ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Olivier BRINON

Représentations cristallines dans le cas d'un corps résiduel imparfait

Tome 56, nº 4 (2006), p. 919-999.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2006__56_4_919_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
56, 4 (2006) 919-999

REPRÉSENTATIONS CRISTALLINES DANS LE CAS D'UN CORPS RÉSIDUEL IMPARFAIT

par Olivier BRINON

RÉSUMÉ. — Soit K un corps de valuation discrète complet de caractéristique 0, dont le corps résiduel k_K est de caractéristique p. On suppose que k_K admet une p-base finie. Soient $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $G_K = \mathrm{Gal}\big(\overline{K}/K\big)$. On construit et étudie des anneaux de périodes p-adiques $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ qui généralisent ceux définis par J.-M. Fontaine dans le cas où le corps résiduel k_K est parfait. Ces anneaux sont munis des structures supplémentaires habituelles ainsi que d'une connexion. Ils permettent d'étendre les notions de représentation p-adique cristalline et de représentation p-adique de Rham de G_K au cas où k_K n'est pas parfait. Le résultat principal de ce travail est le fait que la catégorie des représentations p-adiques cristallines de G_K est équivalente à la catégorie des F-isocristaux filtrés sur K faiblement admissibles, ce qui généralise un théorème de P. Colmez et J.-M. Fontaine.

ABSTRACT. — Let K be a complete discrete valuation field of characteristic 0, with residue field k_K of characteristic p. We assume that k_K admits a finite p-basis. Let $\overline{K}$ be an algebraic closure of K and $G_K = \mathrm{Gal}\big(\overline{K}/K\big)$. We construct and study p-adic periods rings $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ generalizing those defined by J.-M. Fontaine when k_K is perfect. Those rings are endowed with the usual extra structures plus a connection. They allow to extend the notions of crystalline and de Rham p-adic representations of G_K to the case of non perfect k_K. The main result of this work, generalizing a theorem of P. Colmez and J.-M. Fontaine, is the fact that the category of crystalline p-adic representations of G_K is equivalent to the category of weakly admissible F-isocrystals filtered over K.

Introduction

Dans tout ce travail, p est un nombre premier et K un corps de valuation discrète de caractéristique 0 complet, de corps résiduel k_K de caractéristique p. On suppose $[k_K : k_K^p]$ fini. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et

Mots-clés : Corps locaux, périodes p-adiques, représentations galoisiennes.
Classification math. : 11F80, 11F85, 11S15, 11S20, 11S25.

on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. L'objet de ce travail est l'introduction et l'étude des représentations p-adiques de de Rham et des représentations p-adiques cristallines(1) du groupe G_K (par représentation p-adique, on entend $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K).

Dans le cas où le corps résiduel k_K est parfait, J.-M. Fontaine a construit (cf. [15]) des anneaux de périodes $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et établi (cf. [16]) une hiérarchie dans la catégorie des représentations p-adiques de G_K en définissant les notions de représentation cristalline, semi-stable et de de Rham. Rappelons que les applications les plus importantes de ces dernières sont les isomorphismes de comparaison entre la cohomologie étale p-adique et la cohomologie de de Rham des variétés propres et lisses sur K, démontrés en toute généralité par G. Faltings [10], [11], [12] et T. Tsuji [25]. Par ailleurs, un théorème de P. Colmez et J.-M. Fontaine [7, th. 4.3] implique une équivalence de catégories entre la catégorie des représentations semi-stables (et en particulier cristallines) et la catégorie des « (φ, N)-modules filtrés admissibles », ramenant l'étude de ces représentations à de l'algèbre (semi-)linéaire.

Revenons au cas général. On construit une $\mathbb{Q}_p$-algèbre topologique

$$\mathrm{B}_{\max,K} = \mathrm{A}_{\max,K}[t^{-1}]$$

(cf. [5, III.2]), où t est l'élément habituel (cf. section 2.3). Cette dernière est une K-algèbre munie d'une action de G_K. Les représentations p-adiques qui sont $\mathrm{B}_{\max,K}$-admissibles (cf. section 3.1) sont dites cristallines. Les représentations cristallines forment une sous-catégorie tannakienne de la catégorie des représentations p-adiques de G_K.

Par ailleurs, on dispose de la catégorie des F-isocristaux sur k_K. Un objet D de cette catégorie est dit filtré sur K si l'évaluation de D en un $(\mathcal{O}_K, (p), s)$ (avec $s\colon k_K \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$), qui est un K-espace vectoriel de dimension finie, est munie d'une filtration (indexée par $\mathbb{Z}$) séparée décroissante et exhaustive. Comme D est un isocristal, c'est alors le cas pour toutes les évaluations en $\mathcal{O}_K$ et les K-espaces vectoriels filtrés qui s'en déduisent sont deux à deux isomorphes. Un tel objet est appelé F-isocristal filtré sur K. On définit deux fonctions additives sur la catégorie des F-isocristaux filtrés sur K. La première, t_N, associe au F-isocristal D la valuation du déterminant du Frobenius sur l'évaluation de D en tout corps de

(1) Le cas semi-stable, très semblable, sera traité dans un article ultérieur, dans un cadre plus général.

valuation discrète complet, absolument non ramifié de corps résiduel k_K. La deuxième, t_H, associe au F-isocristal filtré D l'entier

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}} r \dim_K\big(\mathrm{Gr}^r D_{(\mathcal{O}_K,(p),s)}\big)$$

où $\mathrm{Gr}^\bullet D_{(\mathcal{O}_K,(p),s)}$ est le gradué de l'évaluation de D en $(\mathcal{O}_K,(p),s)$. Comme D est un F-isocristal, les entiers $t_N(D)$ et $t_H(D)$ ne dépendent pas du choix du corps absolument non ramifié et de s respectivement, et sont donc bien définis. Un F-isocristal filtré D est dit faiblement admissible si $t_N(D)=t_H(D)$ et $t_N(D')\geqslant t_H(D')$ pour tout sous-F-isocristal filtré D' de D. Les F-isocristaux filtrés sur K qui sont faiblement admissibles forment une sous-catégorie de la catégorie de F-isocristaux sur k_K.

Le résultat principal de cet article, généralisant le théorème de Colmez et Fontaine (évoqué plus haut) dans le cas cristallin, est que les catégories des représentations cristallines et celle des F-isocristaux filtrés sur K faiblement admissibles sont équivalentes (théorème 4.34).

Le degré $[k_K : k_K^p]$ est fini, de la forme p^d pour un entier $d\geqslant 0$. Choisissons un sous-corps fermé K_0 de K, de même corps résiduel k_K et admettant p pour uniformisante (i.e. absolument non ramifié). Son anneau des entiers est un anneau de Cohen pour k_K. Soit $\bar t_1,\dots,\bar t_d$ une p-base de k_K et $t_1,\dots,t_d$ des relèvements de $\bar t_1,\dots,\bar t_d$ dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K_0}$ de K_0.

L'extension K/K_0 est de degré e_K où e_K est l'indice de ramification absolu de K. Remarquons que, contrairement au cas où k_K est parfait, si $e_K\neq 1$, le corps K_0 n'est pas unique. L'anneau k_K est muni d'un Frobenius. On choisit un Frobenius σ sur K_0 qui relève ce dernier. Remarquons aussi que σ n'est pas unique.

Le foncteur d'évaluation en $(\mathcal{O}_{K_0},(p))$ induit une équivalence de catégories (cf. [3], [22]) entre la catégorie des F-isocristaux filtrés sur K et la catégorie des (φ,∇)-modules filtrés sur K relativement à K_0. Les objets de cette dernière sont les K_0-espaces vectoriels D de dimension finie munis d'une connexion quasi-nilpotente $\nabla\colon D\to D\otimes_{K_0}\widehat{\Omega}$ (où $\widehat{\Omega}\simeq\bigoplus_{i=1}^d K_0\,\mathrm{d}t_i$ est le module des différentielles continues de K_0), d'un Frobenius (σ-linéaire) $\varphi\colon D\to D$ horizontal, et d'une filtration indexée par $\mathbb{Z}$ décroissante, séparée et exhaustive sur $K\otimes_{K_0} D$ qui vérifie la transversalité de Griffith (cf. section 4.1). Dans ce qui suit, on utilise cette description explicite de la catégorie des F-isocristaux filtrés sur K.

On construit deux $\mathbb{Q}_p$-algèbres topologiques $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, munies d'une action de G_K. L'anneau B_{dR} est une K-algèbre munie d'une filtration décroissante séparée et exhaustive et d'une connexion intégrable $\nabla \colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \to \bigoplus_{i=1}^d \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\, \mathrm{d}t_i$. L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est une K_0-algèbre munie d'un Frobenius (σ-linéaire) φ et la connexion ∇ induit une connexion sur $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, pour laquelle le Frobenius est horizontal. Comme dans le cas classique (k_K parfait), on a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$, $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{G_K} = K_0$, et l'homomorphisme naturel $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ est injectif. Si V est une représentation p-adique, on pose

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

et on dit que V est de de Rham (resp. cristalline[(2)]) si $\dim_K(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ (resp. $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$). On obtient ainsi des sous-catégories (pleines) de la catégorie des représentations p-adiques. Par ailleurs, le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est naturellement muni d'une filtration décroissante séparée et exhaustive, ainsi que d'une connexion intégrable. De même, le K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un Frobenius φ qui est σ-linéaire et d'une connexion intégrable quasi-nilpotente tels que $\varphi\nabla = \nabla\varphi$. On a un homomorphisme injectif $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ induisant une filtration sur $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et compatible aux connexions. Le K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ muni de ses structures supplémentaires est donc un (φ, ∇)-module filtré sur K relativement à K_0 (il définit donc un F-isocristal filtré sur K).

Comme dans le cas classique, la restriction du foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ à la catégorie des représentations p-adiques cristallines est à valeurs dans la sous-catégorie de la catégorie des (φ, ∇)-modules filtrés sur K constituée de ceux qui sont « faiblement admissibles » (maintenant, on dit plutôt « admissibles »). L'existence d'une « suite exacte fondamentale » (comme dans le cas classique) assure que ce foncteur est pleinement fidèle. Finalement, on montre (en utilisant, bien sûr, le théorème de Colmez et Fontaine de façon essentielle) que c'est une équivalence de catégories (« faiblement admissible implique admissible »).

La plupart des démonstrations sont très parallèles à celles du cas classique, mais certaines difficultés apparaissent, notamment liées à l'existence d'une connexion et à la non unicité de K_0. C'est en particulier le cas pour la proposition 2.9, où l'on voit que, contrairement au cas $d = 0$, l'anneau B_{dR} n'est pas un corps si $d > 0$, la proposition 2.16 où on calcule

(2) Bien qu'en général il n'y ait pas d'inclusion entre $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{B}_{\max,K}$ et que l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ dépende du choix de K_0, cette définition coïncide avec celle du début de cette introduction (c'est l'objet de la section 3.6).

les invariants de $\mathrm{B_{dR}}$ sous G_K, la section 2.2 où on construit la connexion, la proposition 2.39 où on explicite les anneaux $\mathrm{A_{cris}}$ et $\mathrm{A_{max}}$ en termes des coordonnées t_i, la proposition 3.33 où on classifie les représentations cristallines et de de Rham de dimension 1 et bien sûr la section 3.6.

Ce travail n'est que la première étape d'un programme visant à mettre en place la théorie des représentations semi-stables sur une base qui ne serait pas nécessairement affine, et à l'introduction de coefficients. Une partie importante de ce qui suit est contenue implicitement ou explicitement dans les travaux de J.-P. Wintenberger [26], G. Faltings [10], [11], [12] et dans un travail en préparation de T. Tsuji.

Une grande partie de cet article est contenue dans ma thèse. Je remercie J.-M. Fontaine pour l'aide et les conseils qu'il m'a apportés. J'ai aussi bénéficié de nombreuses discussions avec A. Abbès : je lui en suis très reconnaissant. Enfin, j'exprime ma profonde gratitude envers T. Tsuji, pour son aide et de nombreuses remarques, qui m'ont été très utiles, ainsi qu'envers K. Kato pour m'avoir signalé un problème dans une version antérieure de ce travail. Enfin, je remercie le rapporteur pour sa lecture minutieuse et ses nombreuses suggestions.

1. Notations

On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique. C'est un corps algébriquement clos et l'action de G_K s'étend par continuité à C. Il est muni de la valuation p-adique v, normalisée par $v(p) = 1$. Si F est un sous-corps de C, on note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F (i.e. $\{x \in F,\ v(x) \geqslant 0\}$).

Notons $\overline{k}_K$ le corps résiduel de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, c'est une clôture algébrique de k_K. On note $\mathbf{k}$ la clôture radicielle de k_K dans $\overline{k}_K$. Le choix du relèvement σ de Frobenius détermine un plongement $i_\sigma\colon \mathcal{O}_{K_0} \hookrightarrow \mathrm{W}(\mathbf{k})$ compatible aux Frobenius (que N. Katz appelle le « point σ-Teichmuller » universel de $\mathcal{O}_{K_0}$, cf. [22, 2.4]). On peut le voir par approximations successives : pour n entier non nul, et $x \in \mathcal{O}_{K_0}$, notons $i_{\sigma,n}(x)$ le vecteur de Witt obtenu à partir de $i_\sigma(x)$ en remplaçant par 0 ses composantes d'indice $> n$. On a bien sûr $i_{\sigma,1}(x) = [\bar{x}]$ où $\bar{x}$ désigne l'image de x dans k_K. On a

$$i_\sigma(x) = i_{\sigma,n}(x) + p^n z$$

avec $z \in \mathrm{W}(\mathbf{k})$. Comme i_σ est compatible aux Frobenius, on a $i_\sigma(\sigma(x)) = \sigma(i_{\sigma,n}(x)) + p^n\sigma(z)$, d'où

$$i_\sigma\big(\sigma(x) - x^p\big) = \sigma\big(i_{\sigma,n}(x)\big) + p^n\sigma(z) - \big(i_{\sigma,n}(x) + p^n z\big)^p.$$

Il existe $y \in \mathcal{O}_{K_0}$ tel que $\sigma(x) - x^p = py$. On a donc $i_\sigma(\sigma(x) - x^p) \equiv p i_{\sigma,n}(y)$ mod $p^{n+1}\,\mathrm{W}(\mathbf{k})$, d'où

$$p^n \sigma(z) \equiv p i_{\sigma,n}(y) + i_{\sigma,n}(x)^p - \sigma\big(i_{\sigma,n}(x)\big) \mod p^{n+1}\,\mathrm{W}(\mathbf{k}),$$

ce qui détermine l'image de z dans $\mathbf{k}$ et donc $i_{\sigma,n+1}(x)$ de façon unique.

Fixons une clôture algébrique $\overline{\mathbb{K}}$ du corps des fractions $\mathbb{K}_0$ de $\mathrm{W}(\mathbf{k})$ et $\mathbb{C}$ le complété de $\overline{\mathbb{K}}$ pour la topologie p-adique. L'application i_σ se prolonge en un morphisme injectif de $\overline{K}$ dans $\overline{\mathbb{K}}$, d'image dense et donc en un isomorphisme de C sur $\mathbb{C}$, qu'on note encore i_σ. On note $\mathbb{K}$ l'extension composée de $\mathbb{K}_0$ et $i_\sigma(K)$ dans $\overline{\mathbb{K}}$. son corps résiduel étant parfait (c'est $\mathbf{k}$), on peut lui associer des anneaux de périodes $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \subseteq \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+ \subseteq \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ (cf. [15, II]) et $\mathbb{A}_{\max} \subseteq \mathbb{B}_{\max}^+ \subseteq \mathbb{B}_{\max}$ (cf. [5, III]).

Posons

$$R = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\overline{K}} / p\mathcal{O}_{\overline{K}}.$$

C'est un anneau parfait de caractéristique p (le Frobenius de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ est surjectif). Il est en bijection avec l'ensemble des suites $\big(x^{(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_C^{\mathbb{N}}$ telles que $\big(x^{(n+1)}\big)^p = x^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R$, alors

$$x^{(n)} = \lim_{m\to\infty} \widehat{x}_{n+m}^{\,p^m},$$

où $\widehat{x}_{n+m}$ désigne un relèvement quelconque de x_{n+m} (la limite est indépendante des choix, cf. [15, II 1.2.2]). Le Frobenius de $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}}$ étant surjectif, l'application $R \to \mathcal{O}_C\,;\ x \mapsto x^{(0)}$ est surjective. Comme $\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} = \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{C}}/p\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$, l'anneau R est de valuation, de corps des fractions algébriquement clos. C'est une $\overline{k}_K$-algèbre par l'homomorphisme

$$\alpha \longmapsto \big(\alpha, \sigma^{-1}(\alpha), \sigma^{-2}(\alpha), \dots\big).$$

On dispose d'un homomorphisme surjectif de $\mathrm{W}(\overline{k}_K)$-algèbres (cf. loc. cit.)

$$\theta\colon\ \mathrm{W}(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C, \quad (x_0, x_1, \dots) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)}.$$

On choisit des éléments $\varepsilon, \widetilde{p} \in R$ tels que $\varepsilon^{(0)} = 1$, $\varepsilon^{(1)} \neq 1$ et $\widetilde{p}^{\,(0)} = p$. De même, pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on choisit $\widetilde{t}_i \in R$ tel que $\widetilde{t}_i^{\,(0)} = t_i$. Posons

$$\xi = [\widetilde{p}] - p \in \mathrm{W}(R).$$

C'est un générateur de $\mathrm{Ker}(\theta)$.

Posons $k=\bigcap_{n=0}^{\infty} k_K^{p^n}$ le plus grand sous-corps parfait de k_K, et $W=\mathrm{W}(k)$. L'anneau $\mathcal{O}_{K_0}$ étant une W-algèbre de Cohen, c'est une W-algèbre formellement lisse (cf. [18, th. 19.8.2]). On note

$$\widehat{\Omega} = \big(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\mathbb{Z}}/p^n\Omega^1_{\mathcal{O}_{K_0}/\mathbb{Z}}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} K_0$$

le module des différentielles continues de K_0. C'est un K_0-espace vectoriel de dimension d, dont une base est $\{\mathrm{d}\log(t_i)\}_{1\leqslant i\leqslant d}$ (cf. [19, prop. 4.2]). Il est muni de la différentielle canonique $\mathrm{d}\colon K_0 \to \widehat{\Omega}$. Si D est un K_0-espace vectoriel, une *connexion* sur D designera ici un homomorphisme

$$\nabla\colon D \to D\otimes_{K_0}\widehat{\Omega} \quad \text{tel que} \quad \nabla(\lambda x) = \lambda\nabla(x) + x\otimes \mathrm{d}\lambda$$

pour $\lambda\in K_0$ et $x\in D$.

2. Anneaux de périodes et leurs propriétés.

2.1. Les anneaux B_{dR} et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$

Définition 2.1 (cf. [15, II, 1.5]). — *On note* $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ *le séparé complété de* $\mathrm{W}(R)[p^{-1}]$ *pour la topologie* $\mathrm{Ker}(\theta)$*-adique.*

C'est une $W[p^{-1}]$-algèbre qui ne dépend que de C. L'isomorphisme $i_\sigma\colon C \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ induit donc un isomorphisme $i_\sigma\colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. D'après loc. cit., $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ est donc un anneau de valuation discrète admettant l'élément

$$t = \log\big([\varepsilon]\big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\big([\varepsilon]-1\big)^n}{n}$$

comme uniformisante (la série converge dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ car $[\varepsilon]-1\in\mathrm{Ker}(\theta)$). On note

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[t^{-1}]$$

son corps des fractions. Il est muni (par fonctorialité) d'une action de G_K, et d'une filtration $\mathrm{fil}^\bullet$ décroissante séparée et exhaustive définie par $\mathrm{fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla} = t^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ pour $r\in\mathbb{Z}$.

L'homomorphisme d'anneaux $\theta\colon\ \mathrm{W}(R)\to\mathcal{O}_C$ induit un homomorphisme de $\mathcal{O}_K$-algèbres $\theta_K\colon \mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(R)\to\mathcal{O}_C$. Ce dernier est surjectif.

Définition 2.2. — *Notons* $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)$ *le séparé complété de* $\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(R)$ *pour la topologie définie par l'idéal* $\theta_K^{-1}(p\mathcal{O}_C)$ (*engendré par* p *et* $\mathrm{Ker}(\theta_K)$), *et*

$$\theta_K\colon\ \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)\longrightarrow\mathcal{O}_C$$

l'homomorphisme induit (*cf.* [15, 1.2.2]).

L'homomorphisme

$$\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K) \to \mathcal{O}_C \quad (\text{resp. } \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)/\operatorname{Ker}(\theta_K)^{m+1} \to \mathcal{O}_C)$$

est un $\mathcal{O}_K$-épaississement pro-infinitésimal (resp. infinitésimal d'ordre $\leqslant m$) formel p-adique universel de $\mathcal{O}_C$ (cf. loc. cit.). Cela signifie que

$$\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K) \to \mathcal{O}_C \quad (\text{resp. } \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)/\operatorname{Ker}(\theta_K)^{m+1} \to \mathcal{O}_C)$$

est un objet initial de la catégorie dont les objets sont les homomorphismes de $\mathcal{O}_K$-algèbres $\theta_A\colon A \to \mathcal{O}_C$ tels que A est séparé et complet pour la topologie $(\operatorname{Ker}(\theta_A)+pA)$-adique (resp. et tels que $\operatorname{Ker}(\theta_A)^{m+1}=0$), avec les morphismes évidents.

Notation 2.3. — Pour $i \in \{1,\ldots,d\}$, on pose

$$u_i = t_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{t_i}] \in \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R).$$

On note encore u_i son image dans $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)$.

On a un homomorphisme naturel $\mathrm{W}(R) \to \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})$. Comme $u_i \in \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})$ pour tout $i \in \{1,\ldots,d\}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})$ est complet pour la topologie $\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})$-adique, il donne lieu à un homomorphisme de $\mathrm{W}(R)$-algèbres

$$f\colon \mathrm{W}(R)[[u_1,\ldots,u_d]] \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0}).$$

Par ailleurs, l'homomorphisme de W-algèbres $\theta\colon \mathrm{W}(R) \to \mathcal{O}_C$ s'étend en un homomorphisme

$$\theta'_K\colon \mathrm{W}(R)[[u_1,\ldots,u_d]] \longrightarrow \mathcal{O}_C,$$

avec $\theta'_K(u_i)=0$ pour $i \in \{1,\ldots,d\}$. Bien sûr, ce dernier coïncide avec le composé $\theta_{K_0}\circ f$.

Lemme 2.4. — *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'homomorphisme f induit un isomorphisme*

$$f\colon \mathrm{W}(R)[u_1,\ldots,u_d]/(\xi,u_1,\ldots,u_d)^{m+1} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}.$$

Démonstration. — Tout d'abord, l'anneau

$$\mathrm{W}(R)[u_1,\ldots,u_d]/(\xi,u_1,\ldots,u_d)^{m+1}$$

peut être muni d'une structure de $\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre de sorte que

$$\mathrm{W}(R)[u_1,\ldots,u_d]/(\xi,u_1,\ldots,u_d)^{n} \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

est un $\mathcal{O}_{K_0}$-épaississement infinitésimal d'ordre $\leqslant m$ formel p-adique de $\mathcal{O}_C$ et f est un morphisme d'épaississements, i.e. est $\mathcal{O}_{K_0}$-linéaire. En effet, cela résulte de ce que $\mathcal{O}_{K_0}$ est une W-algèbre formellement lisse (cf. [18, th. 19.8.2]) : il existe un unique homomorphisme de W-algèbres $\mathcal{O}_{K_0} \to$

$\mathrm{W}(R)[u_1,\dots,u_d]/(\xi,u_1,\dots,u_d)^{m+1}$ relevant $\mathcal{O}_{K_0}\to\mathcal{O}_C$ et qui envoie t_i sur $[\widetilde{t_i}]+u_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$.

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{W}(R)[u_1,\dots,u_d]/(\xi,u_1,\dots,u_d)^{m+1} \arrow[d, "\theta'_K"] \\
\mathcal{O}_{K_0} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathcal{O}_C.
\end{tikzcd}$$

L'homomorphisme θ'_K est $\mathcal{O}_{K_0}$-linéaire par construction et f l'est par unicité.

Par universalité de $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}$, il existe un unique homomorphisme de $\mathcal{O}_{K_0}$-épaississements infinitésimaux

$$g\colon\ \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}\longrightarrow\mathrm{W}(R)[u_1,\dots,u_d]/(\xi,u_1,\dots,u_d)^{m+1}.$$

Par unicité, le composé $f\circ g$ est l'identité. Mais g est surjectif vu qu'il est $\mathrm{W}(R)$-linéaire et qu'on a $u_i\in\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$. C'est donc un isomorphisme, et il en est de même de f. □

L'homomorphisme $\theta_K\colon\ \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)\to\mathcal{O}_C$ induit un homomorphisme surjectif

$$\theta_K\colon\ \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)[p^{-1}]\longrightarrow C.$$

Définition 2.5. — *On note* $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ *le séparé complété de* $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)[p^{-1}]$ *pour la topologie* $\operatorname{Ker}(\theta_K)$*-adique.*

On obtient ainsi une K-algèbre munie (par fonctorialité) d'une action de G_K. L'homomorphisme θ_K s'étend en un homomorphisme K-linéaire surjectif

$$\theta_K\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\longrightarrow C.$$

L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est aussi muni d'une filtration $\mathrm{fil}^\bullet$ décroissante séparée et exhaustive définie par $\mathrm{fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+=\operatorname{Ker}(\theta_K)^r$. Notons provisoirement par $\mathrm{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ la dépendance en K de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Proposition 2.6. — *Pour tout* $m\in\mathbb{N}$*, l'homomorphisme naturel*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}\longrightarrow\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_K)^{m+1}$$

est un isomorphisme. En particulier, l'homomorphisme naturel $\mathrm{B}_{\mathrm{dR},K_0}^+\to\mathrm{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Construisons l'inverse. On dispose de l'homomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_K\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})\longrightarrow\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K).$$

Montrons que c'est un isomorphisme. Par universalité de $\mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K) \to \mathcal{O}_C$, il suffit de vérifier que l'homomorphisme composé

$$\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0}) \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

(qui n'est autre que $1 \otimes \theta_{K_0}$, déduit de $\mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0}) \to \mathcal{O}_C$ par $\mathcal{O}_K$-linéarité) est un $\mathcal{O}_K$-épaississement pro-infinitésimal formel p-adique de $\mathcal{O}_C$.

Pour le voir, il suffit de vérifier que $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})$ est séparé et complet pour la topologie définie par l'idéal I engendré par p et $\operatorname{Ker}(1 \otimes \theta_{K_0})$. Soit $\varpi \in \mathcal{O}_K$ une uniformisante de K et $\widetilde{\varpi} \in R$ tel que $\widetilde{\varpi}^{(0)} = \varpi$. Posons $\xi_\varpi = \varpi - [\widetilde{\varpi}]$. Le $\mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})$-module $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})$ est libre de base $\{\xi_\varpi^j\}_{0 \leqslant j < e}$ et I est engendré par p, $\xi_\varpi = \varpi - [\widetilde{\varpi}]$ et $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})$. L'assertion résulte alors de ce que $\xi_\varpi^{pe} \in p(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0}))$, car $\varpi^e \in p\mathcal{O}_K$.

Comme $\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})$ est nilpotent dans $\mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}$ et K est étale sur K_0, la structure de K-algèbre de

$$C = \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})$$

se relève en une structure sur $\mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}$ de façon unique :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[dr, dotted] & C \\ K^0 \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On en déduit un homomorphisme

$$K \otimes_{K_0} \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1} \longrightarrow \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}$$

i.e. $\mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_K)^{m+1} \to \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}$ d'après ce qui précède, qui par unicité est l'inverse recherché.

L'assertion concernant $\mathrm{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ résulte alors de ce que

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR},K}^+ = \varprojlim_m \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)[p^{-1}]/\operatorname{Ker}(\theta_K)^{m+1}.$$

□

Proposition 2.7. — *L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est une $\overline{K}$-algèbre.*

Démonstration. — L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+/\operatorname{fil}^1 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \simeq C$ est une $\overline{K}$-algèbre, comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est une K-algèbre et $\overline{K}$ est ind-étale sur K, la structure de $\overline{K}$-algèbre se relève de façon unique à $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $r \in \mathbb{N}_{>0}$ et donc à $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$. □

Notation 2.8. — Pour $i \in \{1,\dots,d\}$, on note encore u_i l'image dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ de
$$t_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{t_i}] \in \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R).$$

On a un homomorphisme naturel $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. Comme $u_i \in \mathrm{Ker}(\theta_K)$ pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est complet pour la topologie $\mathrm{Ker}(\theta_K)$-adique, il donne lieu à un homomorphisme de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$-algèbres
$$f\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1,\dots,u_d]] \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\,.$$
Par ailleurs, l'homomorphisme de W-algèbres $\theta\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +} \to C$ s'étend en un homomorphisme
$$\theta'_K\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1,\dots,u_d]] \longrightarrow C,$$
avec $\theta'_K(u_i) = 0$ pour $i \in \{1,\dots,d\}$, qui coïncide avec le composé $\theta_K \circ f$. On filtre $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1,\dots,u_d]]$ par les puissances de l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta'_K)$.

Proposition 2.9. — *L'homomorphisme* $f\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1,\dots,u_d]] \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ *est un isomorphisme de* $W[p^{-1}]$*-algèbres filtrées.*

Démonstration. — La compatibilité aux filtrations résulte de l'égalité $\theta'_K = \theta_K \circ f$. Comme les anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1,\dots,u_d]]$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ sont séparés et complets pour la topologie définie par leurs filtrations, il suffit de voir (cf. proposition 2.6) que l'application
$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1,\dots,u_d]]/\,\mathrm{Ker}(\theta'_K)^{m+1} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR},K_0}^{+}\,/\,\mathrm{Ker}(\theta_K)^{m+1}$$
induite par f est un isomorphisme pour tout $m \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de voir que l'homomorphisme naturel
$$f\colon\ \mathrm{W}(R)[u_1,\dots,u_d]/(\xi,u_1,\dots,u_d)^{m+1} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})/\,\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})^{m+1}$$
est un isomorphisme, ce qui n'est autre que le lemme 2.4. □

Remarque 2.10. — 1) Il résulte de la proposition précédente que l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est intègre. Par ailleurs, l'homomomorphisme naturel $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est injectif. Dans ce qui suit, on identifie $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$ à un sous-anneau de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et l' isomorphisme qui précède sera vu comme une égalité.

2) La proposition précédente montre que l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et inchangé quand on remplace K par une extension finie (ce qui a été démontré dans un cas particulier dans la proposition 2.6), et donc de façon explicite le fait, démontré dans la proposition 2.7, que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est une $\overline{K}$-algèbre.

Proposition 2.11. — (i) *On a* $\mathrm{gr}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}) \simeq C[t]$, *la graduation étant donnée par le degré* (*on note encore* t *son image dans* $\mathrm{gr}^1(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +})$).

(ii) *Pour* $i \in \{1, \ldots, d\}$, *notons* $\bar{u}_i$ *l'image de* u_i *dans* $\mathrm{gr}^1(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$. *On a*

$$\mathrm{gr}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \simeq C[t, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_d],$$

la graduation étant donnée par le degré total.

Démonstration. — (i) Comme on a un isomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, cela résulte de [15, II, 1.5].

(ii) On a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1, \ldots, u_d]]$ (proposition 2.9), donc

$$\mathrm{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \simeq \bigoplus_{j=0}^{r} \mathrm{gr}^j(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}) \otimes_W \mathrm{gr}^{r-j}\big(W[u_1, \ldots, u_d]\big).$$

Comme $\mathrm{gr}^{r-j}(W[u_1, \ldots, u_d]) = \mathrm{Sym}^{r-j}(W\bar{u}_1 \oplus \cdots \oplus W\bar{u}_d)$ (où $\bar{u}_i$ désigne l'image de u_i dans $\mathrm{gr}^1(W[u_1, \ldots, u_d])$) et $\mathrm{gr}^j(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}) \simeq Ct^j = \mathrm{Sym}^j(Ct)$ d'après le 1), on a $\mathrm{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \simeq \mathrm{Sym}^r(Ct \oplus C\bar{u}_1 \oplus \cdots \oplus C\bar{u}_d)$ et donc $\mathrm{gr}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \simeq C[t, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_d]$. $\square$

Remarque 2.12. — Comme l'a observé K. Kato, on ne peut pas, dans la construction de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, remplacer $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_K)$ par $A = \mathcal{O}_K \otimes_W \mathrm{W}(R)$. Si J désigne le noyau de la surjection canonique $\theta_K \colon \mathcal{O}_K \otimes_W \mathrm{W}(R) \to \mathcal{O}_C$, on a en effet la suite exacte

$$J/J^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/\mathrm{W}(R)}/J\Omega^1_{A/\mathrm{W}(R)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_C/\mathrm{W}(R)} \to 0.$$

Comme $\Omega^1_{\mathcal{O}_C/\mathrm{W}(R)} = 0$ et $\Omega^1_{A/\mathrm{W}(R)} \simeq \mathrm{W}(R) \otimes_W \Omega^1_{\mathcal{O}_K/W} \simeq A \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega^1_{\mathcal{O}_K/W}$ soit

$$\Omega^1_{A/\mathrm{W}(R)}/J\Omega^1_{A/\mathrm{W}(R)} \simeq \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega^1_{\mathcal{O}_K/W},$$

on a donc une surjection

$$J/J^2 \longrightarrow \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega^1_{\mathcal{O}_K/W}.$$

Mais le module $\mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega^1_{\mathcal{O}_K/W}$ est « trop gros », de sorte que J/J^2 l'est aussi et $(J/J^2)[p^{-1}]$ n'est pas le C-espace vectoriel de base $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_d\}$ (cf. proposition 2.11).

Définition 2.13. — *On pose* $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+[t^{-1}]$.

L'anneau B_{dR} est une $\overline{K}$-algèbre. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est intègre (cf. remarque 2.10), c'est une sous-$\overline{K}$-algèbre de B_{dR}. Par ailleurs, $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ étant une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$-algèbre, B_{dR} est une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$-algèbre. Notons

$$\chi \colon G_K \longrightarrow \mathbb{Z}_p^\times$$

le caractère cyclotomique. Rappelons (cf. [15, II 1.5.5]) que $g(t) = \chi(g)t$ pour tout $g \in G_K$. L'action de G_K sur $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ s'étend donc naturellement à B_{dR}. Nous allons calculer les invariants de B_{dR} pour cette action.

Notation 2.14. — On pose :

- $K^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K[\varepsilon^{(n)}]$ et $\Gamma' = \mathrm{Gal}\big(K^\infty/K\big)$: le groupe Γ' s'identifie, via le caractère cyclotomique χ, à un sous-groupe ouvert de $\mathbb{Z}_p^\times$;
- $K_\infty = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K^\infty\big[t_1^{(m)},\dots,t_d^{(m)}\big]$: c'est une extension galoisienne de K^∞ ;
- $H_K = \mathrm{Gal}\big(\overline{K}/K_\infty\big)$ et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}\big(K_\infty/K\big) \simeq G_K/H_K$.

Pour $i \in \{1,\dots,d\}$, on note γ_i l'élément de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K^\infty) \subseteq \Gamma_K$ défini par par

$$\gamma_i\big(t_j^{(m)}\big) = \varepsilon^{(m)\delta_{i,j}} t_j^{(m)}$$

pour $j \in \{1,\dots,d\}$ et $m \in \mathbb{N}$ ($\delta_{i,j}$ désignant le symbole de Kronecker de i et de j). Le choix des γ_i détermine un isomorphisme $\mathbb{Z}_p^d \simeq \mathrm{Gal}\big(K_\infty/K^\infty\big)$.

- $K_{(\infty)} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K\big[t_1^{(m)},\dots,t_d^{(m)}\big]$.

Le groupe $\mathrm{Gal}\big(K_\infty/K_{(\infty)}\big)$ s'identifie au groupe Γ'. On choisit un générateur topologique γ_0 de la partie libre de $\mathrm{Gal}\big(K_\infty/K_{(\infty)}\big)$. Le groupe Γ_K est topologiquement engendré par les γ_i pour $i \in \{0,\dots,d\}$ et le sous-groupe de torsion de $\mathrm{Gal}\big(K_\infty/K_{(\infty)}\big)$. Il s'insère dans la suite exacte de groupes

$$1 \to \mathbb{Z}_p^d \longrightarrow \Gamma_K \longrightarrow \Gamma' \to 1.$$

Remarquons que le complété du corps K_∞ pour la valuation v s'identifie, via i_σ, au complété de l'extension cyclotomique du corps $\mathbb{K}$.

Comme $\mathrm{Ker}(\theta_K)$ est stable sous l'action de G_K, il en est de même de $\mathrm{fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. L'action de G_K sur $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ induit donc une action de G_K sur $\mathrm{gr}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$. Nous allons d'abord calculer les invariants sous G_K de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et de ses tordus à la Tate.

Pour $i \in \{1,\dots,d\}$, on a $u_i = t_i\otimes 1 - 1\otimes[\widetilde{t}_i] \in \mathcal{O}_{K_0}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(R)$. Si $g \in G_K$, on a

$$g(u_i) = t_i\otimes 1 - 1\otimes\big[g(\widetilde{t}_i)\big] = t_i\otimes 1 - 1\otimes[\varepsilon]^{z_i(g)}[\widetilde{t}_i] = u_i + 1\otimes\big(1-[\varepsilon]^{z_i(g)}\big)[\widetilde{t}_i],$$

où $z_i(g) \in \mathbb{Z}_p$. L'application $g \mapsto [\varepsilon]^{z_i(g)}$ est un 1-cocycle de G_K à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ noté multiplicativement. Comme $[\varepsilon] = \exp(t)$, on a $1-[\varepsilon]^{z_i(g)} \equiv -z_i(g)t \mod t^2\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$. Dans $\mathrm{gr}^1(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$, on a donc $g(\bar{u}_i) = \bar{u}_i - t_i z_i(g)t$. Le G_K-module $\mathrm{gr}^1(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ est donc extension d'un G-module trivial isomorphe à C^d par le G-module $C(1)$.

Lemme 2.15. — *Si $i,j \in \mathbb{Z}$ avec $i \geqslant 0$, on a*

$$\mathrm{H}^0\big(G_K, t^j\,\mathrm{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } r+j \neq 0,\\ K & \text{si } r+j = 0.\end{cases}$$

Démonstration. — Rappelons que $\big(Ct^n\big)^{G_K}=0$ si $n\neq 0$ et $C^{G_K}=K$ (cf. [19, th. 1]). D'après la proposition 2.11, si $r\geqslant 0$, on a

$$\mathrm{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\simeq\bigoplus_{n=0}^{r}\Big(\bigoplus_{|\underline{n}|=n}Ct^{r-n}\prod_{i=1}^{d}\bar{u}_i^{n_i}\Big).$$

Soit

$$x=\sum_{n=0}^{r}\sum_{|\underline{n}|=n}x_{\underline{n}}t^{r+j-n}\prod_{i=1}^{d}\bar{u}_i^{n_i}\in\mathrm{H}^0\big(G_K,t^j\,\mathrm{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big),$$

avec $x_{\underline{n}}\in C$ pour tout $\underline{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{n}|=n_1+\cdots+n_d\leqslant r$.

L'action de H_K étant triviale sur t et u_i pour $i\in\{1,\dots,d\}$, on a $x_{\underline{n}}\in C^{H_K}$, pour tout $\underline{n}$. Pour $i\in\{1,\dots,d\}$ et $m\in\mathbb{N}$, on a $\gamma_0\big(t_i^{(m)}\big)=t_i^{(m)}$. Si $\lambda\in\mathbb{Z}$, on a donc

$$\big(\gamma_0^\lambda-1\big)x=\sum_{n=0}^{r}\sum_{|\underline{n}|=n}\big(\gamma_0^\lambda\chi(\gamma_0)^{(r+j-n)\lambda}-1\big)(x_{\underline{n}})t^{r+j-n}\prod_{i=1}^{d}\bar{u}_i^{n_i}$$

et donc $\big(\gamma_0^\lambda\chi(\gamma_0)^{(r+j-n)\lambda}-1\big)(x_{\underline{n}})=0$ pour tout $\underline{n}$. Si $r+j\neq n$, pour λ convenable, $\gamma_0^\lambda-\chi(\gamma_0)^{-(r+j-n)\lambda}$ est injectif sur C^{H_K} (cela résulte de [24, prop. 2 (d)] appliquée au corps $\mathbb{K}$). On a donc $x_{\underline{n}}=0$ dès que $r+j\neq n$.

Rappelons que si $g\in G_K$ et $i\in\{1,\dots,d\}$, on a $g(\bar{u}_i)=\bar{u}_i-t_iz_i(g)t$. Pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, on a

$$\gamma_i(x)=\sum_{|\underline{n}|=r+j}\gamma_i(x_{\underline{n}})\bar{u}_1^{n_1}\cdots(\bar{u}_i-t_it)^{n_i}\cdots\bar{u}_d^{n_d}.$$

Si $|\underline{n}|=r+j$, le coefficient de $t^{n_i}\bar{u}_1^{n_1}\cdots\widehat{\bar{u}_i^{n_i}}\cdots\bar{u}_d^{n_d}$ dans $\gamma_i(x)$ (qui est nul si $n_i\neq 0$ d'après ce qui précède) est $\gamma_i(x_{\underline{n}})(-t_i)^{n_i}$. Comme $t_i\neq 0$, $n_i\neq 0$ implique $x_{\underline{n}}=0$. C'est vrai pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, donc $|\underline{n}|\neq 0$ implique $x_{\underline{n}}=0$. Ainsi, $x=0$ si $r+j\neq 0$ et $x\in C^{G_K}=K$ si $r+j=0$. □

Proposition 2.16. — *On a* $\mathrm{H}^0(G_K,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})=K$.

Démonstration. — Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}=\bigcup_{j\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}}t^j\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, il suffit de montrer que l'on a $\mathrm{H}^0\big(G_K,t^j\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)=K$ pour tout $j\in\mathbb{Z}_{\leqslant 0}$. Pour $r\in\mathbb{N}$, on a la suite exacte

$$0\to t^j\,\mathrm{fil}^{r+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\longrightarrow t^j\,\mathrm{fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\longrightarrow t^j\,\mathrm{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\to 0$$

d'où la suite exacte

$$0\to\mathrm{H}^0\big(G_K,t^j\,\mathrm{fil}^{r+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)\to\mathrm{H}^0\big(G_K,t^j\,\mathrm{fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)\to\mathrm{H}^0\big(G_K,t^j\,\mathrm{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big).$$

D'après le lemme 2.15, on a $\mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \operatorname{gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big) = 0$ dès que $r + j \neq 0$: on a $\mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \operatorname{fil}^{r+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \simeq \mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \operatorname{fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)$ pour $r \neq -j$. On a donc

$$\mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \operatorname{fil}^{1-j} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) = \mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \operatorname{fil}^{-j} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big).$$

Comme $\mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \operatorname{gr}^{-j}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big) = K$ (lemme 2.15), on a

$$\mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) = \mathrm{H}^0\big(G_K, t^j \operatorname{fil}^{-j} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big) \subseteq K.$$

L'inclusion réciproque est triviale. □

Rappelons que l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \ldots, u_d]][t^{-1}]$ est intègre.

Notation 2.17. — On note C_{dR} le corps des fractions de B_{dR}.

Proposition 2.18. — *On a* $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{C}_{\mathrm{dR}}) = K$.

Démonstration. — D'après la prop. 2.9, on a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \ldots, u_d]]$. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ est un anneau de valuation discrète, admettant t pour uniformisante, $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau local régulier, donc un anneau factoriel (théorème d'Auslander et Buchsbaum, [23, th. 20.3]). Soit $x \in \mathrm{C}_{\mathrm{dR}}^{G_K} - \{0\}$. On peut écrire $x = a/b$ avec $a, b \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ premiers entre eux, $a, b \neq 0$. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est factoriel et a, b sont premiers entre eux, si $g \in G_K$, l'égalité $g(a)b = ag(b)$ implique $g(a) = v_g a$ avec $v_g \in \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)^\times$. On a alors $g(b) = v_g b$. Écrivons

$$b = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} b_{\underline{n}} \underline{u}^{\underline{n}}$$

avec $b_{\underline{n}} \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ et où $\underline{u}^{\underline{n}}$ désigne $u_1^{n_1} \cdots u_d^{n_d}$ pour $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$.

Montrons que $b = t^i b'$ avec $b' \in (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)^\times$ et $i \in \mathbb{N}$. C'est vrai si $b_{\underline{0}} \notin \operatorname{fil}^1 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$, car alors $b_{\underline{0}}$ est inversible dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$, et donc $b \in \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)^\times$.

Supposons que $b_{\underline{0}} \in \operatorname{fil}^1(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+})$. Il existe $i > 0$ tel que $b \in \operatorname{fil}^i \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $b \notin \operatorname{fil}^{i+1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Notons b^* (resp. v_g^*) l'image de b (resp. de v_g) dans $\operatorname{gr}^i(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ (resp. dans $\operatorname{gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) = C$). Par construction $b^*, v_g^* \neq 0$ (v_g est inversible). On a $\operatorname{gr}^i(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \simeq \bigoplus_{j=0}^i \big(\bigoplus_{|\underline{n}|=j} C t^{i-j} \underline{u}^{\underline{n}}\big)$ donc une écriture unique

$$b^* = \sum_{0 \leqslant |\underline{n}| \leqslant i_0} c_{\underline{n}} \underline{u}^{\underline{n}} t^{i-|\underline{n}|}$$

avec $c_{\underline{n}} \in C$ où $i_0 = \max\{|\underline{n}|,\ c_{\underline{n}} \neq 0\}$. Si $g \in G_K$, on a

$$v_g^* b^* = g(b^*) = \chi(g)^{i-i_0} t^{i-i_0} \sum_{|\underline{n}|=i_0} g(c_{\underline{n}}) \underline{u}^{\underline{n}} + \text{ termes dans } \bigoplus_{j=0}^{i_0-1} \Big(\bigoplus_{|\underline{n}|=j} C t^{i-j} \underline{u}^{\underline{n}} \Big).$$

On a donc $g(c_{\underline{n}}t^{i-i_0}) = v_g^* c_{\underline{n}} t^{i-i_0}$ dès que $|\underline{n}| = i_0$. Or parmi les $c_{\underline{n}}$ tels que $|\underline{n}| = i_0$, il y en a au moins un, $c_{\underline{n}_0}$, qui est non nul donc inversible dans C. On a alors

$$g\Big(\frac{b^*}{c_{\underline{n}_0}t^{i-i_0}}\Big) = \frac{b^*}{c_{\underline{n}_0}t^{i-i_0}}$$

pour tout $g \in G_K$, i.e. $b^*/(c_{\underline{n}_0}t^{i-i_0}) \in \mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{gr}^{i_0}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+))$. Si $i_0 > 0$, on a

$$\mathrm{H}^0\big(G_K, \mathrm{gr}^{i_0}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big) = 0$$

(lemme 2.15) soit $b^* = 0$ ce qui n'est pas. On a donc $i_0 = 0$.

Ainsi, $b = b_{\underline{0}} + \beta$ avec $b_{\underline{0}} \in t^i(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+})^\times$ et $\beta \in \mathrm{fil}^{i+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Montrons que b est divisible par t^i dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Quitte à remplacer b par $bt^i/b_{\underline{0}}$ (c'est un élément de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ car $b_{\underline{0}}/t^i \in \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}\big)^\times$), on peut supposer $b_{\underline{0}} = t^i$ et donc $v_g \equiv \chi(g)^i \mod \mathrm{fil}^1\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Montrons par récurrence sur $N > i$ que $b \in t^i\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ + \mathrm{fil}^N\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, le cas $N = i+1$ étant trivial. Supposons donc que $b \in t^i\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ + \mathrm{fil}^N\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et posons

$$M_N = \big(t^i\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ + \mathrm{fil}^N(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big)/\big(t^i\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ + \mathrm{fil}^{N+1}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\big) \simeq \bigoplus_{N-i<|\underline{n}|\leqslant N} Ct^{N-|\underline{n}|}\underline{u}^{\underline{n}}.$$

Soit $b_N = \sum_{N-i<|\underline{n}|\leqslant N} c_{\underline{n}}t^{N-|\underline{n}|}\underline{u}^{\underline{n}}$ l'image de b dans M_N. L'action de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur M_N se fait à travers $\mathrm{gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \simeq C$. Pour $g \in G_K$, l'image de $v_g b$ dans M_N est donc $\chi(g)^i b_N$.

Supposons $b_N \neq 0$. Soit alors $i_N = \max\{|\underline{n}|, c_{\underline{n}} \neq 0\}$. On a $i_N > N - i$. Pour $g \in G_K$, on a

$$g(b_N) = \sum_{N-i<|\underline{n}|\leqslant i_N} g(c_{\underline{n}})\chi(g)^{N-|\underline{n}|}t^{N-|\underline{n}|}g(\underline{u}^{\underline{n}}).$$

Mais

$$\sum_{|\underline{n}|=i_N} g(c_{\underline{n}})\chi(g)^{N-i_N}t^{N-i_N}g(\underline{u}^{\underline{n}}) - \Big(\sum_{|\underline{n}|=i_N} g(c_{\underline{n}})\chi(g)^{N-i_N}t^{N-i_N}\underline{u}^{\underline{n}}\Big)$$

appartient à $\bigoplus_{N-i<|\underline{n}|<i_N} C^{N-|\underline{n}|}\underline{u}^{\underline{n}}$. Comme $g(b) = v_g b$ pour $g \in G_K$, on a

$$g(c_{\underline{n}})\chi(g)^{N-i_N} = \chi(g)^i c_{\underline{n}}$$

soit $g(c_{\underline{n}}) = \chi(g)^{i-N+i_N}c_{\underline{n}}$ dès que $|\underline{n}| = i_N$. Comme $\big(Ct^{N-i_N-i}\big)^{G_K} = 0$ (car $N - i_N - i \neq 0$), on a $c_{\underline{n}} = 0$ dès que $|\underline{n}| = i_N$, ce qui contredit la définition de i_N. L'hypothèse $b_N \neq 0$ est donc absurde : on a $b_N = 0$, et $b \in t^i\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ + \mathrm{fil}^{N+1}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$.

On a bien $b = t^i b'$ avec $b' = \sum_{\underline{n}} b'_{\underline{n}}\underline{u}^{\underline{n}}$ et $b'_{\underline{0}} \neq 0$ i.e. $b' \in \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\big)^\times$, ce qu'on voulait.

Dans tous les cas, on a $x = a/b = t^{-i}ab'^{-1} \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}]$, i.e. $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$ (proposition 2.16), on a $\mathrm{C}_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$. □

2.2. Filtration et connexion sur B_{dR}

Rappelons que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]]$ est muni de la filtration $\mathrm{fil}^{\bullet}$ définie par $\mathrm{fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} = \mathrm{Ker}(\theta_K)^r$ pour $r \in \mathbb{N}$. L'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_K)$ est engendré par $t, u_1, \dots, u_d$. On définit une filtration sur B_{dR}, en posant

$$\mathrm{Fil}^0 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} \mathrm{fil}^n \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}u_1, \dots, t^{-1}u_d],$$
$$\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = t^r \mathrm{Fil}^0 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \quad \text{pour } r \in \mathbb{Z}.$$

On note $\mathrm{B}_{\mathrm{HT}} = \mathrm{Gr}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$ le gradué de B_{dR} pour cette filtration.

Proposition 2.19. — *La filtration* $(\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}})_{r\in\mathbb{Z}}$ *est décroissante, séparée et exhaustive, stable par G_K. De plus, on a*

$$\mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \simeq C[v_1, \dots, v_d] \quad \textit{et} \quad \mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \simeq C[v_1, \dots, v_d, t, t^{-1}],$$

où v_i désigne l'image de $t^{-1}u_i$ dans $\mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$.

Démonstration. — On a

$$\mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}u_1, \dots, t^{-1}u_d]/t\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}u_1, \dots, t^{-1}u_d]$$

(car $\mathrm{Fil}^0 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}[t^{-1}u_1, \dots, t^{-1}u_d]$). On a $u_i = t \cdot t^{-1}u_i = 0$ dans $\mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$, d'où

$$\mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \simeq (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+} / t\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+})[v_1, \dots, v_d]$$

et donc $\mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \simeq C[v_1, \dots, v_d]$ où v_i désigne l'image de $t^{-1}u_i$. Pour $r \in \mathbb{Z}$, on a $\mathrm{Gr}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \simeq t^r C[v_1, \dots, v_d]$. On a donc

$$\mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \simeq C[v_1, \dots, v_d, t, t^{-1}].$$

□

Soit $r \in \mathbb{N}$. On a

$$\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = t^r \mathrm{Fil}^0 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = t^r \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n} \mathrm{fil}^n \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \supseteq \mathrm{fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}.$$

Proposition 2.20. — *L'inclusion* $\mathrm{fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \cap \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ *est une égalité pour $r \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. — Procédons par récurrence sur r, le cas $r=0$ étant trivial vu que $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\subseteq \mathrm{Fil}^{0}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Supposons qu'on a $\mathrm{fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}=\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. L'inclusion $\mathrm{fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ donne alors lieu à un homomorphisme surjectif

$$\lambda_r\colon\ \mathrm{gr}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})\twoheadrightarrow \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)/\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big).$$

Par ailleurs, le composé $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\to \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\to \mathrm{Gr}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$ se factorise par $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\twoheadrightarrow \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)/\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)$ en

$$\mu_r\colon\ \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)/\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)\hookrightarrow \mathrm{Gr}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}).$$

Rappelons (propositions 2.11 et 2.19) que

$$\mathrm{gr}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})\simeq \mathrm{Sym}_{C}^{r}\Big(Ct\oplus\Big(\bigoplus_{i=1}^{d}Cu_i\Big)\Big)$$

où $\bar{u}_i$ désigne l'image de u_i dans $\mathrm{gr}^{1}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})$, et $\mathrm{Gr}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})\simeq t^{r}C[v_1,\dots,v_d]$, où v_i désigne l'image de $t^{-1}u_i$ dans $\mathrm{Gr}^{0}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$. Le composé

$$\mathrm{gr}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+})\xrightarrow{\lambda_r}\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)/\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big)\xrightarrow{\mu_r}\mathrm{Gr}^{r}(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$$

s'identifie à l'homomorphisme C-linéaire

$$\mathrm{Sym}_{C}^{r}\Big(Ct\oplus\big(\bigoplus_{i=1}^{d}C\bar{u}_i\big)\Big)\to t^{r}C[v_1,\dots,v_d],\quad t^{r_0}\bar{u}_1^{r_1}\cdots\bar{u}_d^{r_d}\mapsto t^{r}v_1^{r_1}\cdots v_d^{r_d}$$

pour $(r_0,\dots,r_d)\in\mathbb{N}^{d+1}$ avec $r_0+r_1+\cdots+r_d=r$. Ce dernier est injectif : λ_r est donc un isomorphisme d'où $\mathrm{fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}=\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\cap \mathrm{Fil}^{r+1}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. □

Remarque 2.21. — (a) D'après la proposition 2.20, la filtration induite par $\mathrm{Fil}^{\bullet}$ sur $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$ est la filtration $\mathrm{fil}^{\bullet}$.

(b) L'action de G_K sur les v_i. Rappelons que pour $g\in G_K$ on a $g(u_i)=u_i-t_iz_i(g)t \mod \mathrm{Fil}^{2}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, où z_i est un 1-cocycle de G_K à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$. L'action de $g\in G_K$ sur v_i est donc donnée par $g(v_i)=v_i-t_iz_i(g)$.

Posons

$$M=\big(\varprojlim_{n}(\Omega^{1}_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K})_{p^n\text{-torsion}}\big)\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p(-1).$$

Dans [10, III, Thms. 1.3, 3.3], Faltings a construit une extension canonique

$$0\to C\longrightarrow M\longrightarrow \mathcal{O}_C\otimes_{\mathcal{O}_K}\widehat{\Omega}^{1}_{\mathcal{O}_K/W}(-1)\to 0.$$

Dans [19], Hyodo pose

$$S_\infty=\varinjlim_{n}\mathrm{Sym}_{K}^{n}(M),$$

les morphismes de transition étant $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto 1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$. Cet anneau lui sert à définir la notion de représentation de Hodge-Tate dans le cas relatif (cf. loc. cit. 2.1).

Notons F la clôture algébrique de $W[p^{-1}]$ dans $\overline{K}$. Le module M et la suite exacte ci-dessus peuvent se construire à partir de la suite exacte

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_F/W} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\overline{K}} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K\mathcal{O}_F} \to 0.$$

En effet, on a un homomorphisme surjectif (cf. [13])

$$\mathcal{O}_F \otimes_{\mathbb{Z}_p} (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1) \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_F/W}, \quad a \otimes \varepsilon^{(n)} \longmapsto a \,\mathrm{d}\log(\varepsilon^{(n)})$$

dont le noyau est tué par une puissance de p. Il induit un homomorphisme

$$\mathcal{O}_C \longrightarrow \varprojlim_n (\Omega^1_{\mathcal{O}_F/W} \otimes_{\mathcal{O}_F} \mathcal{O}_{\overline{K}})_{p^n\text{-torsion}}$$

dont le noyau et le conoyau sont tués par une puissance de p.

Par ailleurs, le K-espace vectoriel $K \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega^1_{\mathcal{O}_K/W}$ a $\{\mathrm{d}\log(t_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ pour base. L'application naturelle $\Omega^1_{\mathcal{O}_K/W} \to \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/W}$ induit un homomorphisme

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_K/W} \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{K} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/W}, \quad \mathrm{d}\log(t_i) \otimes p^{-n} \longmapsto \mathrm{d}\log(t_i^{(n)})$$

donné par le choix des $t_i^{(n)}$, d'où un homomorphisme

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_K/W} \otimes_{\mathcal{O}_K} (\overline{K}/\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K}.$$

On en déduit un homomorphisme

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_K/W} \otimes_{\mathcal{O}_K} (\overline{K}/\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K\mathcal{O}_F}$$

(indépendant des choix) dont Faltings a démontré que le noyau et le conoyau sont tués par une puissance de p (cf. [10, III, Thms. 1.3, 3.3]). Il induit un homomorphisme $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_F} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C \to \varprojlim_n (\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{K}}/\mathcal{O}_K\mathcal{O}_F})_{p^n\text{-torsion}}$ dont le noyau et le conoyau sont tués par une puissance de p.

Explicitement, on a

$$M = C\frac{\mathrm{d}\log(\varepsilon)}{t} \oplus \bigoplus_{i=1}^{d} C\frac{\mathrm{d}\log\big(\widetilde{t}_i\big)}{t}$$

où $\mathrm{d}\log(\varepsilon) = (\mathrm{d}\log(\varepsilon^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathrm{d}\log(\widetilde{t}_i) = (\mathrm{d}\log(t_i^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ pour $i \in \{1,\ldots,d\}$. L'action de G_K est est semi-linéaire et vérifie

$$g\big(t^{-1}\,\mathrm{d}\log(\varepsilon)\big) = t^{-1}\,\mathrm{d}\log(\varepsilon),$$

$$g\big(t^{-1}\,\mathrm{d}\log(\widetilde{t}_i)\big) = \chi(g)^{-1}t^{-1}\,\mathrm{d}\log(\widetilde{t}_i) + \chi(g)^{-1}z_i(g)t^{-1}\,\mathrm{d}\log(\varepsilon)$$

où $z_i\colon G_K \to \mathbb{Z}_p$ est défini par $g(t_i^{(n)}) = (\varepsilon^{(n)})^{z_i(g)} t_i^{(n)}$ pour $g \in G_K$ et $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.22. — *On a des isomorphismes G_K-équivariants*

$$S_\infty \simeq \mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \quad et \quad \mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \simeq S_\infty[t, t^{-1}].$$

Démonstration. — Munissons l'anneau de polynômes $C[V_1, \dots, V_d]$ de l'action (semi-linéaire) de G_K donnée par

$$g(V_i) = \chi(g)^{-1}\big(V_i + z_i(g)\big)$$

pour $i \in \{1, \dots, d\}$. On définit une application C-linéaire suivante

$$\begin{aligned} f_n\colon C[V_1, \dots, V_d] &\longrightarrow S_\infty, \\ V_1^{n_1} \cdots V_d^{n_d} &\longmapsto \Big[\big(t^{-1}\,\mathrm{d}\log(\varepsilon)\big)^{\otimes(n-|\underline{n}|)} \otimes \big(t^{-1}\,\mathrm{d}\log\big(\widetilde{T}_1\big)\big)^{\otimes n_1} \\ &\qquad \otimes \cdots \otimes \big(t^{-1}\,\mathrm{d}\log\big(\widetilde{T}_d\big)\big)^{\otimes n_d}\Big] \end{aligned}$$

pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\underline{n}| = n_1 + \dots + n_d \leqslant n$. La description explicite de M montre que c'est un isomorphisme G_K-équivariant (remarquons qu'ici $t^{-1}\,\mathrm{d}\log(\varepsilon)$ « joue le rôle » du 1 dans la formule $[1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]$ donnant les morphismes de transition).

Un isomorphisme G_K-équivariant $f\colon S_\infty \to \mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$ est donc donné par l'homomorphisme de C-algèbres défini par (cf. remarque 2.21)

$$f(V_i) = -t_i^{-1} v_i \in C[v_1, \dots, v_d] \simeq \mathrm{Gr}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}),$$

□

Construisons une connexion sur B_{dR}. Rappelons que le module des différentielles continues $\widehat{\Omega}$ de K_0 est un K_0-espace vectoriel dont une base est $\{\mathrm{d}\log(t_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ (cf. [19, Prop. 4.2]). Il s'agit donc de se donner d dérivations de B_{dR}.

On a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1, \dots, u_d]]$. Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on note N_i l'unique $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$-dérivation continue de B_{dR}^+ telle que $N_i(u_j) = \delta_{i,j} t_i$ (où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker de i et j). On a $N_i(t) = 0$: elle s'étend en une $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$-dérivation continue de B_{dR}. On définit la connexion ∇ sur B_{dR} en posant

$$\nabla\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}, \quad x \longmapsto \sum_{i=1}^{d} N_i(x) \otimes \mathrm{d}\log(t_i).$$

On obtient ainsi une connexion intégrable (les N_i commutent deux à deux).

Proposition 2.23. — *Soit $r \in \mathbb{Z}$. On a $N_i(\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \subseteq \mathrm{Fil}^{r-1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. On a $\nabla(\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \subseteq \mathrm{Fil}^{r-1} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$ (transversalité de Griffith).*

Démonstration. — Pour $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $N_i(u_i) = u_i + 1 \otimes [\widetilde{t_i}]$ et donc $N_i(t^{-1}u_i) = t^{-1}u_i + 1 \otimes t^{-1}[\widetilde{t_i}] \in \mathrm{Fil}^{-1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Donc $N_i(\mathrm{Fil}^0\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \subseteq \mathrm{Fil}^{-1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. La première partie de la proposition résulte de $\mathrm{Fil}^r\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = t^r\,\mathrm{Fil}^0\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. La deuxième partie en résulte. □

Proposition 2.24. — *La connexion ∇ commute à l'action de G_K.*

Démonstration. — Soit $g \in G_K$ et $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. On a

$$g\big(\nabla(x)\big) = \sum_{i=1}^{d} g\big(N_i(x)\big) \otimes \mathrm{d}\log(t_i).$$

Il suffit donc de vérifier que $g(N_i(x)) = N_i(g(x))$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Par $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$-linéarité, il suffit de le vérifier pour $x = \underline{u}^{\underline{n}}$, où $\underline{u}^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^{d} u_i^{n_i}$ pour $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$. Posons $\underline{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 en i-ième position). On a $N_i(x) = n_i \underline{u}^{\underline{n} - \underline{e}_i} t_i$ d'où $g(N_i(x)) = n_i g(\underline{u}^{\underline{n} - \underline{e}_i}) t_i$. Par ailleurs, on a

$$N_i\big(g(x)\big) = \sum_{j=1}^{d} n_j g(\underline{u}^{\underline{n} - \underline{e}_j}) N_i(g(u_j)).$$

On a $u_j - t_j \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$, donc $g(u_j) - u_j \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$ d'où $N_i(g(u_j)) = N_i(u_j) = \delta_{ij} t_i$. On a bien $g(N_i(x)) = N_i(g(x))$. □

Proposition 2.25. — *L'application induite par ∇ sur K est la différentielle canonique* $\mathrm{d}\colon K \to K \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$.

Démonstration. — Soit $x \in K$. On a $g(\nabla(x)) = \nabla(g(x)) = \nabla(x)$ d'après la proposition 2.24 pour tout $g \in G_K$. On a donc $\nabla(x) \in K \otimes_{K_0} \widehat{\Omega} = \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}\big)^{G_K}$ (proposition 2.16, l'action de G_K sur $\widehat{\Omega}$ étant triviale). La proposition résulte alors du fait que $\nabla(t_i) = \nabla(u_i + [\widetilde{t_i}]) = \mathrm{d}t_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. □

Proposition 2.26. — *On a* $\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\big)^{\nabla = 0} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$ *et* $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla = 0} = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$.

Démonstration. — C'est évident pour l'assertion $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \simeq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}[[u_1, \dots, u_d]]$. La deuxième assertion résulte de la première en inversant t, sachant que ce dernier est horizontal. □

Lemme 2.27. — *Le noyau de la différentielle* $\mathrm{d}\colon \mathcal{O}_{K_0} \to \widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K_0}}$ *est W.*

Démonstration. — Notons σ_0 l'unique relèvement à $\mathcal{O}_{K_0}$ du Frobenius de k_K tel que $\sigma_0(t_i) = t_i^p$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

L'anneau $\mathcal{O}_{K_0}$ est libre sur $\sigma_0(\mathcal{O}_{K_0})$, et une base est donnée par $\underline{t}^{\underline{j}} = t_1^{j_1} \cdots t_d^{j_d}$ pour $\underline{j} = (j_1, \dots, j_d)$ avec $0 \leqslant j_i < p$. En effet, l'application naturelle

$$\bigoplus_{\underline{j}} \mathcal{O}_{K_0} \longrightarrow \mathcal{O}_{K_0}, \quad (x_{\underline{j}}) \longmapsto \sum_{\underline{j}} \sigma_0(x_{\underline{j}}) \underline{t}^{\underline{j}}$$

est un isomorphisme car c'en est un modulo p (car $\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_d$ est une p-base de k_K) et parce que $\mathcal{O}_{K_0}$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, sans p-torsion.

Soit $x \in \mathcal{O}_{K_0}$ tel que $\mathrm{d}x = 0$. Écrivons $x = \sum_{\underline{j}} \sigma_0(x_{\underline{j}}) \underline{t}^{\underline{j}}$. On a

$$\mathrm{d}x = \sum_{\underline{j}} \mathrm{d}\sigma_0(x_{\underline{j}}) \underline{t}^{\underline{j}} + \sigma_0(x_{\underline{j}})\, \mathrm{d}\underline{t}^{\underline{j}}.$$

Mais on peut écrire

$$\mathrm{d}\sigma_0(x_{\underline{j}}) = \sum_{i=1}^{d} N_i\big(\sigma_0(x_{\underline{j}})\big) \underline{t}^{\underline{j}}\, \mathrm{d}\log(t_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\underline{t}^{\underline{j}} = \sum_{i=1}^{d} j_i \underline{t}^{\underline{j}}\, \mathrm{d}\log(t_i).$$

Comme $\sigma_0(t_i) = t_i^p$, on a $N_i \sigma_0 = p \sigma_0 N_i$, et donc

$$\mathrm{d}x = \sum_{\underline{j}} \sum_{i=1}^{d} \sigma_0\big(pN_i(x_{\underline{j}}) + j_i x_{\underline{j}}\big) \underline{t}^{\underline{j}}\, \mathrm{d}\log(t_i) = 0.$$

D'après ce qui précède, on a donc $pN_i(x_{\underline{j}}) + j_i x_{\underline{j}} = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et tout $\underline{j}$. Si $\underline{j} \neq \underline{0}$, il existe $i \in \{1, \dots, d\}$ tel que $0 < j_j < p$: on a $v_p(x_{\underline{j}}) = v_p(pN_i(x_{\underline{j}})) \geqslant 1 + v_p(x_{\underline{j}})$, d'où $x_{\underline{j}} = 0$. Ainsi $x = \sigma_0(x_{\underline{0}})$.

On en déduit que $x \in \sigma_0^n(\mathcal{O}_{K_0})$ pour tout n. On conclut en observant que

$$\bigcap_n \sigma_0^n(\mathcal{O}_{K_0}) = W,$$

ce qui résulte du fait que $\bigcap_n k_K^p = k$. □

Comme $\overline{K}$ est ind-étale sur K_0, la différentielle canonique $\mathrm{d}\colon K_0 \to \widehat{\Omega}$ induit une différentielle $\mathrm{d}\colon \overline{K} \to \overline{K} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$.

Proposition 2.28. — *On a* $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}\colon \overline{K} \to \overline{K} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}) = F$ *(où F désigne la fermeture algébrique de $W[p^{-1}]$ dans $\overline{K}$) et donc*

$$K^{\nabla=0} = \mathrm{Ker}(\mathrm{d}\colon K \to K \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}) = K \cap F.$$

Démonstration. — Soit $\alpha \in \overline{K}$ tel que $\mathrm{d}\alpha = 0$ i.e. $N_i \alpha = 0$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$. Quitte à multiplier α par une puissance de p, on peut supposer $\alpha \in \mathcal{O}_{\overline{K}}$. Soit $\alpha^n + \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha^{n-j} = 0$ (avec $\lambda_j \in \mathcal{O}_{K^0}$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$) une relation de dépendance intégrale de degré minimal. On a alors $\sum_{j=1}^n N_i(\lambda_j) \alpha^{n-j} = 0$ et donc $N_i(\lambda_j) = 0$ d'où $\lambda_j \in W$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$ (lemme 2.27), et donc $\alpha \in \mathcal{O}_F$. La réciproque est évidente. □

Notation 2.29. — On note :

- $K^\nabla = K^{\nabla=0}$; c'est une extension finie de $W[p^{-1}]$.
- $K_0^\nabla = K_0^{\nabla=0}$; c'est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans la fermeture algébrique de k dans $k_K = \mathcal{O}_{K_0}/p\mathcal{O}_{K_0}$ (fermeture qui est une extension finie de k).

Comme l'extension K/K_0 est totalement ramifiée, il en est de même de $K^\nabla/K_0^\nabla = K^\nabla \cap K_0$.

Corollaire 2.30. — *On a* $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^\nabla) = K^\nabla$.

Démonstration. — On a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^\nabla = \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla=0}$ et comme ∇ commute à l'action de G_K (proposition 2.24), on a $\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^\nabla\big)^{G_K} = \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K}\big)^{\nabla=0} = K^\nabla$ (proposition 2.16). □

Proposition 2.31. — *L'application* $u_{\mathrm{dR}}\colon K \otimes_{K^\nabla} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^\nabla \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ *est injective.*

Démonstration. — Supposons u_{dR} non injective. Soit $x = \sum_{j=1}^r k_j \otimes b_j$ avec $k_j \in K$, $b_j \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^\nabla$ et $r \geqslant 1$ minimal pour les propriétés $x \neq 0$ et $u_{\mathrm{dR}}(x) = 0$. En particulier, $k_j \neq 0$ et $b_j \neq 0$ pour $j \in \{1, \ldots, r\}$. Quitte à diviser par k_r, on peut supposer $k_r = 1$. On a $\sum_{j=1}^r k_j b_j = 0$ donc

$$N_i\Big(\sum_{j=1}^r k_j b_j\Big) = \sum_{j=1}^r N_i(k_j) b_j = 0$$

pour $i \in \{1, \ldots, d\}$. Comme $N_i(k_r) = N_i(1) = 0$, on a $\sum_{j=1}^{r-1} N_i(k_j) b_j = 0$. Par minimalité de r et le fait que $b_j \neq 0$ pour $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, on a donc $N_i(k_j) = 0$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, i.e. $k_j \in K^{\nabla=0} = K^\nabla$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$. On conclut en utilisant l'injectivité de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^\nabla \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ (proposition 2.9). □

2.3. Les anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^\nabla$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$.

Rappelons qu'au corps $\mathbb{K}$ (dont le corps résiduel est parfait) sont associés des anneaux de périodes $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^+ \subseteq \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ (cf. [15, II]), $\mathbb{A}_{\max} \subseteq \mathbb{B}_{\max}^+ \subseteq \mathbb{B}_{\max}$ et $\mathbb{A}_{\max,\mathbb{K}} \subseteq \mathbb{B}_{\max,\mathbb{K}}^+ \subseteq \mathbb{B}_{\max,\mathbb{K}}$ (cf. [5, III.2]).

Définition 2.32. — *(cf.* [15, II 2.3] *et* [5, III.2], [6, 7.5]*) On note :*

- $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^\nabla$ *le séparé complété, pour la topologie* p*-adique, de l'enveloppe à puissances divisées de* $\mathrm{W}(R)$ *relativement à l'idéal* $\mathrm{Ker}(\theta)$*, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par* p*.*

• $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$ *le séparé complété, pour la topologie* p*-adique, de la sous-*$\mathrm{W}(\mathrm{R})$*-algèbre de* $\mathrm{W}(\mathrm{R})[p^{-1}]$ *engendrée par* $p^{-1}\operatorname{Ker}(\theta)$.

Ce sont des W-algèbres qui ne dépendent que de C. L'isomorphisme $i_\sigma\colon C \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ induit donc les isomorphismes $i_\sigma\colon\ \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et $i_\sigma\colon\ \mathrm{A}^{\nabla}_{\max} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{\max}$. Ils sont munis (par fonctorialité) d'une action de G_K et d'un Frobenius φ qui est σ-linéaire (σ désignant ici le Frobenius de W).

Si $x \in \mathrm{W}(\mathrm{R})$ appartient à $\operatorname{Ker}(\theta)$ et $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on peut écrire $x^{[n]} = p^{[n]}(x/p)^n \in \mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$ (où on note $x^{[n]}$ la puissance divisée n-ième de x). Il existe donc un homomorphisme naturel $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on a un homomorphisme naturel de la sous-$\mathrm{W}(\mathrm{R})$-algèbre de $\mathrm{W}(\mathrm{R})[p^{-1}]$ engendrée par $p^{-1}\operatorname{Ker}(\theta)$ dans $\mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}} / \operatorname{Ker}(\theta)^n$. Comme ce dernier est un C-espace vectoriel de dimension finie donc complet pour la valuation v (proposition 2.11), il se prolonge en un homomorphisme $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max} \to \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}} / \operatorname{Ker}(\theta)^n$. Ils sont compatibles et donnent lieu à un homomorphisme $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max} \to \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}$. Bien sûr, le composé $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\max} \to \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}$ est l'homomorphisme naturel de [15, II 2.3].

Proposition 2.33. — *Les homomorphismes* $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$ *et* $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max} \to \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}$ *sont injectifs.*

Démonstration. — Montrons que $h\colon\ \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}$ est injectif (remarque : on dispose d'isomorphismes $i_\sigma\colon\ \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ et $i_\sigma\colon\ \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$; via i_σ, l'homomorphisme h s'identifie à l'application naturelle de $\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ dans $\mathbb{B}^{+}_{\mathrm{dR}}$. La preuve de l'injectivité de cette dernière dans [15, II, 4.1.2] étant incomplète, on en donne ici une autre).

On a un homomorphisme canonique $\mathrm{W}(R) \to \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ et donc un homomorphisme $\mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}} \to (\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}[p^{-1}])\hat{}$ (où $(\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}[p^{-1}])\hat{}$ est le séparé complété de $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}[p^{-1}]$ pour la topologie $\operatorname{Ker}(\theta)$-adique). Cet homomorphisme est un isomorphisme. Il s'agit donc de montrer que $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ est séparé pour la topologie définie par les sous-groupes $\big\{h^{-1}(\operatorname{Ker}(\theta)^n)\big\}_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$.

Si n est un entier non nul, on note $J^{[n]}$ l'adhérence (pour la topologie p-adique) de l'idéal de $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ engendré par les $\xi^{[r]}$ pour $r \geqslant n$. On a

$$J^{[1]} = h^{-1}\big(\operatorname{Ker}(\theta)\big) \quad \text{et} \quad J^{[n]} \subseteq h^{-1}\big(\operatorname{Ker}(\theta)^n\big).$$

Montrons par récurrence qu'on a égalité pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Soit $n > 1$, supposons que $J^{[n-1]} = h^{-1}(\operatorname{Ker}(\theta)^{n-1})$ et soit $x \in h^{-1}(\operatorname{Ker}(\theta)^n)$. Alors

$$x = \xi^{[n-1]}x_0 + x_1$$

avec $x_0 \in \mathrm{W}(R)$ et $x_1 \in J^{[n]}$. On a alors $h(\xi^{[n-1]}x_0) \in \operatorname{Ker}(\theta)^n$, i.e. $x_0 \in \operatorname{Ker}(\theta) = \xi\,\mathrm{W}(R)$, soit $x \in \xi\xi^{[n-1]}\,\mathrm{W}(R) + J^{[n]} = J^{[n]}$. On a donc $h^{-1}(\operatorname{Ker}(\theta)^n) = J^{[n]}$.

L'anneau $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} / p\, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ s'identifie à $(R/(\widetilde{p}^p))[\delta_0, \delta_1, \ldots]/(\delta_m^p)_{m\geqslant 0}$ où δ_m est l'image de $\gamma^{m+1}(\xi)$ (γ désignant l'application $x \mapsto x^p/p$). Si $N \in \mathbb{N}_{>0}$, l'image de $J^{[p^N]}$ dans $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} / p\, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ est incluse dans l'idéal engendré par les δ_m pour $m \geqslant N-1$. On a donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_{>0}} J^{[n]} \subseteq p\, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$.

L'anneau $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ étant sans p-torsion, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_{>0}} J^{[n]} \subseteq p^m\, \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ pour tout $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Comme $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ est séparé pour la topologie p-adique, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_{>0}} J^{[n]} = \{0\}$, ce qu'on voulait.

On montre de façon analogue l'injectivité de $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max} \to \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}$, en remarquant que la topologie induite sur $\mathrm{A}_{\max}$ par la topologie $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique sur $\mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}$ est la topologie I-adique, où $I = p^{-1}\xi\, \mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$, et que $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max} / p\, \mathrm{A}^{\nabla}_{\max} \simeq (\mathrm{R}/(\widetilde{p}))[p^{-1}\xi]$ est séparé pour la topologie I-adique. □

Désormais, on identifie $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ à un sous-anneau de $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$ et $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$ à un sous-anneau de $\mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{dR}}$, et les isomorphismes qui précèdent seront considéres comme des égalités.

L'homomorphisme θ s'étend à $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ et à $\mathrm{A}^{\nabla}_{\max}$. De plus $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ contient l'élément

$$t = \log\big([\varepsilon]\big) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(n-1)!\, \big([\varepsilon]-1\big)^{[n]}$$

(la série converge dans $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ car $[\varepsilon]-1 \in \mathrm{Ker}(\theta)$ qui est un idéal à puissances divisées dans $\mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$). On note :

- $\mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{cris}} = \mathrm{A}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}[p^{-1}]$ et $\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}} = \mathrm{B}^{\nabla+}_{\mathrm{cris}}[t^{-1}]$,
- $\mathrm{B}^{\nabla+}_{\max} = \mathrm{A}^{\nabla}_{\max}[p^{-1}]$ et $\mathrm{B}^{\nabla}_{\max} = \mathrm{B}^{\nabla+}_{\max}[t^{-1}]$.

D'après [15, II.2], on a $g(t) = \chi(g)t$ pour $g \in G_K$ et $\varphi(t) = pt$. Ceci permet d'étendre l'action de G_K et de φ à $\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ et à $\mathrm{B}^{\nabla}_{\max}$.

L'homomorphisme surjectif de W-algèbres $\theta\colon \mathrm{W}(R) \to \mathcal{O}_C$ induit un homomorphisme surjectif de $\mathcal{O}_{K_0}$-algèbres $\theta_{K_0}\colon \mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R) \to \mathcal{O}_C$.

Définition 2.34. — *On note :*

- $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ *le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R)$ relativement à l'idéal* $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$, *compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p ;*
- $\mathrm{A}_{\max}$ *le séparé complété, pour la topologie p-adique, de la sous-$\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}}$* $\mathrm{W}(\mathrm{R})$*-algèbre de $K_0 \otimes_{\mathbb{Z}}$* $\mathrm{W}(\mathrm{R})$ *engendrée par p^{-1}* $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$.

On obtient ainsi des $\mathcal{O}_{K_0}$-algèbres munies (par fonctorialité) d'une action de G_K et d'un Frobenius φ qui est σ-linéaire (σ désignant ici le Frobenius de $\mathcal{O}_{K_0}$), parce que l'idéal engendré par p et $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ dans $\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})$

est stable par φ. L'homomorphisme θ_{K_0} s'étend à $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et à $\mathrm{A}_{\max}$. Notons provisoirement $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0}$ (resp. $\mathrm{A}_{\max,K_0}$) la dépendance en K_0 de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathrm{A}_{\max}$).

Remarque 2.35 (interprétation cristalline de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$*).* — Soit n un entier. Pour tout schéma X, on note X_n sa réduction modulo p^n. Si $X \to Y$ est un morphisme de schémas, on pose (cf. [17, II 1.2])

$$\mathscr{O}_n^{\mathrm{cris}}(X \,|\, Y) = \mathrm{H}^0\big((X_n \,|\, Y_n)_{\mathrm{cris}}, \textit{faisceau structural}\big)$$

où l'idéal à puissances divisées considéré sur Y_n est l'idéal engendré par p. Si Λ_0 est un anneau commutatif et Λ une Λ_0-algèbre, on dénote $\mathscr{O}_n^{\mathrm{cris}}(\Lambda \,|\, \Lambda_0)$ la $\Lambda_0/p^n\Lambda_0$-algèbre $\mathscr{O}_n^{\mathrm{cris}}(\mathrm{Spec}(\Lambda) \,|\, \mathrm{Spec}(\Lambda_0))$.

Alors $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ s'identifie à $\mathscr{O}_n^{\mathrm{cris}}(\mathscr{O}_{\overline{K}} \,|\, \mathscr{O}_{K_0})$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ s'identifie à $\mathscr{O}_n^{\mathrm{cris}}(\mathscr{O}_{\overline{K}} \,|\, W)$.

Proposition 2.36. — *Si L est une extension non ramifiée de K_0, les homomorphismes naturels*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{cris},L} \quad \textit{et} \quad \mathrm{A}_{\max,K_0} \longrightarrow \mathrm{A}_{\max,L}$$

sont des isomorphismes.

Démonstration. — Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},L}$ sont séparées et complets pour la topologie p-adique, il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, l'homomorphisme induit

$$j_n \colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{cris},L} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris},L}$$

est un isomorphisme. L'anneau $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},L} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris},L}$ (resp. $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0}$) est un $\mathscr{O}_L$-épaississement (resp. $\mathscr{O}_{K_0}$-épaississement) à puissances divisées universel d'ordre $\leqslant n$ (cf. [15, II 2.2]). Il suffit donc de voir que la structure de $\mathscr{O}_{K_0}/p^n\mathscr{O}_{K_0}$-algèbre de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0}$ se relève (de façon unique) en une structure de $\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L$-algèbre. Cela résulte de l'existence et de l'unicité d'une flèche (en pointillé) faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L \arrow[r, two heads, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, dotted] & \mathscr{O}_C/p^n\mathscr{O}_C \\
\mathscr{O}_{K_0}/p^n\mathscr{O}_{K_0} \arrow[u] \arrow[r, "\mathrm{can}"] & \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} . \arrow[u, two heads, "\theta_{K_0}"']
\end{tikzcd}$$

En effet $\mathscr{O}_L/p^n\mathscr{O}_L$ est une $\mathscr{O}_{K_0}/p^n\mathscr{O}_{K_0}$-algèbre étale, et $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ étant un idéal à puissances divisées dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0}$, il a une image nilpotente dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0} / p^n \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K_0}$.

La preuve de la bijectivité de $\mathrm{A}_{\max,K_0} \to \mathrm{A}_{\max,L}$ est identique, car $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ a une image nilpotente dans $\mathrm{A}_{\max,K_0}/p^n\,\mathrm{A}_{\max,K_0}$ (parce que $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0}) = pI$ où I est un idéal de $\mathrm{A}_{\max,K_0}$). □

Notation 2.37. — On note :

- K_0^{nr} (resp. K^{nr}) l'extension maximale non ramifiée de K_0 (resp. de K) dans $\overline{K}$;
- $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$ (resp. $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$) l'adhérence de K_0^{nr} (resp. K^{nr}) dans C.

Proposition 2.38. — *Les anneaux* $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ *et* $\mathrm{A}_{\max}$ *sont des* $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}$*-algèbres.*

Démonstration. — D'après la proposition 2.36, pour tout sous-corps L de $\overline{K}$ qui est extension finie et non ramifiée de K_0, l'homomorphisme naturel $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris},L}$ est un isomorphisme. Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},L}$ est une $\mathcal{O}_L$-algèbre, il en est de même de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Ce dernier est donc une $\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}}$-algèbre. Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est complet pour la topologie p-adique, c'est en fait une $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}$-algèbre. Même raisonnement pour $\mathrm{A}_{\max}$. □

Rappelons que pour $i \in \{1,\dots,d\}$, on a posé

$$u_i = t_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{t_i}] \in \mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R).$$

On note encore u_i son image dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et dans $\mathrm{A}_{\max}$.

L'homomorphisme $W \to \mathcal{O}_{K_0}$ induit des homomorphismes $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla} \to \mathrm{A}_{\max}$. Comme $u_i \in \mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$ et $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ est un idéal à puissances divisées dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ est divisible par p dans $\mathrm{A}_{\max}$), il donne lieu à un homomorphisme de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$-algèbres (resp. de $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla}$-algèbres)

$$f\colon\ \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\dots,u_d\rangle \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \quad (\text{resp. } f\colon\ \mathrm{A}_{\max}^{\nabla}[u_1/p,\dots,u_d/p] \to \mathrm{A}_{\max}\,),$$

où $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$ désigne l'anneau des polynômes à puissances divisées en $u_1,\dots,u_d$ à coefficients dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$. L'anneau $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathrm{A}_{\max}$) étant séparé et complet pour la topologie p-adique, ce dernier s'étend en un homomorphisme de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$-algèbres (resp. de $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla}$-algèbres)

$$f : \big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\dots,u_d\rangle\big)^{\widehat{}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \ \big(\text{resp. } f : \mathrm{A}_{\max}^{\nabla}\{u_1/p,\dots,u_d/p\} \to \mathrm{A}_{\max}\big),$$

où $(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\dots,u_d\rangle)^{\wedge}$ désigne le séparé complété de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\dots,u_d\rangle$ pour la topologie p-adique (resp. $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla}\{u_1/p,\dots,u_d/p\}$ désigne le séparé complété de $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla}[u_1/p,\dots,u_d/p]$ pour la topologie p-adique).

Proposition 2.39. — *Les homomorphismes*

$$f\colon\ \big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\dots,u_d\rangle\big)^{\widehat{}} \longrightarrow \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \quad \text{et} \quad f\colon\ \mathrm{A}_{\max}^{\nabla}\{u_1/p,\dots,u_d/p\} \longrightarrow \mathrm{A}_{\max}$$

sont des isomorphismes de W-algèbres.

Démonstration. — Soit n un entier non nul. Posons

$$\mathcal{B}_n = \mathrm{W}_n(R)[t_1, \dots, t_d] \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} / p^n \, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}.$$

Notons I l'idéal de $\mathcal{B}_n$ engendré par les images de $\{t_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{t_i}]\}_{1 \leqslant i \leqslant d}$ et de ξ, et $\mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$ l'enveloppe à puissances divisées de l'anneau $\mathcal{B}_n$ relativement à I, compatibles aux puissances divisées sur l'idéal engendré par p. On a un isomorphisme $\mathrm{W}_n(R)[u_1, \dots, u_d] \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_n$ envoyant u_i sur l'image de $t_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{t_i}]$. On en déduit un isomorphisme $\mathcal{A}_n \langle u_1, \dots, u_d \rangle \to \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$ qui envoie u_i sur l'image de $t_i \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{t_i}]$.

Montrons que l'homomorphisme naturel $f_n \colon \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I) \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} / p^n \, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est un isomorphisme. Il suffit pour cela de montrer (cf. preuve de la proposition 2.9) que $\mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$ peut être muni d'une unique structure de $\mathcal{O}_{K_0}/p^n\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre telle que f_n est $\mathcal{O}_{K_0}/p^n\mathcal{O}_{K_0}$-linéaire. En effet, cela implique l'existence d'une unique application $\mathcal{O}_{K_0}/p^n\mathcal{O}_{K_0}$-linéaire

$$g_n \colon (\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R))/p^n(\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R)) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$$

et donc un unique homomorphisme $g_n \colon \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} / p^n \, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$ (car l'image de $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ dans $\mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$ a des puissances divisées), inverse de f_n par unicité.

Cela résulte de ce que $\mathcal{O}_{K_0}/p^n\mathcal{O}_{K_0}$ est formellement étale sur W/p^nW et du fait que l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$ ayant des puissances divisées, il est nilpotent vu que $p^n\mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I) = 0$. La structure de $\mathcal{O}_{K_0}/p^n\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre de $\mathcal{O}_C/p^n\mathcal{O}_C = \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)/\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ se relève de façon unique en un homomorphisme de W/p^nW-algèbre $\mathcal{O}_{K_0}/p^n\mathcal{O}_{K_0} \to \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I)$ tel que t_i s'envoie sur l'image de $[\widetilde{t_i}] + u_i$.

$$\begin{tikzcd}
W/p^nW \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{D}_{\mathcal{B}_n}(I) \arrow[d, "\theta_{K_0}"] \\
\mathcal{O}_{K_0}/p^n\mathcal{O}_{K_0} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \mathcal{O}_C/p^n\mathcal{O}_C.
\end{tikzcd}$$

D'après ce qui précède, l'homomorphisme $(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} / p^n \, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla})\langle u_1, \dots, u_d \rangle \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} / p^n \, \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ envoyant u_i sur la classe de $1 \otimes [\widetilde{t_i}] - t_i \otimes 1$ est un isomorphisme. La proposition s'en déduit par passage à la limite.

Comme pour la preuve de la proposition 2.36, le cas $\mathrm{A}_{\max}$ se traite de façon identique, parce que l'idéal engendré par p et $\mathrm{Ker}(\theta_{K^0})$ a une image nilpotente modulo p^n. □

Remarque 2.40. — 1) Il résulte de la proposition précédente que les homomomorphismes naturels $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla} \to \mathrm{A}_{\max}$ sont injectifs. Dans ce qui suit, on identifie $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ (resp. $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla}$) à un sous-anneau de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$

(resp. de $\mathrm{A}_{\max}$) et les isomorphismes qui précèdent seront vus comme des égalités.

De même, l'homomorphisme naturel $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}_{\max}$ est injectif (rappelons qu'il envoie $u_i^{[n]}$ sur $p^{[n]}(u_i/p)^n)$: désormais, on voit $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ comme un sous-anneau de $\mathrm{A}_{\max}$.

2) La proposition précédente montre de façon explicite le fait, démontré dans la proposition 2.36, que les anneaux $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{A}_{\max}$ sont inchangés quand on remplace K_0 par une extension finie non ramifiée.

Notation 2.41. — On pose :

- $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+ = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}[p^{-1}]$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} = \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+[t^{-1}]$;
- $\mathrm{B}_{\max}^+ = \mathrm{A}_{\max}[p^{-1}]$ et $\mathrm{B}_{\max} = \mathrm{B}_{\max}^+[t^{-1}]$.

Ce sont des $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$-algèbres munies d'une action de G_K et d'un Frobenius σ-linéaire[(3)].

2.4. Relations entre $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et B_{dR}.

Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on dispose de l'homomorphisme

$$\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n.$$

Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n \simeq \mathrm{A}_{\inf}(\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_{K_0})[p^{-1}]/ \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n$ admet des puissances divisées relativement à l'idéal $\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})/ \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n$ (car p est inversible), il induit un homomorphisme de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R)$ relativement à l'idéal $\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n$. Comme le gradué de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n$ (pour la filtration définie par les puissances de l'idéal $\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})/ \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n$) est un C-espace vectoriel de dimension finie (proposition 2.11), donc complet pour la valuation v, il se prolonge en un homomorphisme

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ / \operatorname{Ker}(\theta_{K_0})^n.$$

Ces homomorphismes sont bien sûr compatibles entre eux pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$: on a un homomorphisme naturel $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$. De même, on a un homomorphisme naturel $\mathrm{A}_{\max} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

On dispose aussi d'homomorphismes naturels $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$ et $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$. Notons qu'avec les isomorphismes des propositions 2.9 et 2.39, les

(3) Les anneaux $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+$, $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, *etc*, dépendent du choix de K_0. On adopte cette notation (où K_0 n'apparaît pas) parce qu'elle est conforme à l'usage et à cause de la proposition 3.42.

homomorphismes $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et $\mathrm{A}_{\max} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ s'identifient alors respectivement aux homomorphismes naturels

$$\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\ldots,u_d\rangle\big)^{\widehat{}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1,\ldots,u_d]],$$
$$\mathrm{A}_{\max}^{\nabla}\{u_1/p,\ldots,u_d/p\} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1,\ldots,u_d]].$$

Proposition 2.42. — *Les homomorphismes*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \quad \textit{et} \quad \mathrm{A}_{\max} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$$

sont injectifs.

Démonstration. — L'injectivité de l'homomorphisme

$$\big(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\ldots,u_d\rangle\big)^{\widehat{}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1,\ldots,u_d]]$$

(resp. $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla}\{u_1/p,\ldots,u_d/p\} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1,\ldots,u_d]]$) résulte de celle de l'homomorphisme naturel $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ (resp. $\mathrm{A}_{\max}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$) prouvée dans la proposition 2.33. □

Remarque 2.43. — 1) Il résulte de la proposition précédente que les anneaux $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{A}_{\max}$ sont intègres. Ils s'injectent donc dans leurs localisés $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{B}_{\max}^{+} \subseteq \mathrm{B}_{\max}$ respectivement.

2) Les homomorphismes de la proposition 2.42 se localisent. On en déduit des injections

- $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{+} \to \mathrm{B}_{\max}^{+} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ (resp. $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla+} \to \mathrm{B}_{\max}^{\nabla+} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$),
- $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\max} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ (resp. $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\max}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$).

Dans ce qui suit, on voit ces injections comme des inclusions.

Rappelons que l'extension K/K_0 est totalement ramifiée, d'extension résiduelle triviale : on a $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K_0}[\varpi]$ où ϖ est une uniformisante de K. Choisissons un élément $\widetilde{\varpi} \in \mathrm{R}$ tel que $\widetilde{\varpi}^{(0)} = \varpi$ et posons

$$\xi_{\varpi} = \varpi \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{\varpi}] \in \mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R}).$$

Définition 2.44. — *On note* $\widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K}$ *le séparé complété, pour la topologie p-adique, de la sous-$\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})$-algèbre de $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})$ engendrée par $\xi_{\varpi}\varpi^{-1}$ et $\{u_i/p\}_{1\leqslant i\leqslant d}$. On pose*

$$\widetilde{\mathrm{B}}_{\max,K}^{+} = \widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K}[p^{-1}].$$

L'anneau $\widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K}$ est une $\mathcal{O}_K$-algèbre. Comme

$$\mathrm{A}_{\max} = \mathrm{A}_{\max}^{\nabla}\{u_1/p,\ldots,u_d/p\}$$

(proposition 2.39), on a des homomorphismes naturels

$$\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\max} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K} \quad \text{et} \quad K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\max}^{+} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{B}}_{\max,K}^{+}.$$

Proposition 2.45. — *L'homomorphisme* $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\max} \to \widetilde{\mathrm{B}}^+_{\max,K}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Si $e = e_K$ est le degré de l'extension K/K_0, l'élément ϖ est racine d'un polynôme d'Eisenstein : $\varpi^e = pu$ où $u \in \mathcal{O}_K^\times$ est une unité. Il existe alors $\widetilde{u} \in \mathrm{R}^\times$ tel que $\widetilde{\varpi}^e = \widetilde{p}\,\widetilde{u}$, et on a $([\widetilde{\varpi}]/\varpi)^e = \alpha([\widetilde{p}]/p)$ où $\alpha = [\widetilde{u}]/u$ est une unité de $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})$. En particulier, si $s \in \mathbb{N}$ s'écrit $s = eq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < e$, on a

$$\big([\widetilde{\varpi}]/\varpi\big)^s = p^{-1}\big(\alpha[\widetilde{p}]/p\big)^q (p/\varpi^r)[\widetilde{\varpi}]^r \in p^{-1}(\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})\big[[\widetilde{p}]/p\big].$$

On a donc des inclusions

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R}))\big[[\widetilde{p}]/p, u_i/p\big] &\subseteq (\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R}))\big[[\widetilde{\varpi}]/\varpi, u_i/p\big]\\ &\subseteq p^{-1}\big((\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R}))\big[[\widetilde{p}]/p, u_i/p\big]\big)\end{aligned}$$

d'où les inclusions $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\max} \subseteq \widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K} \subseteq p^{-1}(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\max})$ (en passant aux complétés) et l'isomorphisme $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\max} \simeq \widetilde{\mathrm{B}}^+_{\max,K}$. □

Comme $\xi_\varpi/\varpi, u_i/p \in \mathrm{Ker}(\theta_K)$ et $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est une $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})$-algèbre séparée et complète pour la topologie $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique, on dispose d'un homomorphisme

$$h\colon\ \mathrm{A}_{\max,K} \longrightarrow \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}\,.$$

Proposition 2.46. — *L'homomorphisme* $h\colon \widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K} \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ *est injectif.*

Démonstration. — On procède de façon identique à la preuve de le proposition 2.42 : il s'agit de montrer que $\widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K}$ est séparé pour la topologie définie par les sous-groupes $\big\{h^{-1}\big(\mathrm{Ker}(\theta)\big)^n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. pour la topologie I-adique, où I est l'idéal engendré par ξ_ϖ/ϖ et $\{u_i/p\}_{1\leqslant i\leqslant d}$. Comme $\widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K}$ est séparé pour la topologie p-adique et donc pour la topologie ϖ-adique, cela se vérifie modulo ϖ. On a

$$\widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K}/\varpi\widetilde{\mathrm{A}}_{\max,K} \simeq (k_K \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{R})/(\widetilde{\varpi})\big[[\widetilde{\varpi}]/\varpi, u_i/p\big].$$

L'énoncé résulte donc du fait que $\big(k_K \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathrm{R}\big)/(\widetilde{\varpi})\big[[\widetilde{\varpi}]/\varpi, u_i/p\big]$ est séparé pour la topologie I-adique. □

Proposition 2.47. — *Les homomorphismes naturels*

$$K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \quad \textit{et} \quad K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\max} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$$

sont injectifs.

Démonstration. — On a l'inclusion $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{max}}$. elle induit une injection $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}} \to K \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{max}} \simeq \mathrm{B}^+_{\mathrm{max},K}$ (proposition 2.45). D'après la proposition 2.46, l'homomorphisme $\mathrm{A}_{\mathrm{max},K} \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est injectif : il en est de même de $\mathrm{B}^+_{\mathrm{max},K} \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et de $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{max}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. En outre, le composé $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ et son localisé $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ sont injectifs. □

Notation 2.48. — On note $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathrm{C}_{\mathrm{max}}$) le corps des fractions de l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ (resp. $\mathrm{B}_{\mathrm{max}}$, cf. remarque 2.43).

Proposition 2.49. — *On a* $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{C}_{\mathrm{cris}}) = \mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{C}_{\mathrm{max}}) = K_0$.

Démonstration. — D'après la proposition 2.47, l'application naturelle $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ est injective. En localisant, on en déduit que l'application naturelle $K \otimes_{K_0} \mathrm{C}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{C}_{\mathrm{dR}}$ est injective. Comme elle est bien sûr G_K-équivariante et comme K est libre sur K_0, elle induit une injection $K \otimes_{K_0} \mathrm{C}^{G_K}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{C}^{G_K}_{\mathrm{dR}}$. D'après la proposition 2.18, on a $\mathrm{C}^{G_K}_{\mathrm{dR}} = K$. On a donc $\dim_{K_0}\big(\mathrm{C}^{G_K}_{\mathrm{cris}}\big) \leqslant 1$, i.e. $\mathrm{C}^{G_K}_{\mathrm{cris}} = K_0$. On raisonne de la même façon avec C_{max}. □

Proposition 2.50. — *On a* $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}) = \mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{B}_{\mathrm{max}}) = K_0$.

Démonstration. — On a $K_0 \subseteq \mathrm{B}^{G_K}_{\mathrm{cris}} \subseteq \mathrm{B}^{G_K}_{\mathrm{max}} \subseteq \mathrm{C}^{G_K}_{\mathrm{max}} = K_0$ (proposition 2.49), d'où l'égalité. □

Rappelons que $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{max}}$ sont des sous-anneaux de B_{dR}. Ce dernier est muni d'une connexion intégrable ∇, telle que $\nabla(u_i) = \mathrm{d}t_i$ et $\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}$ est horizontal. Pour $x \in \mathrm{Ker}(\theta_{K_0}) \subseteq \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on a

$$\nabla(x^{[n]}) = x^{[n-1]}\nabla(x).$$

La connexion ∇ induit une connexion intégrable $\nabla\colon\ \mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$ et donc une connexion

$$\nabla\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}.$$

On a de même $\nabla(x/p) \in p^{-1}\,\mathrm{A}_{\mathrm{max}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_{K_0}}$ pour $x \in \mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$: la connexion ∇ induit une connexion intégrable $\nabla\colon\ \mathrm{B}^+_{\mathrm{max}} \to \mathrm{B}^+_{\mathrm{max}} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$ et donc une connexion

$$\nabla\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{max}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{max}} \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}.$$

Lemme 2.51. — *Soit Λ un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique, dans lequel p n'est pas diviseur de zéro. Soit $M = (\Lambda\langle X_1, \ldots, X_d\rangle)^{\wedge}$ le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $\Lambda[X_1, \ldots, X_d]$ relativement à l'idéal $(X_1, \ldots, X_d)$. Soit $\nabla\colon M \to M\,\mathrm{d}X_1 \oplus \cdots \oplus M\,\mathrm{d}X_d$ la connexion standard (déduite de la différentielle canonique). Alors $M^{\nabla=0} = \Lambda$.*

Démonstration. — Remarquons déjà que l'on a $\Lambda \subseteq M^{\nabla=0}$. Si $n \in \mathbb{N}$, soit $I^{[n]}$ l'adhérence de l'idéal à puissances divisées de M engendré par les $X_1^{[m_1]} \cdots X_d^{[m_d]}$ pour les $\underline{m} = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{N}^d$ qui vérifient $|\underline{m}| = m_1 + \cdots + m_d \geqslant n$. Soit $x \in M^{\nabla=0}$. Supposons d'abord que $x \in I^{[n]}$ avec $n > 0$. On peut écrire

$$x = \sum_{|\underline{m}|=n} \lambda_{\underline{m}} \prod_{i=1}^{d} X_i^{[m_i]} + x'$$

avec $\lambda_{\underline{m}} \in \Lambda$ pour le $\underline{m}$ tel que $|\underline{m}| = n$ et $x' \in I^{[n+1]}$. Si $m_i \neq 0$, on a

$$\nabla\big(X_i^{[m_i]}\big) = X_i^{[m_i-1]} \,\mathrm{d}X_i.$$

On a donc $\nabla(I^{[n+1]}) \subseteq I^{[n]} \otimes_M (M \,\mathrm{d}X_1 \oplus \cdots \oplus M \,\mathrm{d}X_d)$. Ainsi, on a

$$\nabla(x) = \sum_{i=1}^{d} \Big(\sum_{|\underline{m}|=n} \lambda_{\underline{m}} X_i^{[m_i-1]} \prod_{j \neq i} X_j^{[m_j]} \Big) \mathrm{d}X_i + \nabla(x')$$

et donc, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$,

$$\sum_{|\underline{m}|=n} \lambda_{\underline{m}} X_i^{[m_i-1]} \prod_{j \neq i} X_j^{[m_j]} \equiv 0 \mod I^{[n]}.$$

Comme la famille $\big\{ \prod_{j=1}^{d} X_j^{[m'_j]} \big\}_{|\underline{m}'| = n-1}$ est une base du Λ-module $I^{[n-1]}/I^{[n]}$, on a $\lambda_{\underline{m}} = 0$ pour tout $\underline{m}$ tel que $|\underline{m}| = n$ et $m_i > 0$. Comme c'est vrai pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a $\lambda_{\underline{m}} = 0$ pour tout $\underline{m}$ tel que $|\underline{m}| = n$ (car $n > 0$), et donc $x = x' \in I^{[n+1]}$. On a donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^{[n]}$. L'image de cette intersection dans

$$M/pM \simeq (\Lambda/p\Lambda)[T_i^{(m)}]_{1 \leqslant i \leqslant d,\, m \in \mathbb{N}} \big/ \big((T_i^{(m)})^p\big)$$

étant nulle, on a $x \in pM$ et donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} p^n M = \{0\}$ (car p est non diviseur de zéro dans Λ).

Dans le cas général, on écrit $x = \lambda_0 + x'$ avec $\lambda_0 \in \Lambda$ et $x' \in I^{[1]}$. Comme $\nabla(x_0) = 0$, on a $\nabla(x') = 0$, et donc $x' = 0$ d'après ce qui précède, i.e. $x = \lambda_0 \in \Lambda$. □

Proposition 2.52. — *On a*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla=0} = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}, \quad \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{+\,\nabla=0} = \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla+}, \quad \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla=0} = \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}.$$

Démonstration. — On a $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} = (\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1, \ldots, u_d\rangle)^{\widehat{}}$ d'après la proposition 2.39. Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, et que p n'est pas diviseur de zéro dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$, il suffit d'appliquer le lemme précédent dans le cas $\Lambda = \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ et $X_i = u_i$ (rappelons que $\nabla(u_i) = \mathrm{d}t_i$.

Les deux autres assertions résultent de ce qui précède, par localisation par un élément horizontal. □

Corollaire 2.53. — *On a* $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}) = K_0^{\nabla}$ (*cf. notation précédant le corollaire* 2.30).

Démonstration. — D'après la proposition 2.24, la connexion ∇ commute à l'action de G_K. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla=0} = \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ (proposition 2.52), on a $\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\big)^{G_K} = \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{G_K}\big)^{\nabla=0} = K_0^{\nabla}$. □

Proposition 2.54. — *L'application* $u_{\mathrm{cris}} \colon K_0 \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ *est injective.*

Démonstration. — On procède de façon identique à la preuve de la proposition 2.31. □

Corollaire 2.55. — *L'homomorphisme de* K^{∇}*-algèbres*

$$K^{\nabla} \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$$

(déduit de l'injection $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$*) est injectif.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, l'homomorphisme de K_0-algèbres $K_0 \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est injectif. On en déduit un homomorphisme injectif $K \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$. De même, l'homomorphisme $K^{\nabla} \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to K \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ est injectif car K_0^{∇} est un corps. On en déduit que l'homomorphisme composé $K^{\nabla} \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est injectif. L'injectivité cherchée résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \arrow[r, "h"] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \\ K^{\nabla} \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \arrow[u] \arrow[r] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla} \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

l'homomorphisme h étant injectif d'après la proposition 2.47. □

Notation 2.56. — On note $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ le corps des fractions de l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$.

Corollaire 2.57. — *On a* $\mathrm{H}^0(G_K, \mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}) = K_0^{\nabla}$.

Démonstration. — L'homomorphisme injectif du corollaire 2.55 se localise en un homomorphisme injectif $K^{\nabla} \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{\nabla} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$. Comme on a $(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla})^{G_K} = K^{\nabla}$ d'après le corollaire 2.30, on a donc $\dim_{K_0^{\nabla}}((\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{\nabla})^{G_K}) \leqslant 1$, soit $(\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{\nabla})^{G_K} = K_0^{\nabla}$. □

Remarquons que $\widehat{\Omega}$ est muni d'un Frobenius, qui est l'unique application σ-linéaire sur $\widehat{\Omega}$ vérifiant $\mathrm{d}\varphi(a) = \varphi(\mathrm{d}a)$ pour tout $a \in K_0$.

Proposition 2.58. — *Sur* $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, *on a* $\nabla\varphi=\varphi\nabla$.

Démonstration. — Il suffit de le vérifier sur $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}=(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\langle u_1,\dots,u_d\rangle)^{\widehat{}}$. Par semi-linéarité, il suffit de montrer que $\nabla\varphi(\underline{u}^{\underline{n}})=\varphi\nabla(\underline{u}^{\underline{n}})$, où $\underline{u}^{\underline{n}}=\prod_{i=1}^d u_i^{n_i}$ pour $\underline{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^d$. On a

$$\begin{aligned}\nabla\varphi\big(\underline{u}^{\underline{n}}\big)&=\nabla\big(\varphi(\underline{u})^{\underline{n}}\big)=\sum_{i=1}^d N_i\big(\varphi(\underline{u})^{\underline{n}})\big)\otimes\mathrm{d}\log(t_i)\\&=\sum_{i=1}^d\sum_{j=1}^d n_j\varphi(\underline{u})^{\underline{n}-\underline{e}_j}N_i\big(\varphi(u_j)\big)\otimes\mathrm{d}\log(t_i)\\&=\sum_{j=1}^d n_j\varphi(\underline{u})^{\underline{n}-\underline{e}_j}\Big(\sum_{i=1}^d N_i\big(\varphi(u_j)\big)\otimes\mathrm{d}\log(t_i)\Big)\\&=\sum_{j=1}^d n_j\varphi(\underline{u})^{\underline{n}-\underline{e}_j}\nabla\varphi(u_j).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a $\varphi(u_j)-\sigma(t_j)\in\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$, donc $\nabla\varphi(u_j)=\mathrm{d}\sigma(t_j)$, on a donc

$$\nabla\varphi(\underline{u}^{\underline{n}})=\sum_{j=1}^d n_j\varphi(\underline{u})^{\underline{n}-\underline{e}_j}\otimes\mathrm{d}\sigma(t_j).$$

Comme $\mathrm{d}\sigma(t_j)=\varphi(\mathrm{d}t_j)$, on a bien $\nabla\varphi(\underline{u}^{\underline{n}})=\varphi\big(\sum_{j=1}^d\underline{u}^{\underline{n}-\underline{e}_j}\otimes\mathrm{d}t_j\big)=\varphi\nabla(\underline{u}^{\underline{n}})$, ce qu'on voulait. □

Proposition 2.59. — *La suite*

$$0\to\mathbb{Q}_p\longrightarrow\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\substack{\nabla=0\\ \varphi=1}}\longrightarrow\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla=0}/\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\big)^{\nabla=0}\to0$$

est exacte.

Démonstration. — D'après les propositions 2.26 et 2.52, cette suite se réécrit

$$0\to\mathbb{Q}_p\longrightarrow\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\big)^{\varphi=1}\longrightarrow\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}/\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}\to0.$$

On dispose d'isomorphismes $i_\sigma\colon\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}\xrightarrow{\sim}\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$, $i_\sigma\colon\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\xrightarrow{\sim}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ ainsi que $i_\sigma\colon\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}\xrightarrow{\sim}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. Via ces isomorphismes, elle s'écrit

$$0\to\mathbb{Q}_p\longrightarrow\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\longrightarrow\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\to0,$$

qui est exacte d'après [7, Prop. 1.3]. □

Remarque 2.60. — Les propriétés qui précèdent, énoncées pour $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, sont valables avec $\mathrm{B}_{\mathrm{max}}$ (les démonstrations étant identiques). En particulier,

$$\mathrm{B}_{\mathrm{max}}^{+\,\nabla=0}=\mathrm{B}_{\mathrm{max}}^{\nabla+},\quad\mathrm{B}_{\mathrm{max}}^{\nabla=0}=\mathrm{B}_{\mathrm{max}}^{\nabla+},\quad\mathrm{H}^0(G_K,\mathrm{B}_{\mathrm{max}})=K_0^{\nabla}$$

et sur $\mathrm{B}_{\max}$, on a $\nabla\varphi = \varphi\nabla$. Enfin (voir [5, Prop. III.3.1]), on a la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathrm{B}_{\max}^{\substack{\nabla=0\\ \varphi=1}} \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla=0} / \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\big)^{\nabla=0} \to 0.$$

On verra plus tard (proposition 3.38) que les anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{B}_{\max}$ définissent la même catégorie de représentations admissibles (cf. définition 3.1). Dans la suite, la plupart des résultats relatifs à ces dernières seront énoncés avec l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, parce que ce dernier a une interprétation cohomologique (cf. remarque 2.35). Néanmoins, à bien des égards, l'anneau $\mathrm{B}_{\max}$ est plus simple que $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ (cf. [5, III.2]), et facilite un certain nombre de preuves (cf. propositions 2.47 et 3.42).

3. Représentations p-adiques.

3.1. Représentations admissibles, premières propriétés.

Dans cet alinéa, G est un groupe topologique arbitraire. On se donne un corps F muni d'une topologie et on note $\mathbf{Rep}_F(G)$ la catégorie des *F-représentations* de G : les objets sont les F-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action linéaire continue de G et les flèches sont les applications F-linéaires G-équivariantes. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, on parlera de *représentation p-adique*.

Soit B un anneau commutatif réduit muni d'une structure de F-algèbre topologique et d'une action F-linéaire de G compatible avec cette structure. Si V est une F-représentation de G, on pose

$$\mathrm{D}_B(V) = (B \otimes_F V)^G.$$

C'est un B^G-module, et on a un homomorphisme naturel de B-modules, fonctoriel en V

$$\alpha_B(V)\colon B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V) \longrightarrow B \otimes_F V, \quad b \otimes d \longmapsto bd.$$

Définition 3.1. — *Une F-représentation V de G est dite B-admissible si l'homomorphisme $\alpha_B(V)$ est un isomorphisme. On note $\mathbf{Rep}_{B\text{-adm}}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_F(G)$ constituée par les F-représentations de G qui sont B-admissibles.*

Lemme 3.2. — *Si B est un corps, l'homomorphisme $\alpha_B(V)$ est injectif.*

Démonstration (voir [15, Proposition 1.6.1]*).* — Supposons $\alpha_B(V)$ non injectif. Soit r le plus petit entier tel qu'il existe $x \in \mathrm{Ker}(\alpha_B(V)) \setminus \{0\}$ admettant une écriture de la forme $\sum_{j=1}^{r} b_j \otimes d_j$ avec $b_j \in B$ et $d_j \in \mathrm{D}_B(V)$ pour $j \in \{1, \dots, d\}$. On a alors

$$\sum_{j=1}^{r} b_j d_j = 0.$$

Par minimalité de r, aucun des b_j n'est nul, et quitte à considérer x/b_r, on peut supposer $b_r = 1$. Si $g \in G$, on a $\sum_{j=1}^{r}(g(b_j) - b_j)d_j = 0$ soit $\sum_{j=1}^{r-1}(g(b_j) - b_j)d_j = 0$ vu que $b_r = 1$. Par minimalité de r, on a

$$\sum_{j=1}^{r-1}(g(b_j) - b_j) \otimes d_j = 0$$

i.e. $g(x) = x$. Comme B est un corps, il en est de même de B^G, d'où $(B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V))^G = \mathrm{D}_B(V)$. On a donc $x \in \mathrm{D}_B(V)$. La restriction de $\alpha_B(V)$ à $\mathrm{D}_B(V)$ étant l'inclusion dans $B \otimes_F V$, on a $x = 0$, ce qui est absurde. □

Proposition 3.3. — *Si B est intègre, plat sur B^G et si* $(\mathrm{Frac}(B))^G = \mathrm{Frac}\left(B^G\right)$*, alors l'homomorphisme $\alpha_B(V)$ est injectif.*

Démonstration. — Notons $C = \mathrm{Frac}(B)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V) \arrow[r, "\alpha_B(V)"] \arrow[d, "f"'] & B \otimes_F V \arrow[d, hook] \\ C \otimes_{C^G} \mathrm{D}_C(V) \arrow[r, "\alpha_C(V)"] & C \otimes_F V. \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 3.2, l'application $\alpha_C(V)$ est injective, car C est un corps. Pour montrer que $\alpha_B(V)$ est injective, il suffit de montrer que f l'est. On a la factorisation

$$\begin{tikzcd} B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_B \otimes i"'] & C \otimes_{C^G} \mathrm{D}_C(V) \\ B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_C(V) \arrow[r, equal] & B \otimes_{B^G} C^G \otimes_{C^G} \mathrm{D}_C(V). \arrow[u, "w \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{D}_C(V)}"'] \end{tikzcd}$$

où $i\colon \mathrm{D}_B(V) \to \mathrm{D}_C(V)$ et $w\colon B \otimes_{B^G} C^G \to C$ sont les applications naturelles. L'homomorphisme i est injectif, car induit par l'injection $B \otimes_F V \to C \otimes_F V$. Comme B est plat sur B^G, il en est de même de l'homomorphisme $\mathrm{Id}_B \otimes i$. Par hypothèse, on a $C^G = \mathrm{Frac}\left(B^G\right)$, l'homomorphisme w est donc injectif. Comme C^G est un corps, il en est de même de $w \otimes \mathrm{Id}_{\mathrm{D}_C(V)}$. L'homomorphisme f est donc injectif. □

Proposition 3.4. — *Supposons B^G noethérien et B fidèlement plat sur B^G. Si $\alpha_B(V)$ est bijective, alors $\mathrm{D}_B(V)$ est un B^G-module projectif de rang constant $\dim_F(V)$.*

Démonstration. — Le B-module $B\otimes_{B^G}\mathrm{D}_B(V)$ étant isomorphe au module libre $B\otimes_F V$, c'est un B-module de type fini. Il est donc engendré par une famille finie $(1\otimes d_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$ où $d_j\in\mathrm{D}_B(V)$ pour $j\in\{1,\dots,r\}$. Si M est le sous-B^G-module de $\mathrm{D}_B(V)$ engendré par $\{d_j\}_{1\leqslant j\leqslant r}$, l'injection $M\hookrightarrow\mathrm{D}_B(V)$ induit un isomorphisme après tensorisation par B sur B^G. Comme B est fidèlement plat sur B^G, c'est un isomorphisme et $\mathrm{D}_B(V)$ est de type fini sur B^G.

L'anneau B^G étant noethérien, le module $\mathrm{D}_B(V)$ est de présentation finie sur B^G. On a donc un isomorphisme naturel

$$B\otimes_{B^G}\mathrm{Hom}_{B^G}\big(\mathrm{D}_B(V),N\big)\simeq\mathrm{Hom}_B\big(B\otimes_{B^G}\mathrm{D}_B(V),B\otimes_{B^G}N\big)$$

pour tout B^G-module N (cf. [23, Thm 7.11]). C'est donc un foncteur exact en N vu que $B\otimes_{B^G}\mathrm{D}_B(V)\simeq B\otimes_F V$ est projectif comme B-module, et que B est plat sur B^G.

Comme B est fidèlement plat sur B^G, le foncteur $N\mapsto\mathrm{Hom}_{B^G}(\mathrm{D}_B(V),N)$ est exact et donc $\mathrm{D}_B(V)$ est projectif (de type fini d'après ce qui précède) sur B^G.

Si $\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(B^G)$, le $(B^G)_{\mathfrak{p}}$-module $\mathrm{D}_B(V)_{\mathfrak{p}}$ est libre de rang fini et la bijection $\alpha_B(V)$ localisée en $\mathfrak{p}$ implique que ce rang est égal à $\dim_F(V)$. □

Proposition 3.5. — *Supposons B fidèlement plat sur B^G, et que pour tout $V\in\mathbf{Rep}_F(G)$, l'homomorphisme $\alpha_B(V)$ est injectif. Soient V_1,V_2 deux F-représentations de G.*

(i) *Si V_1 et V_2 sont B-admissibles, alors $V_1\otimes_F V_2$ l'est aussi et la flèche naturelle* $\mathrm{D}_B(V_1)\otimes_{B^G}\mathrm{D}_B(V_2)\to\mathrm{D}_B(V_1\otimes_F V_2)$ *(induite par la multiplication dans B) est un isomorphisme.*

(ii) *Si V est une extension de V_2 par V_1 qui est B-admissible, alors V_1 et V_2 le sont aussi et la suite* $0\to\mathrm{D}_B(V_1)\to\mathrm{D}_B(V)\to\mathrm{D}_B(V_2)\to 0$ *est exacte.*

(iii) *Si h est un entier et V une représentation B-admissible, il en est de même de $\wedge^h V$ et la flèche naturelle* $\wedge^h\mathrm{D}_B(V)\to\mathrm{D}_B(\wedge^h V)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — (i) On a un diagramme de B-modules

$$\begin{tikzcd} B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_1) \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_2) \arrow[r, "\alpha_B(V_1)\otimes\alpha_B(V_2)"] \arrow[d] & B \otimes_F V_1 \otimes_F V_2 \arrow[d, equal] \\ B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_1 \otimes_F V_2) \arrow[r, hook, "\alpha_B(V_1\otimes V_2)"] & (B \otimes_F V_1) \otimes_B (B \otimes_F V_2). \end{tikzcd}$$

La flèche du haut étant bijective, celle du bas est surjective, donc bijective (on a supposé les applications α_B injectives) i.e. $V_1 \otimes_F V_2$ est B-admissible. La flèche de gauche est donc bijective. Elle est déduite de l'application naturelle $\mathrm{D}_B(V_1) \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_2) \to \mathrm{D}_B(V_1 \otimes_F V_2)$ par tensorisation par B sur B^G. Comme B est fidèlement plat sur B^G, l'application $\mathrm{D}_B(V_1) \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_2) \to \mathrm{D}_B(V_1 \otimes_F V_2)$ est un isomorphisme.

(ii) On a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_1) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\alpha_B(V_1)"'] & B\otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_B(V)"] & B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_2) \arrow[d, hook, "\alpha_B(V_2)"] & \\ 0 \arrow[r] & B \otimes_F V_1 \arrow[r] & B\otimes_F V \arrow[r] & B\otimes_F V_2 \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Comme $\alpha_B(V)$ est un isomorphisme, les applications $\alpha_B(V_1)$ et $\alpha_B(V_2)$ sont surjectives, ce sont donc des isomorphismes (elles sont injectives par hypothèse) : les représentations V_1 et V_2 sont B-admissibles. La suite

$$0 \to B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_1) \longrightarrow B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V) \longrightarrow B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V_2) \to 0$$

est alors exacte. Par fidèle platitude de B sur B^G, la suite $0 \to \mathrm{D}_B(V_1) \to \mathrm{D}_B(V) \to \mathrm{D}_B(V_2) \to 0$ est exacte.

(iii) Résulte de (i) et (ii). □

Remarque 3.6. — Si V_1 et V_2 sont B-admissibles et V est extension de V_2 par V_1, la représentation V n'est pas B-admissible en général.

Proposition 3.7. — *Supposons B fidèlement plat sur B^G, que pour tout $V \in \mathbf{Rep}_F(G)$, l'homomorphisme $\alpha_B(V)$ est injectif et B^G noethérien. Supposons de plus que pour toute F-représentation de G de dimension* 1 *qui est B-admissible, il en est de même de la représentation duale. Alors pour* toute *F-représentation B-admissible V de G, la représentation duale $V^\vee$ est B-admissible, et la flèche naturelle*

$$\mathrm{D}_B(V^\vee) \to \mathrm{Hom}_{B^G}(\mathrm{D}_D(V), B^G)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Soit $h = \dim_F(V)$. D'après la proposition 3.5, les représentations $\det(V) = \wedge^h V$ et $\wedge^{h-1} V$ sont B-admissibles. Comme on a $\dim_F(\det(V)) = 1$, la représentation duale $\det(V)^\vee = \det(V)^{-1}$ est B-admissible. Comme $V^\vee \simeq (\wedge^{h-1} V) \otimes_F \det(V)^{-1}$, la représentation $V^\vee$ est B-admissible. Ceci dit, on a un isomorphisme de G-modules

$$B \otimes_F V^\vee = B \otimes_F \mathrm{Hom}_F(V, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B(B \otimes_F V, B).$$

On a donc

$$\begin{aligned} B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V^\vee) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_B\big(B \otimes_{B^G} \mathrm{D}_B(V), B\big) \\ &\xrightarrow{\sim} B \otimes_{B^G} \mathrm{Hom}_{B^G}\big(\mathrm{D}_B(V), B^G\big) \end{aligned}$$

vu que B est plat et $\mathrm{D}_B(V)$ est de présentation finie sur B^G. Cet isomorphisme est induit par l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{D}_B(V^\vee) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B^G}\big(\mathrm{D}_B(V), B^G\big).$$

Comme B est fidèlement plat sur B^G, ce dernier est aussi un isomorphisme. □

DÉFINITION 3.8. — *Appelons* sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{Rep}_F(G)$ *toute sous-catégorie pleine stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual et contenant l'objet unité (F muni de l'action triviale de G). Soit $\mathcal{C}$ une telle catégorie et Λ un anneau commutatif. Appelons* Λ-foncteur fibre *sur $\mathcal{C}$ tout $\otimes$-foncteur* (*cf.* [9]) *de $\mathcal{C}$ dans la catégorie des Λ-modules qui est exact, fidèle et à valeurs dans les Λ-modules projectifs de type fini.*

Remarque 3.9. — Ce qui précède peut se reformuler de la façon suivante. Soit B une F-algèbre topologique réduite munie d'une action continue d'un groupe G. On dit que B est G-régulière si elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) B est fidèlement plat sur B^G,

(ii) pour tout $V \in \mathbf{Rep}_F(G)$, l'homomorphisme $\alpha_B(V)$ est injectif (c'est le cas par exemple si B est intègre et $\big(\mathrm{Frac}(B)\big)^G = \mathrm{Frac}\big(B^G\big)$),

(iii) B^G est noethérien,

(iv) si V est une F-représentation B-admissible de G, de dimension 1, alors la représentation duale $V^\vee$ est B-admissible

(cette définition est moins restrictive que celle de Fontaine (cf. [15, III 1.4]) qui demande en plus que B^G soit un corps).

La catégorie $\mathbf{Rep}_{B\text{-adm}}(G)$ des F-représentations B-admissibles de G est alors une sous-catégorie tannakienne de $\mathbf{Rep}_F(G)$, et le foncteur D_B est un B^G-foncteur fibre.

3.2. Représentations discrètes et représentations non ramifiées.

Proposition 3.10. — (a) *Une représentation p-adique V de G_K est discrète (i.e. le noyau de l'action de G_K sur V est un sous-groupe ouvert de G_K) si et seulement si V est $\overline{K}$-admissible.*

(b) *La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ constituée des représentations discrètes est tannakienne, et la restriction du foncteur*

$$\mathrm{D}_{\overline{K}}\colon \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \longrightarrow \mathbf{Mod}(K), \quad V \longmapsto (\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$$

est un foncteur fibre.

Démonstration. — (a) Supposons que V est $\overline{K}$-admissible. Comme

$$\alpha_{\overline{K}}(V)\colon \overline{K} \otimes_K \mathrm{D}_{\overline{K}}(V) \longrightarrow \overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

est un isomorphisme, on a $\dim_K(\mathrm{D}_{\overline{K}}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\overline{K}}(V)$ étant de dimension finie, il existe une extension L/K finie contenue dans $\overline{K}$ telle que $\mathrm{D}_{\overline{K}}(V) \subseteq L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. Quitte à remplacer L par une extension finie, on peut supposer L/K galoisienne et donc que le groupe G_L est un sous-groupe ouvert invariant de G_K. On a alors $(\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{G_L})^{\mathrm{Gal}(L/K)}$ et donc

$$\overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \subseteq \overline{K} \otimes_L L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{G_L} = \overline{K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{G_L},$$

i.e. $V = V^{G_L}$ et le noyau de l'action de G sur V est un sous-groupe ouvert de G_K.

Réciproquement, si l'action de G_K est discrète, son noyau est un sous-groupe ouvert invariant G' de G_K. Soit $L = \overline{K}^{G'}$. C'est une extension galoisienne de K de groupe $J = G/G'$. Il suffit de voir que l'homomorphisme naturel $L \otimes_K (L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^J \to L \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est bijectif. Cela résulte de la descente fidèlement plate (cf. [8, Exposé 1, th. 4.5]), i.e. du théorème de Hilbert 90.

(b) La $\mathbb{Q}_p$-algèbre $\overline{K}$ vérifie clairement les conditions (i), (ii) (proposition 3.3) et (iii) de la définition 3.8, et la condition (iv) d'après l'équivalence du (a), vu que la catégorie des représentations discrètes est stable par dual. L'énoncé en résulte. □

Notation 3.11. — On note I_K (resp. I_{K_0}) le sous-groupe d'inertie dans G_K (resp. dans G_{K_0}).

Rappelons que K^{nr} (resp. K_0^{nr}) désigne l'extension maximale non ramifiée de K (resp. de K_0) dans $\overline{K}$. C'est une extension galoisienne de K (resp. de K_0).

Proposition 3.12. — *On a*

$$K^{\mathrm{nr}}=K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K\simeq K_0^{\mathrm{nr}}\otimes_{K_0}K\quad et\quad I_K=I_{K_0}\cap G_K.$$

Démonstration. — Comme K/K_0 est totalement ramifiée et K_0^{nr}/K_0 n'est pas ramifiée, on a $K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K\simeq K_0^{\mathrm{nr}}\otimes_{K_0}K$. Si ϖ désigne une uniformisante de K, ϖ est encore une uniformisante de $K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K$, et le corps résiduel de $K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K$ s'identifie à celui de K_0^{nr}. Comme le corps résiduel de K_0 est k_K (le corps résiduel de K), le corps résiduel de $K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K$ est la clôture séparable k_K^{sep} de k_K dans $\overline{k}_K$. Comme $K\subset K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K$, on a donc $K^{\mathrm{nr}}\subseteq K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K$, et donc $K^{\mathrm{nr}}=K_0^{\mathrm{nr}}\cdot K$.

L'application de restriction $r\colon \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{nr}}/K)\to\mathrm{Gal}(K_0^{\mathrm{nr}}/K_0)$ est donc injective (c'est en fait un isomorphisme), i.e. $I_K=I_{K_0}\cap G_K$. □

Définition 3.13. — *Une représentation V de G_K est dite* non ramifiée *quand l'action de $I_K=I_{K_0}\cap G_K$ sur V est triviale.*

On dénote par $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$ (resp. $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$) l'adhérence de K^{nr} (resp. K_0^{nr}) dans C. L'action de G_K se prolonge par continuité à $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$ (resp. $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$).

Proposition 3.14. — *On a un homomorphisme G_K-équivariant*

$$\widehat{K}^{\mathrm{nr}}\longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+.$$

Démonstration. — L'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est une $K\otimes_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+$-algèbre. Comme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^+$ est une $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$-algèbre (proposition 2.38), $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un $K\otimes_{K_0}\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$-module. L'extension K/K_0 étant finie, on a $K\otimes_{K_0}\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\simeq K\widehat{\otimes}_{K_0}K_0^{\mathrm{nr}}$. Comme $K_0^{\mathrm{nr}}\otimes_{K_0}K\simeq K^{\mathrm{nr}}$ d'après la proposition 3.12, l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est donc une $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$-algèbre. □

Comme $C^{G_K}=K$ (cf. [19, Thm 1]), on a $\big(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}\big)^{G_K}=K$. De même, on a $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ (proposition 3.14) et donc $\big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\big)^{G_K}=K_0$ (cf. proposition 2.47). Si V est une représentation p-adique de G_K, on pose

$$\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V)=\big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\big)^{G_K}\quad\big(\text{resp. }\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}(V)=\big(\widehat{K}^{\mathrm{nr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\big)^{G_K}\big).$$

C'est un K_0-espace vectoriel (resp. K-espace vectoriel). Comme $K^{\mathrm{nr}}\simeq K_0^{\mathrm{nr}}\otimes_{K_0}K$ (proposition 3.12), on a $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}\simeq K\otimes_{K_0}\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$ et donc

$$\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}(V)\simeq K\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V).$$

On dispose de l'application

$$\alpha_{\mathrm{nr}}^0(V)\colon \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V)\longrightarrow \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$$

$$\big(\text{resp. }\alpha_{\mathrm{nr}}(V)=\mathrm{Id}_K\otimes\alpha_{\mathrm{nr}}^0(V)\colon \widehat{K}^{\mathrm{nr}}\otimes_K\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}(V)\longrightarrow\widehat{K}^{\mathrm{nr}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\big).$$

Elle est toujours injective, car $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$ (resp. $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$) est un corps (cf. lemme 3.2). Le K_0-espace vectoriel (resp. K-espace vectoriel) $\mathrm{D}^0_{\mathrm{nr}}(V)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}(V)$) est donc de dimension finie.

Proposition 3.15. — *Soit V une représentation p-adique de G_K. Alors V est non ramifiée si et seulement si V est $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$-admissible* (*ou, ce qui revient au même, $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$-admissible*), *i.e. si et seulement si l'application $\alpha^0_{\mathrm{nr}}(V)$* (*ou $\alpha_{\mathrm{nr}}(V)$*) *est bijective, ce qui équivaut à* $\dim_{K_0}(\mathrm{D}^0_{\mathrm{nr}}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ *ou encore à* $\dim_K(\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}(V)) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$.

Démonstration. — Supposons V non ramifiée et montrons qu'elle est $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$-admissible. L'action de G_K se factorise alors par $G_K/I_K \simeq G_{k_K}$ avec $G_{k_K} = \mathrm{Gal}\left(k_K^{\mathrm{sep}}/k_K\right)$, où k_K^{sep} désigne la clôture séparable de k_K dans $\overline{k}_K$. Soit $\mathcal{V}$ un réseau de V stable par G_{k_K} (il en existe car G_{k_K} est compact). Si l'on choisit une base de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{Z}_p$, l'action de G_{k_K} sur $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}$ est décrite par un cocycle continu

$$f\colon G_{k_K} \longrightarrow \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$$

où $n = \dim(V)$. Montrons que f est cohomologue au cocycle trivial. On procède par approximations successives.

La réduction modulo p de f est un cocycle $\bar{f}\colon G_{k_K} \to \mathrm{GL}_n\left(k_K^{\mathrm{sep}}\right)$ (où k_K^{sep} est muni de la topologie discrète). Comme $\mathrm{H}^1\left(G_{k_K}, \mathrm{GL}_n\left(k_K^{\mathrm{sep}}\right)\right) = \{1\}$, il existe $\bar{b}_0 \in \mathrm{GL}_n\left(k_K^{\mathrm{sep}}\right)$ tel que $g(\bar{b}_0^{-1})\bar{f}(g)\bar{b}_0 = 1$ pour tout $g \in G_{k_K}$. Notons b_0 un relèvement de $\bar{b}_0$ dans $\mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$. Comme la réduction modulo p de b_0 est inversible, on a en fait $b_0 \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$. On pose $f_1(g) = g(b_0^{-1})f(g)b_0$ pour tout $g \in G_{k_K}$. Par construction, on a $f_1(g) \equiv 1 \mod p\,\mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$.

On construit alors par récurrence des suites $(b_m)_{m\geqslant 1}$, $(f_m)_{m\geqslant 1}$ où $b_m \in 1 + p^m\,\mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$ et $f_m\colon G_{k_K} \to \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$ est un cocycle tel que

$$f_m(g) \in 1 + p^{m+1}\,\mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right) \quad \text{et} \quad f_{m+1}(g) = g(b_{m+1}^{-1})f_m(g)b_{m+1}$$

pour tout $g \in G_{k_K}$ et $m \geqslant 1$. Supposons f_m est construit, il induit un cocycle additif $\bar{f}_m\colon G_{k_K} \to \left(1 + p^{m+1}\,\mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)\right)/\left(1 + p^{m+2}\,\mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)\right) \simeq \mathrm{M}_n\left(k_K^{\mathrm{sep}}\right)$. Le théorème de Hilbert 90 affirme que $\mathrm{H}^1\left(G_{k_K}, k_K^{\mathrm{sep}}\right) = \{0\}$. Il existe donc $b_{m+1} \in 1 + p^{m+1}\,\mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$ tel que pour tout $g \in G_{k_K}$,

$$f_{m+1}(g) = g(b_{m+1}^{-1})f_m(g)b_{m+1} \in 1 + p^{m+2}\,\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}).$$

Par construction, le produit infini $b = \prod_{m=0}^{\infty} b_m$ converge dans $\mathrm{GL}_n\left(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\right)$ et par continuité, on a $g(b^{-1})f_m(g)b = 1$ pour tout $g \in G_{k_K}$ ce qu'on voulait. La trivialité du cocycle f signifie qu'il existe une base de $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}$ constituée de vecteurs fixes sous G_{k_K}, soit encore que l'application naturelle $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}\big)^{G_{k_K}} \to \mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}$ est un isomorphisme. En inversant p, on en déduit la bijectivité de l'homomorphisme $\alpha_{\mathrm{nr}}^0(V)$.

Réciproquement, si V est une représentation p-adique $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$-admissible, l'action de $I_K = I_{K_0} \cap G_K$ sur $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \simeq \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V)$ est triviale. Elle est donc triviale sur V.

L'équivalence entre « $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$-admissible » et « $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$-admissible » résulte du fait que pour toute représentation p-adique V de G_K, on a $\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}(V) \simeq K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V)$ et donc $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V)) = \dim_K(\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}(V))$. □

Proposition 3.16. — *La sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ *constituée des représentations non ramifiées est tannakienne, et la restriction du foncteur* $\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0\colon \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \mathbf{Mod}(K_0)$ (*ou de* $\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}\colon \mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \to \mathbf{Mod}(K)$) *est un foncteur fibre.*

Démonstration. — Les $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$ et $\widehat{K}^{\mathrm{nr}}$ étant des corps, elles vérifient les conditions (i), (ii) et (iii) de la définition 3.8. Elles vérifient aussi la condition (iv) d'après la proposition 3.15, vu que la catégorie des représentations non ramifiées est stable par dual. □

Ce qui suit un cas particulier de [14, 1.2].

Définition 3.17. — *Un* φ-module *sur* K_0 *est un* K_0*-espace vectoriel* D *de dimension finie muni d'un endomorphisme* σ*-linéaire* $\varphi\colon D \to D$ *(i.e. tel que* $\varphi(\lambda x) = \sigma(\lambda)\varphi(x)$ *pour* $\lambda \in K_0$ *et* $x \in D$*). Un tel objet est dit* étale *s'il existe un réseau* $\mathcal{D}$ *de* D *(i.e. un sous-*$\mathcal{O}_{K_0}$*-module* $\mathcal{D}$ *de* D *tel que* $K_0 \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{D} = D$*) stable par* φ *qui est étale, c'est-à-dire tel que le linéarisé* $\widetilde{\varphi}\colon \sigma^*\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *est un isomorphisme.*

Les φ*-modules étales sur* K_0 *forment un catégorie qu'on note* $\mathbf{M}_{K_0}^{\text{ét}}(\varphi)$*.*

Remarque 3.18. — (i) Le Frobenius $\sigma\colon K_0 \to K_0$ n'est pas surjectif si k_K n'est pas parfait. Dans la définition qui précède, le fait d'être étale pour $\mathcal{D}$ est alors une propriété plus forte que l'injectivité de φ.

(ii) Soit $\mathcal{D}$ un $\mathcal{O}_{K_0}$-module libre muni d'un endomorphisme σ-linéaire $\varphi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathcal{D}$ et $\Sigma \in \mathrm{M}_n\left(\mathcal{O}_{K_0}\right)$ la matrice de φ dans cette base. C'est aussi la matrice de $\widetilde{\varphi}$: le module $\mathcal{D}$ est donc étale si et seulement si $\Sigma \in \mathrm{GL}_n\left(\mathcal{O}_{K_0}\right)$.

Soit V une représentation non ramifiée de G_K et

$$D = \mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V) = \big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big)^{G_K}.$$

D'après la proposition 3.15, c'est un K_0-espace vectoriel de dimension $n = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$. Il est muni d'un endomorphisme σ-linéaire φ déduit du Frobenius de $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$, c'est donc un φ-module sur K_0.

On a $\big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\big)^{\sigma=1} = \mathbb{Q}_p$ (cela résulte de $\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)^{\sigma=1} = \mathbb{Z}_p$ qui, modulo p, n'est que l'égalité $\big(k_K^{\mathrm{sep}}\big)^{\sigma=1} = \mathbb{F}_p$). Comme $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} D \xrightarrow{\sim} \widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, on a $V \simeq \big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} D\big)^{\varphi=1}$.

Proposition 3.19. — *Le foncteur $\mathrm{D}^0_{\mathrm{nr}}$ induit une équivalence entre la catégorie des représentations non ramifiées et la catégorie $\mathbf{M}^{\text{ét}}_{K_0}(\varphi)$ des φ-modules étales sur K_0. Un foncteur quasi-inverse est donné par*

$$\mathrm{V}^0_{\mathrm{nr}} \colon D \longmapsto \big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} D\big)^{\varphi=1}.$$

Démonstration. — Soient V une représentation non ramifiée de G_K et $D = \mathrm{D}^0_{\mathrm{nr}}(V) = \big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big)^{G_K}$. Avec les notations de la preuve de la proposition précédente, il existe un réseau $\mathcal{V}$ de V stable par G_K, et si $\mathcal{D} = \big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}\big)^{G_K}$, on a $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}$. Comme σ induit un isomorphisme $\sigma^*\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}$, il en est de même de $\mathrm{Id} \otimes \widetilde{\varphi} \colon \mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \sigma^*\mathcal{D} \to \mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{D}$ et donc de $\widetilde{\varphi} \colon \sigma^*\mathcal{D} \to \mathcal{D}$: le φ-module D est étale.

Réciproquement, soit D un φ-module étale sur K_0 et n sa dimension. Il s'agit de montrer que $\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(\mathrm{V}^0_{\mathrm{nr}}(D)\big) = n$. Soit $\mathcal{D}$ un réseau de D stable par φ qui est étale. Choisissons une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{O}_{K_0}$. L'action de φ sur $\mathcal{D}$ est décrite dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice $\Sigma \in \mathrm{GL}_n\big(\mathcal{O}_{K_0}\big)$: si $x \in \mathcal{D}$ (resp. $\varphi(x)$) a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ (resp. $(y_1, \dots, y_n)$) dans la base $\mathcal{B}$, on a $Y = \Sigma\sigma(X)$ où X (resp. Y) est la matrice colonne dont les composantes sont $x_1, \dots, x_n$ (resp. $y_1, \dots, y_n$).

Il s'agit donc de voir que le $\mathbb{Z}_p$-module des solutions, dans $\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)^n$, de l'équation $\sigma(X) = \Sigma^{-1}X$ contient une base de $\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)^n$. Il suffit pour cela de construire une matrice $M \in \mathrm{GL}_n\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)$ telle que $\sigma(M) = \Sigma^{-1}M$. On procède par approximations successives.

Écrivons $\Sigma^{-1} = [s_{i,j}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et posons

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}_{K_0}\big[X_1, \dots, X_n\big] \Big/ \Big(X_i^p - \sum_{j=1}^n s_{i,j} X_j\Big)_{1 \leqslant i \leqslant n}.$$

Le critère jacobien montre que c'est une $\mathcal{O}_{K_0}$-algèbre étale (parce que Σ est inversible). Il en résulte que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{K_0}\text{-alg}}\big(\mathcal{A}_1, \mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{K_0}\text{-alg}}\big(\mathcal{A}_1, k_K^{\mathrm{sep}}\big) \simeq \mathrm{Hom}_{k_K\text{-alg}}\big(\mathcal{A}_1/p\mathcal{A}_1, k_K^{\mathrm{sep}}\big)$$

est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel de dimension n (car $\dim_{k_K}\big(\mathcal{A}_1/p\mathcal{A}_1\big) = p^n$). Soit alors $\big\{m_1^{(1)},\dots,m_n^{(1)}\big\} \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{K_0}\text{-alg}}\big(\mathcal{A}_1, \mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)$ une base de ce dernier. Pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $m_j^{(1)}$ est donné par un vecteur colonne $\big(m_{i,j}^{(1)}\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}$. Par construction, on a

$$\sigma\big(\overline{m}_j^{(1)}\big) = \overline{\Sigma}^{-1}\overline{m}_j^{(1)}$$

où les barres désignent la réduction modulo p, et la famille $\big\{\overline{m}_j^{(1)}\big\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ est libre sur $\mathbb{F}_p$. Montrons qu'elle l'est sur k_K^{sep}. Supposons le contraire : après renumérotation, il existe une relation de dépendance linéaire $\sum_{j=1}^r \lambda_j\overline{m}_j^{(1)} = 0$ avec $\lambda_j \in k_K^{\mathrm{sep}}$ et r minimal. En particulier, $\lambda_r \neq 0$: quitte à diviser par λ_r, on peut supposer $\lambda_r = 1$. On a alors

$$\sigma\Big(\sum_{j=1}^r \lambda_j\overline{m}_j^{(1)}\Big) = \overline{\Sigma}^{-1}\Big(\sum_{j=1}^r \lambda_j^p\overline{m}_j^{(1)}\Big) = 0.$$

Comme $\overline{\Sigma}^{-1}$ est inversible, on a $\sum_{j=1}^r \lambda_j^p\overline{m}_j^{(1)} = 0$ et donc

$$\sum_{j=1}^{r-1}(\lambda_j^p - \lambda_j)\overline{m}_j^{(1)} = 0.$$

Par minimalité de r, on a $\lambda_j^p = \lambda_j$, i.e. $\lambda_j \in \mathbb{F}_p$ pour tout j, ce qui contredit l'indépendance linéaire des $\overline{m}_j^{(1)}$ sur $\mathbb{F}_p$. La matrice $M^{(1)} \in \mathrm{M}_n\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)$ dont la j-ème colonne est donnée par $m_j^{(1)}$ est donc inversible modulo p, i.e. est inversible. Comme $\mathcal{A}_1$ est finie sur $\mathcal{O}_{K_0}$, on a en fait $M^{(1)} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}})$. Par ailleurs, elle vérifie $\sigma(M^{(1)}) \equiv \Sigma^{-1}M^{(1)} \mod p\,\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}})$.

On construit par récurrence une suite de matrices $(M^{(r)})_{r\in\mathbb{N}_{>0}}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}}$ telle que pour tout $r \in \mathbb{N}_{>0}$, on a

(a) $M^{(r+1)} \equiv M^{(r)} \mod p^r\,\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}})$;

(b) $\sigma\big(M^{(r)}\big) \equiv \Sigma^{-1}M^{(r)} \mod p^r\,\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}})$.

Remarquons que comme $M^{(1)}$ est inversible, il en est de même de chacune des $M^{(r)}$. On procède de la façon suivante. Soit $r \geqslant 2$. Si $M^{(1)},\dots,M^{(r-1)}$ sont construites, on pose $M^{(r)} = M^{(r-1)}+p^{r-1}N^{(r)}$ avec $N^{(r)} \in \mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}})$ à déterminer. La condition (b) s'écrit alors

$$\sigma(M^{(r-1)} + p^{r-1}N^{(r)}) \equiv \Sigma^{-1}(M^{(r-1)} + p^{r-1}N^{(r)}) \mod p^r\,\mathrm{M}_n\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big).$$

Par construction, il existe $B^{(r)} \in \mathrm{M}_n\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)$ tel que

$$\sigma(M^{(r-1)}) = \Sigma^{-1}M^{(r-1)} + p^{r-1}B^{(r)}.$$

Il s'agit de trouver $N^{(r)}$ de sorte que

$$\sigma(N^{(r)}) \equiv \Sigma^{-1}N^{(r)} - B^{(r)} \mod p\,\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}}).$$

Écrivons $B^{(r)} = \big[b_{i,j}^{(r)}\big]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $b_{i,j}^{(r)} \in \mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}}$. Pour $j \in \{1,\dots,n\}$, on pose $\mathcal{A}_{r,j} = \mathcal{O}_{K_0}\big[b_{i,j}^{(r)}\big]_{1\leqslant i\leqslant n}[X_1,\dots,X_n]/\big(X_i^p - \sum_{j=1}^n s_{i,j}X_j - b_{i,j}^{(r)}\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Le critère jacobien montre que c'est une $\mathcal{O}_{K_0}\big[b_{i,j}^{(r)}\big]_{1\leqslant i\leqslant n}$-algèbre étale. Comme précédemment, cela implique l'existence d'une matrice colonne $n_j^{(r)}$ à coefficients dans $\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}}$ telle que $\sigma\big(n_j^{(r)}\big) \equiv \Sigma^{-1}n_j^{(r)} - b_j^{(r)} \mod p\,\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_{K_0^{\mathrm{nr}}})$, où $b_j^{(r)}$ est la j-ème colonne de $B^{(r)}$. La matrice $N^{(r)}$ dont les colonnes sont les $n_j^{(r)}$ répond alors à la question.

La condition (a) implique que la suite $(M^{(r)})_{r\in\mathbb{N}_{>0}}$ converge dans $\mathrm{M}_n\big(\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}\big)$ vers une matrice M, et que cette dernière est congrue à $M^{(1)}$ modulo p, donc inversible. Enfin, la condition (b) implique que $\sigma(M) = \Sigma^{-1}M$, ce qui achève la preuve. □

En particulier, la catégorie $\mathbf{M}_{K_0}^{\text{ét}}(\varphi)$ est tannakienne.

Corollaire 3.20. — *Soit $\lambda_0 \in \mathcal{O}_{K_0}^{\times}$. Alors il existe $\alpha \in \big(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}\big)^{\times}$ tel que $\sigma(\alpha) = \lambda_0^{-1}\alpha$.*

Démonstration. — Le φ-module $D = K_0x$ défini par $\varphi(x) = \lambda_0 x$ est étale car $\lambda_0 \in \mathcal{O}_{K_0}^{\times}$. D'après la proposition 3.19, cela implique que $(\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 : il existe $\alpha \in (\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}})^{\times}$ tel que $\varphi(\alpha\otimes x) = \alpha\otimes x$, i.e. tel que $\sigma(\alpha) = \lambda_0^{-1}\alpha$. □

3.3. Représentations de de Rham et représentations cristallines.

Rappelons que G_K opère sur les $\mathbb{Q}_p$-algèbres $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}, \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$.

Notation 3.21. — On désigne par

- $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)$) les modules $\mathrm{D}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}(V)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}}(V)$) ;
- $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $\alpha_{\mathrm{cris}}(V)$, $\alpha_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)$, $\alpha_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)$) pour $\alpha_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}}(V)$ (resp. $\alpha_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}(V)$, $\alpha_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}}(V)$, $\alpha_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}}(V)$).

D'après la proposition 2.16 (resp. la proposition 2.50, resp. le corollaire 2.30, resp. le corollaire 2.53), $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)$) est un K-espace vectoriel (resp. un K_0-espace vectoriel, resp. un K^{∇}-espace vectoriel, resp. un K_0^{∇}-espace vectoriel).

PROPOSITION 3.22. — *Si V est une représentation p-adique, les homomorphismes suivants sont injectifs :*

$$\alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V,$$

$$\alpha_{\mathrm{cris}}(V)\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V,$$

$$\alpha^{\nabla}_{\mathrm{dR}}(V)\colon\ \mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}\otimes_{K^{\nabla}} \mathrm{D}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}(V)\longrightarrow \mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V,$$

$$\alpha^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(V)\colon\ \mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{D}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(V)\longrightarrow \mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V.$$

Démonstration. — D'après la proposition 2.16 (resp. la proposition 2.50, resp. le corollaire 2.30, resp. le corollaire 2.53), l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K}=K$ (resp. $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{G_K}=K_0$, resp. $\big(\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}\big)^{G_K}=K^{\nabla}$, resp. $\big(\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\big)^{G_K}=K_0^{\nabla}$) est un corps. Par ailleurs, d'après la proposition 2.18 (resp. la proposition 2.49, resp. le fait que $\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}$ est un corps, resp. le corollaire 2.57), on a $\mathrm{C}_{\mathrm{dR}}^{G_K}=K$ (resp. $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{G_K}=K_0$, resp. $\big(\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}\big)^{G_K}=K^{\nabla}$, resp. $\big(\mathrm{C}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\big)^{G_K}=K_0^{\nabla}$). L'injectivité de l'homomorphisme $\alpha^{\nabla}_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $\alpha^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(V)$, etc.) résulte alors de la proposition 3.3. □

En particulier, pour toute représentation p-adique V de G_K, on a

$$\dim_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\big)\leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)\ \text{(resp. } \dim_{K_0}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\big)\leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)\text{, etc.).}$$

Notation 3.23. — On note

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K),\quad \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K),\quad \mathbf{Rep}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}(G_K),\quad \mathbf{Rep}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(G_K)$$

au lieu de $\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\text{-adm}}(G_K)$,

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\text{-adm}}(G_K),\ \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}\text{-adm}}(G_K),\ \mathbf{Rep}_{\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}\text{-adm}}(G_K),$$

et on appelle *représentation de de Rham* (resp. *cristalline, de de Rham horizontale, cristalline horizontale*) les objets de cette catégorie(4).

Ainsi, une représentation p-adique V de G_K est de de Rham (resp. cristalline, etc.) si et seulement si on a $\dim_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\big)=\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$ (resp. $\dim_{K_0}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\big)=\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$, etc.).

PROPOSITION 3.24. — *On a*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)^{\nabla=0}=\mathrm{D}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}(V)\quad \textit{et}\quad \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)^{\nabla=0}=\mathrm{D}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(V).$$

(4) *A priori*, la notion de représentation cristalline dépend du choix de K_0, et on devrait parler de représentations K_0-cristallines et noter cette catégorie $\mathbf{Rep}_{K_0\text{-}\mathrm{cris}}(G_K)$. On verra dans la section 3.6 que cette dernière est en fait indépendante du choix de K_0, ce qui jusifie *a posteriori* cette terminologie et ces notations.

Démonstration. — D'après la proposition 2.26, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)^{\nabla=0} &= \big((\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}\big)^{\nabla=0} = (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla=0}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}\\ &= (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K} = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V).\end{aligned}$$

On procède de même avec $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, en utilisant la proposition 2.52. □

Remarque 3.25. — Si V est de de Rham, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\big)^{\nabla=0} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\otimes_{K^{\nabla}}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V). \arrow[u] \arrow[ur, "\alpha_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)"'] & \end{tikzcd}$$

En général, cela n'implique pas que la flèche verticale est un isomorphisme i.e. que V est de Rham horizontale. Même remarque avec les représentations cristallines.

Proposition 3.26. — *Les applications naturelles*

$$\beta_{\mathrm{dR}}(V)\colon K\otimes_{K^{\nabla}}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)\longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V),$$

$$\beta_{\mathrm{cris}}(V)\colon K_0\otimes_{K_0^{\nabla}}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)\longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$$

sont injectives.

Démonstration. — On a la factorisation

$$\begin{tikzcd} K\otimes_{K^{\nabla}}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V) \arrow[r, "\beta_{\mathrm{dR}}(V)"] \arrow[d, "a"'] & \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[d, hook] \\ K\otimes_{K^{\nabla}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V \arrow[r, "b"] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V. \end{tikzcd}$$

Comme K^{∇} est un corps et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)\to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$ est une inclusion, l'application a est injective. Par ailleurs, l'homomorphisme b est injectif car $K\otimes_{K^{\nabla}}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ l'est d'après la proposition 2.31. L'application $\beta_{\mathrm{dR}}(V)$ est donc injective. L'injectivité de $\beta_{\mathrm{cris}}(V)$ se prouve de la même façon. □

Proposition 3.27. — *L'homomorphisme* $\alpha_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)$ (*resp.* $\alpha_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)$) *est bijectif si et seulement si les homomorphismes* $\beta_{\mathrm{dR}}(V)$ *et* $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ (*resp.* $\beta_{\mathrm{cris}}(V)$ *et* $\alpha_{\mathrm{cris}}(V)$) *sont bijectifs.*

Démonstration. — On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K^\nabla} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} \otimes \alpha_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K K \otimes_{K^\nabla} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} \otimes \beta_{\mathrm{dR}}(V)"] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \arrow[u, hook, "\alpha_{\mathrm{dR}}(V)"'] \end{tikzcd}$$

Si $\alpha_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$ est bijectif, il en est de même de $\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} \otimes \alpha_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$ et $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ est surjectif donc bijectif. De plus, $\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} \otimes \beta_{\mathrm{dR}}(V)$ est bijectif. Comme K est un corps, $\beta_{\mathrm{dR}}(V)$ est bijectif. Réciproquement, si $\beta_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ sont bijectifs, l'homomorphisme $\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} \otimes \alpha_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$ aussi, et donc $\alpha_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$ est bijectif. Le cas cristallin se traite de la même façon. □

Remarque 3.28. — Le résultat précédent signifie qu'une représentation V est cristalline (resp. de de Rham) horizontale si et seulement si elle est cristalline (resp. de de Rham) et la connexion sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$) est triviale.

PROPOSITION 3.29. — *L'homomorphisme naturel de K-espaces vectoriels*

$$K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

est injectif. De même, l'homomorphisme naturel de K^∇-espaces vectoriels

$$K^\nabla \otimes_{K_0^\nabla} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$$

est injectif.

Démonstration. — D'après la proposition 2.47, l'homomorphisme naturel $K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ est injectif. Il en est donc de même de l'homomorphisme K-linéaire $(K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. Comme K est libre sur K_0 et invariant sous l'action de G_K, on a

$$(K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$$

et donc un homomorphisme K-linéaire injectif $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$. De façon analogue, l'injectivité de $K^\nabla \otimes_{K_0^\nabla} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$ résulte du corollaire 2.55. □

PROPOSITION 3.30. — *Si V est une représentation cristalline* (*resp. cristalline horizontale*), *alors V est de de Rham* (*resp. de de Rham horizontale*) *et l'homomorphisme naturel*

$$K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \quad \big(\textit{resp. } K^\nabla \otimes_{K_0^\nabla} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)\big)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — D'après la proposition 3.29, l'homomorphisme $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $K^\nabla \otimes_{K_0^\nabla} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$) est injectif. On a donc

$$\dim_{K_0}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\big) \leqslant \dim_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\big) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

(resp. $\dim_{K_0^\nabla}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V)\big) \leqslant \dim_{K^\nabla}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)\big) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$). Si V est cristalline (resp. cristalline horizontale), ces inégalités sont des égalités : V est alors de de Rham (resp. de de Rham horizontale) et $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $K^\nabla \otimes_{K_0^\nabla} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^\nabla(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^\nabla(V)$) est un isomorphisme. □

Soit V une représentation p-adique. D'après les propositions 3.27 et 3.30, on a les implications suivantes

$$\begin{array}{ccc} V \text{ est cristalline horizontale} & \Longrightarrow & V \text{ est cristalline} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ V \text{ est de de Rham horizontale} & \Longrightarrow & V \text{ est de de Rham.} \end{array}$$

Remarque 3.31. — On a vu que les représentations discrètes (resp. non ramifiées) sont de de Rham (resp. cristallines). En général, elles ne sont pas horizontales.

Un exemple. Soient $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $X_i = \mathbb{G}_m/\big(t_i^{\mathbb{Z}}\big)$. Soit

$$\mathrm{T}_p(X_i) = \varprojlim_n \big(\overline{K}^\times/t_i^{\mathbb{Z}}\big)_{p^n\text{-tors}}$$

son module de Tate. On a

$$\mathrm{T}_p(X_i) = \varprojlim_n \big\{(\varepsilon^{(n)})^i (t_i^{(n)})^j,\ 0 \leqslant i, j < p^n\big\}$$

et donc $\mathrm{T}_p(X_i) = \mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_2$ où $e_1 = \varprojlim_n \varepsilon^{(n)}$ et $e_2 = \varprojlim_n t_i^{(n)}$. L'action de G_K sur $\mathrm{V}_p(X_i)$ est alors donnée par $g(e_1) = \chi(g) e_1$ et $g(e_2) = c_i(g) e_1 + e_2$, où $c_i \colon G_K \to \mathbb{Z}_p$ est le 1-cocycle décrivant l'action de G_K sur les $t_i^{(n)}$ (on a $g\big(t_i^{(n)}\big) = (\varepsilon^{(n)})^{c_i(g)} t_i^{(n)}$). La matrice de g dans la base (e_1, e_2) est donc

$$\begin{pmatrix} \chi(g) & c_i(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $f_1 = t^{-1} e_1$, on a $g(f_1) = f_1$. Posons

$$\beta_i = \log\big(t_i^{-1}[\widetilde{t}_i]\big).$$

Comme $[\widetilde{t}_i] = u_i + t_i$, on a $\beta_i = \log(1 + t_i^{-1} u_i) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}(n-1)!\, u_i^{[n]}$ et donc $\beta_i \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. On a

$$g(\beta_i) = \log\big(t_i^{-1}\big[\varepsilon^{(n)}\big]^{c_i(g)}[\widetilde{t}_i]\big),$$

i.e. $g(\beta_i) = c_i t + \beta_i$. En particulier, si $f_2 = -t^{-1}\beta_i e_1 + e_2$, on a $g(f_2) = -(c_i t + \beta_i)t^{-1}e_1 + (c_i(g)e_1 + e_2) = f_2$.

Soit maintenant

$$v = \lambda e_1 + \mu e_2 \in \left(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{V}_p(X_i)\right)^{G_K}$$

(avec $\lambda, \mu \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$). La relation $g(v) = v$ s'écrit $g(\lambda)\chi(g) + g(\mu)c_i(g) = \lambda$ et $g(\mu) = \mu$ dans la base (e_1, e_2). On a donc $\mu \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$ et on peut écrire $v = \lambda' e_1 + \mu f_2$ avec $\lambda' \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. On a alors $g(\lambda')\chi(g) = \lambda'$ i.e. $t\lambda' \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_K} = K$ et (f_1, f_2) est une base du K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{V}_p(X_i))$.

La représentation $\mathrm{V}_p(X_i)$ est donc de de Rham. Elle est même cristalline (contrairement au cas « classique » de la courbe de Tate $\mathrm{V}_p(\mathbb{G}_m/(q^{\mathbb{Z}}))$, cf. [2, II.4]) vu que $t^{-1}, \beta_i \in \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$. Par contre, comme $\beta_i \notin \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$, elle n'est pas de de Rham horizontale (elle n'est même pas $K \otimes_{K^{\nabla}} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$-admissible).

3.4. Représentations de dimension 1 et G_K-régularité de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et de B_{dR}

Rappelons que $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et que $\overline{K}, \widehat{K}^{\mathrm{nr}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ (proposition 3.14).

Proposition 3.32. — *Une représentation non ramifiée est cristalline.*

Démonstration. — L'inclusion $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (cf. prop. 2.38) induit une application injective $\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. On a donc

$$\dim_{K_0}\left(\mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V)\right) \leqslant \dim_{K_0}\left(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\right) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p}(V).$$

Si V est non ramifiée, ces inégalités sont des égalités, $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{nr}}^0(V)$ et V est cristalline. □

Soit $\eta\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ un homomorphisme continu. Soit V_η la représentation p-adique de dimension 1 qui est $\mathbb{Q}_p$ sur lequel G_K agit via le caractère η. On dit que η est de de Rham (resp. cristallin, resp. non ramifié) si V_η l'est.

Proposition 3.33. — *Soit $\eta\colon G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ un homomorphisme continu. Alors :*

(i) *le caractère η est de de Rham si et seulement si η peut s'écrire $\eta = \eta_{\mathrm{f}}\eta_{\mathrm{nr}}\chi^n$ où η_{f} est un caractère d'ordre fini, η_{nr} un caractère non ramifié et $n \in \mathbb{Z}$,*

(ii) *le caractère η est cristallin si et seulement si η peut s'écrire $\eta = \eta_{\mathrm{nr}}\chi^n$ où η_{nr} un caractère non ramifié et $n \in \mathbb{Z}$.*

En particulier, une représentation de de Rham de dimension 1 est potentiellement cristalline.

Démonstration. — Soit $V=V_\eta=\mathbb{Q}_p v$ la représentation p-adique définie par le caractère η.

(i) Supposons V de de Rham. Soit $D=\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)=(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)^{G_K}$. C'est un K-espace vectoriel de dimension 1 : il existe $b\in\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ tel que $D=K(b\otimes v)$. Il est muni d'une connexion intégrable ∇ déduite de la connexion de B_{dR}. Si $n\in\mathbb{Z}$, la représentation $\mathbb{Q}_p(n)$ est de de Rham. D'après la proposition 3.5, la représentation $V(n)$ est donc de de Rham. Par ailleurs, remplacer V par $V(n)$ revient à remplacer η par $\eta\chi^n$, et D par $K(t^{-n}b\otimes v)$. En choisissant n assez grand, on se ramène au cas où $b\in\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Rappelons qu'on a $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+=\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1,\dots,u_d]]$. Écrivons

$$b=\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}b_{\underline{n}}\underline{u}^{\underline{n}}$$

où $\underline{u}^{\underline{n}}=\prod_{i=1}^d u_i^{n_i}$ pour $\underline{n}=(n_1,\dots,n_d)\in\mathbb{N}^d$. La donnée de la connexion ∇ sur D, équivaut à celle de d dérivations $N_i\colon D\to D$. On en déduit qu'il existe $k_i\in K$ pour $i\in\{1,\dots,d\}$ tels que $N_i(b)=k_ib$. Notons

$$\mathcal{E}(k_1,\dots,k_d)=\big\{x\in\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\mid \forall i\in\{1,\dots,d\},\ N_i(x)=k_ix\big\}.$$

C'est un $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$-module. Écrivons

$$x=\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}x_{\underline{n}}\underline{u}^{\underline{n}}$$

avec $x_{\underline{n}}\in\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$ pour $\underline{n}\in\mathbb{N}$. Soit $\underline{e}_i$ le multi-indice $(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (le 1 étant à la i-ème coordonnée). On a

$$N_i(x)=\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}n_ix_{\underline{n}}\underline{u}^{\underline{n}-\underline{e}_i}\big(u_i+1\otimes[\widetilde{t}_i]\big)$$

et donc $N_i(x)=\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}\big(n_ix_{\underline{n}}+(n_i+1)(1\otimes[\widetilde{t}_i])x_{\underline{n}+\underline{e}_i}\big)\underline{u}^{\underline{n}}$. Écrivons alors k_i comme un élément de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+=\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1,\dots,u_d]]$:

$$k_i=\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d}k_{\underline{n}}^{(i)}\underline{u}^{\underline{n}}.$$

L'égalité $N_i(x)=k_ix$ se traduit alors, dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}[[u_1,\dots,u_d]]$ par les égalités

$$n_ix_{\underline{n}}+(n_i+1)\big(1\otimes[\widetilde{t}_i]\big)x_{\underline{n}+\underline{e}_i}=\sum_{\underline{m}\leqslant\underline{n}}k_{\underline{m}}^{(i)}x_{\underline{n}-\underline{m}},$$

et donc pour tout $\underline{n}\in\mathbb{N}^d$ et tout $i\in\{1,\dots,d\}$, on a

$$x_{\underline{n}+\underline{e}_i}=\frac{1}{n_i+1}\big(1\otimes[\widetilde{t}_i]^{-1}\big)\Big(\sum_{\underline{m}\leqslant\underline{n}}k_{\underline{m}}^{(i)}x_{\underline{n}-\underline{m}}\quad-n_ix_{\underline{n}}\Big).$$

On en déduit que les $x_{\underline{n}}$ se calculent de proche en proche à partir de $x_{\underline{0}}$; en particulier, ils sont tous divisibles par $x_{\underline{0}}$. L'application $\mathcal{E}(k_1,\dots,k_d)\to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$; $x\mapsto x_{\underline{0}}$ est donc un isomorphisme de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$-modules et $\mathcal{E}(k_1,\dots,k_d)$ est un $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}$-module libre de rang 1. Par ailleurs, si $x\in\mathcal{E}(k_1,\dots,k_d)$, alors $x_{\underline{0}}=0\Rightarrow x=0$. En particulier, comme $b\in\mathcal{E}(k_1,\dots,k_d)$, on a $b_{\underline{0}}\neq 0$. Il existe donc $m\in\mathbb{N}$ tel que $b_{\underline{0}}\in\mathrm{Fil}^m\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}\setminus\mathrm{Fil}^{m+1}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$. D'après ce qui précède, $b_{\underline{0}}$ divise $b_{\underline{n}}$ pour tout $\underline{n}\in\mathbb{N}^d$, et donc $t^{-m}b\in\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et $\theta(t^{-m}b)\neq 0$. Soit $c=\theta(t^{-m}b)$, on a $g(c)=(\eta^{-1}\chi^{-m})(g)\cdot c$ pour tout $g\in G_K$. Quitte à tordre V à la Tate, on peut supposer $m=0$.

La représentation V est donc C-admissible, i.e. la C-représentation (cf. [4]) associée est triviale. Ses endomorphismes de Sen sont donc triviaux : l'action de l'inertie I_K est donc finie (cf. loc. cit. Prop. 3.6).

On peut le voir directement de la façon suivante. On a un plongement $i_\sigma\colon K\to\mathbb{K}$ (fourni par le choix d'un relèvement de Frobenius) qui se prolonge en un isomorphisme $C\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}$. Il induit un homomorphisme injectif de groupes $i_\sigma^*\colon G_{\mathbb{K}}\to G_K$. Notons $I_{\mathbb{K}}$ le sous-groupe d'inertie de $G_{\mathbb{K}}$. La représentation de $G_{\mathbb{K}}$ déduite de V est $\mathbb{C}$-admissible. D'après [24, cor. du th. 11], l'action de $I_{\mathbb{K}}$ est finie. Reprenons les notations qui suivent la définition 2.13. On a $\gamma_0^\alpha\gamma_i=\gamma_i^{\chi(\gamma_0)^\alpha}\gamma_0^\alpha$ pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}_p$. Soient alors $\widetilde{\gamma}_i$ pour $i\in\{1,\dots,d\}$ des relèvements des γ_i dans G_K. On a

$$\eta(\widetilde{\gamma}_i)=\eta(\widetilde{\gamma}_i)^{\chi(\gamma_0)^\alpha}u$$

où u est une racine de l'unité (parce que $\widetilde{\gamma}_i^{-1}\widetilde{\gamma}_0^{-\alpha}\widetilde{\gamma}_i^{\chi(\gamma_0)^\alpha}\widetilde{\gamma}_0^{\alpha}\in i_\sigma^*(I_{\mathbb{K}})$, où $\widetilde{\gamma}_0$ désigne un relèvement de γ_0 dans G_K). L'élément $\eta(\widetilde{\gamma}_i)$ est donc une racine de l'unité : on en déduit que l'action de I_K (qui est extension de $i_\sigma^*(I_{\mathbb{K}})$ par $\mathrm{Ker}(\chi\colon\Gamma\to\mathbb{Z}_p^\times)$) est finie.

Comme $\mathbb{Z}_p^\times\simeq(\text{fini})\times(1+p\mathbb{Z}_p)$, le caractère η peut s'écrire $\eta=\eta_{\mathrm{f}}\eta_{\mathrm{nr}}$ où η_{f} est d'ordre fini et η_{nr} est à valeurs dans $1+p\mathbb{Z}_p$. L'action de I_K étant finie et $1+p\mathbb{Z}_p$ sans torsion, η_{nr} est trivial sur I_K, il est donc non ramifié.

Réciproquement, soit $\eta=\eta_{\mathrm{f}}\eta_{\mathrm{nr}}\chi^n$ avec η_{f} d'ordre fini, η_{nr} non ramifié et $n\in\mathbb{Z}$. D'après la proposition 3.10, le caractère η_{f} est $\overline{K}$-admissible, donc de de Rham. D'après la proposition 3.32, le caractère η_{nr} est cristallin, donc de de Rham (proposition 3.30). Comme χ^n est de de Rham pour tout $n\in\mathbb{Z}$, le caractère η est de de Rham d'après la proposition 3.5 (l'anneau B_{dR} vérifie les hypothèses de la proposition 3.5 d'après la proposition 3.22).

(ii) Supposons que V est cristalline. Le caractère η est donc de de Rham d'après la proposition 3.30. D'après ce qui précède, il s'écrit $\eta=\eta_{\mathrm{f}}\eta'_{\mathrm{nr}}\chi^n$ avec η_{f} d'ordre fini, η'_{nr} non ramifié à valeurs dans $1+p\mathbb{Z}_p$ et $n\in\mathbb{Z}$. Comme η'_{nr} est à valeurs dans $1+p\mathbb{Z}_p$, la démonstration de la proposition 3.15

montre que le cocycle η'_{nr} est trivialisé par un élément $b_{\mathrm{nr}} \in 1+p\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}}$. On a alors $b_{\mathrm{nr}} \in \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\times}$ vu que $\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$. On en déduit que η'^{-1}_{nr} est cristallin. Par ailleurs, χ^{-n} est cristallin. D'après la proposition 3.5 (l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.5 d'après la proposition 3.22), le caractère $\eta_{\mathrm{f}} = \eta\eta'^{-1}_{\mathrm{nr}}\chi^{-n}$ est donc cristallin. Comme η_{f} est d'ordre fini, on a $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $\eta_{\mathrm{f}}^N = 1$ et donc $\eta_{\mathrm{f}}^{-1} = \eta_{\mathrm{f}}^{N-1}$ est cristallin d'après la proposition 3.5.

Montrons que le caractère η_{f} est aussi non ramifié. Le noyau $\mathrm{Ker}(\eta_{\mathrm{f}})$ est un sous-groupe ouvert distingué de G_K. Il existe L/K finie galoisienne telle que $\mathrm{Ker}(\eta_{\mathrm{f}}) = G_L$. Si $b \in \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est tel que $g(b) = \eta_{\mathrm{f}}(g)b$, alors $b \in \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{G_L}$. On a donc $b \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{G_L} = L$. La proposition 2.47 implique que l'homomorphisme $\overline{K} \otimes_{K_0^{\mathrm{nr}}} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ est injectif, donc que $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \cap \overline{K} = K_0^{\mathrm{nr}}$. On a donc $b \in K_0^{\mathrm{nr}} \cap L$, ce qui montre que la représentation associée au caractère η_{f} est non ramifiée.

Le caractère $\eta_{\mathrm{nr}} = \eta_{\mathrm{f}}\eta'_{\mathrm{nr}}$ est donc non ramifié d'après la proposition 3.5 (l'anneau $\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$ vérifie les hypothèses de la proposition 3.5 d'après la proposition 3.16). On a donc $\eta = \eta_{\mathrm{nr}}\chi^n$ avec η_{nr} non ramifié et $n \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons $\eta = \eta_{\mathrm{nr}}\chi^n$ avec η_{nr} non ramifié et $n \in \mathbb{Z}$. D'après la proposition 3.32, le caractère η_{nr} est cristallin. Comme χ^n est cristallin pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le caractère η est cristallin (proposition 3.5). $\square$

Corollaire 3.34. — *Les catégories*

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K), \quad \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K), \quad \mathbf{Rep}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}(G_K), \quad \mathbf{Rep}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(G_K)$$

sont des sous-catégories tannakiennes de $\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, *et la restriction du foncteur* D_{dR} *à* $\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$ (*resp. de* $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ *à* $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$, *de* $\mathrm{D}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}$ *à* $\mathbf{Rep}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}(G_K)$, *de* $\mathrm{D}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ *à* $\mathbf{Rep}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}(G_K)$) *est un* K*-foncteur fibre* (*resp. un* K_0*-foncteur fibre, un* K^{∇}*-foncteur fibre, un* K_0^{∇}*-foncteur fibre*).

Démonstration. — Cela résulte du fait que les anneaux B_{dR}, $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{dR}}$ et $\mathrm{B}^{\nabla}_{\mathrm{cris}}$ sont G_K-réguliers (cf. définition 3.8). Les propriétés (i) et (iii) de la définition 3.8 sont évidentes et la propriété (ii) découle de la proposition 3.22. Reste à prouver la propriété (iv). Soit V une représentation p-adique de G_K de dimension 1. Elle est donnée par un homomorphisme continu $\eta \colon G_K \to \mathbb{Z}_p^{\times}$.

Supposons η de de Rham (resp. cristallin). D'après la proposition 3.33 et sa preuve, η peut s'écrire $\eta = \eta_{\mathrm{f}}\eta_{\mathrm{nr}}\chi^n$ où $n \in \mathbb{Z}$, η_{f} est un caractère d'ordre fini (resp. et cristallin) et η_{nr} un caractère non ramifié à valeurs dans $1+p\mathbb{Z}_p$ tel que η_{nr}^{-1} est lui aussi non ramifié (parce qu'il est trivialisé par un élément de $1+p\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\times}$), donc cristallin d'après la proposition 3.32. Comme

η_{f} est d'ordre fini, on a $N \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que $\eta_{\mathrm{f}}^{N} = 1$ et donc $\eta_{\mathrm{f}}^{-1} = \eta_{\mathrm{f}}^{N-1}$ est de de Rham (resp. cristallin) d'après la proposition 3.5. Par ailleurs, le caractère χ^{-n} est cristallin, donc aussi de de Rham (proposition 3.30). Le caractère $\eta^{-1} = \eta_{\mathrm{f}}^{-1}\eta_{\mathrm{nr}}^{-1}\chi^{-n}$ est donc de de Rham (resp. cristallin) d'après la proposition 3.5, i.e. $V^{\vee}$ est de de Rham (resp. cristalline).

Supposons V de de Rham horizontale (resp. cristalline horizontale). La représentation V est de de Rham (resp. cristalline) d'après la proposition 3.27. Il en est donc de même de la duale $V^{\vee}$ d'après ce qui précède. D'après la proposition 3.27, il s'agit de montrer que la connexion sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{\vee})$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V^{\vee})$) est triviale.

L'homomorphisme naturel $\beta_{\mathrm{dR}} \colon K \otimes_{K^{\nabla}} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (respectivement $\beta_{\mathrm{cris}} \colon K_0 \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$) est un isomorphisme (d'après la proposition 3.27). On en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V), K\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K\big(K \otimes_{K^{\nabla}} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V), K\big)$$

(resp. $\mathrm{Hom}_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V), K_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{K_0}(K_0 \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V), K_0)$) de K-espaces vectoriels (resp. K_0-espaces vectoriels) à connexion. Comme K^{∇} et K_0^{∇} sont des corps, on a

$$\mathrm{Hom}_K\big(K \otimes_{K^{\nabla}} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V), K\big) \simeq K \otimes_{K^{\nabla}} \mathrm{Hom}_{K^{\nabla}}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V), K^{\nabla}\big)$$

(resp. $\mathrm{Hom}_{K_0}(K_0 \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V), K_0) \simeq K_0 \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{Hom}_{K_0^{\nabla}}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V), K_0^{\nabla})$). On a donc un isomorphisme

$$\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{\vee}) \xrightarrow{\sim} K \otimes_{K^{\nabla}} \mathrm{Hom}_{K^{\nabla}}\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V), K^{\nabla}\big)$$

(resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V^{\vee}) \xrightarrow{\sim} K_0 \otimes_{K_0^{\nabla}} \mathrm{Hom}_{K_0^{\nabla}}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V), K_0^{\nabla})$) de modules à connexion sur K (resp. K_0), et la connexion sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V^{\vee})$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V^{\vee})$) est bien triviale. □

3.5. Structures supplémentaires sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.

Les modules $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$) et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}(V)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)$) sont munis de structures supplémentaires.

(i) Le K-espace vectoriel $D = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni d'une filtration décroissante, séparée et exhaustive $\{\mathrm{Fil}^r D\}_{r\in\mathbb{Z}}$. En effet, l'anneau B_{dR} est muni d'une filtration $\mathrm{Fil}^{\bullet}$, stable par l'action de G_K. Elle induit une filtration sur $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et donc sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$.

Le K-espace vectoriel $D = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est aussi muni d'une connexion intégrable ∇ vérifiant la transversalité de Griffith

$$\nabla(\mathrm{Fil}^r D) \subseteq \mathrm{Fil}^{r-1} D \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

En effet, l'application

$$V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \longrightarrow (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}, \quad v \otimes b \longmapsto v \otimes \nabla(b)$$

induit une application $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$ car ∇ commute à l'action de G_K (proposition 2.24). Comme ∇ est une connexion intégrable, c'est encore une connexion intégrable, on la note encore ∇. Comme ∇ vérifie la transversalité de Griffith sur B_{dR} (proposition 2.23), il en est de même de la connexion induite sur $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

(ii) Le K_0-espace vectoriel $D_0 = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un opérateur φ semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu sur K_0. En effet, l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ est muni d'un opérateur φ semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu sur K_0 qui commute à l'action de G_K. Il induit donc un opérateur φ semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu sur K_0 sur $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ par $\varphi(b \otimes v) = \varphi(b) \otimes v$, et comme φ commute à l'action de G_K, il laisse stable le sous-K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$.

Par ailleurs, le K-espace vectoriel $D_{0K} = K \otimes_{K_0} D_0$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $D = \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ (proposition 3.29). Il est donc muni d'une filtration $\{\mathrm{Fil}^r D_{0K}\}_{r\in\mathbb{Z}}$ décroissante, séparée et exhaustive et d'une connexion intégrable ∇ induites par l'homomorphisme injectif $D_{0K} \to D$. De plus on a $\nabla\varphi = \varphi\nabla$ sur D_0 (en effet, d'après la proposition 2.58, l'opérateur φ et la connexion ∇ commutent sur $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, il en est donc de même sur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$).

(iii) Le K^∇-module $D^\nabla = \mathrm{D}^\nabla_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni d'une filtration $\{\mathrm{Fil}^r D^\nabla\}_{r\in\mathbb{Z}}$ qui est décroissante, séparée et exhaustive.

(iv) Le K_0^∇-module $D_0^\nabla = \mathrm{D}^\nabla_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un opérateur φ semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu sur K_0^∇. Par ailleurs, le K^∇-module $D^\nabla_{0K^\nabla} = K^\nabla \otimes_{K_0^\nabla} D_0^\nabla$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $D^\nabla = \mathrm{D}^\nabla_{\mathrm{dR}}(V)$ (propostition 3.29). Il est donc muni d'une filtration décroissante $\{\mathrm{Fil}^r D^\nabla_{0K^\nabla}\}_{r\in\mathbb{Z}}$ séparée et exhaustive induite par l'homomorphisme injectif $D^\nabla_{0K^\nabla} \to D^\nabla$.

Proposition 3.35. — *Si V est une représentation p-adique de de Rham* (*resp. cristalline, de de Rham horizontale, cristalline horizontale*), *l'isomorphisme $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ (resp. etc.) est compatible aux structures supplémentaires énumérées ci-dessus. De même, les isomorphismes et suites exactes qu'on déduit de la proposition 3.5 – du fait que D_{dR} (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$, resp. etc.) induit un K-foncteur fibre (resp. etc.) sur la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(G_K)$ (resp. etc.) – respectent les structures supplémentaires.*

Démonstration. — Le point non trivial est la stricte compatibilité aux filtrations. On dispose du foncteur $\mathbf{gr}_K$ qui à un K-module filtré associe son gradué. C'est un foncteur exact de la catégorie des K-modules filtrés vers la catégorie des K-modules gradués, qui commute en outre au produit tensoriel. Soit

$$\mathrm{B}_{\mathrm{HT}} := \mathbf{gr}_K(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$$

(cf. proposition 2.22). O. Hyodo a montré ([20, Proposition 2.1]) que pour toute représentation p-adique V, l'homomorphisme naturel

$$\alpha_{\mathrm{HT}}(V)\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

est injectif, où $\mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V) = (\mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$.

Soit V une représentation p-adique de de Rham. On a $\mathbf{gr}_K(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}) = \mathrm{D}_{\mathrm{HT}}(V)$ et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{gr}_K(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{gr}_K(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \arrow[d, equal] \\
\mathbf{gr}_K(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}) \otimes_K \mathbf{gr}_K(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}) \arrow[r, "\alpha_{\mathrm{HT}}(V)"] & \mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V.
\end{tikzcd}$$

L'injectivité de $\alpha_{\mathrm{HT}}(V)$ implique celle de l'application

$$\mathbf{gr}_K\big(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\big) \longrightarrow \mathbf{gr}_K(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

et donc la stricte compatibilité de $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$ aux filtrations.

Soient V_1 et V_2 deux représentations p-adiques de de Rham. Montrons que l'isomorphisme $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)$ est compatible aux filtrations. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{\mathrm{dR}}(V_1)\otimes\alpha_{\mathrm{dR}}(V_2)"'] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) \arrow[d, "\alpha_{\mathrm{dR}}(V_1\otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)"] \\
(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1) \otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}} (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2) \arrow[r] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2
\end{tikzcd}$$

où $\alpha_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes \alpha_{\mathrm{dR}}(V_2)$ et $\alpha_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)$ sont des isomorphismes de modules filtrés sur K d'après ce qui précède. Il en est donc de même de l'homomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2) \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)$. En passant aux gradués, on a un isomorphisme

$$\mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_K \mathbf{gr}_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2)\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{HT}} \otimes_K \mathbf{gr}_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)\big)$$

et donc un isomorphisme

$$\mathbf{gr}_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1) \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_2)\big) \xrightarrow{\sim} \mathbf{gr}_K\big(\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V_1 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)\big)$$

vu que K est un corps.

Raisonnement analogue pour le dual. $\square$

Notation 3.36. — On note $K_{0,\sigma}$ (resp. $\mathrm{B}_{\mathrm{cris},\varphi}$) le corps K_0 (resp. l'anneau $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$) vu comme K_0-algèbre (resp. $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-algèbre) via σ (resp. via φ).

Proposition 3.37. — *Si V est cristalline (resp. cristalline horizontale), l'homomorphisme K_0-linéaire (resp. K_0^{∇}-linéaire) $\widetilde{\varphi}\colon K_{0,\sigma}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\to\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\widetilde{\varphi}\colon K_{0,\sigma}^{\nabla}\otimes_{K_0^{\nabla}}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)\to\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)$) est un isomorphisme. En particulier, le K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. le K_0^{∇}-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V)$) est engendré par $\varphi(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))$ (resp. par $\varphi(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}(V))$).*

Démonstration. — Supposons que la représentation V est cristalline. On a un isomorphisme

$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}(K_{0,\sigma}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))\simeq\mathrm{B}_{\mathrm{cris}\,\varphi}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}_{\mathrm{cris},\varphi}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \arrow[r, "\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}\otimes\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \arrow[dd, "\alpha_{\mathrm{cris}}(V)", "\wr"'] \\
\mathrm{B}_{\mathrm{cris},\varphi}\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) \arrow[d, "\wr", "\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}\otimes\alpha_{\mathrm{cris}}(V)"'] & \\
\mathrm{B}_{\mathrm{cris},\varphi}\otimes_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V
\end{tikzcd}$$

l'homomorphisme du bas étant donné par $b_1\otimes b_2\otimes v\mapsto b_1\varphi(b_2)\otimes v$. Il en résulte que l'homomorphisme $\mathrm{Id}_{\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}}\otimes\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme. L'homomorphisme K_0-linéaire $\widetilde{\varphi}\colon K_{0,\sigma}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\to\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est donc un isomorphisme.

Le cas où V est cristalline horizontale se traite de façon identique. $\square$

Si $V\in\mathbf{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, posons $\mathrm{D}_{\max}(V)=\big(\mathrm{B}_{\max}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\big)^{G_K}$. C'est un K_0-espace vectoriel.

Proposition 3.38. — *On a $\mathrm{D}_{\max}(V)=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. En particulier, les représentations $\mathrm{B}_{\max}$-admissibles ne sont autres que les représentations cristallines.*

Démonstration. — Soit $x\in\mathcal{O}_{K_0}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$ tel que $x\in\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$. Il existe $y\in\mathcal{O}_{K_0}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$ tel que $\varphi(x)=x^p+py$, d'où

$$\varphi(x/p)=(p-1)!\,x^{[p]}+y\in\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\,.$$

Comme $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est un anneau et φ un morphisme d'anneaux, on a donc $\varphi(\mathrm{A}_{\max})\subseteq\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$. Ainsi, on a $\varphi(\mathrm{B}_{\max})\subseteq\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\subseteq\mathrm{B}_{\max}$, d'où $\varphi(\mathrm{D}_{\max}(V))\subseteq\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\subseteq\mathrm{D}_{\max}(V)$. Un raisonnement identique à celui de la preuve de la proposition 3.37 montre que $\varphi(\mathrm{D}_{\max}(V))$ engendre le K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\max}(V)$: on a bien $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)=\mathrm{D}_{\max}(V)$. □

3.6. Représentations cristallines : indépendance des choix.

L'objet de cette partie est de montrer que la notion de représentation cristalline ne dépend pas des choix faits pour K_0 et σ.

Rappelons qu'on a $K=K_0[\varpi]$ où ϖ est une uniformisante de K. On choisit $\widetilde{\varpi}\in R$ tel que $\widetilde{\varpi}^{(0)}=\varpi$ et on pose

$$\xi_\varpi=\varpi-[\widetilde{\varpi}]\in\mathcal{O}_K\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\subseteq\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+\,.$$

Notons $e=e_K$ l'indice de ramification absolu de K (c'est aussi de degré de l'extension K/K_0 vu que l'extension résiduelle est triviale).

Définition 3.39. — *On note* $\mathrm{A}_{\max,K}$ *le séparé complété, pour la topologie p-adique, de la sous-*$\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$*-algèbre de* $K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$ *engendrée par* $\varpi^{-1}\operatorname{Ker}(\theta_K)$.

On obtient ainsi une $\mathcal{O}_K$-algèbre qui ne dépend que de K. On pose

$$\mathrm{B}_{\max,K}^+=\mathrm{A}_{\max,K}[p^{-1}].$$

Proposition 3.40. — *On a* $\mathrm{A}_{\max,K}\subseteq p^{-1}\big(\mathcal{O}_K\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\mathrm{A}_{\max}\big)$.

Démonstration. — Le noyau de θ_K dans $\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$ est engendré par le noyau de θ_{K_0} dans $\mathcal{O}_{K_0}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$ et ξ_ϖ. Par ailleurs, on peut écrire $\varpi^e=up$ où $u\in\mathcal{O}_K^\times$ est une unité, et donc $\widetilde{\varpi}^e=\widetilde{u}\widetilde{p}$ dans R. On a donc $([\widetilde{\varpi}]/\varpi)^e=\alpha[\widetilde{p}]/p$, où α est une unité, et

$$\big([\widetilde{\varpi}]/\varpi\big)^s=p^{-1}\big(\alpha[\widetilde{p}]/p\big)^q(p/\varpi^r)[\widetilde{\varpi}]^r$$

où $s=eq+r$ est la division euclidienne de s par e. La sous-$\mathcal{O}_K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$-algèbre $\mathcal{A}_K$ de $K\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$ engendrée par ξ_ϖ/ϖ et $\varpi^{-1}\big(\mathcal{O}_K\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})\big)$ est donc incluse dans $p^{-1}\big(\mathcal{O}_K\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\mathcal{A}\big)$, où $\mathcal{A}$ est la sous-$\mathcal{O}_{K_0}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$-algèbre de $K_0\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{W}(\mathrm{R})$ engendrée par $p^{-1}\operatorname{Ker}(\theta_{K_0})$. Le séparé complété de cette dernière pour la topologie p-adique est $\mathrm{A}_{\max}$. Par ailleurs, $p^{-1}\big(\mathcal{O}_K\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\mathrm{A}_{\max}\big)$ est lui aussi séparé et complet pour la topologie p-adique (car $\mathcal{O}_K$ est un $\mathcal{O}_{K_0}$-module libre de rang e). L'énoncé s'obtient donc en passant au complété pour la topologie p-adique. □

On en déduit une inclusion $\mathrm{B}_{\max,K}^+\subseteq K\otimes_{K_0}\mathrm{B}_{\max}^+$.

PROPOSITION 3.41. — *Si N est un entier tel que $p^N \geqslant e$, on a*

$$\varphi^N(\mathrm{B}^+_{\max}) \subseteq \mathrm{B}^+_{\max,K}\,.$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier que $\varphi^N(\mathrm{A}^+_{\max}) \subseteq \mathrm{B}^+_{\max,K}$, et comme $\mathrm{A}_{\max} = \mathrm{A}^{\nabla}_{\max}\{u_1/p, \dots, u_d/p\}$ d'après la proposition 2.39, il suffit de voir que $\varphi^N(\xi/p) \in \mathrm{B}^+_{\max,K}$ et $\varphi^N(u_i/p) \in \mathrm{B}^+_{\max,K}$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. On a $\xi/p = 1 - [\widetilde{p}]/p$ donc

$$\varphi(\xi/p) = 1 - p^{p-1}\big([\widetilde{p}]/p\big)^p = 1 - p^{p-1}\alpha^{-p}\big([\widetilde{\varpi}]/\varpi\big)^{pe} \in \mathrm{A}_{\max,K}$$

(avec les notations de la preuve précédente). On a

$$\varphi(u_i) = \sigma(t_i) - (t_i - u_i)^p = \sigma(t_i) - t_i^p + (-1)^{p-1}u_i^p - \sum_{j=1}^{p-1}\binom{p}{j} t_i^j(-u_i)^{p-j}.$$

Comme $\sigma(t_i) - t_i^p \in p\mathcal{O}_{K_0}$, on a $\varphi(u_i) = p\alpha_i^{(1)} + (-1)^{p-1}u_i^p$ avec $\alpha_i^{(1)}$ dans $\mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})$. Une récurrence immédiate montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}_{>0}$, il existe $\alpha_i^{(n)} \in \mathcal{O}_{K_0} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(\mathrm{R})$ tel que

$$\varphi^n(u_i) = p\alpha_i^{(n)} + (-1)^{p-1}u_i^{p^n}.$$

On a alors

$$\varphi^N\Big(\frac{u_i}{p}\Big) = \alpha_i^{(N)} + (-1)^{p-1}\frac{u_i^{p^N}}{p} = \alpha_i^{(N)} + (-1)^{p-1}u\frac{u_i^{p^N}}{\varpi^e} \in \mathrm{A}_{\max,K}$$

vu que $p^N \geqslant e$ (rappelons que $u \in \mathcal{O}_K^\times$ est tel que $\varpi^e = up$). □

En particulier, on a $t \in \mathrm{B}^+_{\max,K}$: on pose

$$\mathrm{B}_{\max,K} = \mathrm{B}^+_{\max,K}[t^{-1}].$$

PROPOSITION 3.42. — *Soit V une représentation p-adique. Alors V est $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-admissible si et seulement si elle est $\mathrm{B}_{\max,K}$-admissible. En particulier, la notion de représentation cristalline ne dépend que de K et pas du choix de K_0.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.38, on a $\mathrm{D}_{\max}(V) = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Par ailleurs, si $p^N \geqslant e$, on a $\varphi^N(\mathrm{B}_{\max}) \subseteq \mathrm{B}_{\max,K}$, donc $K \otimes_{\sigma^N(K_0)} \varphi^N(\mathrm{B}_{\max}) \subseteq \mathrm{B}_{\max,K} \subseteq K \otimes_{K_0} \mathrm{B}_{\max}$. On a donc

$$K \otimes_{\sigma^N(K_0)} \varphi^N\big(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)\big) \subseteq \big(\mathrm{B}_{\max,K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big)^{G_K} \subseteq K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V).$$

Comme $\varphi(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))$ engendre $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ (proposition 3.37), on a $K \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) = \big(\mathrm{B}_{\max,K} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big)^{G_K}$. Comme $\mathrm{B}_{\max,K}$ ne dépend que de K, la dimension de $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ et donc le fait que V est cristalline ou non ne dépendent que de K (et pas du choix de K_0). □

Notation 3.43. — Notons $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K}$ le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{W}(R)$ relativement au noyau de l'homomorphisme θ_K, compatibles avec les puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p.

PROPOSITION 3.44. — *L'anneau $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K}$ est le séparé complété pour la topologie p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ relativement à l'idéal engendré par ξ_ϖ, compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal engendré par p et $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$.*

Démonstration. — On a un homomorphisme naturel $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K}$ et donc un homomorphisme $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K}$. Ce dernier induit un homomorphisme

$$h\colon (\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{\mathrm{DP}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K}$$

où $(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{\mathrm{DP}}$ désigne l'enveloppe à puissances divisées de $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_K)$, compatibles avec les puissances divisées sur l'idéal engendré par p et $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$. D'après la propriété universelle des enveloppes à puissances divisées, la réduction modulo p^n de h est un isomorphisme pour tout n, on a donc un isomorphisme $\big((\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}})^{\mathrm{DP}}\big)^{\widehat{}} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K}$ entre les complétés pour la topologie p-adique. Comme l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$ de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ a déjà des puissances divisées, il suffit donc de voir que le noyau de θ_K dans $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est engendré par ξ_ϖ et $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$.

Soit $x \in \mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ avec $\theta_K(x) = 0$. Le $\mathcal{O}_{K_0}$-module $\mathcal{O}_K$ est libre de base $\{1, \varpi, \ldots, \varpi^{e-1}\}$: écrivons $x = \sum_{n=0}^{e-1} \varpi^n \otimes a_n$. On a

$$x = \sum_{n=0}^{e-1} (\varpi^n \otimes 1 - 1 \otimes [\widetilde{\varpi}]^n)(1 \otimes a_n) + 1 \otimes y \quad \text{avec} \quad y = \sum_{n=0}^{e-1} [\widetilde{\varpi}]^n a_n,$$

soit $x = \xi_\varpi z + 1 \otimes y$ avec $z \in \mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ et $y \in \mathrm{Ker}(\theta_{K_0})$. L'idéal $\mathrm{Ker}(\theta_K)$ dans $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ est donc engendré par ξ_ϖ et le noyau de θ_{K_0} de $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$, ce qu'on voulait. $\square$

Remarque 3.45. — Une façon naturelle et intrinsèque de définir les représentations cristallines consiste à dire que ce sont les représentations $\mathrm{B}_{\mathrm{cris},K}$-admissibles, où $\mathrm{B}_{\mathrm{cris},K} = \mathrm{A}_{\mathrm{cris},K}[1/pt]$ (on a

$$\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K} = \varprojlim_n \mathcal{O}_n^{\mathrm{cris}}\big(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} | \mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K\big)$$

(cf. [17, II 1.2])). Cette définition coïncide avec celle donnée plus haut lorsque $e \leqslant p-1$ (i.e. quand il y a une structure d'idéal à puissances divisées sur l'idéal maximal de $\mathcal{O}_K$), parce qu'alors $\mathrm{A}_{\mathrm{cris},K} \subseteq \mathrm{A}_{\max,K}$. J'ignore si c'est le cas pour e quelconque.

4. Les (φ,∇)-modules filtrés

4.1. La catégorie des (φ,∇)-modules filtrés

Les objets que l'on va considérer dans cette section sont des objets de la catégorie des F-isocristaux sur k_K qui sont munis d'une filtration sur K. Cette catégorie est équivalente (par le choix du sous-corps fermé K_0 de K de même corps résiduel et admettant p pour uniformisante), à la catégorie (plus explicite) des K_0-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une connexion formelle quasi-nilpotente, d'un opérateur de Frobenius qui est σ-linéaire et horizontal pour la connexion, ainsi que d'une filtration après extension des scalaires à K (parce que $\mathcal{O}_{K_0}$ est une W-algèbre formellement lisse d'après [18, Théorème 19.8.2]), cf. [3, §6] ou [22, 2.4]). C'est dans cette catégorie qu'on va travailler.

On a

$$\widehat{\Omega} \simeq \bigoplus_{i=1}^{d} K_0 \,\mathrm{d}\log(t_i).$$

Soit D un K-espace vectoriel. La donnée d'une connexion $\nabla\colon D \to D \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$ est équivalente à la donnée de d dérivations $N_i\colon D \to D$ (correspondant à la projection $\widehat{\Omega} \to K_0 \,\mathrm{d}\log(t_i)$). Rappelons que la connexion est intégrable si et seulement si les dérivations N_i commutent deux à deux (cf. [21, 1.0]). La catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une connexion intégrable est abélienne.

Définition 4.1. — *Un* ∇-module *D sur K est la donnée d'un K-espace vectoriel de dimension finie D, muni d'une connexion intégrable $\nabla\colon D \to D \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$. Un* morphisme de ∇-modules *$f\colon D \to D'$ est une application K-linéaire horizontale. On obtient ainsi une catégorie abélienne $W[p^{-1}]$-linéaire. On la note $\mathbf{M}_K(\nabla)$.*

Proposition 4.2. — *Soit D un K_0-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un opérateur de Frobenius $\varphi\colon D \to D$ qui est semi-linéaire par rapport au Frobenius sur K_0. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'homomorphisme* K_0-linéaire $\widetilde{\varphi}\colon K_{0,\varphi}\otimes_{K_0} D\to D$ *déduit de* φ *est un isomorphisme.*

(ii) $\varphi(D)$ *engendre le* K_0*-espace vectoriel* D.

Démonstration. — En prenant la puissance extérieure maximale, on se ramène au cas d'un espace vectoriel de dimension 1 pour lequel c'est évident. □

Définition 4.3. — *Soit* D *un* K_0*-espace vectoriel à connexion. On dit que la connexion* ∇ *est* quasi-nilpotente *s'il existe un sous-*$\mathcal{O}_{K_0}$*-module* $\mathcal{D}$ *de* D *qui est séparé et complet pour la topologie* p*-adique, stable par* ∇ (*i.e. tel que* $\nabla(\mathcal{D})\subseteq\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_{K_0}}\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K_0}}$) *tel que* $D=\mathcal{D}[p^{-1}]$, *et que la connexion induite par réduction modulo* p *est nilpotente (cette dernière condition revient à demander qu'il existe des entiers* e_i *tels que* $\prod_{i=1}^{d}(N_i/t_i)^{pe_i}$ *envoie* $\mathcal{D}$ *dans* $p\mathcal{D}$ (*où les* N_i *pour* $i\in\{1,\dots,d\}$ *sont les dérivations associées à* ∇).

Définition 4.4. — *Un* (φ,∇)-module sur K_0 *est un* ∇*-module* D *sur* K_0 *tel que la connexion soit quasi-nilpotente, qui est muni d'un opérateur de Frobenius* $\varphi\colon D\to D$ *semi-linéaire par rapport au Frobenius sur* K_0 *tel que* $\varphi(D)$ *engendre le* K_0*-espace vectoriel* D *et tel que* $\varphi\nabla=\nabla\varphi$. *Un* morphisme de (φ,∇)-modules $f\colon(D_1,\varphi_1)\to(D_2,\varphi_2)$ *est la donnée d'un morphisme* f *entre les* ∇*-modules sur* K_0 *sous-jacents tel que* $f\circ\varphi_1=\varphi_2\circ f$. *On obtient ainsi une catégorie* $\mathbb{Q}_p$*-linéaire, notée* $\mathbf{M}_{K_0}(\varphi,\nabla)$.

Remarque 4.5. — Contrairement au cas où $d=0$ (i.e. lorsque k_K est parfait), le Frobenius $\sigma\colon K_0\to K_0$ n'est pas surjectif si $d>0$ (cela se voit, par exemple, en remarquant que $\sigma\big(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K_0}}\big)\subseteq p\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{K_0}}$). En particulier, les conditions de la proposition 4.2 ne sont alors pas équivalentes à l'injectivité de φ sur D. C'est pour cela que dans la définition qui précède, on demande que D vérifie les conditions de la proposition 4.2 et pas seulement que φ soit injectif, comme on le fait d'habitude (cf. [16, 4.2.1]).

Proposition 4.6. — *La catégorie* $\mathbf{M}_{K_0}(\varphi,\nabla)$ *est abélienne.*

Démonstration. — Compte tenu du fait que la catégorie $\mathbf{M}_{K_0}(\nabla)$ est abélienne, il s'agit de vérifier que pour un morphisme f de (φ,∇)-modules sur K_0, les Frobenius induits sur $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ (dans la catégorie $\mathbf{M}_{K_0}(\nabla)$) sont tels que $\varphi(\mathrm{Ker}(f))$ (resp. $\varphi(\mathrm{Coker}(f))$) engendre $\mathrm{Ker}(f)$ (resp. $\mathrm{Coker}(f)$), et que les connexions induites sur $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}(f)$ sont quasi-nilpotentes. Il suffit de voir que si $(D_1,\nabla_1),(D_2,\nabla_2)$ sont des ∇-modules sur K_0, munis d'opérateurs φ_1,φ_2 semi-linéaires par rapport au Frobenius sur K_0, si (D,φ,∇) est un (φ,∇)-module sur K_0 tel que (D,∇) est extension de (D_2,∇_2) par (D_1,∇_1), et tel que φ induit φ_i sur D_i

(pour $i \in \{1,2\}$), alors $(D_1, \varphi_1, \nabla_1)$ et $(D_2, \varphi_2, \nabla_2)$ sont des (φ, ∇)-modules sur K_0.

D'après la proposition 4.2, il suffit de voir que les homomorphismes linéarisés $\widetilde{\varphi}_1$ et $\widetilde{\varphi}_2$ sont des isomorhismes, sachant que $\widetilde{\varphi}\colon K_{0,\varphi} \otimes_{K_0} D \to D$ l'est. Comme (D, φ) est extension de (D_2, φ_2) par (D_1, φ_1), on a $\det(\widetilde{\varphi}) = \det(\widetilde{\varphi}_1) \otimes \det(\widetilde{\varphi}_2)$. Si $\det(\widetilde{\varphi})$ est un isomorphisme, il en est donc de même de $\det(\widetilde{\varphi}_1)$ et de $\det(\widetilde{\varphi}_2)$.

Supposons ∇ quasi-nilpotente : il existe un sous-$\mathcal{O}_{K_0}$-module $\mathcal{D}$ de D séparé et complet pour la topologie p-adique, stable par ∇, tel que $D = \mathcal{D}[p^{-1}]$, et des entiers e_i tels que $\prod_{i=1}^{d} (N_i/t_i)^{pe_i}$ envoie $\mathcal{D}$ dans $p\mathcal{D}$. On voit que ∇_1 et ∇_2 sont quasi-nilpotentes en considérant $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} \cap D_1$ et $\mathcal{D}_2$ l'image de $\mathcal{D}$ dans D_2. □

Si D_1 et D_2 sont deux (φ, ∇)-modules sur K_0, on a une structure de (φ, ∇)-module sur K_0 sur $D_1 \otimes_{K_0} D_2$ donnée (avec des notations évidentes) par

$$\varphi(x_1 \otimes x_2) = \varphi_1(x_1) \otimes \varphi_2(x_2) \quad \text{et} \quad \nabla(x_1 \otimes x_2) = x_1 \otimes \nabla(x_2) + x_2 \otimes \nabla(x_1)$$

pour $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$. Le linéarisé $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_1 \otimes \widetilde{\varphi}_2$ est bien un isomorphisme. On note

$$D_1 \otimes D_2$$

le (φ, ∇)-module sur K_0 ainsi défini. La catégorie $\mathbf{M}_{K_0}(\varphi, \nabla)$ a un objet unité : $\mathbf{1} = (K_0, \varphi, \mathrm{d})$ (connexion triviale). De même, si h est un entier et D un (φ, ∇)-module sur K_0, le K_0-espace vectoriel $\wedge^h D$ est naturellement muni d'une structure de (φ, ∇)-module sur K_0.

Par ailleurs, on a un Hom interne dans la catégorie des (φ, ∇)-modules sur K_0 : si $D_1, D_2 \in \mathbf{M}_{K_0}(\varphi, \nabla)$, alors $\mathbf{Hom}(D_1, D_2)$ est le K_0-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{K_0}(D_1, D_2)$ muni du Frobenius φ et de la connexion ∇ définis (avec des notations évidentes) par

$$\widetilde{\varphi}(f)(x) = \widetilde{\varphi}_2((\mathrm{Id} \otimes f)(\widetilde{\varphi}_1^{-1} x))$$

($K_{0,\varphi} \otimes_{K_0} \mathrm{Hom}_{K_0}(D_1, D_2)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{K_0}(K_{0,\varphi} \otimes_{K_0} D_1, K_{0,\varphi} \otimes_{K_0} D_2)$, on voit par ailleurs ainsi que $\widetilde{\varphi}$ est un isomorphisme) et avec

$$\nabla(f)(x) = \nabla_2 \circ f(x) - f \circ \nabla_1(x)$$

pour $f \in \mathrm{Hom}_{K_0}(D_1, D_2)$ et $x \in D_1$.

Ce qui précède implique que la catégorie $\mathbf{M}_{K_0}(\varphi, \nabla)$, qui est une catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire, est tannakienne (cf. [9]).

Remarque 4.7. — L'équivalence entre la catégorie des F-isocristaux sur k_K et la catégorie $\mathbf{M}_{K_0}(\varphi, \nabla)$ (cf. [22, 2.4]) montre que cette dernière ne dépend pas (à équivalence près) du choix de K_0 et du relèvement σ du Frobenius.

Si $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbf{1}(n)$ le (φ, ∇)-module sur K_0 donné par $(K_0, p^{-n}\sigma, \mathrm{d})$ (connexion triviale). On a $\mathbf{1}(0) = \mathbf{1}$. Si D est un (φ, ∇)-module sur K_0, on note

- $D(n) = D \otimes \mathbf{1}(n)$ (tordu à la Tate),
- $D^\vee = \mathbf{Hom}(D, \mathbf{1})$ (dual de D).

Soit D un (φ, ∇)-module sur K_0 de dimension h. On dispose alors du (φ, ∇)-module $\wedge^h D$ sur K_0. Son K_0-espace vectoriel sous-jacent est de dimension 1. Soit x un vecteur non nul de $\wedge^h D$. Il existe $\lambda \in K_0$ tel que $\varphi(x) = \lambda x$. La valuation p-adique $v(\lambda)$ est un entier (car $\mathcal{O}_{K_0}$ est un anneau de Cohen pour k_K).

Notation 4.8. — On note $t_N(D)$ l'entier ainsi obtenu.

Remarque 4.9. — (i) Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_h\}$ est une base de D, et $\mathcal{M}$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes de $\varphi(e_j)$ sur $\mathcal{B}$, la matrice $\mathcal{M}$ et son déterminant dépendent du choix de la base $\mathcal{B}$ (car φ est seulement *semi*-linéaire), mais $v(\det(\mathcal{M}))$ n'en dépend pas, et c'est $t_N(D)$.

(ii) Si D est un (φ, ∇)-module de rang h sur K_0 et n un entier rationnel, on a $t_N(D^\vee) = -t_N(D)$ et $t_N(D(n)) = t_N(D) - nh$.

Proposition 4.10. — *La fonction t_N est additive.*

Démonstration. — Soit $0 \to D' \to D \to D'' \to 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathbf{M}_{K_0}(\varphi, \nabla)$. Notons h, h' et h'' les dimensions de D, D' et D'' respectivement. On a $h = h' + h''$ et $\wedge^h D \simeq \big(\wedge^{h'} D'\big) \otimes \big(\wedge^{h''} D''\big)$ et donc $t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'')$. □

Définition 4.11. — *Un* ∇-module filtré sur K *est la donnée d'un* ∇-*module* Δ *sur* K, *et d'une filtration* $(\mathrm{Fil}^r \Delta)_{r \in \mathbb{Z}}$ *sur le* K-*espace vectoriel* Δ *sous-jacent qui est décroissante, séparée* (*i.e.* $\mathrm{Fil}^r \Delta = \{0\}$ *pour* $r \gg 0$), *exhaustive* (*i.e.* $\mathrm{Fil}^r \Delta = \Delta$ *pour* $r \ll 0$), *telle que*

$$\nabla(\mathrm{Fil}^r \Delta) \subseteq \mathrm{Fil}^{r-1} \Delta \otimes_{K_0} \widehat{\Omega}$$

(*transversalité de Griffith*). *Un* morphisme de ∇-modules filtrés $f \colon \Delta_1 \to \Delta_2$ *est un morphisme entre les* ∇-*modules sous-jacents qui respecte les filtrations i.e. tel que* $f(\mathrm{Fil}^r \Delta_1) \subseteq \mathrm{Fil}^r \Delta_2$. *On obtient ainsi une catégorie additive* $W[p^{-1}]$-*linéaire, notée* $\mathbf{MF}_K(\nabla)$.

Remarque 4.12. — La catégorie $\mathbf{MF}_K(\nabla)$ n'est pas abélienne. Cela résulte du fait que la catégorie $\mathbf{MF}_K$ des K-espaces vectoriels filtrés n'est pas abélienne, et que tout morphisme $f\colon \Delta_1 \to \Delta_2$ dans $\mathbf{MF}_K$ est l'image par le foncteur d'oubli d'un morphisme de $\mathbf{MF}_K(\nabla)$. Pour voir ce dernier point, il suffit de choisir des bases de Δ_1 et Δ_2 adaptées à f et aux filtrations (c'est possible vu que f respecte les filtrations) et de munir Δ_1 et Δ_2 des connexions triviales pour ces bases (i.e. dont la matrice est d'identité dans ces bases).

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux ∇-modules filtrés sur K, on a une structure de ∇-module filtré sur K sur $\Delta_1 \otimes_K \Delta_2$ donnée par la connexion habituelle et la filtration définie (avec des notations évidentes) par

$$\mathrm{Fil}^r(\Delta_1 \otimes_K \Delta_2) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Im}(\mathrm{Fil}^s \Delta_1 \otimes_K \mathrm{Fil}^{r-s} \Delta_2 \longrightarrow \Delta_1 \otimes_K \Delta_2)$$

pour $r \in \mathbb{Z}$. Le gradué est alors

$$\mathrm{Gr}^r(\Delta_1 \otimes_K \Delta_2) \simeq \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}^s(\Delta_1) \otimes_K \mathrm{Gr}^{r-s}(\Delta_2).$$

On note $\Delta_1 \otimes \Delta_2$ le ∇-module filtré sur K ainsi défini. On a un objet unité : $\mathbf{1}_K = (K, \mathrm{d}, \mathrm{Fil}^\bullet)$ (connexion triviale) avec $\mathrm{Fil}^r \mathbf{1}_K = \mathbf{1}_K$ si $r \leqslant 0$ et $\mathrm{Fil}^r \mathbf{1}_K = 0$ si $r > 0$. De même, si Δ est un ∇-module filtré et h un entier, on a une structure naturelle de ∇-module filtré sur le K-espace vectoriel $\wedge^h \Delta$.

Par ailleurs, on a un Hom interne dans la catégorie des ∇-modules filtrés sur K : si $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbf{M}_K(\nabla)$, alors $\mathbf{Hom}(\Delta_1, \Delta_2)$ est le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_K(\Delta_1, \Delta_2)$ muni de la connexion habituelle et de la filtration définie par

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fil}^r \big(\mathbf{Hom}(\Delta_1, \Delta_2)\big)\\ &\qquad = \big\{f \in \mathrm{Hom}_K(\Delta_1, \Delta_2),\ (\forall s \in \mathbb{Z})\, f(\mathrm{Fil}^s \Delta_1) \subseteq \mathrm{Fil}^{s+r} \Delta_2\big\}\end{aligned}$$

pour $r \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$\mathrm{Gr}^r(\mathbf{Hom}(\Delta_1, \Delta_2)) \simeq \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_K\big(\mathrm{Gr}^s(\Delta_1), \mathrm{Gr}^{s+r}(\Delta_2)\big).$$

Tout cela fait de $\mathbf{MF}_K(\nabla)$ une catégorie tensorielle additive (cf. [9]).

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathbf{1}(n)_K = (K, \mathrm{d})$$

muni de la filtration définie par $\mathrm{Fil}^r \mathbf{1}(n)_K = \mathbf{1}(n)_K$ si $r \leqslant -n$ et $\mathrm{Fil}^r \mathbf{1}(n)_K = 0$ si $r > -n$. Si Δ est un ∇-module filtré sur K, on note :

- $\Delta(n) = \Delta \otimes \mathbf{1}(n)_K$ (tordu à la Tate),

- $\Delta^\vee = \mathbf{Hom}(\Delta, \mathbf{1}_K)$ (dual de Δ).

Soit Δ un ∇-module filtré sur K de dimension h. Le K-espace vectoriel $\wedge^h\Delta$ est alors de dimension 1. Il existe donc un entier r tel que $\mathrm{Gr}^r(\wedge^h\Delta) \simeq \wedge^h\Delta$ et $\mathrm{Gr}^s(\wedge^h\Delta) = 0$ si $s \neq r$.

Notation 4.13. — On note $t_H(\Delta)$ l'entier ainsi obtenu.

Remarque 4.14. — Si Δ est un ∇-module filtré de dimension h sur K et n un entier rationnel, on a $t_H(D^\vee) = -t_H(D)$ et $t_H(D(n)) = t_H(D) - nh$. En effet, en prenant la puissance extérieure h-ième, il suffit de le voir dans le cas où $h = 1$, cas dans lequel les égalités sont évidentes.

Proposition 4.15. — *La fonction t_H est additive.*

Démonstration. — Soit $0 \to \Delta' \to \Delta \to \Delta'' \to 0$ une suite exacte dans la catégorie $\mathbf{M}_K(\nabla)$. Notons h, h' et h'' les dimensions de Δ, Δ' et Δ'' respectivement. On a $h = h' + h''$ et $\wedge^h\Delta \simeq (\wedge^{h'}\Delta') \otimes (\wedge^{h''}\Delta'')$ et donc $t_H(\Delta) = t_H(\Delta') + t_H(\Delta'')$. □

Remarque 4.16. — Soit Δ un ∇-module filtré sur K, alors

$$t_H(\Delta) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} r \dim_K(\mathrm{Gr}^r(\Delta))$$

(où $\mathrm{Gr}^\bullet$ désigne le gradué pour la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet$).

En effet, le K-espace vectoriel filtré Δ est isomorphe (non canoniquement en général) à $\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}^r(\Delta)$, la filtration sur le membre de gauche étant donnée par $\mathrm{Fil}^s\big(\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}^r(\Delta)\big) = \bigoplus_{r\leqslant s} \mathrm{Gr}^r(\Delta)$ pour $s \in \mathbb{Z}$. Par additivité de t_H (proposition 4.15), il suffit de vérifier la formule pour le K-espace vectoriel filtré $\mathrm{Gr}^r(\Delta)$ donné par $\mathrm{Fil}^s \mathrm{Gr}^r(\Delta) = \mathrm{Gr}^r\Delta$ si $s \leqslant r$ et $\mathrm{Fil}^s \mathrm{Gr}^r(\Delta) = 0$ si $s > r$, cas dans lequel elle est évidente.

Définition 4.17. — *Un (φ,∇)*-module filtré sur K relativement à K_0 *est la donnée d'un (φ,∇)-module D sur K_0, et d'une filtration sur $D_K = D\otimes_{K_0} K$ faisant de ce dernier un ∇-module filtré sur K (la connexion sur D_K est la connexion induite par celle de D). Un* morphisme de (φ,∇)-modules filtrés $f\colon D \to D'$ *est un morphisme entre les (φ,∇)-modules sous-jacents tel que $f_K\colon D_K \to D'_K$ est morphisme de ∇-modules filtrés sur K. On obtient ainsi une catégorie tensorielle additive $\mathbb{Q}_p$-linéaire, notée $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$. Si aucune confusion n'en résulte, on parlera simplement de modules filtrés sur K.*

Remarque 4.18. — La catégorie $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$ ne dépend pas (à équivalence près) du choix de K_0 est du relèvement σ du Frobenius d'après la remarque 4.7.

Soit V une représentation p-adique. Le K-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est muni d'une filtration et d'une connexion. Par ailleurs, le K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est muni d'un Frobenius, d'une connexion et d'une filtration après extension des scalaires à K.

PROPOSITION 4.19. — (i) $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ *est un objet de* $\mathbf{MF}_K(\nabla)$.

(ii) $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ *est un objet de* $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$.

Démonstration. — (i) Le K-espace vectoriel $D=\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est de dimension finie d'après la proposition 3.22. D'après la partie 3.5, il est en outre muni d'une connexion intégrable $\nabla\colon D\to D\otimes_K\widehat{\Omega}$ et d'une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D$ décroissante séparée et exhaustive telle que ∇ vérifie la transversalité de Griffith. C'est donc un objet de $\mathbf{MF}_K(\nabla)$.

(ii) D'après la proposition 3.22, le K_0-espace vectoriel $D=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est de dimension finie. D'après la partie 3.5, il est muni d'un opérateur de Frobenius semi-linéaire par rapport au Frobenius σ sur K_0 dont le linéarisé est un isomorphisme, d'une connexion intégrable $\nabla\colon D\to D\otimes_{K_0}\widehat{\Omega}$ telle que $\nabla\varphi=\varphi\nabla$ et d'une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ décroissante séparée et exhaustive sur $D_K=K\otimes_{K_0}D$ telle que ∇ vérifie la transversalité de Griffith (c'est un sous-K-espace vectoriel de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, cf. partie 3.5). Le K_0-espace vectoriel D étant de dimension finie, on a $D=\mathcal{D}[p^{-1}]$ avec $\mathcal{D}=\big(t^{-n}\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\big)^{G_K}$ pour n entier assez grand. Par construction, $\mathcal{D}$ est stable par ∇. Pour $i\in\{1,\dots,d\}$, on a $N_i^p(\mathrm{A}_{\mathrm{cris}})\subseteq p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$: la connexion ∇ sur D (et donc sur D_K) est quasi-nilpotente. Par ailleurs, l'image de Frobenius engendre le K_0-module D d'après la proposition 3.37. Le K_0-espace vectoriel $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est donc un objet de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$. □

Notation 4.20. — On note $\mathbf{MF}^{\mathrm{a}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$ l'image essentielle du foncteur

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}\colon\ \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)\longrightarrow\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla).$$

Ses objets sont appelés les (φ,∇)-*modules filtrés admissibles.*

DÉFINITION 4.21. — *Un* (φ,∇)-*module filtré* D *sur* K *relativement à* K_0 *est dit* faiblement admissible *si les conditions suivantes sont remplies :*

(a) On a $t_H(D)=t_N(D)$.

(b) On a $t_H(D')\leqslant t_N(D')$ *pour tout sous-objet* D' *de* D *(dans la catégorie* $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$*).*

Notation 4.22. — On note $\mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$ la sous catégorie pleine de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$ constituée des (φ,∇)-modules filtrés D sur K relativement à K_0 qui sont faiblement admissibles.

4.2. Le foncteur $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}$

Soit D un module filtré sur K. Le K-espace vectoriel $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$ est alors muni d'une filtration donnée par

$$\mathrm{Fil}^r(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \mathrm{Im}(\mathrm{Fil}^s \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{Fil}^{r-s} D_K \longrightarrow \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)$$

pour $r \in \mathbb{Z}$. Il est aussi muni d'une connexion donnée par

$$\nabla(b \otimes d) = d \otimes \nabla(b) + b \otimes \nabla(d).$$

Elle induit une connexion sur le sous-K_0-module $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D$. Ce dernier est aussi muni d'un Frobenius donné par $\varphi(b \otimes d) = \varphi(b) \otimes \varphi(d)$.

Définition 4.23. — *Si D est un module filtré sur K, on pose :*

$$\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D) = (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D)^{\substack{\varphi=1 \\ \nabla=0}} \cap \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K).$$

On obtient ainsi un foncteur de la catégorie $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ dans la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques munis d'une action linéaire continue de G_K.

Théorème 4.24. — (i) *La catégorie $\mathbf{MF}^{\mathrm{a}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ est abélienne.*

(ii) *Si D_1 et D_2 sont deux modules filtrés sur K admissibles, $D_1 \otimes D_2$ (vu comme objet de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$) aussi. De même, si D est un module filtré sur K admissible, son dual $D^\vee$ (vu comme objet de $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$) aussi.*

(iii) *Munie de ces structures, la catégorie $\mathbf{MF}^{\mathrm{a}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$ est tannakienne.*

(iv) *Le foncteur* $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ *induit une équivalence de catégories tannakiennes*

$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K) \xrightarrow{\approx} \mathbf{MF}^{\mathrm{a}}_{K/K_0}(\varphi, \nabla)$$

et le foncteur induit par $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}$ *est un quasi-inverse.*

Démonstration. — Soit $V \in \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$. Par définition,

$$\alpha_{\mathrm{cris}}(V) \colon \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

est un isomorphisme de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-modules. On a donc a fortiori

$$\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)) &= (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\substack{\varphi=1 \\ \nabla=0}} \cap \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \\ &\simeq \big(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\substack{\varphi=1 \\ \nabla=0}} \cap \mathrm{Fil}^0 \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V. \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.59, on a $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\substack{\varphi=1\\ \nabla=0}}\cap\mathrm{Fil}^0\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}=\mathbb{Q}_p$. L'application naturelle $V\to\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V))$ est donc un isomorphisme. On en déduit la pleine fidélité du foncteur induit par $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ et le fait que $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}$ induit un foncteur quasi-inverse.

L'assertion (i) découle de la pleine fidélité du foncteur induit par $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$. Le corollaire 3.34 affirme que la restriction du foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ à $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$ est un K_0-foncteur fibre. Les assertions (ii), (iii) et (iv) en résultent. □

Lemme 4.25. — *Pour tout $n\in\mathbb{N}_{>0}$, il existe*

$$\Theta^{(n)}=\big[\theta_{i,j}^{(n)}\big]_{1\leqslant i,j\leqslant d}\in\mathrm{M}_d\left(\mathcal{O}_{K_0}\right)$$

tel que dans $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$*, on a*

$$N_i\varphi^n=p^n\sum_{j=1}^d\theta_{j,i}^{(n)}\varphi^nN_j$$

pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$.

Démonstration. — Pour $x\in\mathcal{O}_{K_0}$, on a $\sigma(x)\equiv x^p \mod p\mathcal{O}_{K_0}$ d'où $\sigma(\mathrm{d}x)\in p\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_{K_0}}$. Il existe donc $\Theta=[\theta_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant d}\in\mathrm{M}_d\left(\mathcal{O}_{K_0}\right)$ tel que pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, on a

$$\sigma(\,\mathrm{d}\log(t_i))=p\sum_{j=1}^d\theta_{i,j}\,\mathrm{d}\log(t_j).$$

Si $n\in\mathbb{N}_{>0}$, on pose

$$\Theta^{(n)}=\sigma^{n-1}(\Theta)\sigma^{n-2}(\Theta)\cdots\sigma(\Theta)\Theta\in\mathrm{M}_d\left(\mathcal{O}_{K_0}\right).$$

On a alors $\sigma^n(\,\mathrm{d}\log(t_i))=p^n\sum_{j=1}^d\theta_{i,j}^{(n)}\,\mathrm{d}\log(t_j)$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$.

On a $\nabla\varphi^n=\varphi^n\nabla$ (proposition 2.58) soit

$$\sum_{i=1}^dN_i\varphi^n\otimes\mathrm{d}\log(t_i)=\sum_{j=1}^d\varphi^nN_j\otimes\sigma^n(\,\mathrm{d}\log(t_j))$$

i.e. $\sum_{i=1}^dN_i\varphi^n\otimes\mathrm{d}\log(t_i)=\sum_{j=1}^d\varphi^nN_j\otimes\big(p^n\sum_{i=1}^d\theta_{j,i}^{(n)}\,\mathrm{d}\log(t_i)\big)$ et donc $N_i\varphi^n=p^n\sum_{j=1}^d\theta_{j,i}^{(n)}\varphi^nN_j$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$. □

Proposition 4.26. — *Soit D un (φ,∇)-module filtré sur K relativement à K_0, de dimension 1. Alors*

$$\dim_{\mathbb{Q}_p}\big(\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)\big)=\begin{cases}0 & \text{si } t_N(D)>t_H(D),\\ 1 & \text{si } t_N(D)=t_H(D),\\ +\infty & \text{si } t_N(D)<t_H(D).\end{cases}$$

De plus, si $x\in D\setminus\{0\}$, il existe $\beta\in\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\big)^{\times}$ tel que $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)=\mathbb{Q}_p(\beta\otimes x)$ dans le cas où $t_N(D)=t_H(D)$.

Démonstration. — On a $D=K_0x$, et $\varphi(x)=\lambda x$. Comme $\varphi(D)$ engendre D, on a $\lambda\neq 0$. Posons $r=t_N(D)=v(\lambda)$. Écrivons $\lambda=p^r\lambda_0$ avec $\lambda_0\in\mathcal{O}_{K_0}^{\times}$. Posons $s=t_H(D)$. On a $\operatorname{Fil}^j D_K=D_K$ si $j\leqslant s$ et $\operatorname{Fil}^j D_K=0$ si $j>s$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)&=(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}D)^{\varphi=1,\nabla=0}\cap\operatorname{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{K_0}D)\\
&=\big\{b\otimes x,\ b\in\mathrm{B}_{\mathrm{cris}},\ \varphi(b)\otimes\lambda x=b\otimes x,\\
&\qquad\qquad \nabla(b\otimes x)=0,\ b\otimes x\in\operatorname{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{K_0}D)\big\}\\
&\simeq\big\{b\in\mathrm{B}_{\mathrm{cris}},\ \varphi(b)p^r\lambda_0=b,\ \nabla(b\otimes x)=0,\ b\in\operatorname{Fil}^{-s}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big\}\\
&\simeq t^{-r}\big\{b_0\in\mathrm{B}_{\mathrm{cris}},\ \varphi(b_0)\lambda_0=b_0,\ \nabla(b_0\otimes x)=0,\ b_0\in\operatorname{Fil}^{r-s}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big\}
\end{aligned}$$

avec $b=t^{-r}b_0$ dans le dernier isomorphisme (rappelons que t est horizontal pour la connexion). D'après le corollaire 3.20, il existe $\alpha\in\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{nr}}^{\times}$ tel que $\sigma(\alpha)=\lambda_0^{-1}\alpha$: si $b_0\in\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, on a $\varphi(b_0)=\lambda_0b_0$ si et seulement si $b'=\alpha b_0$ vérifie $\varphi(b')=b'$. Comme $\alpha\in\mathcal{O}_{\widehat{K}_0^{nr}}^{\times}\subset\operatorname{Fil}^0\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\setminus\operatorname{Fil}^1\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$, on a $b_0\in\operatorname{Fil}^{r-s}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\Leftrightarrow b'\in\operatorname{Fil}^{r-s}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ d'où

$$\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)\simeq\alpha^{-1}t^{-r}\big\{b'\in\mathrm{B}_{\mathrm{cris}},\varphi(b')=b',\nabla(b'\otimes\alpha^{-1}x)=0,b'\in\operatorname{Fil}^{r-s}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big\}.$$

Soit $b'\in\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ tel que $\nabla(b'\otimes\alpha^{-1}x)=0$. Pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, on a $N_i(b'\alpha^{-1}x)=0$, i.e. $\alpha^{-1}N_i(b')+b'N_i(\alpha^{-1})k_i=0$ (où $k_i\in K_0$ ne dépend que de α et x). On a donc $N_i(b')=k_i'b'$ avec $k_i'\in\widehat{K}_0^{\mathrm{nr}}$. D'après le lemme 4.25, pour $n\in\mathbb{N}_{>0}$ et $i\in\{1,\dots,d\}$, on a

$$N_i\varphi^n=p^n\sum_{j=1}^d\theta_{j,i}^{(n)}\varphi^nN_j$$

avec $\theta_{i,j}^{(n)}\in\mathcal{O}_{K_0}$. On a donc

$$N_i\varphi^n(b')=p^n\sum_{j=1}^d\theta_{j,i}^{(n)}\varphi^n(k_i'b')$$

i.e. $k_i'b'=p^n\sum_{j=1}^d\theta_{j,i}^{(n)}\varphi^n(k_i')b'$ soit $k_i'=p^n\sum_{j=1}^d\theta_{j,i}^{(n)}\varphi^n(k_i')$ si $b'\neq 0$. Ainsi $k_i'=0$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$ si $b'\neq 0$. Dans tous les cas, on a $N_i(b')=k_i'b'=0$, i.e. $\nabla(b')=0$. On a donc

$$\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)\simeq\alpha^{-1}t^{-r}\big(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\substack{\varphi=1\\ \nabla=0}}\cap\operatorname{Fil}^{r-s}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\big).$$

Via i_σ, on a
$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\substack{\varphi=1\\ \nabla=0}}\cap \mathrm{Fil}^{r-s}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \simeq \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\cap \mathrm{Fil}^{r-s}\,\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}.$$
D'après [7, Prop. 1.3], on a
$$\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\cap \mathrm{Fil}^{r-s}\,\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \begin{cases} 0 & \text{si } r-s>0,\\ \mathbb{Q}_p & \text{si } r-s=0,\\ \text{un } \mathbb{Q}_p\text{-vectoriel de dimension infinie} & \text{si } r-s<0.\end{cases}$$
La proposition en résulte, avec $\beta=\alpha^{-1}t^{-r}$. □

Proposition 4.27. — *Tout (φ,∇)-module filtré sur K (relativement à K_0) admissible est faiblement admissible.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.19, le foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ envoie la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$ dans la catégorie $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$. Soit V appartenant à $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$; il s'agit de voir que $D=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est faiblement admissible. Soit D' un sous-objet de D, et r sa dimension. Montrons que $t_H(D')\leqslant t_N(D')$. Le sous-objet $\wedge^r D'$ de $\wedge^r D$ est de dimension 1. Par définition de t_N et t_H, on a $t_H(D')=t_H(\wedge^r D')$ et $t_N(D')=t_N(\wedge^r D')$. Quitte à remplacer D par $\wedge^r D$, on peut supposer $r=1$. On a alors $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D')\subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)$. Comme $D=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ avec $V\in\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$, le théorème 4.24 implique que l'homomorphisme naturel $V\to\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)$ est un isomorphisme. Il en résulte que $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D')$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. D'après la proposition 4.26, on a bien $t_H(D')\leqslant t_N(D')$. Montrons enfin que $t_H(D)=t_N(D)$. Si D est de dimension h, la considération de $\wedge^h D$ nous ramène comme précédemment au cas $h=1$ et la proposition 4.26 permet de conclure. □

On a donc le diagramme de catégories
$$\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K) \underset{\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}}{\overset{\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\approx}}}} \mathbf{MF}^{\mathrm{a}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)\ \subseteq \mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)\subset \mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla).$$

Proposition 4.28. — *Si D un (φ,∇)-module filtré faiblement admissible sur K relativement à K_0, alors $V=\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, $V\in\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K)$ et $D'=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ est un sous-objet de D.*

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas $V\neq 0$. Rappelons que l'on a $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}=\mathrm{Frac}(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}})$ et $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{G_K}=K_0$ (cf. proposition 2.49). On reproduit la preuve de [7, Proposition 4.5]. Le $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$-espace vectoriel $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}D$ est de dimension h. Soit L le sous-$\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$-espace vectoriel de $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}D$ engendré par $V=\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)\subseteq \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0} D$ et r sa dimension. Il est stable sous l'action de G_K. Soit $\mathcal{G}_r$ la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension r du K_0-espace vectoriel D. C'est une variété algébrique rationnelle sur K_0. On a donc

$$\mathcal{G}_r(\mathrm{C}_{\mathrm{cris}})^{G_K}=\mathcal{G}_r(\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}^{G_K})=\mathcal{G}_r(K_0).$$

Il existe donc un sous-K_0-espace vectoriel D' de D tel que $L=\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0} D'$. Comme V est fixe par φ et tué par ∇, l'espace L est stable par φ et ∇. Il en est donc de même de $D'=L\cap D$, qui est donc un sous-(φ,∇) module D' de D. On a alors $V\subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D')\subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)=V$ et donc $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D')=V$.

Soit $\{v_1,\ldots,v_r\}$ une base de L sur $\mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$ constituée d'éléments de V, et $\{d_1,\ldots,d_r\}$ une base de D' sur K_0. Pour $j\in\{1,\ldots,r\}$, on a $v_j=\sum_{u=1}^r b_{ju}d_u$ avec $b_{ju}\in \mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$ (car $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D')=V$), et le déterminant b de la matrice $[b_{ju}]_{1\leqslant j,u\leqslant r}$ est non nul. Quitte à multiplier les b_{ju} par un élément convenable de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, on peut supposer $b_{ju}\in \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ pour tout $j,u\in\{1,\ldots,r\}$, on a alors $b\in \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\setminus\{0\}$. Il en résulte que $w=v_1\wedge\cdots\wedge v_r=bd_1\wedge\cdots\wedge d_r$ est un élément non nul de $W=\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(\wedge^r D')$. Comme D est faiblement admissible, on a $t_H(\wedge^r D')=t_H(D')\leqslant t_N(D')=t_N(\wedge^r D')$. Comme W est non nul, la proposition 4.26 implique que $t_H(D')=t_N(D')$, que $\dim_{\mathbb{Q}_p}(W)=1$ et que b est inversible dans $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$.

Soit $v\in V$. Écrivons $v=\sum_{j=1}^r c_jv_j$ avec $c_j\in \mathrm{C}_{\mathrm{cris}}$ (on a $V\subseteq L$). Pour $j\in\{1,\ldots,r\}$, l'image de $v_1\wedge\cdots\wedge v_{j-1}\wedge v\wedge v_{j+1}\wedge\cdots\wedge v_r$ dans W est c_jw. Comme W est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1, on a $c_j\in\mathbb{Q}_p$ pour $j\in\{1,\ldots,r\}$. On en déduit que $\{v_1,\ldots,v_r\}$ est une base de V sur $\mathbb{Q}_p$. Par ailleurs, comme b est inversible dans $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, l'application naturelle $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V\to \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}D'$ est un isomorphisme, ce qui montre que V est cristalline et que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)=D'$. □

Rappelons que le choix d'un relèvement σ du Frobenius donne lieu à un homomorphisme $i_\sigma\colon K\to\mathbb{K}$, qui induit des isomorphismes

$$i_\sigma\colon C\xrightarrow{\sim}\mathbb{C},\quad i_\sigma\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla+}\xrightarrow{\sim}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+},\quad i_\sigma\colon\ \mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla+}\xrightarrow{\sim}\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{+}.$$

Proposition 4.29. — *Soit Δ un ∇-module filtré sur K. L'homomorphisme*

$$i_\sigma\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})\longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\Delta,\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})$$

induit par i_σ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels (la structure de K-espace vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ étant donnée par i_σ). Il induit un isomorphisme

$$i_\sigma\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_K(\nabla)}(\Delta,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\Delta,\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})).$$

Démonstration. — Comme Δ est de dimension finie sur K, pour $f\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$ (resp. $g\in\mathrm{Hom}_K(\Delta,\mathbb{B}_{\mathrm{dR}})$), il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que

$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, t^{-n}\,\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ (resp. $g \in \mathrm{Hom}_K(\Delta, t^{-n}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)$). Comme t est horizontal, quitte à multiplier f (resp. g) par t^n, il suffit de montrer que l'homomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to \mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ induit par i_σ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, qui induit un isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_K(\nabla)}(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to \mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+))$.

Soit $f\colon \Delta \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ un homomorphisme horizontal de ∇-modules sur K. On peut donc écrire $f = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} f_{\underline{n}}\underline{u}^{\underline{n}}$ avec $f_{\underline{n}}\colon \Delta \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$ un homomorphisme de $W[p^{-1}]$-espaces vectoriels, et où $\underline{u}^{\underline{n}} = u_1^{n_1}\cdots u_d^{n_d}$ pour $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ (proposition 2.9). L'homomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to \mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ envoie f sur $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} i_\sigma(f_{\underline{n}}) i_\sigma(\underline{u})^{\underline{n}}$ (la série étant convergente car $i_\sigma(u_i) \in \mathrm{Ker}(\theta)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$). On a

$$\nabla \circ f = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} f_{\underline{n}} \sum_{i=1}^d u_1^{n_1}\cdots\widehat{u_i^{n_i}}\cdots u_d^{n_d}(n_i u_i^{n_i-1}\otimes \mathrm{d}t_i).$$

Si $x \in \Delta$, on a $\nabla(x) = \sum_{i=1}^d N_i(x)\otimes \mathrm{d}\log(t_i)$ d'où

$$(f\otimes \mathrm{Id})\circ\nabla(x) = \sum_{i=1}^d f(N_i(x)/t_i)\otimes \mathrm{d}t_i,$$

soit $(f\otimes\mathrm{Id})\circ\nabla(x) = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} f_{\underline{n}}(N_i(x)/t_i)\sum_{i=1}^d \underline{u}^{\underline{n}}\otimes \mathrm{d}t_i$. Comme f est horizontal, on a donc $f_{\underline{n}+\underline{e}_i}(x) = (n_i+1)^{-1} f_{\underline{n}}(N_i(x)/t_i)$ pour tout $\underline{n}\in\mathbb{N}^d$, où $\underline{e}_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (le 1 en i-ème position). Posons

$$(\underline{N}/\underline{t})^{\underline{n}} = \prod_{i=1}^d (N_i/t_i)^{n_i} \quad (\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)\in\mathbb{N}^d)$$

(composé des dérivations, rappelons que les N_i commutent deux à deux). On déduit de ce qui précède que

$$(*)\qquad f_{\underline{n}}(x) = \frac{1}{\underline{n}!} f_{\underline{0}}\big((\underline{N}/\underline{t})^{\underline{n}}(x)\big).$$

Comme $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (donc $\mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)$) et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (et donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$) sont séparés, complets pour la topologie t-adique et sans t-torsion, pour montrer que l'application $i_\sigma\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \to \mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ est bijective, il suffit de vérifier qu'elle l'est modulo t. Cette réduction modulo t est l'application $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, C) \to \mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{C})$ qui envoie $\bar{f} = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \bar{f}_{\underline{n}}\underline{u}^{\underline{n}}$ sur $i_\sigma(\bar{f}_{\underline{0}})$. D'après les formules $(*)$, on a alors

$$\bar{f}_{\underline{n}}(x) = \frac{1}{\underline{n}!} i_\sigma^{-1}\big(\bar{f}_{\underline{0}}\big((\underline{N}/\underline{t})^{\underline{n}}(x)\big)\big)$$

(où le i_σ dans le membre de droite désigne $i_\sigma\colon C \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$). La réduction modulo t est bien bijective, d'où la première assertion.

Reste à voir que l'élément $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$ respecte la filtration si et seulement si son image par i_σ appartient à $\mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}))$. Supposons que $f(\mathrm{Fil}^r \Delta) \subseteq \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = t^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+[u_1/t, \ldots, u_d/t]$, on a $f_{\underline{n}}(x) \in t^{r-|\underline{n}|} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}$ pour tout $x \in \mathrm{Fil}^r \Delta$ et tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$. Par ailleurs, pour $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a $i_\sigma(u_i) \in \mathrm{Fil}^1 \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, donc $i_\sigma(\underline{u})^{\underline{n}} \in \mathrm{Fil}^{|\underline{n}|} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$. On a donc $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} i_\sigma(f_{\underline{n}}) i_\sigma(\underline{u})^{\underline{n}} \in \mathrm{Fil}^r \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$.

Réciproquement, soient f dans $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_K(\nabla)}(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}})$ tel que $i_\sigma(f)$ appartient à $\mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}))$. Il existe un entier n tel que f est à valeurs dans $t^{-n} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. Montrons que $f_{\underline{0}}(\mathrm{Fil}^r \Delta) \subseteq \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$ par récurrence sur $r \in \mathbb{Z}$; c'est vrai pour $r \leqslant n$ par définition de n. Soit $r \in \mathbb{N}$ avec $r > n$ et supposons donc pout tout $r' < r$, on a $f_{\underline{0}}(\mathrm{Fil}^{r'} \Delta) \subseteq \mathrm{Fil}^{r'} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$. Soit $x \in \mathrm{Fil}^r \Delta$. Pour $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, on a $(\underline{N}/\underline{t})^{\underline{n}}(x) \in \mathrm{Fil}^{r-|\underline{n}|} \Delta$, car ∇ vérifie la transversalité de Griffith. On a donc

$$f_{\underline{n}}(x) = (\underline{n}!)^{-1} f_{\underline{0}}\big((\underline{N}/\underline{t})^{\underline{n}}(x)\big) \in \mathrm{Fil}^{r-|\underline{n}|} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$$

pour $\underline{n} \neq \underline{0}$ d'après l'hypothèse de récurrence, c'est-à-dire $i_\sigma(f_{\underline{n}}(x)) i_\sigma(\underline{u})^{\underline{n}} \in \mathrm{Fil}^r \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$. Donc $\sum_{\underline{n} \neq \underline{0}} i_\sigma(f_{\underline{n}}(x)) i_\sigma(\underline{u})^{\underline{n}}$ appartient à $\mathrm{Fil}^r \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$, i.e. $i_\sigma(f(x)) - i_\sigma(f_{\underline{0}}(x)) \in \mathrm{Fil}^r \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$. Comme $i_\sigma(f) \in \mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}))$, on a $i_\sigma(f(x)) \in \mathrm{Fil}^r \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ et donc $i_\sigma(f_{\underline{0}}(x)) \in \mathrm{Fil}^r \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ soit $f_{\underline{0}}(x) \in \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$. Pour tout $r \in \mathbb{Z}$, on a donc $f_{\underline{n}}(\mathrm{Fil}^r \Delta) \subseteq \mathrm{Fil}^{r-|\underline{n}|} \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$ d'où $f(\mathrm{Fil}^r \Delta) \subseteq \mathrm{Fil}^r \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$. □

Remarque 4.30. — On a vu, au cours de la démonstration qui précède, que si Δ est un ∇-module filtré sur K, les sections horizontales du ∇-module $\mathrm{Hom}_K(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ sont les éléments admettant un développement de Taylor de la forme

$$x \longmapsto \sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{n!} g\big((\underline{N}/\underline{t})^{\underline{n}}(x)\big) \underline{u}^{\underline{n}}$$

avec $g \in \mathrm{Hom}_{W[p^{-1}]}\big(\Delta, \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla +}\big)$. Ce n'est autre que la formule de [21, Prop. 8.9].

Corollaire 4.31. — *Soit Δ un ∇-module filtré sur K. L'homomorphisme*

$$i_\sigma\colon\ \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \Delta)^{\nabla = 0} \longrightarrow \mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \Delta)$$

induit par i_σ est un isomorphisme de K-espaces vectoriels (la structure de K-espace vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ étant donnée par i_σ).

Démonstration. — D'après la proposition 4.29 appliquée au dual $\Delta^\vee$ de Δ, l'homomorphisme i_σ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_K(\nabla)}(\Delta^\vee, \mathrm{B_{dR}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\Delta^\vee, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})).$$

L'énoncé résulte donc des identifications

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_K(\nabla)}(\Delta^\vee, \mathrm{B_{dR}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{MF}_K(\nabla)}(\mathbf{1}, \Delta \otimes_K \mathrm{B_{dR}}) \simeq \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B_{dR}} \otimes_K \Delta)^{\nabla=0},$$

$$\mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\Delta^\vee, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})) \simeq \mathrm{Fil}^0(\mathrm{Hom}_K(\mathbf{1}, \Delta \otimes_K \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})) \simeq \mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \Delta).$$

□

Proposition 4.32. — *Soit D un (φ, ∇)-module sur K_0. L'homomorphisme*

$$i_\sigma \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\nabla)}(D, \mathrm{B_{cris}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K_0}(D, \mathbb{B}_{\mathrm{cris}})$$

induit par i_σ est un isomorphisme de K_0-espaces vectoriels (la structure de K_0-espace vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ étant donnée par i_σ). Il induit un isomorphisme

$$i_\sigma \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi,\nabla)}(D, \mathrm{B_{cris}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi)}(D, \mathbb{B}_{\mathrm{cris}}).$$

Démonstration. — L'application

$$i_\sigma \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\nabla)}(D, \mathrm{B_{cris}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{K_0}(D, \mathbb{B}_{\mathrm{cris}})$$

étant induite par l'isomorphisme

$$i_\sigma \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\nabla)}(D, \mathrm{B_{dR}}) \to \mathrm{Hom}_{K_0}(D, \mathbb{B}_{\mathrm{dR}})$$

(proposition 4.29), elle est injective. Montrons qu'elle est surjective.

Comme la connexion ∇ est quasi-nilpotente, il existe un sous $\mathcal{O}_{K_0}$-module de type fini $\mathcal{D}$ inclus dans D tel que $\mathcal{D}[p^{-1}] = D$ et des constantes $e_1, \ldots, e_d$ telles que $\big(\prod_{i=1}^d (N_i/t_i)^{pe_i}\big)(\mathcal{D}) \subseteq p\mathcal{D}$. Il suffit de montrer que $i_\sigma \colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\nabla)}(\mathcal{D}, \mathrm{A_{cris}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\mathcal{D}, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}})$ est surjectif. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\nabla)}(\mathcal{D}, \mathrm{A_{cris}})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{K_0}}(\mathcal{D}, \mathbb{A}_{\mathrm{cris}})$ sont séparés, complets pour la topologie p-adique, sans p-torsion (car $\mathrm{A_{cris}}$, $\mathcal{D}$ le sont et $\mathcal{D}$ est de type fini), il suffit de vérifier cette surjectivité modulo p.

Soit $f \colon \mathcal{D} \to \mathrm{A_{cris}}$ un homomorphisme horizontal de ∇-modules sur $\mathcal{O}_{K_0}$. On peut donc écrire $f = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} f_{\underline{n}} \underline{u}^{[\underline{n}]}$ avec $f_{\underline{n}} \colon \mathcal{D} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ un homomorphisme de W-modules, et où $\underline{u}^{[\underline{n}]} = u_1^{[n_1]} \cdots u_d^{[n_d]}$ pour $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$, tels que pour $x \in \mathcal{D}$, la famille $f_{\underline{n}}(x)$ converge vers 0 dans $\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$ pour la topologie p-adique suivant le filtre complémentaire des parties finies de $\mathbb{N}^d$ (proposition 2.39). L'application i_σ modulo p envoie $\bar{f}$ sur $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} i_\sigma(\bar{f}_{\underline{n}})(i_\sigma(\underline{u}))^{[\underline{n}]} = i_\sigma(\bar{f}_{\underline{0}})$ (car $(i_\sigma(\underline{u}))^{[\underline{n}]} \in p\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ pour $\underline{n} \neq \underline{0}$ vu que $i_\sigma(u_i) \in p\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ pour $i \in \{1, \ldots, d\}$).

Supposons $\overline{g}\colon \mathcal{D} \to \mathbb{A}_{\mathrm{cris}}/p\mathbb{A}_{\mathrm{cris}}$ donnée. Pour $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ et $x \in \mathcal{D}$, on pose

$$\bar{f}_{\underline{n}}(x) = i_\sigma^{-1}\big(\overline{g}\big((\underline{N}/\underline{t})^{\underline{n}}(x)\big)\big) \in \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}.$$

On a $\bar{f}_{\underline{n}}(x) = 0$ pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$ tel que $n_i \geqslant pe_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$. La somme $\sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \bar{f}_{\underline{n}}(x)\underline{u}^{[\underline{n}]}$ est donc finie pour tout $x \in \mathcal{D}$. Ceci définit bien un élément $\bar{f}\colon \mathcal{D} \to \mathrm{A}_{\mathrm{cris}}/p\,\mathrm{A}_{\mathrm{cris}}$ tel que $i_\sigma(\bar{f}) = \overline{g}$. Ce dernier est horizontal. En effet, pour $i \in \{1,\dots,d\}$, on a

$$\begin{aligned}\bar{f}\circ(N_i/t_i) &= \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \big(\bar{f}_{\underline{n}}\circ(N_i/t_i)\big)\underline{u}^{[\underline{n}]} = \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \bar{f}_{\underline{n}+\underline{e}_i}(x)\underline{u}^{[\underline{n}]}\\ &= \sum_{\underline{n}\in\mathbb{N}^d} \bar{f}_{\underline{n}}(x)\underline{u}^{[\underline{n}-\underline{e}_i]} = (N_i/t_i)\circ\bar{f},\end{aligned}$$

où $\underline{e}_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ (le 1 à la i-ième composante), soit $\bar{f}\circ N_i = N_i\circ\bar{f}$ d'où $\bar{f}\circ\nabla = \nabla\circ\bar{f}$.

Le K_0-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\nabla)}(D,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}})$ est muni d'un Frobenius déduit de ceux de D et de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$. On a

$$\big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\nabla)}(D,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}})\big)^{\varphi=1} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi,\nabla)}(D,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}).$$

De même, on a l'égalité $\big(\mathrm{Hom}_{K_0}(D,\mathbb{B}_{\mathrm{cris}})\big)^{\varphi=1} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi)}(D,\mathbb{B}_{\mathrm{cris}})$. Comme l'isomorphisme i_σ est compatible au Frobenius, il induit un isomorphisme entre les parties fixes par Frobenius. $\square$

Corollaire 4.33. — *Soit D un (φ,∇)-module sur K_0. L'homomorphisme*

$$i_\sigma\colon (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}_{\nabla=0} \longrightarrow (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$$

induit par i_σ est un isomorphisme de K_0-espaces vectoriels (la structure de K_0-espace vectoriel de $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ étant donnée par i_σ).

Démonstration. — D'après la proposition 4.32 appliquée au dual $D^\vee$ de D, l'homomorphisme i_σ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi,\nabla)}(D^\vee,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi)}(D^\vee,\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}).$$

L'énoncé résulte des identifications

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi,\nabla)}(D^\vee,\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi,\nabla)}(\mathbf{1}, D\otimes_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{cris}})\\ &\simeq (\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}_{\nabla=0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi)}(D^\vee,\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{M}_{K_0}(\varphi)}(\mathbf{1}, D\otimes_{K_0}\mathbb{B}_{\mathrm{cris}})\\ &\simeq (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}.\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 4.34. — *Soit D un (φ,∇)-module filtré faiblement admissible sur K, et h sa dimension. Alors $V=\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}(D)$ est de dimension h sur $\mathbb{Q}_p$ et $D=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Ainsi, tout (φ,∇)-module filtré faiblement admissible sur K est admissible.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.28, on sait déjà que V est de dimension finie, que c'est une représentation cristalline de G_K, et que si $D'=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, alors D' est un sous objet de D (dans la catégorie $\mathbf{MF}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$).

Le $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel $D_{\mathbb{K}_0}=\mathbb{K}_0\otimes_{K_0}D$ est naturellement muni d'une structure de φ-module filtré sur $\mathbb{K}$, déduite de D par extension des scalaires (notons que l'extension des scalaires tue la connexion, vu que le corps résiduel $\mathbf{k}$ de $\mathbb{K}_0$ est parfait).

D'après le corollaire 4.31 appliqué au ∇-module filtré D_K, le plongement $i_\sigma\colon K_0\to\mathbb{K}_0$ induit un isomorphisme

$$i_\sigma\colon\ \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K D_K)^{\nabla=0}\longrightarrow\mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K D_K).$$

On a donc $\mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K D_K)^{\nabla=0}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{K}}D_{\mathbb{K}})$. De même, d'après le corollaire 4.33 appliqué au (φ,∇)-module D, le plongement i_σ induit un isomorphisme

$$(\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}D)^{\varphi=1}_{\nabla=0}\longrightarrow(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{K}_0}D_{\mathbb{K}_0})^{\varphi=1}.$$

On en déduit un isomorphisme

$$V\xrightarrow{\sim}(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{K}_0}D_{\mathbb{K}_0})^{\varphi=1}\cap\mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbb{K}}D_{\mathbb{K}})=\mathbb{V}_{\mathrm{cris}}(D_{\mathbb{K}_0}).$$

D'après [7, Thm 4.3 (ii)], comme $V=\mathbb{V}_{\mathrm{cris}}(D_{\mathbb{K}_0})$ est de dimension finie, le φ-module filtré $D_{\mathbb{K}_0}$ sur $\mathbb{K}$ est admissible (i.e. $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)=h$) si et seulement si $t_H(D_{\mathbb{K}_0})=t_N(D_{\mathbb{K}_0})$. On a $t_H(D_{\mathbb{K}_0})=t_H(D)$ et $t_N(D_{\mathbb{K}_0})=t_N(D)$. Comme D est faiblement admissible, on a $t_H(D)=t_N(D)$. On a donc $\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)=h$.

Enfin, comme on sait que V est cristalline, et que $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)=D'$, on a un isomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{K_0}D'\xrightarrow{\sim}\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$, et donc $\dim_{K_0}(D')=\dim_{\mathbb{Q}_p}(V)=h$. Par ailleurs, D' est un sous-objet de D. Comme $\dim_{K_0}(D')=h=\dim_{K_0}(D)$, on a $D'=D$ i.e. $D=\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. □

Remarque 4.35. — Dans le cas où k_K est parfait (i.e. $d=0$), ce résultat est un cas particulier (où $N=0$) de la conjecture « faiblement admissible implique admissible » de Fontaine [16, Conjecture 5.4.4] qui a été démontrée par Colmez et Fontaine [7, Théorème 4.3]. Depuis, d'autres démonstrations ont été données, notamment par Colmez [6] avec sa théorie des Espaces de Banach de dimension finie, qui donne une version renforcée du lemme fondamental ([7, 2]). Plus récemment, L. Berger a donné une preuve (cf. [1, Théorème V.2.1]) entièrement différente, qui utilise la théorie de (φ,Γ)-modules.

Remarque 4.36. — Si V est une représentation cristalline de G_K, sa restriction à $G_{\mathbb{K}}$ est encore cristalline. En effet, on a

$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} D \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

où $D = \mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$. Après extension des scalaires à $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$ (via i_σ), on en déduit un isomorphisme $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{K}_0} D_{\mathbb{K}_0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ où $D_{\mathbb{K}_0} = \mathbb{K}_0 \otimes_{K_0} D$. On a alors $D_{\mathbb{K}_0} = \big(\mathbb{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V\big)^{G_{\mathbb{K}}} = \mathbb{D}_{\mathrm{cris}}(V)$ et V est $\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}$-admissible (en tant que représentation de $G_{\mathbb{K}}$). Bien sûr, la réciproque est fausse, parce qu'en passant de G_K à $G_{\mathbb{K}}$, on oublie l'action d'un quotient isomorphe à $\mathbb{Z}_p^d$ (tout comme, du côté des modules filtrés, on oublie la connexion).

Corollaire 4.37. — *On a l'égalité* $\mathbf{MF}^{\mathrm{a}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla) = \mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$, *le foncteur*

$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}} \colon \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(G_K) \longrightarrow \mathbf{MF}^{\mathrm{fa}}_{K/K_0}(\varphi,\nabla)$$

est une équivalence de catégories, dont un quasi-inverse est $\mathrm{V}_{\mathrm{cris}}$.

Démonstration. — C'est la conjonction des théorèmes 4.34 et 4.24. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Berger, *Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés*, Prépublication, 2004.

[2] ———, « An introduction to the theory of p-adic representations », in *Geometric aspects of Dwork theory*, vol. I, Walter de Gruyter, 2004, p. 255-292.

[3] P. Berthelot & A. Ogus, « Notes on crystalline cohomology », in *Mathematical Notes*, vol. 21, Princeton University Press, 1978.

[4] O. Brinon, « Une généralisation de la théorie de Sen », *Math. Ann.* **327** (2003), p. 793-813.

[5] P. Colmez, « Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local », *Ann. Math.* **148** (1998), p. 485-571.

[6] ———, « Espaces de Banach de dimension finie », *J. Inst. Math. Jussieu, Cambridge Univ. Press* **1** (2000), p. 331-439.

[7] P. Colmez & J.-M. Fontaine, « Construction des représentations p-adiques semi-stables », *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1-43.

[8] P. Deligne, « Cohomologie étale (SGA $4\frac{1}{2}$) », in *Lecture Notes in Math.*, vol. 569, Springer-Verlag, 1977.

[9] P. Deligne & J. Milne, « Tannakian categories, dans 'Hodge cycles, motives and Shimura varieties' », in *Lecture Notes in Math.*, vol. 900, Springer-Verlag, 1982.

[10] G. Faltings, « p-adic Hodge theory », *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), p. 255-299.

[11] ———, « Crystalline cohomology and p-adic Galois representations », in *Algebraic analysis, geometry and number theory (éd. J. Igusa)*, John Hopkins Univ. Press, 1989, p. 25-80.

[12] ———, « Almost étale extensions », in *Astérisque*, vol. 279, Soc. Math. France, 2002, p. 185-270.

[13] J.-M. Fontaine, « Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux », *Invent. Math.* **65** (1982), p. 379-409.

[14] ———, « Représentations p-adiques des corps locaux I, dans 'The Grothendieck Festschrift', vol. II », in *Progress in Math.*, vol. 87, Birkhäuser, 1990.

[15] ———, « Le corps des périodes p-adiques, p. 59–101 dans 'Périodes p-adiques' », in *Astérisque*, vol. 223, Soc. Math. France, 1994.

[16] ———, « Représentations p-adiques semi-stables, dans 'Périodes p-adiques' », in *Astérisque*, vol. 223, Soc. Math. France, 1994, p. 113-184.

[17] J.-M. Fontaine & W. Messing, « p-adic periods and p-adic étale cohomology », *Contemp. Math.* **67** (1987), p. 179-207.

[18] A. Grothendieck, « Éléments de Géométrie Algébrique IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (première partie) », *Publ. Math. IHÉS* **20** (1964), p. 5-259.

[19] O. Hyodo, « On the Hodge-Tate decomposition in the imperfect residue field case », *Crelle* **365** (1987), p. 97-113.

[20] ———, « On variation of Hodge-Tate structures », *Math. Ann.* **283** (1989), p. 7-22.

[21] N. Katz, « Nilpotent connections and the monodromy theorem : applications of a result of Turrittin », *Publ. Math. IHÉS* **39** (1970), p. 175-232.

[22] ———, « Slope filtration of F-crystals, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes I », in *Astérisque*, vol. 63, Soc. Math. France, 1979, p. 113-164.

[23] H. Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge University Press, 1986.

[24] S. Sen, « Continuous cohomology and p-adic Galois representations », *Invent. Math.* **62** (1980), p. 89-116.

[25] T. Tsuji, « p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case », *Invent. Math.* **137** (1999), p. 233-411.

[26] J.-P. Wintenberger, « Théorème de comparaison p-adique pour les schémas abéliens. I : Construction de l'accouplement des périodes, dans Périodes p-adiques », in *Astérisque*, vol. 223, Soc. Math. France, 1994.

Manuscrit reçu le 16 septembre 2004,
révisé le 9 septembre 2005,
accepté le 18 octobre 2005.

Olivier BRINON
Université Paris 13
Institut Galilée
Département de Mathématiques
99, avenue Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse (France)
brinon@math.univ-paris13.fr