ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

MAURICE BLAMBERT

Extensions par voie somatique d'une propriété de type algorithmique de la théorie des singularités des fonctions analytiques

Annales de l'institut Fourier, tome 15, nº 2 (1965), p. 575-596

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1965__15_2_575_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
15, 2 (1965), 575-596.

EXTENSIONS PAR VOIE SOMATIQUE D'UNE PROPRIÉTÉ DE TYPE ALGORITHMIQUE DE LA THÉORIE DES SINGULARITÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

par Maurice BLAMBERT

Introduction.

Dans ce travail, je me propose d'étudier certaines extensions d'une propriété élémentaire classique énoncée par Landau et qui a donné lieu à de nombreux essais de généralisations dans diverses voies — partiellement couronnés de succès — dus notamment à M. Fekete, G. Pólya, V. Bernstein.., et bien, d'autres (et moi-même, il y a quelques années, dans un mémoire des *Annales de l'Université d'Alger*). Cette propriété, dont je donne un énoncé au chapitre premier ci-dessous, est celle élémentaire type rencontrée dans les monographies où l'on traite de l'influence de la suite des coefficients des germes tayloriens ou dirichletiens sur la localisation des points singuliers des fonctions analytiques qu'ils définissent. Il ne saurait être question ici d'une étude exhaustive sur un point, même assez particularisé d'une telle théorie.

Au chapitre premier, je me limite à dégager les idées — en leur conservant une présentation et une justification élémentaires — qui sont à la base des extensions que j'ai obtenues. Au chapitre II, j'aborde l'exposition de ces extensions sous des conditions des types algorithmique et somatique, et la poursuit au chapitre III, uniquement sous une condition de type somatique. Enfin, une bibliographie succincte — comportant certains de mes résultats en liaison plus ou moins étroite avec ceux obtenus ici — termine ce travail.

CHAPITRE PREMIER

1. — Je conviens de dire que toute suite réelle, positive, strictement croissante et non bornée, est une D-suite. Je rappelle l'énoncé du théorème de Landau-Fekete :

On considère l'élément dirichletien,

$$\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}, \qquad \textit{avec} \qquad s = \sigma + i\tau,\ \sigma \text{ et } \tau \in \mathbf{R},$$

où la suite (a_n) *des coefficients de* $\{f\}$ *est une suite de constantes complexes et où la suite des exposants* (λ_n) *de* $\{f\}$ *est une* D*-suite. On suppose que l'abscisse de convergence simple de* $\{f\}$, *que l'on note* σ_c^f, *est finie (pour éviter d'inutiles complications de calcul et d'écriture, on suppose* $\sigma_c^f = 0$).

1) *Si* (a_n) *se réduit à une suite réelle positive, alors le point* $s = 0$ *de* $\mathbf{C}$ *appartient à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz du prolongement analytique de la somme de* $\{f\}$. Ce résultat est dû à Landau.

2) *Si, un peu plus généralement, et posant*

$$\operatorname{Arg} a_n = \omega_n \in\,]-\pi, \pi],$$
$$\exists \theta \in [0, \pi/2[\text{ et } \exists n_1 \in \mathbf{N}_+, \forall n \geqslant n_1 : |\omega_n| \leqslant \theta,$$

alors, encore dans ce cas, le point $s = 0$ *de* $\mathbf{C}$ *appartient à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz du prolongement analytique de la somme de* $\{f\}$. Ce résultat est dû à M. Fekete.

Il est précisé (une fois pour toutes) que, tout au long de ce travail, tous les éléments de la suite (a_n) sont supposés différents de 0. La notion « d'étoile rectiligne au sens de Riesz » est trop bien connue pour qu'il soit besoin de la rappeler ici. Précisons cependant que, sous le vocable « étoile rectiligne de Riesz du prolongement analytique de la somme de $\{f\}$ » ou, sous celui plus succinct, « étoile rectiligne de Riesz de l'élément

$\{f\}$ », il sera toujours question dans ce travail de l'étoile rectiligne de Riesz du « prolongement analytique rectiligne de l'application »

$$\forall s \in \{\mathbf{C} | \mathcal{R}s = \sigma > 0,\ \tau \in \mathbf{R}\} : s \to f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n},$$

prolongement effectué parallèlement à l'axe réel à partir de tout point de « l'ouvert de convergence simple de $\{f\}$ ». En outre, par « ouvert de convergence simple d'un élément dirichletien $\{f\}$ », je désigne le sous-ensemble de $\mathbf{C}$ suivant: $\{s \in \mathbf{C} | \mathcal{R}s = \sigma > \sigma_c^f, \tau \in \mathbf{R}\}$. Cet ensemble est, évidemment, un sous-ensemble de l'ensemble maximal de convergence de $\{f\}$.

La méthode de démonstration utilisée par Landau, qui est aussi celle de Fekete, à des détails près (du moins à en juger par son exposition donnée par V. Bernstein dans sa monographie bien connue) est fondée sur la légitimité de la permutation des signes de sommation d'une série double. Je rappelle que cette proposition de Landau-Fekete a été étendue, notamment par H. Delange, aux fonctionnelles du type de Laplace-Stieltjes.

2. — Du point de vue de leur nature, les conditions qui interviennent dans les énoncés des extensions de la proposition de Landau-Fekete peuvent être classées en deux catégories :

a) d'une part, celle des conditions ne faisant intervenir que l'aspect descriptif de l'élément dirichletien $\{f\}$. J'entends par là, des conditions ne portant que sur les éléments des deux suites (a_n) et (λ_n) — et explicitement sur eux. Je conviens de dire que de telles conditions sont de type « algorithmique »;

b) d'autre part, celle des conditions ne faisant pas intervenir explicitement des propriétés du type précédent mais portant directement ou non (même d'une manière très détournée) sur la fonction analytique f (ou toute autre fonction convenablement associée à f) définie par l'élément $\{f\}$. Je conviens de dire que de telles conditions sont de type « somatique ».

En distinguant ces deux types de conditions, je me propose, tout au plus, de mieux faire comprendre les quelques idées constructives qui sont à la base de mes généralisations. La voie « algorithmique » est celle utilisée, après Landau et Fekete, par G. Pólya, V. Bernstein, ..., et leurs émules, spécialistes des séries de Dirichlet. Par analogie, on peut dire que les extensions dues à H. Delange (et, en général, aux mathématiciens qui ont cherché à étendre, à des fonctionnelles du type de Laplace, des résultats connus de la théorie des séries de Dirichlet comportant des conditions de type « algorithmique ») l'ont été par voie « somatique ». La voie « algorithmique » est, à beaucoup d'égards, hérissée de difficultés plus grandes que la voie « somatique ». Les progrès y sont plus difficiles et, peut-être, apparemment moins spectaculaires. Il est à noter qu'il est remarquable que les exemples illustrant les généralisations obtenues par voie « somatique » sont recherchés souvent par voie « algorithmique », et que la voie « somatique », apparemment plus féconde, trouve peut-être, ses plus grandes difficultés dans le retour à la voie « algorithmique » pour la détermination des exemples illustrant sa valeur généralisatrice.

3. — Soit un élément dirichletien $\{f\}$ dont la suite des exposants (λ_n) est une D-suite. On suppose $\sigma_c^f = 0$. On considère l'élément dirichletien,

$$\{f_{s_0}^*\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s_0\lambda_n} . e^{-s\lambda_n^*}, \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbf{N}_+ : \lambda_n^* = \log \lambda_n,$$

et on désigne par $\mathcal{F}^*$ la famille suivante des applications $f_{s_0}^*$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, indexées par s_0 dans $\mathbf{R}_+$,

$$\forall s_0 \in \mathbf{R}_+ : s \to f_{s_0}^*(s),$$

où, $\forall s \in \mathbf{C}, f_{s_0}^*(s)$ est la valeur en s de l'élément $\{f_{s_0}^*\}$; l'application $f_{s_0}^*$ est une fonction entière dans $\mathbf{C}$. (Il est très facile de vérifier que $\sigma_A^{f_{s_0}^*} = -\infty, \forall s_0 \in \mathbf{R}_+$; $\mathbf{R}_+$ désignant l'ensemble des nombres réels strictement positifs). On convient de dire que l'élément dirichletien $\{f\}$ est le « germe algorithmique » de la famille $\mathcal{F}^*$.

On désigne par F la famille suivante des éléments tayloriens indexés par s_0 dans $\mathbf{R}_+$,

$$\forall s_0 \in \mathbf{R}_+, \quad \{f_{s_0}\} : \sum_{p=0}^{\infty} [(-1)^p (s - s_0)^p f_{s_0}^*(-p)/p\,!],$$

et par ρ_{s_0} le rayon de convergence de $\{f_{s_0}\}$. Pour que le point

$s = 0$ appartienne à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément dirichletien $\{f\}$, il est nécessaire et suffisant que,

$$\forall s_0 \in \mathbf{R}_+ : \rho_{s_0} = s_0.$$

Tout élément de la famille F est un germe analytique pour la fonction analytique f définie par le « prolongement analytique dans $\mathbf{C}$ » de la somme de l'élément $\{f\}$ (on notera que cette locution ne signifie pas que tout point de $\mathbf{C}$ est « régulier » pour f; en outre, ce prolongement est effectué, à la manière élémentaire classique, en utilisant la notion d'holomorphie, et non pas celle, un peu plus générale, de méromorphie). Il est trivial que $\rho_{s_0} \geqslant s_0$. Il est vraisemblable que c'est, peut-être, l'évidence de cette trivialité qui a masqué aux auteurs la voie que j'ai suivie. En effet, elle éliminait « ipso facto » la nécessité de déterminer un majorant de $|f^*_{s_0}(-p)|$, suffisamment fin, pour obtenir un minorant convenable de ρ_{s_0}. Or, lorsque la suite (a_n) est positive, on a,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon \in]0, s_0[: f^*_{s_0}(-p) &\leqslant \operatorname{Max}\{\lambda_n^{\mathrm{P}} e^{-(s_0-\varepsilon)\lambda_n}\} . f(\varepsilon), \quad n \in \mathbf{N}_+, \\ &\leqslant \operatorname{Max}\{t^{\mathrm{P}} e^{-(s_0-\varepsilon)t_n}\} . f(\varepsilon), \quad t \in \mathbf{R}_+, \\ &\leqslant [p/(s_0 - \varepsilon)]^{\mathrm{P}} . e^{-\mathrm{P}} f(\varepsilon), \end{aligned}$$

(où $f(\varepsilon)$ est la valeur en ε de l'élément $\{f\}$), puisque l'ensemble des valeurs de l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}_+$, $t \rightarrow t^{\mathrm{P}} e^{-\omega t}$, où p et ω sont des constantes strictement positives, atteint son maximum dans $\mathbf{R}_+$, égal à $(p/\omega)^p e^{-p}$, au point $t = p/\omega$. Il en résulte que,

$$1/\rho_{s_0} \leqslant \lim_{p \uparrow +\infty} \{[p/(s_0 - \varepsilon)]^{\mathrm{P}} . e^{-\mathrm{P}} . f(\varepsilon)/p\,!\}^{1/\mathrm{P}} = 1/(s_0 - \varepsilon),$$

et donc $\rho_{s_0} \geqslant s_0$.

Les extensions, figurant aux chapitres suivants, du théorème de Landau-Fekete ont pour origine l'idée suivante issue de ce dernier résultat, à savoir : le groupement de termes qui joue un rôle fondamental pour retrouver la minoration, $\rho_{s_0} \geqslant s_0$, triviale d'un autre point de vue, joue-t-il aussi un rôle fondamental dans une minoration convenable de $f^*_{s_0}(-p)$ qui conduit à la majoration, $\rho_{s_0} \leqslant s_0$? La réponse est affirmative sous la condition de type « algorithmique » que la suite (λ_n) soit à densité supérieure finie. Dans le cas général du théorème de Landau-Fekete, je veux dire, sans condition sur la suite

(λ_n), la même idée, avec des aménagements convenables mais respectant cependant son principe, est encore efficace. Ma démonstration de ce théorème, que je n'exposerai pas ici, utilise une expression algorithmique de σ_c^f due au mathématicien japonais Kojima. J'ai été amené, à cette occasion, à reprendre, dans un court mémoire paru dans les Annales de l'Institut Fourier (1964), la démonstration de l'expression algorithmique de σ_c^f due à cet auteur. Elle se réduit, dans l'essentiel, à quelques majorations élémentaires, cependant le symbolisme utilisé peut sembler, de prime abord, un peu délicat à suivre.

CHAPITRE II

Je vais maintenant aborder successivement diverses extensions, obtenues par voie « composite », du théorème de Landau-Fekete; j'entends par là que, dans un même énoncé, vont intervenir, à la fois, une condition de type « somatique », et une condition de type « algorithmique » (qui portera exclusivement sur la D-suite (λ_n)).

A. — On considère à nouveau une application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, $s \to f^*_{s_0}(s)$, où $f^*_{s_0} \in \mathcal{F}^*(\mathcal{F}^*$ étant engendrée par un germe « algorithmique » $\{f\}$, avec $\sigma^f_c = 0)$. On suppose $\lambda_1 > 1$; cette condition étant purement technique, comme il apparaîtra ultérieurement. On se limite au cas où la D-suite des exposants de $\{f\}$, (λ_n), est à densité supérieure, D^*, finie (c'est la seule condition de type « algorithmique » qui figure dans le premier énoncé qui va suivre). On remarque que, dans ce cas, $\sigma^f_A = \sigma^f_c$. Pour σ arbitrairement fixé dans $\mathbf{R}$, on pose :

$$M(\sigma) = \operatorname{Sup} |f^*_{s_0}(s')|, \quad s' \in \{\mathbf{C} | \sigma' \geqslant \sigma, \tau' \in \mathbf{R}\}.$$

L'application, $\sigma \to M(\sigma)$, de support $\mathbf{R}$, est, comme il est évident, à valeur décroissante dans $\mathbf{R}$, avec $\lim M(\sigma) = 0$, $\sigma \uparrow +\infty$, et $\lim M(\sigma) = +\infty$, $\sigma \downarrow -\infty$. Eu égard à une extension aux séries de Dirichlet générales de la relation de Cauchy exprimant le coefficient d'indice n d'un élément taylorien, on a,

$$\forall \sigma \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}_+ : a_n e^{-s_0\lambda_n} . e^{-\sigma\lambda^*_n} = \lim \left\{ (1/\tau_1) \int_{\tau_0}^{\tau_1} f^*_{s_0}(\sigma + i\tau) e^{i\tau\lambda^*_n} d\tau \right\}$$

$\tau_1 \uparrow +\infty$, (où τ_0 est réel arbitraire fixé), et donc,

$$|a_n| e^{-s_0\lambda_n} . e^{-\sigma\lambda^*_n} \leqslant M(\sigma).$$

On considère la famille des sous-ensembles stricts de $\mathbf{R}$ suivants, indexés par σ dans $\mathbf{R}$,

$$\forall \sigma \in \mathbf{R} : \{\sigma' \in \mathbf{R} | \mathrm{M}(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma)|\}.$$

Si l'ensemble d'indice σ est non-vide, on désigne par α_σ son infimum; sinon, on pose $\alpha_\sigma = +\infty$. Ainsi α_σ est la valeur en σ d'une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ complété par l'élément $+\infty$. Pour $\alpha_\sigma \in \mathbf{R}$, on a,

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ : \mathrm{M}(\alpha_\sigma + \varepsilon) < |f_{s_0}^*(\sigma)|,$$

puisque

$$]\alpha_\sigma, +\infty[\subset \{\sigma' \in \mathbf{R} | \mathrm{M}(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma)|\},$$

et donc, pour $\alpha_{-\mathrm{P}} \in \mathbf{R}$,

$$\forall n \in \mathbf{N}_+ : |a_n| e^{-s_0\lambda_n} . \lambda_n^{-(\alpha_{-\mathrm{P}}+\varepsilon)} \leqslant \mathrm{M}(\alpha_{-\mathrm{P}} + \varepsilon) < |f_{s_0}^*(-p)|.$$

Je conviens de dire que l'élément dirichletien $\{f\}$ est à « coefficients quasi-positifs » ou, moins succinctement, que la « suite (a_n) est quasi-positive par rapport à la suite (λ_n) au point $s_0 > 0$ » si, $\exists \sigma_1 \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ et $\exists \theta_0 \in \mathbf{R}_+ \cup \{0\}$:

$$\operatorname{Sup}(\alpha_\sigma - \sigma) = \theta_0, \quad \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma < \sigma_1\}.$$

Il est visible que cette condition est de type « somatique ».

On pose,

$$\forall n \in \mathbf{N}_+ : p_n = [s_0\lambda_n].$$

(p_n est la partie entière de $s_0\lambda_n$).

Il est élémentaire que,

$$\limsup \{|a_n|^{1/(s_0\lambda_n)}\} = 1, \quad n \uparrow +\infty.$$

Cette relation résulte ici, dans le cas $\mathrm{D}^* < +\infty$, d'une expression algorithmique bien connue de σ_{A}^f (légitime, dans le cas $\lim \{\log n/\lambda_n\} = 0$). Donc,

$$\exists (n_j) : \lim \{|a_{n_j}|^{1/\mathrm{P}_{n_j}}\} = 1, \quad j \uparrow +\infty.$$

Si la suite (a_n) est quasi-positive, au sens défini ci-dessus, on a,

$$\forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma < \sigma_1\} : \sigma \leqslant \alpha_\sigma \leqslant \sigma + \theta_0,$$

et donc,

$$\forall\varepsilon \in]0, [\theta_0] + 1 - \theta_0[,$$
$$\forall_{\mathrm{P}}(-p < \sigma_1) \in \mathbf{N} : -p < \alpha_{-\mathrm{P}} + \varepsilon < -p + [\theta_0] + 1$$
$$\forall n \in \mathbf{N}_+ : |a_n|e^{-s_0\lambda_n}.\lambda_n^{\mathrm{P}-[\theta_0]-1} \leqslant \mathrm{M}[-p + [\theta_0] + 1) \leqslant \mathrm{M}(\alpha_{-\mathrm{P}} + \varepsilon).$$

D'où,

$$\begin{aligned} 1/\rho_{s_0} &\geqslant \overline{\lim}\ [\mathrm{M}(\alpha_{-\mathrm{P}} + \varepsilon)/p\,!]^{1/\mathrm{P}}, \quad p \uparrow +\infty, \\ &\geqslant \overline{\lim}\ [\mathrm{M}(-p_{n_j} + [\theta_0] + 1)/p_{n_j}\,!]^{1/\mathrm{P}_{n_j}}, \quad j \uparrow +\infty, \\ &\geqslant \lim\ [|a_{n_j}|\lambda_{n_j}^{\mathrm{P}_{n_j}-[\theta_0]-1}.e^{-s_0\lambda_{n_j}}/p_{n_j}\,!]^{1/\mathrm{P}_{n_j}} = 1/s_0, \quad j \uparrow +\infty. \end{aligned}$$

Ce résultat, joint au résultat trivial $\rho_{s_0} \geqslant s_0$, entraîne $\rho_{s_0} = s_0$. On peut donc énoncer :

Proposition (II.1). — *Sous les conditions suivantes relatives à l'élément dirichletien* $\{f\}$, *avec* $\sigma_c^f = 0$,

1) *du type « algorithmique » : la* D-*suite des exposants de* $\{f\}$, (λ_n), *est à densité supérieure finie,*

2) *du type « somatique » : il existe un point* $s_0 > 0$ *tel que la suite* (a_n) *des coefficients de* $\{f\}$, *est quasi-positive par rapport à* (λ_n) *au point* s_0,
alors le point $s = 0$ *appartient à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément* $\{f\}$.

Cette proposition est énoncée en supprimant la condition $\lambda_1 > 1$. Il est évident que, si $\lambda_1 \leqslant 1$ on peut toujours raisonner, comme on l'a fait antérieurement, sur l'élément,

$$\{f_0\} : \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n},$$

où n_0 est un entier choisi tel que $\lambda_{n_0} > 1$. La fonction analytique définie par le « prolongement analytique dans **C** » (je rappelle que cette locution n'implique pas que tout point **C** est « régulier » pour f_0) de la valeur de l'élément $\{f_0\}$ ne diffère de la fonction analytique f que par une fonction entière dont la valeur $\forall s \in \mathbf{C}$ est celle d'un polynôme dirichletien. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que le point $s = 0$ appartienne à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément $\{f\}$ est qu'il appartienne à celle de $\{f_0\}$. La condition technique $\lambda_1 > 1$ a pour effet de permettre des simplifications de détails; elle sera sous-entendue dans tout ce travail. On remarquera que la condition $\sigma_c^f = 0$ est évidemment de type « algorithmique ».

Remarque 1. — Si la suite (a_n) est réelle positive (cas du théorème originel de Landau), on a,

$$\forall s_0 \in \mathbf{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \forall \sigma \in \mathbf{R} : \mathrm{M}(\sigma) = f_{s_0}^*(\sigma),$$

et donc, $\alpha_\sigma = \sigma$.

Ainsi, (a_n) étant une suite positive et (λ_n) étant une D-suite, alors — sous la condition que l'élément dirichletien, $\{f\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-s\lambda_n}$, admet une abscisse de convergence simple, σ_c^f, égale à 0 — la suite (a_n) est nécessairement quasi-positive par rapport à (λ_n), en chaque point de $\mathbf{R}_+$.

Remarque 2. — Si la suite (a_n) des coefficients du germe algorithmique $\{f\}$ de la famille $\mathcal{F}^*$ vérifie la condition « algorithmique » de Fekete (dans la remarque (I), la condition de positivité de (a_n) est évidemment de type « algorithmique) rappelée dans l'énoncé du théorème de Landau-Fekete, il est trivial d'affirmer qu'on peut toujours supposer $n_1 = 1$ sans diminuer la généralité du résultat. Posant $a_n^1 = \mathcal{R}a_n$, on a,

$$|a_n| \leqslant \omega a_n^1, \qquad \text{avec} \qquad \omega = 1/cos\ \theta,$$

et donc,

$$\forall s \in \mathbf{C} \qquad \text{et} \qquad \forall s_0 \in \mathbf{R}_+ : |f_{s_0}^*(s)| \leqslant \omega \varphi_{s_0}(\sigma),$$

où $\varphi_{s_0}(\sigma)$ est la valeur en $\sigma = \mathcal{R}s$ de l'élément

$$\{\varphi_{s_0}\} : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 e^{-s_0\lambda_n} . e^{-s\lambda_n^*},$$

(il est trivial que $\sigma_c^{\varphi_{s_0}} = -\infty$, puisque le germe algorithmique $\{f\}$ de $\mathcal{F}^*$ admet $\sigma_c^f = 0$).

Il est évident que : $\mathrm{M}(\sigma) \leqslant \omega\varphi_{s_0}(\sigma)$.

De la condition de Fekete, résulte,

$$\forall \sigma \in \mathbf{R}, \qquad \forall n' \in \mathbf{N}_+ : \sum_{n=1}^{n'} a_n'^1 e^{-\sigma\lambda_n^*} \leqslant \left| \sum_{n=1}^{n'} a_n' e^{-\sigma\lambda_n^*} \right|,$$

avec $a_n' = a_n e^{-s_0\lambda_n}$ et $a_n'^1 = \mathcal{R}a_n'$. Par passage à la limite, on a,

$$\forall \sigma \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad \forall s_0 \in \mathbf{R}_+ : \varphi_{s_0}(\sigma) \leqslant |f_{s_0}^*(\sigma)|.$$

En outre (puisque $\lambda_1 > 1$),

$$\exists \varepsilon \in \mathbf{R}_+, \qquad \forall n \in \mathbf{N}_+ : \omega < e^{\varepsilon\lambda_n^*};$$

on a aussi,

$$\forall \sigma \in \mathbf{R} \qquad \text{et} \qquad \forall s_0 \in \mathbf{R}_+ : \mathrm{M}(\sigma) < \varphi_{s_0}(\sigma - \varepsilon).$$

σ étant réel arbitraire fixé, et désignant par β_σ l'infimum de l'ensemble $\{\sigma' \in \mathbf{R} | \varphi_{s_0}(\sigma' - \varepsilon) < |f_{s_0}^*(\sigma)|\}$, on a,

$$\sigma \leqslant \alpha_\sigma \leqslant \beta_\sigma.$$

On a, en outre,

$$\beta_\sigma \leqslant \sigma + \varepsilon$$

puisque $\sigma + \varepsilon$ est l'infimum de l'ensemble

$$\{\sigma' \in \mathbf{R} | \varphi_{s_0}(\sigma' - \varepsilon) < \varphi_{s_0}(\sigma)\}$$

qui est lui-même un sous-ensemble de $\{\sigma' \in \mathbf{R} | \varphi_{s_0}(\sigma' - \varepsilon) < |f_{s_0}^*(\sigma)|\}$. En conclusion, si la suite (a_n) vérifie la condition « algorithmique » de Fekete, elle est nécessairement (sous la condition que l'élément $\{f\}$ ait une abscisse de convergence égale à 0) une suite quasi-positive par rapport à (λ_n) en chaque point s_0 strictement positif. On peut donc dire que, pour la classe des éléments dirichletiens $\{f\}$, avec $\sigma_c^f = 0$, dont les D-suites d'exposants sont à densité supérieure finie, la proposition (II.1) ci-dessus est une extension du théorème de Landau-Fekete.

Remarque 3. — Soit $f_{s_0}^* \in \mathcal{F}^*$. On suppose qu'il existe deux nombres strictement positifs, ω_1 et ω_2, et un élément dirichletien dont la suite des coefficients (b_n) est positive et dont la suite des exposants (μ_n) est une D-suite,

$$\{\psi\} : \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-s\mu_n}, \qquad \text{avec} \qquad \sigma_A^\psi = -\infty \quad \text{et} \quad \mu_1 > 0,$$

tels que, $\exists \sigma_1 \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $\forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma < \sigma_1\}$:

$$\omega_1 \psi(\sigma) \leqslant |f_{s_0}^*(\sigma)| \leqslant \mathrm{M}(\sigma) \leqslant \omega_2 \psi(\sigma).$$

L'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, $\sigma \to \psi(\sigma)$, (où $\psi(\sigma)$ est la valeur en σ de la somme de l'élément $\{\psi\}$) est, comme il est trivial, à valeur $\psi(\sigma)$ continue et strictement décroissante sur son support $\mathbf{R}$. Il est trivial aussi que : $f_{s_0}^*(\sigma) \neq 0$, $\forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma < \sigma_1\}$.

Remarquant que, $\exists \varepsilon_1 \in \mathbf{R}_+$ et $\exists \varepsilon_2 \in \mathbf{R}_+$,

$$\forall n \in \mathbf{N}_+ : \omega_2 < e^{\varepsilon_2 \mu_n} \qquad \text{et} \qquad \omega_1 > e^{-\varepsilon_1 \mu_n},$$

on a,

$$\forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma < \sigma_1\} : \psi(\sigma + \varepsilon_1) < |f^*_{s_0}(\sigma)| \leqslant \mathrm{M}(\sigma) < \psi(\sigma - \varepsilon_2).$$

On considère la famille des sous-ensembles stricts de $\mathbf{R}$ suivants indexés par σ dans $\{\mathbf{R}|\sigma < \sigma_1\}$,

$$\forall \sigma \in \{\mathbf{R}|\sigma < \sigma_1\} : \{\sigma' \in \mathbf{R} | \psi(\sigma' - \varepsilon_2) < |f^*_{s_0}(\sigma)|\}.$$

Tous ces sous-ensembles sont non vides. On désigne par β_σ l'infimum du sous-ensemble d'indice σ. Le nombre β_σ est ainsi défini comme la valeur en $\sigma < \sigma_1$ d'une application de $\{\mathbf{R}|\sigma < \sigma_1\}$ dans $\mathbf{R}$. Soit un nombre σ vérifiant la condition, $\sigma < \sigma_1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$; on a,

$$\forall \sigma' \in]\sigma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \sigma_1[: \psi(\sigma' - \varepsilon_2) < \psi(\sigma + \varepsilon_1) < |f^*_{s_0}(\sigma)|,$$

et donc $\beta_\sigma \leqslant \sigma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Ainsi,

$$\exists \sigma_2 < \sigma_1, \qquad \forall \sigma < \sigma_2 : \beta_\sigma \leqslant \sigma + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \sigma_1.$$

ψ étant à valeur strictement décroissante et continue dans $\mathbf{R}$, avec $\lim \psi(\sigma) = 0$, $\sigma \uparrow + \infty$, et $\lim \psi(\sigma) = + \infty$, $\sigma \downarrow - \infty$, on a,

$$\forall \sigma < \sigma_2 :]\beta_\sigma, + \infty[= \{\sigma' \in \mathbf{R} | \psi(\sigma' - \varepsilon_2) < |f^*_{s_0}(\sigma)|\},$$

avec

$$\forall \sigma' \in]\beta_\sigma, \sigma_1[: \mathrm{M}(\sigma') < \psi(\sigma' - \varepsilon_2);$$

donc

$$]\beta_\sigma, \sigma_1[\subset \{\sigma' \in \mathbf{R} | \mathrm{M}(\sigma') < |f^*_{s_0}(\sigma)|\},$$

et

$$0 \leqslant \alpha_\sigma - \sigma \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

En conclusion, la suite (a_n) est « quasi-positive par rapport à la suite (λ_n) au point s_0 ».

On remarquera que le cas,

$$\omega_1 = \omega_2 = 1, \qquad \text{avec} \qquad \{\psi\} = \{f^*_{s_0}\}, \quad \sigma_1 = + \infty,$$

correspond au théorème de Landau (cette remarque impliquant, bien entendu, que la famille $\mathcal{F}^*$, qui contient $f^*_{s_0}$, est engendrée par un germe « algorithmique » $\{f\}$, avec $\sigma_c^f = 0$, dont la suite de coefficients (a_n) est positive); le cas,

$$\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = \omega, \qquad \{\psi\} = \{\varphi_{s_0}\}, \qquad \sigma_1 = +\infty,$$

correspond au théorème de Fekete (avec une remarque analogue à celle du cas antérieur relativement au germe « algorithmique » engendrant la famille $\mathcal{F}^*$).

B. — On se propose de donner un énoncé contenant une condition de type « algorithmique » sur (λ_n) plus faible que la condition, $D^* < +\infty$. Soit $x \in \mathbf{R}_+$; on désigne par $n[x]$ le minimum du sous-ensemble de $\mathbf{N}_+$ suivant,

$$\{n \in \mathbf{N}_+ | \lambda_n \geqslant [x]\}.$$

On désigne par $n(x)$, $\forall x > \lambda_1$, le maximum du sous-ensemble strict de $\mathbf{N}_+$ suivant,

$$\{n \in \mathbf{N}_+ | \lambda_n < x\},$$

et on pose,

$$\forall x \in]0, \lambda_1] : n(x) = 0.$$

Ainsi, l'application $x \to n[x]$, de support $\mathbf{R}_+$, est à valeurs dans $\mathbf{N}_+$; l'application, $n \to n(x)$, de support $\mathbf{R}_+$, est à valeurs dans $\mathbf{N}$. On désigne par $\mathbf{R}_\lambda$ le sous-ensemble maximal de $\mathbf{R}_+$ dont chaque point x vérifie la condition: $n(x) \geqslant n[x]$; en d'autres termes, $x \in \mathbf{R}_\lambda \subset \mathbf{R}_+$ si et seulement si cette condition est vérifiée.

On pose:

$$\Delta = \lim \text{Sup}\, [n(x) - n[x] + 1]^{1/x}, \qquad \mathbf{R}_\lambda \ni x \uparrow +\infty.$$

Il est trivial que $\Delta \geqslant 1$. Ce nombre Δ est appelé « le coefficient de localisation de la D-suite (λ_n) ». La technique utilisée pour la démonstration de la proposition (II.1), avec des variantes convenables, permet de prouver la proposition suivante:

Proposition (II.2). — *Sous les conditions relatives à l'élément dirichletien $\{f\}$, avec $\sigma_\Lambda^f = 0$,*

1) *du type « algorithmique »: le coefficient de localisation Δ, de la* D*-suite (λ_n) des exposants de $\{f\}$, est fini,*

2) *du type « somatique »: il existe un point $s_0 > 0$ tel que la suite (a_n) des coefficients de $\{f\}$ est quasi-positive par rapport à (λ_n) au point s_0,*

alors l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément $\{f\}$ *ne peut pas contenir un disque ouvert, de centre* s_0, *dont le rayon est supérieur à* $s_0\Delta^{1/s_0}$.

Remarque 1. — Si (λ_n) est quasi-régulière, j'entends par là, si $\operatorname{Inf}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0$, $n \in \mathbf{N}_+$, ou si, plus généralement, (λ_n) est à densité supérieure $D^* < +\infty$, alors $\Delta = 1$.

Remarque 2. — Si $\{f\}$ est un élément dirichletien « ordinaire », on entend par là, si la D-suite (λ_n) se réduit (à certains termes près — en nombre fini) à la suite $(\log n)$, alors $\Delta = e$.

On établit facilement ces deux derniers résultats en utilisant l'algorithme de Kojima pour la détermination de l'abscisse de convergence de l'élément dirichletien,

$$\{\theta\} : \sum_{n=1}^{\infty} e^{-s\lambda_n}.$$

Avec une adaptation convenable, la méthode utilisée pour établir les propositions (II.1) et (II.2) permet de prouver :

Proposition (II.3). — *Pour que le point* $s = 0$ *appartienne à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément* $\{f\}$, *avec* $\sigma_A^f = 0$, *il suffit, sous la condition* (2) *de la proposition* (II.2), *qu'il existe une constante strictement positive* K *telle que*

$$\lim \operatorname{Inf} |a_n|\lambda_n^K > 0, \ n \uparrow +\infty.$$

C. — La technique de démonstration des propositions antérieures, avec des aménagements convenables, permet d'établir une proposition plus générale que la proposition (II.2), sous la condition algorithmique (1), relative à la D-suite (λ_n), qui y figure, en remplaçant la condition somatique (2) par une autre, également somatique, mais plus faible. La définition antérieure de α_σ n'a d'intérêt — pour l'usage qu'on en a fait — que s'il existe $\sigma_1 \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha_\sigma \in \mathbf{R}$, $\forall\sigma \in \{\mathbf{R}|\sigma \leqslant \sigma_1\}$. Dans ce cas, on pose,

$$\forall\sigma \in \{\mathbf{R}|\sigma \leqslant \sigma_1\} : \theta_\sigma = \operatorname{Sup}(\alpha_{\sigma'} - \sigma'), \qquad \sigma' \in [\sigma, \sigma_1].$$

L'application, $\sigma \to \theta_\sigma$, de support $\{\mathbf{R}|\sigma \leqslant \sigma_1\}$, est à valeur décroissante sur son support. On pose :

$$\nu = \lim \operatorname{Sup} \{(\theta_{-\sigma}/\sigma) \operatorname{Log} (\sigma/s_0)\}, \qquad \sigma(> -\sigma_1) \uparrow +\infty,$$

et on appelle ce nombre ν, le « coefficient de self-adhérence, dans la direction $\operatorname{Arg} s = \pi$, de la fonction entière $f^*_{s_0} \in \mathcal{F}^*$. On peut énoncer :

Proposition (II.4). — *Sous les conditions relatives à l'élément dirichletien* $\{f\}$, *avec* $\sigma^f_\Lambda = 0$,

1) *du type « algorithmique » : la* D-*suite* (λ_n) *des exposants de l'élément* $\{f\}$ *a un coefficient de localisation,* Δ, *fini,*

2) *du type « somatique » : il existe un point* $s_0 > 0$ *tel que la fonction entière* $f^*_{s_0}$ *admet un coefficient de self-adhérence (dans la direction* $\operatorname{Arg} s = \pi$), ν, *fini,*
alors, l'étoile rectiligne de Riesz de l'élément $\{f\}$ *ne peut pas contenir un disque ouvert, de centre* s_0, *et de rayon supérieur à* $s_0 . e^\nu . \Delta^{1/s_0}$. (Si ν ou Δ, ou ces deux nombres à la fois, ne sont pas finis, l'assertion prend alors une forme triviale).

Remarque. — Si la suite (a_n) des coefficients du germe « algorithmique » de $\mathcal{F}^*$ est quasi-positive par rapport à la D-suite (λ_n) des exposants de ce germe en un certain point strictement positif s_0, alors le coefficient de self-adhérence, ν, de la fonction entière $f^*_{s_0} \in \mathcal{F}^*$, est égal à 0. Plus particulièrement, si (a_n) vérifie la condition de Fekete, le coefficient de self-adhérence, ν, de chaque élément $f^*_{s_0}$ de la famille $\mathcal{F}^*$ est égal à 0; en effet, sous cette condition, le nombre antérieur σ_1 figurant dans la condition,

$$\exists \sigma_1 \in \mathbf{R}, \qquad \forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma \leqslant \sigma_1\} : \alpha_\sigma \in \mathbf{R},$$

peut être choisi arbitrairement dans $\mathbf{R}$, et θ_σ est borné dans $\{\mathbf{R} | \sigma \leqslant \sigma_1\}$.

CHAPITRE III

A. — Il est intéressant de poursuivre ces extensions dans une voie qui permet d'obtenir des énoncés, sans condition algorithmique explicite relative à la D-suite (λ_n). Dans ce but, on peut procéder de la manière suivante :

On pose,

$$\forall x \in \mathbf{R}_\lambda \qquad \text{et} \qquad \forall \sigma \in \mathbf{R} : m_x(\sigma) = \sum_{n[x]}^{n(x)} |a_n| e^{-s_0\lambda_n} . e^{-\sigma\lambda_n^*},$$

avec $s_0 > 0$.

Pour σ arbitrairement fixé dans $\mathbf{R}$ et x arbitrairement fixé dans $\mathbf{R}_\lambda$, on désigne par $\gamma_{\sigma,x}$ l'infimum de l'ensemble

$$\{\sigma' \in \mathbf{R} | m_x(\sigma') < |f^*_{s_0}(\sigma)|\}$$

si cet ensemble est non vide; sinon, on pose $\gamma_{\sigma,x} = +\infty$. Je désignerai par $\mathcal{F}^*_0$ la sous-famille de $\mathcal{F}^*$ dont chacun des éléments $f^*_{s_0}$ satisfait à la condition suivante :

$f^*_{s_0} \in \mathcal{F}^*_0$ si et seulement si $f^*_{s_0} \in \mathcal{F}^*$ satisfait à une condition du type,

$$\exists \sigma_0 \in \mathbf{R}, \qquad \forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma \leqslant \sigma_0\} : f^*_{s_0}(\sigma) \neq 0.$$

(σ_0 pouvant dépendre de s_0). Chaque application, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$, de la famille des applications, $\sigma \to m_x(\sigma)$, (indexées par x dans $\mathbf{R}_\lambda$) est (comme il est trivial de le constater) à valeur strictement décroissante et continue sur son support $\mathbf{R}$, avec $\lim m_x(\sigma) = 0$, $\sigma \uparrow +\infty$. Soit $f^*_{s_0}$ un élément de la famille $\mathcal{F}^*_0$ supposée non vide; il est évident que,

$$\forall x \in \mathbf{R}_\lambda \qquad \text{et} \qquad \forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma \leqslant \sigma_0\} : \gamma_{\sigma,x} \in \mathbf{R},$$

et que

$$]\gamma_{\sigma,x}, +\infty[= \{\sigma' \in \mathbf{R} | m_x(\sigma') < |f^*_{s_0}(\sigma)|\},$$

et donc,

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+ : m_x(\gamma_{\sigma,x} + \varepsilon) < |f^*_{s_0}(\sigma)|.$$

On considère la famille des éléments dirichletiens suivants indexés par s_0 dans $\mathbf{R}_+$,

$$\{F^*_{s_0}\} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-s_0\lambda_n} . e^{-s\lambda^*_n}, \qquad \forall s_0 \in \mathbf{R}_+.$$

Il est trivial que $\sigma_c^{F^*_{s_0}} = -\infty$ et que,

$$\forall x \in \mathbf{R}_\lambda \qquad \text{et} \qquad \forall \sigma \in \mathbf{R} : m_x(\sigma) < F^*_{s_0}(\sigma).$$

(où $F^*_{s_0}(\sigma)$ désigne la somme en σ de l'élément $\{F^*_{s_0}\}$).

On désigne par δ_σ l'infimum de l'ensemble

$$\{\sigma' \in \mathbf{R} | F^*_{s_0}(\sigma') < |f^*_{s_0}(\sigma)|\}, \quad \forall \sigma \leqslant \sigma_0$$

(on aurait pu évidemment définir l'extension de $\sigma \to \delta_\sigma$ à $\mathbf{R}$ d'une manière analogue à celle de l'application $\sigma \to \alpha_\sigma$ de support $\mathbf{R}$, introduite antérieurement au chapitre II; dans cette extension, δ_σ étant la valeur en σ d'une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ complété par l'élément $+\infty$, en posant $\delta_\sigma = +\infty$ si pour la valeur σ l'ensemble $\{\sigma' \in \mathbf{R} | F^*_{s_0}(\sigma') < |f^*_{s_0}(\sigma)|\}$ est vide, sinon, δ_σ est par définition l'infimum de cet ensemble). Or, si $f^*_{s_0} \in \mathcal{F}^*_0$, on a,

$$\forall \sigma \leqslant \sigma_0 : \delta_\sigma \in \mathrm{R},$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}_\lambda : \gamma_{\sigma,x} \leqslant \delta_\sigma,$$

et donc, $\gamma_\sigma \leqslant \delta_\sigma$, en posant $\gamma_\sigma = \operatorname{Sup} \gamma_{\sigma,x}$, $x \in \mathbf{R}_\lambda$.

On pose,

$$\forall \sigma \leqslant \sigma_0 : \Theta_\sigma = \operatorname{Sup}(\gamma_{\sigma'} - \sigma'), \qquad \sigma' \in [\sigma, \sigma_0].$$

L'application de $\{\mathbf{R} | \sigma \leqslant \sigma_0\}$ dans $\mathbf{R}$, $\sigma \to \Theta_\sigma$, est à valeur décroissante sur son support, et donc, $\forall x \in \mathbf{R}_\lambda$ et $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+$:

$$m_x(\Theta_\sigma + \sigma + \varepsilon) < |f^*_{s_0}(\sigma)|, \qquad \forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma \leqslant \sigma_0\}.$$

On rappelle qu'on a supposé que le « germe algorithmique », $\{f\}$, de la famille $\mathcal{F}^*$ admet une abscisse de convergence simple égale à 0. Si, en outre, on suppose que $\sigma^f_A = 0$, alors $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+$, $\exists (x^\varepsilon_j)$, avec $\lim x^\varepsilon_j = +\infty$, $j \uparrow +\infty$:

$$\sum_{n[x^\varepsilon_j]}^{n(x^\varepsilon_j)} |a_n| > e^{-\varepsilon x^\varepsilon_j}.$$

Posant $p_j^\varepsilon = [s_0\lambda_{n[x_j^\varepsilon]}]$, on a, comme on le constate facilement,

$$1/\rho_{s_0} \geqslant \limsup \left[\lambda_{n(x_j^\varepsilon)}^{\mathrm{P}_j^\varepsilon - |\Theta_{-\mathrm{P}_j^\varepsilon}| - \varepsilon} . e^{-s_0\lambda_{n(x_j^\varepsilon)} - \varepsilon x_j^\varepsilon}/p_j^\varepsilon\,!\right]^{1/\mathrm{P}_j^\varepsilon}, \quad j \uparrow +\infty,$$

et donc,

$$1/\rho_{s_0} \geqslant (s_0 e^{\varepsilon/s_0})^{-1} . \limsup \left\{\lambda_{n(x_j^\varepsilon)}^{-(|\Theta_{-\mathrm{P}_j^\varepsilon}| + \varepsilon)/\mathrm{P}_j^\varepsilon}\right\}, \quad j \uparrow +\infty.$$

On pose,

$$\nu' = \limsup \left\{(|\Theta_{-\sigma}|/\sigma) \operatorname{Log}(\sigma/s_0)\right\}, \quad \sigma \uparrow +\infty,$$

et on convient d'appeler ce nombre ν' le « coefficient d'adhérence — K de la fonction entière $\mathrm{F}_{s_0}^*$ à la fonction entière $f_{s_0}^*$, dans la direction $\operatorname{Arg} s = \pi$ ». Si ν' est fini, on a donc $\rho_{s_0} \leqslant s_0 e^{\nu'}$; cette inégalité étant triviale si $\nu' = +\infty$. On remarquera que nécessairement $\nu' \geqslant 0$. D'où l'énoncé :

Proposition (III.1). — *L'étoile rectiligne de Riesz du prolongement analytique de l'élément dirichletien* $\{f\}$, *avec* $\sigma_\mathrm{A}^f = 0$, *ne peut pas contenir un disque ouvert de centre* $s_0 > 0$ *et de rayon supérieur à* $s_0 e^{\nu'}$, *où* ν' *est le coefficient d'adhérence* — K *de la fonction entière* $\mathrm{F}_{s_0}^*$ *à la fonction entière* $f_{s_0}^* \in \mathcal{F}_0^*$ (*supposée non vide*), *dans la direction* $\operatorname{Arg} s = \pi$.

B. — *Remarque.* — On désigne par $\mathcal{F}_0$ la famille des éléments dirichletiens $\{f\}$, définie de la manière suivante: $\{f\} \in \mathcal{F}_0$ (avec $\sigma_c^f = 0$) si et seulement si

1) la D-suite (λ_n) des exposants de $\{f\}$ vérifie la condition :

$$\mathrm{L}^* < +\infty, \quad \text{où} \quad \mathrm{L}^* = \lim \operatorname{Sup} \{\log n/\lambda_n^*\}, \ n \uparrow +\infty,$$

2) la suite (a_n) des coefficients de $\{f\}$ vérifie une condition de Fekete.

On rappelle qu'il n'est pas restrictif de supposer, pour ce qui suit, que $\lambda_1 > 1$ et que la condition de Fekete est satisfaite avec $n_1 = 1$. Si $\{f\} \in \mathcal{F}_0$, et s_0 étant fixé arbitrairement dans $\mathbf{R}_+$, il est évident que (où ω, a_n^1, φ_{s_0}, ... ont les significations précisées dans la remarque (2) du paragraphe (II.B)),

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \mathrm{C}_\varepsilon > 0, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R} : \mu(\sigma) \leqslant m(\sigma) \leqslant \mathrm{C}_\varepsilon \mu(\sigma - \mathrm{L}^* - \varepsilon),$$

où

$$\begin{aligned} \mu(\sigma) &= \operatorname{Max} a_n^1 e^{-s_0\lambda_n} . e^{-\sigma\lambda_n^*}, \quad n \in \mathbf{N}_+, \\ m(\sigma) &= \operatorname{Max} m_x(\sigma), \quad x \in \mathbf{R}_\lambda, \end{aligned}$$

et où la constante positive C_ε peut être choisie égale à

$$\omega \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(L^*+\varepsilon)\lambda_n^*},$$

(la série étant convergente — eu égard à la condition (1) ci-dessus — $\forall \varepsilon > 0$); on peut donc avec $\lambda_1 > 1$ préciser le choix de ε de sorte que $C_\varepsilon \leqslant 1$. On supposera ce choix fait une fois pour toutes. Ainsi, on a,

$$\forall \sigma \in \mathbf{R} : \mu(\sigma) \leqslant m(\sigma) \leqslant \mu(\sigma - L^* - \varepsilon).$$

Il est évident que, $\forall \sigma \in \mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}_\lambda$:

$$\{\sigma' \in \mathbf{R} | m(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma)|\} \subset \{\sigma' \in \mathbf{R} | m_x(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma)|\}.$$

On désigne par γ_σ^1 l'infimum de $\{\sigma' \in \mathbf{R} | m(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma)|\}$; cet ensemble est non vide $\forall \sigma \in \mathbf{R}$, puisque $\varphi_{s_0}(\sigma) \leqslant |f_{s_0}^*(\sigma)| \leqslant \omega\varphi_{s_0}(\sigma)$, avec $\varphi_{s_0}(\sigma) > 0$; on a,

$$\gamma_{\sigma,x} \leqslant \gamma_\sigma^1$$

et donc

$$\gamma_\sigma \leqslant \gamma_\sigma^1, \qquad \text{avec} \qquad \gamma_\sigma^1 \in \mathbf{R}, \qquad \forall \sigma \in \mathbf{R}.$$

De même, désignant par ν_σ l'infimum de l'ensemble,

$$\{\sigma' \in \mathbf{R} | \mu(\sigma' - L^* - \varepsilon) < |f_{s_0}^*(\sigma)|\} \neq \emptyset, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R},$$

il est évident que,

$$\gamma_\sigma^1 \leqslant \nu_\sigma.$$

On a aussi (avec le choix de ε précisé ci-dessus),

$$\forall \sigma \in \mathbf{R} : \mu(\sigma) \leqslant |f_{s_0}^*(\sigma)| \leqslant \mu(\sigma - L^* - \varepsilon);$$

d'où résulte,

$$\{\sigma' \in \mathbf{R} | \mu(\sigma' - L^* - \varepsilon) < |f_{s_0}^*(\sigma)|\} \supset \{\sigma' \in \mathbf{R} | \mu(\sigma' - L^* - \varepsilon) < \mu(\sigma)\}$$

et donc

$$\nu_\sigma \leqslant \sigma + L^* + \varepsilon.$$

En définitive, on a,

$$\forall \sigma \in \mathbf{R} : \gamma_\sigma \leqslant \gamma_\sigma^1 \leqslant \nu_\sigma \leqslant \sigma + L^* + \varepsilon.$$

Il est évident que la famille $\mathcal{F}^*$ des éléments $f_{s_0}^*$, indexés par

s_0 dans $\mathbf{R}_+$, est identique à sa sous-famille $\mathcal{F}_0^*$ au sens défini antérieurement (la condition,

$$\exists \sigma_0 \in \mathbf{R}, \qquad \forall \sigma \in \{\mathbf{R} | \sigma \leqslant \sigma_0\} : f_{s_0}^*(\sigma) \neq 0,$$

étant satisfaite pour σ_0 « arbitraire » fixé dans $\mathbf{R}$).

Soit alors σ_0 fixé arbitrairement dans $\mathbf{R}$, on a : $\Theta_\sigma \leqslant L^* + \varepsilon$, où Θ_σ a la signification précisée antérieurement, à savoir,

$$\forall \sigma \leqslant \sigma_0 : \Theta_\sigma = \mathrm{Sup}(\gamma_{\sigma'} - \sigma'), \quad \sigma' \in [\sigma, \sigma_0].$$

Il est facile de constater qu'au lieu de l'inégalité large, $\gamma_\sigma^1 \geqslant \gamma_\sigma$, seule l'inégalité, $\gamma_\sigma^1 = \gamma_\sigma$, $\forall \sigma \in \mathbf{R}$, est légitime. En effet, supposons qu'il existe un certain nombre réel σ_0 tel que $\gamma_{\sigma_0} < \gamma_{\sigma_0}^1$, et considérons un nombre σ_1 vérifiant la condition,

$$\sigma_1 \in]\gamma_{\sigma_0}, \gamma_{\sigma_0}^1[.$$

Il est évident que,

$$\forall x \in \mathbf{R}_\lambda : \gamma_{\sigma_0, x} < \sigma_1 < \gamma_{\sigma_0}^1.$$

Eu égard aux définitions de $\gamma_{\sigma_0, x}$ et $\gamma_{\sigma_0}^1$, on a,

$$\sigma_1 \in \{\sigma' \in \mathbf{R} | m_x(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma_0)|\}, \quad \forall x \in \mathbf{R}_\lambda,$$

et

$$\sigma_1 \notin \{\sigma' \in \mathbf{R} | m(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma_0)|\},$$

ou, ce qui est équivalent,

$$m_x(\sigma_1) < |f_{s_0}^*(\sigma_0)| \leqslant m(\sigma_1), \quad \forall x \in \mathbf{R}_\lambda.$$

Or, on peut toujours trouver un certain nombre $x_0 \in \mathbf{R}_\lambda$ tel que $m(\sigma_1) = m_{x_0}(\sigma_1)$ et donc, on aurait,

$$m_{x_0}(\sigma_1) < |f_{s_0}^*(\sigma_0)| \leqslant m_{x_0}(\sigma_1).$$

La contradiction entraîne donc la légitimité de l'égalité $\gamma_{\sigma_0} = \gamma_{\sigma_0}^1$, $\forall \sigma_0 \in \mathbf{R}$. Il est évident que, $\forall \sigma \in \mathbf{R}$:

$$\{\sigma' \in \mathbf{R} | \mu(\sigma') < \mu(\sigma - L^* - \varepsilon)\} \supset \{\sigma' \in \mathbf{R} | m(\sigma') < |f_{s_0}^*(\sigma)|\}$$

et que,

$$\sigma - L^* - \varepsilon \leqslant \gamma_\sigma$$

donc,

$$-(L^* + \varepsilon) \leqslant \Theta_\sigma.$$

Ainsi, on a, $\nu = 0$; d'où :

PROPOSITION (III.2). — *Si l'élément dirichletien* $\{f\}$ *appartient à la famille* $\mathcal{F}_0$, *alors tout élément* $f^*_{s_0}$ *de la famille* $\mathcal{F}^*$ *(engendrée par le germe algorithmique* $\{f\}$*) a un coefficient d'adhérence* — K *de* $F^*_{s_0}$ *à* $f^*_{s_0}$, *dans la direction* Arg $s = \pi$, *égal à* 0. *Le point* $s = 0$ *appartient à la frontière de l'étoile rectiligne de Riesz de cet élément* $\{f\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Un problème de composition des singularités des séries de Dirichlet générales, *Acta Mathematica*, t. 89, 1953.

[2] Quelques théorèmes faberiens relatifs au problème Hadamard-Mandelbrojt, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, s. 2, t. III, 1954.

[3] Sur les points singuliers des séries de Dirichlet d'une classe de Cramer, *Annales Ec. Norm. Sup.*, 1955.

[4] Quelques propriétés de répartition des singularités d'une série de Dirichlet générale en relation avec la nature de la suite des coefficients, *Publications Scientifiques de l'Université d'Alger*, 1956.

[5] Sur la transformation de Mellin et les fonctions à dominante angulaire algebrico-logarithmique en un point, *Annales Inst. Fourier*, t. VIII, 1958.

[6] Sur la notion de type de l'ordre d'une fonction entière, *Annales Ec. Norm. Sup.*, t. 79, 1962.

[7] Sur l'abscisse de convergence simple des séries de Dirichlet générales (Démonstration nouvelle de la relation de Kojima), *Annales Inst. Fourier*, t. XIV, 1964.

Manuscrit reçu en Mars 1965.

Maurice BLAMBERT,
Service de Mathématiques Pures,
Institut Fourier,
2, place du Doyen-Gosse,
Grenoble (Isère).