i_0) + C$, alors nous avons soit $\min\{\operatorname{ord}(x), \operatorname{ord}(y)\} \geqslant i + i_0 \geqslant i$, soit $\operatorname{ord}(uy - vx) \geqslant i + i_0$. Dans le premier cas, nous posons $\overline{x} = \overline{y} = 0$. Dans le second cas, d'après le lemme d'Artin-Rees, il existe $\overline{x}$ et $\overline{y}$ tels que $u\overline{y} - v\overline{x} = 0$ et $\overline{x} - x, \overline{y} - y \in \mathfrak{m}^i$. Dans tous les cas $P(\overline{x}, \overline{y}) = 0$ et $\overline{x} - x, \overline{y} - y \in \mathfrak{m}^i$. C'est-à-dire que P admet une fonction de Artin bornée par la fonction affine $i \longmapsto 2\max\{A, B\}(i + i_0) + C$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin, « Algebraic approximation of structures over complete local rings », *Publ. Math. IHES* **36** (1969), p. 23-58.

[2] M. J. Greenberg, « Rational points in henselian discrete valuation rings », *Publ. Math. IHES* **31** (1966), p. 59-64.

[3] M. Hickel, « Calcul de la fonction d'Artin-Greenberg d'une branche plane », *Pacific J. of Math.* **213** (2004), p. 37-47.

[4] S. Izumi, « A measure of integrity for local analytic algebras », *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **21** (1985), p. 719-736.

[5] A. Lasjaunias, « A survey of diophantine approximation in fields of power series », *Monatsh. Math.* **130** (2000), n° 3, p. 211-229.

[6] M. Lejeune-Jalabert, « Arcs analytiques et résolution minimales des singularités des surfaces quasihomogènes », *Lectures Notes in Math.* **777** (1980), p. 303-336.

[7] J. Nash, « Arcs structure of singularities », *Duke Math. J.* **81** (1995), p. 31-38.

[8] D. Rees, « Izumi's theorem, commutative algebra », *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **15** (1989), p. 407-416 (Berkeley, CA, 1987) Springer, New York.

[9] A. Reguera, « Image of the Nash map in terms of wedges », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), n° 5, p. 385-390.

[10] G. Rond, « Sur la linéarité de la fonction de Artin », Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) à paraîre, 2006.

[11] J.-C. Tougeron, « Idéaux de fonctions différentiables », *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* **71** (1972), p. 219, Springer-Verlag, Berlin-New York.

[12] J. J. Wavrik, « A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures », *Math. Ann.* **216** (1975), p. 127-142.

Manuscrit reçu le 30 mai 2005,
accepté le 25 juillet 2005.

Guillaume ROND
University of Toronto
Department of Mathematics
Toronto, Ontario M5S 2E4 (Canada)
rond@picard.ups-tlse.fr