ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

S. IGARI

Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace $\hat{A}^2$

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 2 (1965), p. 525-536

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_525_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965) 525-536.

SUR LES FONCTIONS QUI OPÈRENT SUR L'ESPACE $\hat{A}^2$

par Satoru IGARI

Soit $\hat{A}^2$ l'algèbre sur l'axe réel introduite par A. Beurling. On se propose de déterminer les fonctions définies sur le plan complexe à valeurs complexes telles que la fonction composée $\varphi(f)$ appartienne à $\hat{A}^2$ pour chaque f de $\hat{A}^2$. On se propose de caractériser de telles fonctions pour des espaces voisins de $\hat{A}^2$.

1. D'abord nous nous rappelons l'espace $\hat{A}^2$ introduit par A. Beurling [1]. Soit Ω l'ensemble des fonctions ω sur l'axe réel, paires, positives, décroissantes pour $x > 0$ et sommables, et soit $L^2(\omega^{-1})$ l'espace des fonctions mesurables sur $(-\infty, \infty)$ muni de la norme $\|F\|_{L^2(\omega^{-1})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F|^2\omega^{-1}\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Alors A^2 est défini par $A^2 = \bigcup_{\omega} L^2(\omega^{-1})$ et A^2 est muni de la norme $\|F\| = \inf_{\omega} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \omega\, dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F|^2}{\omega}\, dx}$ où ω parcourt toute fonction de Ω.

Pour plus de commodité nous indiquons, d'après A. Beurling, quelques propriétés de l'espace A^2 :

(I) A^2 est une algèbre de Banach.

Soit $\hat{A}^2$ l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions de A^2, c'est-à-dire, $\hat{A}^2 = \mathcal{F}A^2$ et posons pour f de $\hat{A}^2$

$$A(f) = \int_0^{\infty} \frac{\eta(\alpha, f)}{\alpha^{3/2}}\, d\alpha,$$

où

$$\eta(\alpha, f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t+\alpha) - f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(II) Pour que f appartienne à $\hat{A}^2$, il faut et il suffit que f soit continue, qu'elle soit zéro à l'infini et $A(f) < \infty$.

(III) Si f appartient à $\hat{A}^2$, alors on a en posant $f = \hat{F}$, $F \in A^2$,

$$\|f\|_\infty = \|F\|_{L^1} \leqslant \|F\| \leqslant A(f) \leqslant 5\|F\|.$$

Il résulte de l'inégalité de Minkowski et de (III) que

(IV) Si f et g appartiennent à $\hat{A}^2$, alors fg appartient aussi à $\hat{A}^2$ et satisfait à l'inégalité :

$$A(fg) \leqslant 2A(f)A(g).$$

L'autre espace $\mathcal{A}^2$ de A. Beurling est le sous-espace de A^2 muni de la norme

$$\|F\| = \inf_{\omega \in \Omega_1} \sqrt{\left(\omega(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega\, dx\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F|^2}{\omega}\, dx},$$

où Ω_1 est un sous-ensemble de Ω dont les éléments ω satisfont à

$$\omega(0) = \lim_{x \to 0} \omega(x) < \infty.$$

Soit $\hat{\mathcal{A}}^2 = \mathcal{A}\mathcal{F}^2$. Alors on a

(V) f appartient à $\hat{\mathcal{A}}^2$ si et seulement si f est continue, $f \in L^2$ et $A(f) < \infty$. Dans ces conditions on a pour $f = \hat{F}$

$$\|F\| \leqslant \mathcal{A}(f) \leqslant 6\|F\|,$$

où

$$\mathcal{A}(f) = A(f) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^2}.$$

Il résulte de (V) que

(VI) Soient f et g deux éléments de $\hat{\mathcal{A}}^2$, alors $fg \in \hat{\mathcal{A}}^2$ et on a

$$\mathcal{A}(fg) \leqslant 2\mathcal{A}(f)\mathcal{A}(g).$$

On définit l'algèbre ex $\hat{A}^2$ comme l'espace des multiplicateurs de $\hat{A}^2$, munie de la norme

$$\|f\|_{\text{ex } \hat{A}^2} = \sup_{g \in \hat{A}^2} \frac{\|fg\|}{\|g\|}.$$

ex $\hat{\mathcal{A}}^2$ est définie de la même manière.

Soit φ une fonction sur le plan complexe à valeurs complexes. On dit que φ satisfait localement à la condition de Lipschitz, si pour chaque ensemble compact K, il existe une constante M_K dépendant de K telle que $|\varphi(z) - \varphi(z')| \leqslant M_K|z - z'|$ pour tous z, z' de K.

(VII) Les fonctions localement de Lipschitz opèrent sur les algèbres ex $\hat{A}^2$ et ex $\hat{\mathfrak{A}}^2$.

2. Théorème 1. — *Pour que φ opère sur $\hat{A}^2$, il faut et il suffit que φ satisfasse localement à la condition de Lipschitz et que* $\varphi(0) = 0$.

Pour prouver ce théorème nous commençons par deux lemmes :

Lemme 1. — *Soit f une fonction, égale à 1 dans l'intervalle $(-1, 1)$ et à zéro hors de $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Alors on obtient*

$$A(f) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right).$$

Démonstration. — Si $\varepsilon < \alpha < 1$ et $-1-\alpha < x < -1-\varepsilon$, alors $f(x+\alpha) = 1$ et $f(x) = 0$, donc on a

$$\begin{aligned} A(f) &= \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |f(x+\alpha) - f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &\geqslant \int_\varepsilon^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-1-\alpha}^{-1-\varepsilon} dx\right)^{1/2} \\ &\geqslant \int_{2\varepsilon}^1 \frac{\sqrt{\alpha-\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}\,\alpha^{3/2}}\, d\alpha \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Lemme 2. — *Soit $\psi_\varepsilon(x)$ la fonction continue, égale à 1 dans $(-1, 1)$, à zéro hors de $(-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ et linéaire, alors ψ_ε appartient à $\hat{A}^2$ et satisfait à*

$$A(\psi_\varepsilon) \leqslant M \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{4}\right)$$

avec une constante absolue M.

Démonstration. — Remarquons que

$$\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^\infty \chi_1(y)\chi_2(x-y)\, dy$$

où χ_1 et χ_2 sont les fonctions caractéristiques des intervalles $\left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $\left(-1-\frac{\varepsilon}{2}, 1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ respectivement, d'où la transformée de Fourier de ψ_ε égale à

$$\hat{\psi}_\varepsilon(x) = \frac{4 \sin \frac{\varepsilon}{2} x \sin\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)x}{\sqrt{2\pi}\, \varepsilon\, x^2}.$$

Donc on obtient

$$\eta^2(\alpha, \psi_\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{16 \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} x \sin^2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)x \sin^2 \frac{\alpha}{2} x}{\pi^2 \varepsilon^2 x^4}\, dx.$$

Nous estimons $\eta(\alpha, \psi_\varepsilon)$:

$$\eta^2(\alpha, \psi_\varepsilon) \leqslant 2\int_0^{1/\varepsilon} \frac{16\left(\frac{\varepsilon}{2} x\right)^2\left(\frac{\alpha}{2} x^2\right)^2}{\pi^2 \varepsilon^2 x^4}\, dx + 2\int_{1/\varepsilon}^{\infty} \frac{16\left(\frac{\alpha}{2} x\right)^2}{\pi^2 \varepsilon^2 x^4}\, dx = \frac{10\alpha^2}{\pi^2 \varepsilon},$$

et

$$\eta^2(\alpha, \psi_\varepsilon) \leqslant 2\int_0^{1/\alpha} \frac{16\left(\frac{\varepsilon}{2} x\right)^2\left(\frac{\alpha}{2} x\right)^2}{\pi^2 \varepsilon^2 x^4}\, dx + 2\int_{1/\alpha}^{\infty} \frac{16\left(\frac{\varepsilon}{2} x\right)^2}{\pi^2 \varepsilon^2 x^4}\, dx = \frac{10\alpha}{\pi^2}.$$

D'autre part $|\psi_\varepsilon(x+\alpha) - \psi_\varepsilon(x)| \leqslant 1$ et la mesure de son support ne dépasse pas $4(1+\varepsilon) \leqslant 5$, donc

$$\eta^2(\alpha, \psi_\varepsilon) \leqslant \frac{5}{2\pi}.$$

Par conséquent on a

$$\begin{aligned}
A(\psi_\varepsilon) &= \left(\int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1} + \int_1^{\infty}\right) \frac{\eta(\alpha, \psi_\varepsilon)}{\alpha^{3/2}}\, d\alpha \\
&\leqslant \int_0^{\varepsilon} \frac{\sqrt{10}\,\alpha}{\pi \varepsilon^{1/2} \alpha^{3/2}}\, d\alpha + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\sqrt{10}\,\alpha^{1/2}}{\pi \alpha^{3/2}}\, d\alpha + \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2\pi}\, \alpha^{3/2}}\, d\alpha \\
&= \frac{\sqrt{10}}{\pi} \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{2\sqrt{10}}{\pi} + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\pi}},
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Démonstration du Théorème. — La suffisance de la condition est évidente en vertu de (III). Nous allons maintenant démontrer la nécessité. Pour cela nous utilisons les notations suivantes.

Soient $\xi(x) = \psi_1(x)$

$$\xi_k(x) = \xi((x - 2^{-k})2^{k+4}), \qquad \eta_k(x) = \xi((x - 2^{-k})2^{k+3})$$

et

$$I_k = [2^{-k} - 2^{-k-4}, 2^{-k} + 2^{-k-4}], \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

Notons que $A(\xi_k) = A(\eta_k) = A(\xi)$. Pour z complexe et f de $\hat{A}^2$, posons

$$\Phi_z(f(x)) = \xi(x)[\varphi(f(x) + z) - \varphi(z)].$$

Alors comme $\Phi_z(f) = \xi(x)[\varphi(f(x) + z\xi(x/2)) - \varphi(z\xi(x/2))]$, par notre hypothèse et par la propriété (IV), $\Phi_z(f)$ appartient à $\hat{A}^2$.

Notre démonstration est divisée en quatre parties. Mais si l'on considère le sous-espace des fonctions de $\hat{A}^2$ à valeurs réelles, on peut omettre les deux premières parties.

1°) *Pour chaque z complexe, il existe deux constantes positives δ_z et M_z, et un intervalle I_z tels que $A(\Phi_z(f)) \leqslant M_z$, si f de $\hat{A}^2$ a son support dans I_z et $A(f) \leqslant \delta_z$.*

Supposons contrairement que l'énoncé ne soit pas vrai. Alors il existe une suite $\{f_k\}$ de $\hat{A}^2$ telle que

$$\text{support de } f_k \subset I_k,\ A(f_k) \leqslant 1/k^2 \quad \text{et} \quad A(\Phi_z(f_k)) \geqslant k.$$

Alors $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ appartient à $\hat{A}^2$, car, la somme converge uniformément, f est continue, f s'annule à l'infini et

$$A(f) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} A(f_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 < \infty.$$

Donc $A(\Phi_z(f))$ est finie. En notant que les supports de f_k sont disjoints, on voit que

$$\xi_k \Phi_z(f) = \Phi_z(f_k).$$

Donc d'après la propriété (IV) on a

$$\begin{aligned} A(\Phi_z(f_k)) &= A(\xi_k\Phi_z(f)) \leqslant 2A(\xi_k)A(\Phi_z(f)) \\ &= 2A(\xi)A(\Phi_z(f)). \end{aligned}$$

Le dernier membre est fini et $A(\Phi_z(f_k)) \geqslant k$ pour tout k, ce qui est absurde.

2°) *φ est bornée dans tout ensemble compact.*

Pour cela nous appliquons le lemme 2 et 1°). Fixons z complexe. On pose $\psi'(x) = \psi_{1/4}((x - a)b)$ où on choisit a et b de telle manière que le support de ψ' est contenu dans I_z. Si $A(z'\psi') \leqslant \delta_z$, et en particulier si $|z'| \leqslant \delta_z/M \log 2$, alors d'après 1°) on a :

$$\begin{aligned} M_z &\geqslant A(\Phi_z(z'\psi')) \\ &\geqslant \frac{\log 2}{2\sqrt{\pi}} |\varphi(z + z') - \varphi(z)|, \end{aligned}$$

ce qui démontre notre assertion.

3°) *Pour chaque z complexe, il existe deux nombres positifs δ'_z, M'_z et un intervalle I'_z, qui font $A(\Phi_{z+z'}(f)) \leqslant M'_z$, si f de $\hat{A}^2$ a son support dans I'_z et si $A(f) \leqslant \delta'_z$ et $|z'| \leqslant \delta'_z$.*

Supposons au contraire que cette assertion soit fausse. Alors pour chaque k, il existe f_k de $\hat{A}^2$ et z_k complexe tels que

$$\text{support de } f_k \subset I_k, \qquad A(f_k) \leqslant 1/k^2, \qquad |z_k| \leqslant 1/k^2$$

et

$$A(\Phi_{z+z_k}(f_k)) \geqslant k.$$

Si l'on pose $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k + \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k z_k$, alors f appartient à $\hat{A}^2$, parce que

$$A(f) \leqslant \Sigma A(f_k) + \Sigma |z_k| A(\eta_k) \leqslant \Sigma 1/k^2 + A(\xi)\Sigma 1/k^2 < \infty.$$

Donc $A(\Phi_z(f))$ est finie. D'autre part on a

$$\begin{aligned} \xi_k \Phi_z(f) &= \xi_k \Phi_z(f_k + z_k) \\ &= \Phi_{z+z_k}(f_k) + \xi_k[\varphi(z + z_k) - \varphi(z)]. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A(\Phi_{z+z_k}(f_k)) &\leqslant A(\xi_k \Phi_z(f)) + |\varphi(z + z_k) - \varphi(z)| A(\xi_k) \\ &\leqslant A(\xi)[2A(\Phi_z(f)) + |\varphi(z + z_k) - \varphi(z)|]. \end{aligned}$$

Comme φ est bornée dans chaque ensemble compact, le dernier membre est borné, ce qui est contradictoire avec $A(\Phi_{z+z_k}(f_k)) \geqslant k$.

4°) *Pour chaque z complexe, φ satisfait à la condition lipschitzienne dans un voisinage de z.*

Comme dans 2°), on pose $\psi'_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon((x - a)b)$, où on choisit

a et b de telle façon que l'intervalle I'_z de 3°) contient le support de ψ'_ε pour $0 < \varepsilon < 1/4$.

Si $|z'| \leqslant \delta'_z$ et $|z' - z''| \leqslant \delta'_z/M \log 2$ avec la constante du lemme 2, alors, pour certain $0 < \varepsilon < 1/4$, $\delta'_z = M \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)|z - z''|$, donc d'après le lemme 2 $\delta'_z \geqslant A((z' - z'')\psi'_\varepsilon)$. Par conséquent en vertu de 3°) et lemme 1, on a

$$\begin{aligned} M'_z &\geqslant A(\Phi_{z+z'}((z'' - z')\psi'_\varepsilon)) \\ &= A(\varphi(z + z' + (z'' - z')\psi'_\varepsilon) - \varphi(z + z')) \\ &\geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} |\varphi(z + z'') - \varphi(z + z')| \log\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right) \\ &= \frac{\delta'_z}{M2\sqrt{\pi}} \frac{|\varphi(z + z'') - \varphi(z + z')|}{|z' - z''|}, \end{aligned}$$

ce qui démontre notre assertion.

Par conséquent φ satisfait à la condition de Lipschitz dans tout ensemble compact.

On obtient facilement les analogues des lemmes 1 et 2 pour l'espace $\hat{\mathcal{A}}^2$, d'où on a par même méthode.

THÉORÈME 2. — *φ opère sur l'espace $\hat{\mathcal{A}}^2$ si et seulement si φ satisfait localement à la condition de Lipschitz et $\varphi(0) = 0$.*

COROLLAIRE. — *Pour que φ applique $\hat{A}^2$ ou $\hat{\mathcal{A}}^2$ à* ex $\hat{A}^2$ *ou* ex $\hat{\mathcal{A}}^2$ *respectivement, il faut et il suffit que φ soit localement une fonction de Lipschitz.*

Démonstration. — Pour chaque complexe z et f de $\hat{A}^2$ ou $\hat{\mathcal{A}}^2$, on pose $\Phi_z(f) = \xi[\varphi(f + z) - \varphi(z)]$, alors $\Phi_z(f)$ appartient à $\hat{A}^2$ ou $\hat{\mathcal{A}}^2$ respectivement, donc on peut suivre la démonstration ci-dessus.

3. C'est une propriété bien connue que les fonctions lipschitziennes qui conservent l'origine opèrent sur l'espace de Dirichlet. Dans ce paragraphe nous démontrons que les fonctions qui opèrent sur les espaces de Dirichlet spécialisés, sont lipschitziennes.

Soit L^2_α l'espace de fonction mesurables qui satisfait à

$$||F||_{L^2_\alpha} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F|^2 |x|^\alpha dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Soit $L_\alpha^2 \cap L^2$ un sous-espace de L_α^2 muni de la norme

$$||F||_{L_\alpha^2 \cap L^2} = ||F||_{L_\alpha^2} + ||F||_{L^2}.$$

Soit $\mathcal{F}(L_\alpha^2 \cap L^2)$ l'ensemble des transformées de Fourier des fonctions de $L_\alpha^2 \cap L^2$ muni de la norme

$$||f|| = ||F||_{L_\alpha^2 \cap L^2}$$

pour $f = \hat{F}$, $F \in L_\alpha^2 \cap L^2$.

Alors pour f de $\mathcal{F}(L_\alpha^2 \cap L^2)$ on peut obtenir la formule :

$$||f|| = ||f||_{L^2} + c_\alpha \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x - y|^{1+\alpha}} \, dx \, dy \right)^{1/2}, \quad 0 < \alpha < 2$$

en passant par la transformation de Fourier, où c_α est une constante indépendante de f.

Théorème 3. — *Pour que φ opère sur* $\mathcal{F}(L_\alpha^2 \cap L^2)$ $(0 < \alpha < 1)$, *il faut et il suffit que φ satisfasse à la condition de Lipschitz et* $\varphi(0) = 0$.

Lemme 3. — *Pour chaque intervalle* I *et chaque nombre positif a, il existe une somme finie d'intervalles* E *dans* I *dont la fonction caractéristique χ_E satisfait à*

$$a = ||\chi_E|| \quad (0 < \alpha < 1).$$

Démonstration. — D'abord nous montrons que

$$\sup \int |\hat{\chi}_E|^2 \, |x|^\alpha \, dx = \infty,$$

où χ_E parcourt toutes les fonctions caractéristiques d'ensembles E qui sont sommes finies d'intervalles contenus dans I.

Supposons au contraire que $||\hat{\chi}_E||_{L_\alpha^2} \leqslant M < \infty$ pour tout ensemble E considéré. Si f est une fonction en escalier et $0 \leqslant f \leqslant 1$, alors f s'exprime sous la forme $f = \Sigma \alpha_i \chi_{E_i}$, où $\alpha_i \geqslant 0$ et $\Sigma \alpha_i \leqslant 1$. Par conséquent

$$||\hat{f}||_{L_\alpha^2} = \Sigma \alpha_i ||\hat{\chi}_{E_i}||_{L_\alpha^2} \leqslant M \Sigma \alpha_i = M.$$

Donc pour chaque fonction f mesurable, bornée à valeurs complexes et à support dans I, on a

$$||\hat{f}||_{L_\alpha^2} \leqslant 4M ||f||_\infty.$$

On peut supposer que I est de la forme $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Si l'on pose $f = e^{iNx}$ dans I et $f = 0$ hors de I, alors on a

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{iNy} e^{-ixy}\, dy = \frac{\sqrt{2}\sin(N-y)\varepsilon}{\sqrt{\pi}\,(N-y)},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}|^2 |y|^\alpha\, dy \geqslant \frac{2}{\pi} \int \left(\frac{\sin(N-y)\varepsilon}{N-y}\right)^2 |y|^\alpha\, dy$$
$$\geqslant \frac{2}{\pi} \int \left(\frac{4\varepsilon}{\sqrt{2}\,\pi}\right)^2 |N|^\alpha\, dy,$$

où les deux dernières intégrales s'étendent sur l'intervalle $\left(N,\ N + \frac{\pi}{4\varepsilon}\right)$. Donc

$$\frac{4\varepsilon}{\pi^2} N^\alpha \leqslant M^2,$$

ce qui est absurde pour N grand.

Donc il existe un ensemble E qui est somme finie des intervalles dans I et qui satisfait à

$$a < \|\hat{\chi}_E\|_{L^2_\alpha} < \infty.$$

Si l'on pose

$$I(h) = \|\hat{\chi}_{E \cap (-\infty, h)}\|_{L^2} + \|\hat{\chi}_{E \cap (-\infty, h)}\|_{L^2_\alpha},$$

alors $I(h)$ est continue et $I(-\infty) = 0$, $I(+\infty) > a$, donc on a $I(h') = a$ pour un certain h', d'où on a le lemme.

Lemme 4. — *Si $\xi_k(x)$ est la fonction définie dans le* § 2, *alors pour toute f de $\mathcal{F}(L^2_\alpha \cap L^2)$ on a*

$$\|\xi_k f\| \leqslant c'_\alpha 2^k \|f\|$$

avec une constante c'_α indépendante de f.

Démonstration. — $\|\widehat{f.\xi_k}\|_{L^2} = \|f.\xi_k\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$. D'autre part

$$\|\widehat{f.\xi_k}\|_{L^2_\alpha} = c_\alpha \left(\iint \frac{|\xi_k(x)f(x) - \xi_k(y)f(y)|^2}{|x-y|^{\alpha+1}}\, dx\, dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant c_\alpha \left(\iint \frac{|\xi_k(x)[f(x) - f(y)]|^2}{|x-y|^{\alpha+1}}\, dx\, dy\right)^{1/2}$$
$$+ c_\alpha \left(\iint \frac{|f(y)[\xi_k(x) - \xi_k(y)]|^2}{|x-y|^{\alpha+1}}\, dx\, dy\right)^{1/2}.$$

Or
$$\sup_{-\infty<y<\infty} \int \frac{|\xi_k(x) - \xi_k(y)|^2}{|x-y|^{\alpha+1}} \, dx \leqslant c''_\alpha . 2^{2k}.$$
Donc on a
$$\begin{aligned} ||\xi_k . f|| &= ||\widehat{\xi_k . f}||_{L^2} + ||\widehat{\xi_k . f}||_{L^2_\alpha} \\ &\leqslant ||\hat{f}||_{L^2} + c_\alpha ||\hat{f}||_{L^2_\alpha} + c_\alpha \sqrt{c''_\alpha} . 2^k ||\hat{f}||_{L^2} \\ &\leqslant 2^k c'_\alpha (||\hat{f}||_{L^2} + ||\hat{f}||_{L^2_\alpha}) = 2^k c'_\alpha ||f||. \end{aligned}$$

Démonstration du Théorème 3. — La suffisance de la condition est évidente.

Supposons que φ opère sur $\mathcal{F}(L^2_\alpha \cap L^2)$. Notre démonstration procède comme précédemment.

D'abord nous montrons qu'il existe deux constantes M, δ et un intervalle I tels que, si f de $\mathcal{F}(L^2_\alpha \cap L^2)$ a son support dans I et satisfait à $||f|| \leqslant \delta$, alors $||\varphi(f)|| \leqslant M$.

Si ce n'est pas vrai, il existe une suite $\{f_k\}$ de $\mathcal{F}(L^2_\alpha \cap L^2)$ telle que
$$\text{support de } f_k \subset I_k, \ ||f_k|| \leqslant 1/k^2 \qquad \text{et} \qquad ||\varphi(f_k)|| \geqslant 2^k k.$$
Alors $f = \Sigma f_k$ appartient à $\mathcal{F}(L^2_\alpha \cap L^2)$, par conséquent $||\varphi(f)||$ est finie. D'autre part comme $0 \in \mathcal{F}(L^2_\alpha \cap L^2)$, $\varphi(0) = 0$, donc
$$\xi_k \varphi(f) = \varphi(f_k).$$
Donc d'après le lemme 4 on a
$$||\varphi(f_k)|| = ||\varphi(f)\xi_k|| \leqslant c'_\alpha 2^k ||\varphi(f)||,$$
ce qui est absurde dès que $||\varphi(f_k)|| \geqslant 2^k k$.

Donnons-nous z et z' complexes quelconques. Alors d'après le lemme 3, il existe une somme d'intervalles E contenue dans I telle que $||z\chi_E|| \leqslant \delta/2$. Soit J un intervalle contenu dans E. Si l'on applique encore une fois le lemme 3, alors on a un ensemble F contenu dans J tel que $||z'\chi_F|| = \delta/2$. Donc on obtient
$$2M \geqslant ||\varphi(z\chi_E + z'\chi_F) - \varphi(z\chi_E)||.$$
Or
$$\varphi(z\chi_E + z'\chi_F) - \varphi(z\chi_E) = [\varphi(z + z') - \varphi(z)]\chi_F.$$

Par conséquent
$$\begin{aligned} 2M &\geqslant |\varphi(z + z') - \varphi(z')| \, ||\chi_F|| \\ &= |\varphi(z + z') - \varphi(z')| \, \delta/2|z'|, \end{aligned}$$

ce qui démontre notre assertion.

Remarque 1. — Pour $1 \leqslant \alpha < 2$, on peut démontrer par la même méthode que pour le théorème 1, que, si φ opère sur $\mathcal{F}(L^2_\alpha \cap L^2)$, φ est localement une fonction de Lipschitz; cependant dans le cas $\alpha = 1$, cette condition n'est pas suffisante.

Remarque 2. — Notre démonstration du théorème 3 est applicable à un cas plus général. Soit D un espace de Dirichlet sur l'axe réel muni de la norme

$$||u|| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(x)|^2 \lambda(x)\, dx\right)^{1/2},$$

où λ est une fonction définie négative telle que $\lambda(0)$ est positive, $\lambda(x)$ tend vers l'infini avec x et telle que

$$\int_{|x|\geqslant 1} \frac{\lambda(x)}{x^2}\, dx < \infty .$$

L'espace D est un exemple (cf. [2]).

Pour achever ce paragraphe nous ajoutons certaines variations du théorème 3 sans démonstration. La démonstration en sera donnée par le même procédé que pour le théorème 3.

Soit $l^2_{\log}$ l'espace des suites $\{a_k\}$, telles que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \log\,(|k| + 2)$$

est finie et soit $l^2_\alpha (0 < \alpha < 1)$ l'espace des suites $\{b_k\}$, telles que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2(|k| + 1)^\alpha$ est finie, alors on a

THÉORÈME 4. — *φ opère sur $\mathcal{F}l^2_{\log}$ ou $\mathcal{F}l^2_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, si et seulement si φ est une fonction de Lipschitz.*

M. le Professeur J.-P. Kahane a bien voulu donner des conseils et suggérer une autre démonstration du théorème 1 par l'absurde. Je tiens ici à lui exprimer mes remerciements. L'auteur remercie également M. Faraut de ses avis qui lui ont été bien utiles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BEURLING, Contraction and analysis of some convolution algebras, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 14 (1964).

[2] A. BEURLING et J. DENY, Dirichlet spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 45, (1959), 208-215.

Manuscrit reçu en mars 1965.

Satoru IGARI,
Institut de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Université de Tôhoku,
Sendai (Japon).