ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANNALES

DE

L'INSTITUT FOURIER

Jean-Claude LOOTGIETER

Le théorème de Riesz-Raikov-Bourgain pour un endomorphisme algébrique de $\mathbb{R}^p$

Tome 57, nº 1 (2007), p. 45-126.

<http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2007__57_1_45_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
57, 1 (2007) 45-126

LE THÉORÈME DE RIESZ-RAIKOV-BOURGAIN POUR UN ENDOMORPHISME ALGÉBRIQUE DE $\mathbb{R}^p$

par Jean-Claude LOOTGIETER

Résumé. — Le théorème classique de Riesz-Raikov assure que, pour tout entier $\theta > 1$ et toute f de $L^1(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, les moyennes

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} f(\theta^n x) \text{ convergent vers } \int_{\mathbb{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

pour presque tout point x de $\mathbb{R}$. J. Bourgain (cf. Israël Math. Conf. Proc. 1990) a prouvé que la convergence précédente a lieu pour tout réel algébrique $\theta > 1$ et toute f de $L^2(\mathbb{T})$. Dans cet article nous prouvons que, si φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ algébrique sur $\mathbb{Q}$, dont les valeurs propres sont toutes de module > 1, alors pour toute f de $L^2(\mathbb{T}^p)$, les moyennes $(1/N)\sum_1^N f(\varphi^n x)$ convergent vers $\int_{\mathbb{T}^p} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ pour presque tout point x de $\mathbb{R}^p$. Nous suivons et adaptons les arguments développés par J. Bourgain dans l'article précité.

Abstract. — The classical Riesz-Raikov theorem states that, for any integer $\theta > 1$ and any f of $L^1(\mathbb{T})$, where $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, the averages

$$\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} f(\theta^n x) \text{ converge to } \int_{\mathbb{T}} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

for almost every point x of $\mathbb{R}$. J. Bourgain (cf. Israël Math. Conf. Proc. 1990) has proved that the preceding convergence takes place for any algebraic number $\theta > 1$ and any f of $L^2(\mathbb{T})$. In this paper we prove that, for any endomorphism φ of $\mathbb{R}^p$ algebraic on $\mathbb{Q}$, whose proper values all have modulus > 1, for any f of $L^2(\mathbb{T}^p)$, the averages $1/N\sum_1^N f(\varphi^n x)$ converge to $\int_{\mathbb{T}^p} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ for almost every point x of $\mathbb{R}^p$. We follow and adapt J. Bourgain's arguments as developed in the above mentioned paper.

Mots-clés : Théorème de Riesz-Raikov, théorème ergodique maximal de Hopf, zéro-multiplicité des suites récurrentes linéaires, presque-orthogonalité, séries de Fourier et inégalités maximales.
Classification math. : 47A35, 11D61, 42B05.

1. Introduction et résultats

1.1. Préliminaires et résultats

Soit q entier, $q \geqslant 1$. Nous identifions les fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs $\mathbb{C}$, de période q, i.e. pour lesquelles $f(x) = f(y)$ si $x - y \in q\,\mathbb{Z}^p$, aux fonctions définies sur $\mathbb{T}_q^p$ (où $\mathbb{T}_q = \mathbb{R}/q\mathbb{Z}$) à valeurs $\mathbb{C}$. Nous identifions alors l'espace vectoriel des fonctions definies sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs $\mathbb{C}$, de période q et localement de puissance s, $1 \leqslant s < \infty$, Lebesgue-intégrables, resp. bornées, à l'espace vectoriel $L^s(\mathbb{T}_q^p)$, resp. $L^\infty(\mathbb{T}_q^p)$, des fonctions définies sur $\mathbb{T}_q^p$ à valeurs $\mathbb{C}$ de puissance s Lebesgue-intégrables, resp. bornées.

Pour f définie sur $\mathbb{R}^p$ de période q et localement de puissance s intégrable, resp. bornée, nous écrirons :

- $\|f\|_{L^s(\mathbb{T}_q^p)}$ au lieu de $\|f\|_{L^s(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p}$,
- $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}_q^p)}$ au lieu de $\|f\|_{L^\infty(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p}$.

Soit $\theta > 1$ un réel algébrique sur $\mathbb{Q}$. Dans [1], J. Bourgain prouve que, pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{T})$ et pour presque tout x,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\theta^n x) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Dans le cas particulier où θ est un entier $\geqslant 2$, (1.1) a lieu pour toute f de $L^1(\mathbb{T})$: c'est le théorème classique de Riesz-Raikov (voir [6], [5]).

Pour prouver (1.1), J. Bourgain montre d'abord l'inégalité maximale : pour toute f de $L^2(\mathbb{T})$,

$$\Big\| \sup_N \frac{1}{N}\Big|\sum_{n=1}^{N} f(\theta^n x)\Big|\Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \tag{1.2}$$

où C est une constante ne dépendant que de θ.

L'hypothèse $\theta > 1$ assure facilement que (1.1) est vérifiée pour f polynôme trigonométrique à coefficients complexes. Toute $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$ étant approximée dans $L^2(\mathbb{T}^p)$ par des polynômes trigonométriques, de (1.2) découle que (1.1) a lieu pour presque tout $x \in (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et, par suite, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous nous proposons dans cet article, en suivant la démarche de J. Bourgain, d'étendre (1.2) et (1.1) au cas où $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$, l'application $x \mapsto \theta x$ étant remplacée par un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^p$ algébrique sur $\mathbb{Q}$ et dont toutes les valeurs propres, quelles soient réelles ou complexes, sont de module strictement supérieur à 1.

Nous partons donc d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}^p$ pour lequel, d'une part, il existe un polynôme

$$P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0, \quad P \in \mathbb{Z}[X],\ P \neq 0, \tag{1.3}$$

tel que

$$P(\varphi) = 0 \tag{1.4}$$

et, d'autre part,

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi) \quad \text{implique} \quad |\lambda| > 1 \tag{1.5}$$

où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi)$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles ou complexes de φ.

De l'hypothèse (1.5) résulte que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}$.

Il est clair que les conditions (1.3)–(1.4) impliquent que toutes les valeurs propres de φ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. Réciproquement, si toutes les valeurs propres de φ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, il n'est pas difficile de prouver, à l'aide du théorème de Caley-Hamilton, que φ est algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Nous supposerons dorénavant que le polynôme P satisfaisant les conditions (1.3)–(1.4) est, au signe près, l'unique polynôme minimal de φ sur $\mathbb{Q}$ pour lequel les coefficients a_d, a_{d-1},…,a_0 premiers entre eux.

Dans le cas où $|a_d| = 1$, nous dirons que φ est un endomorphisme *entier* algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Par définition le degré de φ sur $\mathbb{Q}$, que nous noterons $\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi)$, est égal au degré du polynôme minimal de φ sur $\mathbb{Q}$, i.e.

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi) = d. \tag{1.6}$$

Il est clair que les itérées φ^n, $n \geqslant 1$, de φ sont à leur tour algébriques sur $\mathbb{Q}$ et que

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^n) \leqslant d. \tag{1.7}$$

Dans toute la suite C, c, resp. c', c'', c_0, c_1, c_2, c_3, C_0, C_1, C_2, C_3, désigneront des constantes strictement positives variées, resp. fixées, ne dépendant que de φ.

L'espace $\mathbb{R}^p$ est muni de sa structure euclidienne usuelle : le produit scalaire de deux éléments x et y de $\mathbb{R}^p$ est noté $\langle x, y\rangle$ et la norme associée d'un élément x de $\mathbb{R}^p$ notée $|x|_2$.

Nous désignerons par φ^* l'adjoint de φ.

Pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ nous notons $|x|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |, x_p|)$ la norme "infinie" de x. La notation $\|\varphi\|_\infty$, resp. $\|\varphi^*\|_\infty$, désigne la norme associée de l'endomorphisme φ, resp. φ^*.

Remarque. — Pour éviter une redondance de parenthèses nous écrirons

- $\varphi^n x$, resp. $\varphi^{*n} x$, au lieu de $\varphi^n(x)$, resp. $\varphi^{*n}(x)$,
- $\varphi^n \frac{x}{q}$, resp. $\varphi^{*n} \frac{x}{q}$, au lieu de $\varphi^n\left(\frac{x}{q}\right)$, resp. $\varphi^{*n}\left(\frac{x}{q}\right)$.

Compte tenu des notations précédentes et de la linéarité des φ^n, resp. des φ^{*n}, on a $\varphi^n(x/q) = \varphi^n x/q$, resp. $\varphi^{*n}(x/q) = \varphi^{*n} x/q$,

Dans le cas où à la place de x ou x/q figure une expression plus complexe nous garderons les parenthèses, par exemple $\varphi^n(\varphi^m x)$, etc.

À partir de la réduction de Dunford-Schwarz on déduit facilement de l'hypothèse (1.5) que l'endomorphisme φ, resp. φ^*, est *dilatant* : il existe une constante $\mu > 1$ et une constante $0 < \kappa < 1$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $n \geqslant 1$,

$$|\varphi^n x|_\infty > \kappa \mu^n |x|_\infty, \tag{1.8}$$

$$|\varphi^{*n} x|_\infty > \kappa \mu^n |x|_\infty. \tag{1.9}$$

Pour $f \in L^2(\mathbb{T}_q^p)$ nous notons $\widehat{f}(k/q)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, les coefficients de Fourier de f et $\operatorname{supp} \widehat{f}$ le support de $\widehat{f}$:

$$\widehat{f}\Big(\frac{k}{q}\Big) = \frac{1}{q^p} \int_{\mathbb{T}_q^p} \mathrm{e}^{2i\pi\langle k/q, x\rangle} f(x) \mathrm{d}x,$$

$$\operatorname{supp} \widehat{f} = \Big\{\frac{k}{q}\,;\, k \in \mathbb{Z}^p \text{ et } \widehat{f}\Big(\frac{k}{q}\Big) \neq 0\Big\}.$$

Posons, pour $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$ et N entier $\geqslant 1$,

$$A_N f(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\varphi^n x). \tag{1.10}$$

Nous avons alors l'*inégalité maximale* suivante

Théorème 1.1. — *Sous les conditions* (1.3)–(1.5), *il existe une constante* C, *ne dépendant que de* φ, *telle que, pour toute* f *de* $L^2(\mathbb{T}^p)$,

$$\big\| \sup_N |A_N f| \big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant C \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{1.11}$$

La démonstration du théorème 1.1 sera l'objet des sections 2 à 7.

Remarque 1.2. — Considérons le cas particulier :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p, \ldots, a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pp}x_p), \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Comme $\det((a_{ij})) \neq 0$ l'application $(x_1, \ldots, x_p) \overset{S}{\longmapsto} \varphi(x_1, \ldots, x_p) \pmod 1$ de $\mathbb{T}^p$ dans $\mathbb{T}^p$ préserve la mesure de Lebesgue (il n'est pas nécessaire que les valeurs propres de φ soient de module > 1). Suivant des arguments classiques de la théorie ergodique, il en résulte que

$$\big\| \sup_N |A_N f| \big\|_{L^s(\mathbb{T}^p)} \leqslant \frac{s}{s-1} \|f\|_{L^s(\mathbb{T}^p)} \quad \text{pour } 1 < s < \infty.$$

On a également l'inégalité maximale faible. Dans le cas présent aucune des valeurs propres de l'endomorphisme φ n'est racine de l'unité. L'application S est donc ergodique. Il en résulte que, pour toute $f \in L^1(\mathbb{T}^p)$,

$$A_N f(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{T}^p} f(t) \mathrm{d}t$$

pour presque tout x de $\mathbb{R}^p$.

Aux hypothèses (1.3)–(1.5) nous ajouterons l'hypothèse supplémentaire :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^n) = \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi). \tag{1.12}$$

Montrons que l'hypothèse supplémentaire (1.12) ne nuit pas à la démonstration générale du théorème 1.1.

Si (1.12) n'a pas lieu considérons l'une des itérées φ^s de φ pour laquelle

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^s) = \min\big(\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^n), n \geqslant 1\big). \tag{1.13}$$

Il est alors clair que $\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^{ns}) = \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^s)$, pour tout $n \geqslant 1$. L'endomorphisme φ^s vérifie donc l'hypothèse (1.12), φ étant remplacé par φ^s.

Supposons que pour l'endomorphisme φ^s l'inégalité maximale (1.11) ait lieu, i.e.

$$\Big\| \sup_M \frac{1}{M} \Big| \sum_{m=1}^{M} f(\varphi^{ms} x) \Big| \Big\|_{L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^p} \leqslant C \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \tag{1.14}$$

pour toute $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$.

Associons à l'entier N l'entier M pour lequel $(M-1)s < N \leqslant Ms$ et considérons un *entier* a tel que, pour $1 \leqslant \ell \leqslant s$,

$$\varphi^\ell\big((-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^p\big) \subseteq \big(-\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a\big)^p.$$

De l'inégalité

$$\Big| \sum_{n=1}^{N} f(\varphi^n x) \Big| \leqslant \sum_{\ell=1}^{s} \sum_{m=0}^{M-1} \big| f(\varphi^{ms+\ell} x) \big|$$

résulte que

$$\begin{aligned}\Big\|\sup_N|A_Nf(x)|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} &\leqslant \frac{2}{s}\sum_{\ell=1}^{s}\Big\|\sup_M\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}|f(\varphi^{ms+\ell}x)|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}\\ &\leqslant c\sum_{\ell=1}^{s}\Big\|\sup_M\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}|f(\varphi^{ms}x)|\Big\|_{L^2(\varphi^\ell((-\frac12,\frac12)^p))}\\ &\leqslant C\Big\|\sup_M\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}|f(\varphi^{ms}x)|\Big\|_{L^2(-a/2,a/2)^p}\\ &\leqslant c\Big\|\sup_M\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}|f(a\varphi^{ms}x)|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}.\end{aligned}$$

Comme $f(a\,.)\in L^2(\mathbb{T}^p)$, de (1.14) résulte alors que

$$\Big\|\sup_N|A_Nf|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}\leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}$$

i.e. (1.11). L'hypothèse supplémentaire (1.12) ne nuit donc pas à la démonstration générale du théorème 1.1.

Le théorème 1.1 implique le

THÉORÈME 1.3. — *Pour toute f de $L^2(\mathbb{T}^p)$,*

$$A_Nf(x)\longrightarrow\int_{\mathbb{T}^p}f(t)\,\mathrm{d}t \tag{1.15}$$

pour presque tout x de $\mathbb{R}^p$.

Démonstration. — D'après (1.8),

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi^n\big(-\tfrac12,\tfrac12\big)^p=\mathbb{R}^p. \tag{1.16}$$

Compte tenu de l'inégalité maximale (1.11) et de l'approximation de f dans $L^2(\mathbb{T}^p)$ par des polynômes trigonométriques, il suffit de prouver (1.15) pour $f(x)=\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}$, $x\in(-\frac12,\frac12)^p$, $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\neq0$.

Posons, pour $k\in\mathbb{Z}^p$, $k\neq0$,

$$a_k=\inf\big(|\varphi^{*n}k-\varphi^{*m}k|_\infty;\ n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m\big). \tag{1.17}$$

De (1.9) découle que les a_k sont strictement positifs.

Introduisons alors la densité de probabilité sur $\mathbb{R}^p$

$$\Omega_\rho(x_1,\ldots,x_p)=\prod_1^p\frac{\sin^2\pi\rho x_\ell}{\rho\pi^2x_\ell^2}\quad(\rho>0) \tag{1.18}$$

dont la transformée de Fourier

$$\widehat{\Omega}_\rho(x_1,\dots,x_p)=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{e}^{2i\pi(x_1y_1+\cdots+x_py_p)}\times\Omega_\rho(y_1,\dots,y_p)\,\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_p$$

est donnée par

$$\widehat{\Omega}_\rho(x_1,\dots,x_p)=\prod_1^p\Big(1-\frac{|x_\ell|}{\rho}\Big)^+. \tag{1.19}$$

Nous avons alors, en choisissant $\rho<\min(1,a_k)$,

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^N\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,\varphi^nx\rangle}\Big\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}&\leqslant C\Big\|\sum_{n=1}^N\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,\varphi^nx\rangle}\Big\|^2_{L^2(\Omega_\rho)}\\&=C\Big\|\sum_{n=1}^N\mathrm{e}^{2i\pi\langle\varphi^{*n}k,x\rangle}\Big\|^2_{L^2(\Omega_\rho)}\\&=C\sum_{1\leqslant m,n\leqslant N}\widehat{\Omega}_\rho(\varphi^{*n}k-\varphi^{*m}k)=CN.\end{aligned}$$

De l'inégalité

$$\Big\|\sum_{n=1}^N\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,\varphi^nx\rangle}\Big\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}\leqslant CN \tag{1.20}$$

résulte que

$$\sum_{N\geqslant1}\Big\|A_{N^2}\,\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}\Big\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}<\infty, \tag{1.21}$$

et, par suite, pour presque tout $x\in(-\frac12,\frac12)^p$,

$$A_{N^2}\,\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}\longrightarrow0 \tag{1.22}$$

Associons maintenant à l'entier N l'entier M pour lequel $M^2\leqslant N<(M+1)^2$. De l'inégalité

$$|A_N\,\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}|\leqslant\frac{M^2}{N}|A_{M^2}\,\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}|+\frac{2M+1}{N} \tag{1.23}$$

résulte que

$$A_N\,\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}\longrightarrow0 \tag{1.24}$$

pour presque tout $x\in(-\frac12,\frac12)^p$.

La démonstration du théorème 1.3 est donc achevée. □

En dehors du cas particulier précité (cf. remarque 1.2), la démonstration de l'inégalité maximale (1.11) est complexe. Nous adaptons en dimension p la démarche suivie dans [1]. Dans la sous-section qui suit nous donnerons la démonstration de l'inégalité maximale (1.11) dans le cas particulier où l'endomorphisme φ est diagonal : cette démonstration annonce les grandes lignes de la démonstration de l'inégalité maximale (1.11) dans le cas général, lignes que nous esquissons à présent.

Partons donc d'une $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$. Soit

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

son développement en série de Fourier dans $L^2(\mathbb{T}^p)$. Comme φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^p$ on vérifie sans peine que, dans $L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p$, pour tout $n \geqslant 1$,

$$f(\varphi^n x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,\varphi^n x\rangle}$$

et donc

$$f(\varphi^n x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle \varphi^{*n}k,x\rangle}. \tag{1.25}$$

Deux outils seront essentiellement utilisés : d'une part, l'introduction d'une classe de contractions positives auxquelles sera appliquée le théorème ergodique maximal de Hopf (cf. [2]), d'autre part, un critère de presque-orthogonalité. Ces deux outils mettent en jeu, pour $k \in \operatorname{supp}\widehat{f}$, la distance entre les $\varphi^{*n}k$ et les réseaux $q^{-1}\mathbb{Z}^p$, distance que nous noterons provisoirement $d(\varphi^{*n}k, q^{-1}\mathbb{Z}^p)$.

(S$_1$) *Une classe de contractions linéaires positives.* — Soit $g \in L^2(\mathbb{T}^p)$. Supposons que, pour tout $k \in \operatorname{supp}\widehat{g}$, les distances

$$d(\varphi^{*}k, q^{-1}\mathbb{Z}^p),\ d(\varphi^{*2}, q^{-1}\mathbb{Z}^p),\ \dots,\ d(\varphi^{*N}k, q^{-1}\mathbb{Z}^p)$$

soient petites pour un q pas trop grand, plus précisément (pour fixer les idées)

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N} d(\varphi^{*n}k, q^{-1}\mathbb{Z}^p) < 2^{-cN} \quad \text{avec } q < 2^{-c\sqrt{N}} \tag{1.26}$$

(où c est une constante > 1 qui ne dépendra que de φ). Alors, on pourra définir une contraction linéaire positive de $L^1(\mathbb{T}^p_q)$ et $L^\infty(\mathbb{T}^p_q)$ (cf. section 3) pour laquelle, dans $L^2((1/q^p)(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p)$,

$$A_N g \approx \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T_q^n g,$$

cette approximation étant d'autant meilleure que N est grand.

Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$. Posons

$$\sigma_N = \left\{k \in \mathbb{Z}^p;\ \max_{1 \leqslant n \leqslant N} d(\varphi^{*n}k, q^{-1}\mathbb{Z}^p) < 2^{-cN}\right\}$$

puis

$$g_N = \sum_{k \in \sigma_N} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}.$$

Alors, on pourra ramener l'estimation, dans $L^2((1/q^p)(-\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q)^p)$, de $\sup_N |A_N g_N|$ à celle de $\sup_N (1/N)\left|\sum_1^N T_q^n g_N\right|$. En admettant que l'on ait prouvé (ce sera le thème de la section 5) l'inégalité maximale

$$\left\| \sup_N |g_N| \right\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)},$$

le théorème ergodique maximal de Hopf conduit alors à

$$\begin{aligned}\left\| \sup_N \frac{1}{N} \left| \sum_1^N T_q^n g_N \right| \right\|_{L^2(\mathbb{T}_q^p)} &\leqslant \left\| \sup_N \frac{1}{N} \sum_1^N T_q^n (\sup_N |g_N|) \right\|_{L^2(\mathbb{T}_q^p)} \\ &\leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.\end{aligned}$$

(S_2) *Un critère de presque-orthogonalité.* — Soit $h \in L^2(\mathbb{T}^p)$. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, nous convenons de dire que

$$h(\varphi x), h(\varphi^2 x), \ldots, h(\varphi^N x)$$

sont *presque-orthogonaux* dans $L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^p$ si

$$\left\| \sum_{n=1}^N h(\varphi^n x) \right\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} < \varepsilon N \|h\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \tag{1.27}$$

(cette notion ne présente d'intérêt que pour $\varepsilon = \varepsilon(N) = o(1)$).

On disposera alors d'un critère de presque-orthogonalité que l'on peut formuler comme suit (pour fixer les idées) ($\tilde{\varepsilon}$ désigne une puissance positive suffisamment grande de ε) : à $\varepsilon > 0$ on peut associer un entier $q(\varepsilon)$ pas trop grand ($q(\varepsilon) < 2^{c\tilde{\varepsilon}}$) tel que si, pour toute fréquence $k \in \operatorname{supp} \widehat{h}$,

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant c\tilde{\varepsilon}N} d(\varphi^{*n}k, q^{-1}\mathbb{Z}^p) > 2^{-c\varepsilon N} \quad (c\,\tilde{\varepsilon}N > 1) \tag{1.28}$$

alors (1.27) a lieu :

$$\left\| \sum_{n=1}^N h(\varphi^n x) \right\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} < \varepsilon N \|h\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

Partant d'une fonction f de $L^2(\mathbb{T}^p)$, en *découpant* $\mathbb{Z}^p$ suivant la distance des $\varphi^* k$, $\varphi^{*2}k, \ldots, \varphi^{*N}k$, $k \in \mathbb{Z}^p$, aux réseaux $q^{-1}\mathbb{Z}^p$ ($q = q(\varepsilon)$ pour des valeurs variées de ε tendant vers 0), nous décomposerons f en une somme finie de termes dans $L^2(\mathbb{T}^p)$:

$$f = \sum_{\ell} g_{N,\ell} + \sum_{\ell'} h_{N,\ell'}, \tag{1.29}$$

décomposition qui sera dépendante de N : N sera choisi dyadique, voire quadriadique.

Pour ℓ' fixé, les $\operatorname{supp} \widehat{h}_{N,\ell'}$ seront disjoints et le traitement des contributions maximales $\sup_N |A_N h_{N,\ell'}|$ des $h_{N,\ell'}$ s'inscrira dans le cadre (S_2). Le traitement des contributions maximales $\sup_N |A_N g_{N,\ell}|$ des $g_{N,\ell}$ s'inscrira dans le cadre (S_1) tout en ayant partiellement recours au critère de presque-orthogonalité précité.

La démonstration du critère de presque-orthogonalité évoqué ci-dessus n'est pas aisée : elle s'appuie essentiellement sur le fait que l'endomorphisme φ est algébrique sur $\mathbb{Q}$, dilatant et sur l'hypothèse (1.12) :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^n) = \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi).$$

Le fait que φ soit un automorphisme algébrique sur $\mathbb{Q}$ et l'hypothèse additionnelle (1.12) conduira à une étape intermédiaire importante : il existe un indice entier R tel que, pour toute suite d'exposants entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_R$,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\varphi^{n_1}, \ldots, \varphi^{n_R}) = \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi).$$

1.2. Cas d'un endomorphisme diagonal rationnel dilatant

Nous considérons donc le cas particulier :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_p x_p) \tag{1.30}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des rationnels tels que

$$|\lambda_1| > 1, \ \ldots\ , |\lambda_p| > 1.$$

Dans cette sous-section nous nous proposons de prouver que φ satisfait l'inégalité maximale (1.11). Nous nous contenterons d'adapter la démonstration de J. Bourgain [1] (cf. 3, *The Riesz-Raikov theorem for rational dilatation*) (cas où $p = 1$) au cas $p = 2$. Il est alors facile de l'adapter au cas p quelconque.

Nous partons donc d'un endomorphisme diagonal φ de $\mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$$

pour lequel

$$\lambda_1 = \frac{p_1}{q_1},\ \lambda_2 = \frac{p_2}{q_2},\ |\lambda_1| > 1,\ |\lambda_2| > 1,$$

où p_1 et q_1, resp. p_2 et q_2, sont des entiers relatifs premiers entre eux.

Pour $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ il est clair que

$$\begin{aligned} f(\varphi^n(x_1,x_2)) &= f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \\ &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2} \widehat{f}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{2i\pi(k_1\lambda_1^n x_1 + k_2\lambda_2^n x_2)}. \end{aligned}$$

Nous nous proposons donc de démontrer que φ satisfait l'inégalité maximale

$$\big\| \sup_N |A_N f| \big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{1.31}$$

Il suffit de prouver que

$$\big\| \sup_N |A_{2^N} f| \big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{1.32}$$

En effet on passe de (1.32) à (1.31) en supposant d'abord $f \geqslant 0$.

La démonstration de l'inégalité maximale (1.32) s'appuie sur les trois parties A, B et C qui suivent. Bien entendu, nous supposons implicitement que λ_1 ou λ_2 n'est pas un entier relatif, sinon on se retrouve dans un cas particulier du cas exposé dans la remarque 1.2.

A. — Un lemme de presque-orthogonalité

Nous avons le lemme suivant, lequel est une extension en dimension 2 du lemme 4.10 de [1] (cf. 3, *The Riesz-Raikov theorem for rational dilatation*).

Notations. — Pour a, b, k, ℓ entiers relatifs, $(a,b) \mid (k,\ell)$, resp. $(a,b) \nmid (k,\ell)$, signifie que $a \mid k$ et $b \mid \ell$ (i.e. a divise k et b divise ℓ), resp. $a \nmid k$ ou $b \nmid \ell$ (i.e. a ne divise pas k ou b ne divise pas ℓ).

LEMME 1.4. — *Soient $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ et $\widehat{f}(k_1,k_2), (k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$, les coefficients de Fourier de f. Pour $0 < \varepsilon < 1$ et $\varepsilon N \geqslant 1$, posons $n_0 = \lfloor \varepsilon N \rfloor$. Supposons que, pour tout $(k_1,k_2) \in \operatorname{supp} \widehat{f}$, $(q_1^{n_0}, q_2^{n_0}) \nmid (k_1,k_2)$. Alors, pour une constante c ne dépendant que de (λ_1,λ_2),*

$$\Big\| \sum_1^N f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \leqslant cN\varepsilon^{\frac14}\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{1.33}$$

Démonstration. — On peut toujours supposer λ_1 et λ_2 positifs sans que cela affecte la démonstration du lemme 1.4.

Introduisons d'abord, pour $\rho > 0$, la densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$

$$\Omega_\rho(x_1, x_2) = \frac{\sin^2(\rho\pi x_1)}{\rho\pi^2 x_1^2} \cdot \frac{\sin^2(\rho\pi x_2)}{\rho\pi^2 x_2^2} \tag{1.34}$$

dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{\Omega}_\rho(x_1, x_2) = \Big(1 - \frac{|x_1|}{\rho}\Big)^+ \Big(1 - \frac{|x_2|}{\rho}\Big)^+. \tag{1.35}$$

Fixons M entier tel que

$$\lambda_1^{-M} < \frac{1}{q_1}, \quad \lambda_2^{-M} < \frac{1}{q_2}. \tag{1.36}$$

On vérifie sans peine que, pour $n \geqslant 1$,

$$\big\| f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \big\|_{L^2(-\frac12, \frac12)^2} \leqslant 2 \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

Si $\varepsilon^{\frac12} M \geqslant 1$, il est clair que

$$\Big\| \sum_1^N f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|_{L^2(-\frac12, \frac12)^2} \leqslant 2 M^{\frac12} N \varepsilon^{\frac14} \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{1.37}$$

Si $\varepsilon^{\frac12} M < 1$, considérons une partition de $\{1, 2, \dots, N\}$ en intervalles d'entiers $I_1, I_2, \dots, I_{L-1}, I_L$ tels que

$$|I_1| = \cdots = |I_{L-1}| = \lfloor \varepsilon^{\frac12} N \rfloor, \quad |I_L| \leqslant \lfloor \varepsilon^{\frac12} N \rfloor. \tag{1.38}$$

Comme $\chi_{(-\frac12, \frac12)^2}(x_1, x_2) \leqslant \pi^4 \Omega_{\frac14}(x_1, x_2)$, nous avons

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_1^N f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|_{L^2(-\frac12, \frac12)^2} \\ &\leqslant \Big\| \sum_1^{M\lfloor \varepsilon^{\frac12} N \rfloor} f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|_{L^2(-\frac12, \frac12)^2} \\ &\qquad + \Big\| \sum_{M\lfloor \varepsilon^{\frac12} N \rfloor + 1}^{N} f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|_{L^2(-\frac12, \frac12)^2} \\ &\leqslant 2M\lfloor \varepsilon^{\frac12} N \rfloor \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \pi^2 \sum_{j=M+1}^{L} \Big\| \sum_{I_j} f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|_{L^2(\Omega_{1/4})}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
(1.40)\quad & \Big\| \sum_{I_j} f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|^2_{L^2(\Omega_{1/4})} \\
&= \sum_{\substack{(k_1,k_2),(k_1',k_2')\in \operatorname{supp}\widehat{f}\\ n,n'\in I_j}} \big|\widehat{f}(k_1,k_2)\big| \cdot \big|\widehat{f}(k_1',k_2')\big| \times \widehat{\Omega}_{1/4}(k_1'\lambda_1^{n'} - k_1\lambda_1^n, k_2'\lambda_2^{n'} - k_2\lambda_2^n) \\
&\leqslant 2 \sum_{\substack{(k_1,k_2),(k_1',k_2')\in \operatorname{supp}\hat{f}\\ n,n'\in I_j, n'\geqslant n}} \big|\widehat{f}(k_1,k_2)\big| \cdot \big|\widehat{f}(k_1',k_2')\big| \times \widehat{\Omega}_{1/4}(k_1'\lambda_1^{n'} - k_1\lambda_1^n, k_2'\lambda_2^{n'} - k_2\lambda_2^n).
\end{aligned}$$

Il est clair que, pour n et $n' \in I_j$, avec $j \geqslant M+1$ et $n' \geqslant n$, la condition

$$(1.41)\qquad \widehat{\Omega}_{1/4}(k_1'\lambda_1^{n'} - k_1\lambda_1^n, k_2'\lambda_2^{n'} - k_2\lambda_2^n) \neq 0$$

implique, compte tenu de (1.36),

$$|k_1'\lambda_1^{n'-n} - k_1| < \frac{1}{4}\lambda_1^{-M|I_j|} < \frac{1}{q_1^{|I_j|}}, \quad |k_2'\lambda_2^{n'-n} - k_2| < \frac{1}{4}\lambda_2^{-M|I_j|} < \frac{1}{q_2^{|I_j|}},$$

puis $|k_1'\lambda_1^{n'-n} - k_1| = 0$, $|k_2'\lambda_2^{n'-n} - k_2| = 0$, d'où

$$(1.42)\qquad q_1^{n'-n} \mid k_1', \quad q_2^{n'-n} \mid k_2'$$

et donc, d'après les hypothèses du lemme 1.4,

$$(1.43)\qquad n' - n < \lfloor \varepsilon N \rfloor.$$

Pour chaque $(k_1', k_2') \in \operatorname{supp}\widehat{f}$, il existe au plus un (k_1, k_2) tel que (1.41) ait lieu, et, pour chaque $(k_1, k_2) \in \operatorname{supp}\widehat{f}$, il existe au plus un (k_1', k_2') pour lequel (1.41) ait également lieu. De (1.40) résulte alors que, pour $j > M$,

$$(1.44)\qquad \Big\| \sum_{I_j} f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|^2_{L^2(\Omega_{1/4})} \leqslant 2|I_j| \cdot \lfloor \varepsilon N \rfloor \cdot \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

Revenant à (1.39), compte tenu que $L \leqslant N/\lfloor \varepsilon^{\frac12} N \rfloor + 1 < 3\varepsilon^{-\frac12}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
(1.45)\quad & \Big\| \sum_{1}^{N} f(\lambda_1^n x_1, \lambda_2^n x_2) \Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \\
&\leqslant 2M\lfloor \varepsilon^{\frac12} N \rfloor \, \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} + 3\sqrt{2}\,\pi^2 N \varepsilon^{\frac14} \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \\
&\leqslant (2M + 3\sqrt{2}\,\pi^2) N \varepsilon^{\frac14} \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.
\end{aligned}$$

La démonstration du lemme 1.4 est donc achevée. □

B. — Sur une contraction linéaire positive de $L^1(\mathbb{T}^2)$ et $L^\infty(\mathbb{T}^2)$

Posons, pour $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$,

$$\begin{aligned}(1.46)\quad &Tf(x_1,x_2)\\ &= \sum_{(n_1,n_2)\in\mathbb{Z}^2} f\big(\lambda_1(x_1+n_1),\lambda_2(x_2+n_2)\big)\Omega_{1/4}(x_1+n_1,x_2+n_2).\end{aligned}$$

La définition de T est similaire à celle introduite dans [1] (cf. 1, *Construction contractions of certain positive contractions*). Comme dans [1], on peut prouver aisément que T est une contraction positive de $L^1(\mathbb{T}^2)$ et de $L^\infty(\mathbb{T}^2)$ (cf. lemme 3.1 de la section 3 de cet article). Le théorème ergodique maximal de Hopf (cf. [2]) conduit à l'inégalité maximale forte

$$(1.47)\qquad \Big\|\sup_N \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T^n f(x_1,x_2)\Big|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \leqslant 2\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

L'intérêt de l'introduction de la contraction T réside dans la remarque suivante.

Remarque 1.5. — Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$. La condition :

$$\text{pour tout } (k_1,k_2)\in \operatorname{supp}\widehat{f},\quad q_1 \mid k_1 \text{ et } q_2 \mid k_2,$$

implique que $f(\lambda_1 x_1,\lambda_2 x_2)$ appartient à $L^2(\mathbb{T}^2)$. Par suite, en tenant compte que

$$\begin{aligned}\sum_{(n_1,n_2)\in Z^2}\Omega_{1/4}(x_1+n_1,x_2+n_2) &= \sum_{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2}\widehat{\Omega}_{1/4}(-k_1,-k_2)\mathrm{e}^{2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)}\\ &\qquad\text{(d'après la formule sommatoire de Poisson)}\\ &= \widehat{\Omega}_{1/4}(0,0) = 1,\end{aligned}$$

la définition (1.46) de T conduit à

$$Tf(x_1,x_2) = f(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2).$$

Par suite, la condition :

$$\text{pour tout } (k_1,k_2)\in \operatorname{supp}\widehat{f},\quad q_1^n \mid k_1 \text{ et } q_2^n \mid k_2,$$

implique

$$\begin{aligned}Tf(x_1,x_2) &= f(\lambda_1x_1,\lambda_2x_2),\\ T^2f(x_1,x_2) &= f(\lambda_1^2x_1,\lambda_2^2x_2),\\ &\ \vdots\\ T^nf(x_1,x_2) &= f(\lambda_1^nx_1,\lambda_2^nx_2).\end{aligned}$$

C. — Sommes de Riemann et inégalités de Jessen

Soient f dans $L^s(\mathbb{T}^2)$, N et M entiers $\geqslant 1$. Considérons les sommes de Riemann

$$R_{N,M}f(x_1,x_2) = \frac{1}{NM}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f\Big(x_1+\frac{n}{N}, x_2+\frac{m}{M}\Big). \tag{1.48}$$

Un théorème de Jessen (cf. [3]), adapté en dimension 2, assure que, pour q_a et q_b entiers $\geqslant 1$,

$$\big\| \sup_j |R_{q_a^j,q_b^j} f|\big\|_{L^s(\mathbb{T}^2)} \leqslant c(s)\|f\|_{L^s(\mathbb{T}^2)} \quad (1<s<\infty) \tag{1.49}$$

avec $c(s)\leqslant s/(s-1)$. Donnons une démonstration de (1.49) dans le cas $s=2$ analogue à celle de [1] (cf. 2, *Riemann's sums and Jessen's inequality*) en dimension 1.

Observons d'abord, d'une part, que les $R_{q_a^j,q_b^j}$, $j\geqslant 0$, sont des contractions linéaires positives auto-adjointes de $L^2(\mathbb{T}^2)$ et que, d'autre part,

$$R_{q_a^j,q_b^j}\circ R_{q_a^{j'},q_b^{j'}} = R_{q_a^{j'},q_b^{j'}} \quad \text{si } j\leqslant j'.$$

Par dualité, montrer l'inégalité maximale (1.49) dans le cas $s=2$ revient à montrer que

$$\Big\|\sum_j R_{q_a^j,q_b^j}(g_j)\Big\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leqslant c(2)\Big\|\sum_j g_j\Big\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$$

pour toute suite finie $g_1,\ldots,g_J$ de fonctions positives de $L^2(\mathbb{T}^2)$.

Fixons J. Soit $C(J)$ la meilleure constante telle que

$$\Big\|\sum_j R_{q_a^j,q_b^j}(g_j)\Big\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leqslant C(J)\Big\|\sum_j g_j\Big\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}$$

pour toute suite finie $g_1,\ldots,g_J$ de fonctions positives de $L^2(\mathbb{T}^2)$. Alors

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_j R_{q_a^j,q_b^j}(g_j)\Big\|^2_{L^2(\mathbb{T}^p)} &\leqslant 2\sum_{j\leqslant j'}\big\langle R_{q_a^j,q_b^j}(g_j), R_{q_a^{j'},q_b^{j'}}(g_{j'})\big\rangle\\ &= 2\sum_{j\leqslant j'}\big\langle g_j, R_{q_a^{j'},q_b^{j'}}(g_{j'})\big\rangle\\ &\leqslant 2\Big\langle \sum_j g_j, \sum_j R_{q_a^j,q_b^j}(g_j)\Big\rangle \leqslant 2C(J)\Big\|\sum_j g_j\Big\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}.\end{aligned}$$

D'où $(C(J))^2\leqslant 2C(J)$ et donc $C(J)\leqslant\sqrt{2}$. On conclut que $c(2)\leqslant\sqrt{2}$.

Passons maintenant à la démonstration de l'inégalité maximale (1.32). Nous allons procéder à une décomposition de f en une somme finie de termes dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ suivant que $\left(\lambda_1^{2^n}k_1,\lambda_2^{2^n}k_2\right)$, $1\leqslant n\leqslant N$, figure dans $\mathbb{Z}^2$ ou non, i.e. suivant que $\left(q_1^{2^n},q_2^{2^n}\right)$ divise (k_1,k_2) ou non.

Introduisons les sous-ensembles de $\mathbb{Z}^2$

$$\sigma_0=\left\{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2;\ (q_1,q_2)\nmid(k_1,k_2)\right\}$$

et, pour $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sigma_n=\Big\{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2;\ (q_1^{2^{(n-1)}},q_2^{2^{(n-1)}})\mid\\ (k_1,k_2),(q_1^{2^n},q_2^{2^n})\nmid(k_1,k_2)\Big\}.\end{aligned}\tag{1.50}$$

Posons, pour $f\in L^2(\mathbb{T}^2)$,

$$f_n(x_1,x_2)=\sum_{(k_1,k_2)\in\sigma_n}\widehat{f}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)}.\tag{1.51}$$

Pour tout $N\geqslant 0$, il est clair que

$$f=f_0+f_1+\cdots+f_N+\sum_{n\geqslant N+1}f_n.\tag{1.52}$$

Notons que

$$\sum_{n\geqslant N+1}f_n=\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\\ q_1^{2^N}\mid k_1,\ q_2^{2^N}\mid k_2}}\widehat{f}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)}=R_{q_1^{2^N},\,q_2^{2^N}}.$$

Considérons les moyennes

$$A_{2^N}f(x_1,x_2)=\frac{1}{2^N}\sum_{1}^{2^N}f(\lambda_1^nx_1,\lambda_2^nx_2).\tag{1.53}$$

De (1.52) découle que

$$\sup_{N\geqslant 0}\left|A_{2^N}f\right|\leqslant\sum_{n\geqslant 0}\sup_{N\geqslant n}\left|A_{2^N}f_{N-n}\right|+\sup_{N\geqslant 0}\left|A_{2^N}\Big(\sum_{n\geqslant N+1}f_n\Big)\right|.\tag{1.54}$$

Comme

$$\sum_{n\geqslant N+1}f_n(x_1,x_2)=\sum_{\substack{(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2\\ q_1^{2^N}\mid k_1,\,q_2^{2^N}\mid k_2}}\widehat{f}(k_1,k_2)\mathrm{e}^{2i\pi(k_1x_1+k_2x_2)},$$

en tenant compte de la remarque (1.5), on obtient successivement

$$\begin{aligned}\Big\| \sup_{N\geqslant 0} \Big| A_{2^N}\Big(\sum_{n\geqslant N+1} f_n\Big)\Big|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} &= \Big\| \sup_{N\geqslant 0} \frac{1}{2^N}\Big| \sum_{1}^{2^N} T^n\Big(\sum_{n\geqslant N+1} f_n\Big)\Big|\Big\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\\ &\leqslant \Big\| \sup_{N\geqslant 0} \frac{1}{2^N}\Big| \sum_{1}^{2^N} T^n\Big(\sup_{N\geqslant 0}\Big| \sum_{n\geqslant N+1} f_n\Big|\Big)\Big\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}\\ &\leqslant 4\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \end{aligned} \tag{1.55}$$

D'autre part, de l'inégalité

$$\sup_{N\geqslant n} |A_{2^N} f_{N-n}| \leqslant \Big(\sum_{N\geqslant n} |A_{2^N} f_{N-n}|^2\Big)^{\frac12}$$

découle que

$$\Big\| \sup_{N\geqslant n} |A_{2^N} f_{N-n}|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \leqslant \Big(\sum_{N\geqslant n} \|A_{2^N} f_{N-n}\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^2}\Big)^{\frac12}. \tag{1.56}$$

D'après la définition des f_{N-n}, pour $(k_1,k_2)\in \operatorname{supp}\widehat{f}_{N-n}$,

$$\big(q_1^{2^{N-n}}, q_2^{2^{N-n}}\big) \nmid (k_1,k_2).$$

Le lemme 1.4 de presque-orthogonalité implique alors, avec $\varepsilon = 2^{-n}$,

$$\|A_{2^N} f_{N-n}\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \leqslant C 2^{-\frac12 n} \|f_{N-n}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{1.57}$$

Pour n fixé, les $\widehat{f}_{N-n}$ ont, suivant $N\geqslant n$, des supports disjoints. Par suite

$$\Big(\sum_{N\geqslant n} \|A_{2^N} f_{N-n}\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^2}\Big)^{\frac12} \leqslant C^{\frac12} 2^{-\frac14 n} \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{1.58}$$

De ce qui précède résulte que, pour $f\in L^2(\mathbb{T}^2)$,

$$\Big\| \sup_{N\geqslant 0} |A_{2^N} f|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^2} \leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \tag{1.59}$$

La démonstration de l'inégalité maximale (1.32) est donc achevée.

Remarque 1.6. — 1) Nous n'avons pas pu adapter simplement la démonstration précédente de l'inégalité maximale (1.11) (cas où φ est un endomorphisme diagonal rationnel dilatant) au cas où φ est *semblable* à un endomorphisme diagonal rationnel dilatant.

2) De même, dans le cas où φ est semblable à un endomorphisme dilatant de la forme

$$\varphi(x_1,\dots,x_p) = (a_{11}x_1+\cdots+a_{1p}x_p,\dots,a_{p1}x_1+\cdots+a_{pp}x_p)$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, nous n'avons pas pu donner, en partant de la remarque 1.2, une démonstration simple de l'inégalité maximale (1.11).

3) Dans le cas particulier où le polynôme (1.3) est de degré 1 nous avons

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = -\frac{a_0}{a_1}(x_1, \dots, x_p),$$

i.e. un un cas particulier de (1.30).

Dorénavant nous supposerons $d \geqslant 2$. Il n'est pas exclu que les valeurs propres de φ soient, en tout ou partie, rationnelles.

2. Rang d'une famille finie d'itérées d'un automorphisme algébrique de $\mathbb{R}^p$

Dans [1] (cf. 4, *An almost orthogonality estimate*) l'analyse de la "presque-orthogonalité" dans $L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ des

$$f(x),\ f(\theta x),\ \dots,\ f(\theta^N x)$$

(où $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ et $\theta > 1$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$) nécessite le résultat suivant : si θ est algébrique sur $\mathbb{Q}$ de degré d et si toutes ses puissances θ^n, $n \geqslant 1$, sont également de degré d, il existe un indice entier R tel que, pour toute suite d'exposants entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_R$,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\theta^{n_1}, \theta^{n_2}, \dots, \theta^{n_R}) = d. \tag{2.1}$$

Il est clair que $R \geqslant d$ et que, pour $d = 2$, $R = 2$. Dans [1] est donné l'exemple $\theta^d = \theta + 1$ pour lequel nécessairement $R > \frac{1}{2}d(d-1)$.

Nous aurons besoin d'un énoncé similaire à (2.1) pour un automorphisme φ de $\mathbb{R}^p$ algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Soit donc φ un automorphisme de $\mathbb{R}^p$ satisfaisant les hypothèses (1.3) et (1.4), i.e. pour lequel il existe un polynôme

$$P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0, \quad P \in \mathbb{Z}[X], \quad P \neq 0,$$

tel que $P(\varphi) = 0$. Nous supposons que, au signe près, P est le polynôme minimal de φ sur $\mathbb{Q}$. Comme φ est un automorphisme de $\mathbb{R}^p$ il est clair que nécessairement $a_0 \neq 0$.

Dans toute la suite nous supposerons que (1.12) est vérifiée :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^n) = d.$$

Nous aurons besoin de donner la forme du polynôme P à partir de celle du polynôme minimal Π_φ de φ sur $\mathbb{C}$. La remarque qui suit concerne un bref rappel élémentaire sur les conjugués d'un nombre complexe algébrique sur $\mathbb{Q}$.

Remarque 2.1. — Soient β un nombre complexe algébrique sur $\mathbb{Q}$, Q le polynôme minimal (défini à un facteur près rationnel) de β sur $\mathbb{Q}$ et $\beta_1 = \beta$, $\beta_2, \dots, \beta_r$ les conjugués de β, i.e. les racines complexes de Q :

$$Q = \prod_1^r (X - \beta_j).$$

Pour s entier fixé, $s \geqslant 2$, considérons les β_j^s, $1 \leqslant j \leqslant r$. Posons

$$Q_s = \prod_1^r (X - \beta_j^s). \tag{2.2}$$

Le polynôme Q_s appartient à $\mathbb{Q}[X]$, que les β_ℓ^s, $1 \leqslant \ell \leqslant r$, soient distincts ou non. Si les β_ℓ^s, $1 \leqslant \ell \leqslant r$, sont distincts, le polynôme minimal de β^s sur $\mathbb{Q}$ est Q_s. Si les β_ℓ^s, $1 \leqslant \ell \leqslant r$, ne sont pas distincts, le polynôme minimal de β^s sur $\mathbb{Q}$ est donné par

$$\widetilde{Q}_s = \prod_{\beta_j^s \text{ distincts}} (X - \beta_j^s).$$

Considérons les classes d'équivalence $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_v$ associées à la relation d'équivalence "*λ et λ' sont conjugués*" sur $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi)$. Désignons par $\mathcal{C}_\ell$ l'ensemble des α complexes conjugués à un représentant λ quelconque de la classe $\mathcal{L}_\ell$. Posons, pour $1 \leqslant \ell \leqslant v$,

$$P_\ell = \prod_{\alpha \in \mathcal{C}_\ell} (X - \alpha).$$

Introduisons la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ du polynôme minimal Π_φ sur $\mathbb{C}$ de φ :

$$\Pi_\varphi = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi)} (X - \lambda)^{\ell_\lambda}.$$

À partir de la réduction de Jordan (sur $\mathbb{C}$) de φ on remarque facilement que le polynôme minimal de φ sur $\mathbb{Q}$ est donné par

$$P = a_d \prod_1^v P_\ell^{m_\ell} \quad \text{où} \quad m_\ell = \max_{\lambda \in \mathcal{L}_\ell} \ell_\lambda. \tag{2.3}$$

Notons $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_u\}$ l'ensemble des racines distinctes du polynôme P. Comme $a_0 \neq 0$, les α_j, $1 \leqslant j \leqslant u$, sont toutes non nulles.

LEMME 2.2. — *Fixons s entier, $s \geqslant 2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^s) = \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi)$,

(b) *quels que soient i et j, $1 \leqslant i < j \leqslant u$, $\alpha_i^s \neq \alpha_j^s$.*

Démonstration. — Introduisons, pour $1 \leqslant \ell \leqslant v$, les polynômes

$$P_{\ell,s} = \prod_{\alpha^s/\alpha\in\mathcal{C}_\ell} (X - \alpha^s).$$

(a) implique (b). — Supposons que $\alpha_i^s = \alpha_j^s$, $i \neq j$, et que α_i et α_j soient racines d'un même polynôme P_ℓ, soit, pour fixer les idées : $\alpha_1^s = \alpha_2^s$ avec α_1 et α_2 racines du polynôme P_1. Introduisons les polynômes

$$\widetilde{P}_{1,s} = \prod_{\alpha^s \text{ distincts }/\alpha\in\mathcal{C}_1} (X - \alpha^s) \quad \text{et} \quad \widetilde{P} = \widetilde{P}_{1,s} P_{2,s}^{m_2} \cdots P_{v,s}^{m_v}.$$

D'après la remarque 2.1 le polynôme $\widetilde{P}$ appartient à $\mathbb{Q}[X]$. À partir de la réduction de Jordan de φ on remarque facilement que $\widetilde{P}(\varphi^s) = 0$. Par suite, compte tenu que $\deg(\widetilde{P}) < \deg(P)$, nous avons $\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^s) < \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi)$.

Supposons que $\alpha_i^s = \alpha_j^s$, $i \neq j$, que α_i soit racine d'un polynôme P_k et α_j racine d'un polynôme P_ℓ, $k \neq \ell$, soit, pour fixer les idées, $\alpha_1^s = \alpha_2^s$ avec α_1 racine de P_1 et α_2 racine de P_2. Les nombres complexes α^s, $\alpha \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, qu'ils soient distincts ou non, sont alors conjugués.

Introduisons le polynôme

$$\widetilde{P} = P_{1,s}^{\max(m_1,m_2)} P_{3,s}^{m_3} \cdots P_{v,s}^{m_v}.$$

D'après la remarque 2.1, le polynôme $\widetilde{P}$ appartient à $\mathbb{Q}[X]$. À partir de la réduction de Jordan de φ on remarque également que $\widetilde{P}(\varphi^s) = 0$. Par suite, compte tenu que $\deg(\widetilde{P}) < \deg(P)$, on a $\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^s) < \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi)$. On conclut que (a) implique (b).

(b) implique (a). — Supposons que les $\alpha_1^s, \ldots, \alpha_u^s$ soient distincts. Les λ^s, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi)$, sont en particuliers distincts. Comme pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi)$, $\lambda \neq 0$, on remarque facilement à partir de la réduction de Jordan de φ que le polynôme minimal Π_{φ^s} de φ^s sur $\mathbb{C}$ est donné par

$$\Pi_{\varphi^s} = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi)} (X - \lambda^s)^{\ell_\lambda}$$

où les exposants ℓ_λ sont les mêmes que ceux qui figurent dans la factorisation du polynôme minimal Π_φ sur $\mathbb{C}$ de φ.

En s'appuyant sur la remarque 2.1, on en déduit que le polynôme minimal de φ^s sur $\mathbb{Q}$ est donné par

$$P_s = \prod_1^v P_{\ell,s}^{m_\lambda} \quad \text{où} \quad m_\lambda = \max_{\lambda\in\mathcal{L}_\ell} \ell_\lambda.$$

Par suite $\deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^s) = \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi)$. On conclut que (b) implique (a).

La démonstration du lemme 2.2 est donc achevée. □

Lemme 2.3. — *Supposons que* (1.12) *ait lieu. Il existe alors un indice entier R tel que, pour toute suite d'exposants entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_R$,*

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\varphi^{n_1}, \dots, \varphi^{n_R}) = d. \tag{2.4}$$

Démonstration. — D'après le lemme 2.2 la condition (1.12)

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad \dim_{\mathbb{Q}}(\varphi^n) = \dim_{\mathbb{Q}}(\varphi)$$

est équivalente à :

$$\begin{gathered}\text{quels que soient } i \text{ et } j,\ 1 \leqslant i < j \leqslant u,\\ \alpha_i/\alpha_j \ \text{ n'est pas racine de l'unité.}\end{gathered} \tag{2.5}$$

Soit $\mathbb{Q}(\varphi)$ le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les itérées φ^n, $n \geqslant 0$, de φ. Il est clair que

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\varphi) = d. \tag{2.6}$$

Soit S exposants entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_S$ tels que

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\varphi^{n_1}, \dots, \varphi^{n_S}) < d. \tag{2.7}$$

Il existe alors, d'après (2.6) et (2.7), une forme linéaire $\gamma : \mathbb{Q}(\varphi) \to \mathbb{Q}$ non nulle telle que

$$\gamma(\varphi^{n_s}) = 0, \quad 1 \leqslant s \leqslant S.$$

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \gamma(\varphi^n). \tag{2.8}$$

Comme

$$\varphi^d + b_{d-1}\varphi^{d-1} + \cdots + b_1\varphi + b_0 \operatorname{Id} = 0 \quad \text{où} \quad b_k = \frac{a_k}{a_d}, \tag{2.9}$$

en composant (2.9) par φ^{n-d}, $n \geqslant d$, puis par γ, on en déduit que la suite u_n suit la relation de récurrence linéaire

$$u_n + b_{d-1}u_{n-1} + \cdots + b_1 u_{n-d+1} + b_0 u_{n-d} = 0, \quad n \geqslant d. \tag{2.10}$$

Les $u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$ ne peuvent être tous nuls sinon la forme linéaire γ serait nulle.

Les racines du polynôme *compagnon* $X^d + b_{d-1}X^{(d-1)} + \cdots + b_1 X + b_0$ de la récurrence linéaire (2.10) sont celles du polynôme P, i.e. $\alpha_1, \dots, \alpha_u$. Comme $b_0 \neq 0$ et que les $u_0, u_1, \dots, u_{d-1}$ ne sont pas tous nuls, il est bien connu que la récurrence linéaire (2.10) implique l'existence de polynômes f_k, $1 \leqslant k \leqslant u$, non tous nuls, de degrés respectifs $\leqslant n_k - 1$, tels que

$$u_n = f_1(n)\alpha_1^n + \cdots + f_u(n)\alpha_u^n, \quad n \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Sous la condition (2.5) (la suite (u_n) est dite *non dégénérée*) le théorème de Skolem-Mahler-Lech (cf. [4]) implique que l'ensemble

$$U(0) = \{n;\, u_n = 0\} \tag{2.12}$$

est fini (usuellement le cardinal de $U(0)$ est appelé la *zéro-multiplicité* de la suite (u_n)).

Dans le cas présent la suite (u_n) est rationnelle (dans le sens où les valeurs initiales $u_0, \dots, u_{d-1}$ de la suite (u_n) et les coefficients $b_0, \dots, b_{d-1}$ de la relation de récurrence linéaire (2.9) sont des nombres rationnels). Sous la condition (2.5) il existe alors une borne (effective) $C(d)$ indépendante des valeurs initiales $u_0, \dots, u_{d-1}$ de la suite (u_n) (les $u_0, \dots, u_{d-1}$ étant non toutes nulles) pour laquelle

$$\#U(0) \leqslant C(d) \quad \big(C(d) = 2^{2^{29d!}}\big) \tag{2.13}$$

(cf. H.P. Schlickewei [7, p. 174]). Par suite nécessairement $S \leqslant C(d)$. Posons

$$R = C(d) + 1. \tag{2.14}$$

Alors, pour toute suite d'exposants entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_R$,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\varphi^{n_1}, \dots, \varphi^{n_R}) = d.$$

La démonstration du lemme 2.3 est donc achevée. □

Remarque 2.4. — La valeur de la constante $C(d)$ (cf. (2.13)) n'aura pas d'importance dans la suite. Néanmoins indiquons qu'un article antérieur à [7], A.J. Van Der Poorten et H.P. Schlickewei : *Zeros of recurrence sequences*, Bull. Austral. Math. Soc., vol. 1 (1991), p. 215–223 aurait donné une borne plus complexe de la zéro-multiplicité de la suite (u_n) : cette borne dépendrait de d, du degré du corps $K = \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_u]$ et du nombre d'idéaux premiers intervenant dans la décomposition des idéaux fractionnaires (α_j) dans K. Un article de W.M. Schmidt (cf. [8]) postérieur à [7] donne $\exp(\exp(\exp(3d \ln d)))$ comme borne générale de la zéro-multiplicité d'une suite récurrente linéaire (v_n) complexe, non nulle et non dégénérée d'ordre d.

3. Sur certaines contractions positives

Pour q entier $\geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^p$ nous posons

$$[x]_q = \inf_{k \in \mathbb{Z}^p} \Big| x - \frac{k}{q} \Big|_\infty . \tag{3.1}$$

Dans le cas où $[x]_q < 1/2q$ nous posons

$$\langle x\rangle_q = \text{ l'élément de } q^{-1}\mathbb{Z}^p \text{ le plus proche de } x, \tag{3.2}$$

lequel est défini sans ambiguïté. Dans le cas où $[x]_q = 1/2q$ nous choisissons l'un des quelconques éléments ℓ/q, $\ell/q \in q^{-1}\mathbb{Z}^p$, pour lequel $|x - \ell/q|_\infty = 1/2q$, et le notons également $\langle x\rangle_q$.

Nous posons

$$\{x\}_q = x - \langle x\rangle_q. \tag{3.3}$$

À l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant 1.3, 1.4 et 1.5 nous allons associer, de manière similaire à [1] (cf. 1, Construction of certain positive contractions), une contraction linéaire positive de $L^\infty(\mathbb{T}^p)$ et $L^1(\mathbb{T}^p)$.

Dans la section 1, nous avions introduit la densité de probabilité (1.18) sur $\mathbb{R}^p$

$$\Omega_\rho(x_1, \ldots, x_\ell) = \prod_1^p \frac{\sin^2 \pi\rho x_\ell}{\rho\pi^2 x_\ell^2}$$

dont la transformée de Fourier (1.19) est donnée par

$$\widehat{\Omega}_\rho(x_1, \ldots, x_\ell) = \prod_1^p \Big(1 - \frac{|x_\ell|}{\rho}\Big)^+.$$

À la fonction $f \in L^1(\mathbb{T}^p_q)$ nous associons la fonction

$$T_q f(x) = q^p \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} f\big(\varphi(x+qn)\big)\Omega_\rho(x+qn). \tag{3.4}$$

Posons

$$\alpha = \inf\big(|\varphi^* k|_\infty;\ k \in \mathbb{Z}^p, k \neq 0\big). \tag{3.5}$$

Nous avons alors le

Lemme 3.1. — *Pour $\rho < \min(1/q, \alpha/q)$ l'opérateur T_q défini par* (3.4) *est une contraction linéaire positive de $L^\infty(\mathbb{T}^p_q)$ et $L^1(\mathbb{T}^p_q)$.*

Démonstration. — Il est clair que, pour $f \geqslant 0$, $T_q f$ est $\geqslant 0$. De (3.4) résulte que, pour $f \in L^\infty(\mathbb{T}^p_q)$,

$$\begin{aligned}\big|T_q f(x)\big| &\leqslant \|f\|_\infty q^p \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \Omega_\rho(x+qn)\\ &= \|f\|_\infty \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\Omega}_\rho\Big(-\frac{k}{q}\Big)\mathrm{e}^{2i\pi\langle \frac{k}{q}, x\rangle}\\ &\qquad \text{(d'après la formule sommatoire de Poisson)}\\ &= \|f\|_\infty \widehat{\Omega}_\rho(0) = \|f\|_\infty \quad \text{(d'après la condition } \rho < 1/q).\end{aligned}$$

Donc T_q est bien une contraction positive de $L^\infty(\mathbb{T}_q^p)$.

Pour $f \in L^2(\mathbb{T}_q^p)$ introduisons le développement en série de Fourier de $|f|$:

$$|f|(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \widehat{|f|}\Big(\frac{k}{q}\Big)\mathrm{e}^{2i\pi\langle \frac{k}{q},x\rangle}.$$

De (3.4) résulte que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}_q^p} |Tf(x)|\mathrm{d}x \leqslant q^p \int_{\mathbb{R}^p} \big|f(\varphi x)\big| \cdot \Omega_\rho(x)\mathrm{d}x = q^p \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{|f|}\Big(\frac{k}{q}\Big)\widehat{\Omega}_\rho\Big(\varphi^*\frac{k}{q}\Big)\\ = q^p\widehat{|f|}(0) = \int_{\mathbb{T}_q^p} |f|(x)\mathrm{d}x \quad \text{(d'après la condition } \rho < \alpha/q),\end{aligned}$$

Ainsi T_q est une L^1-contraction de $L^2(\mathbb{T}_q^p)$. À partir de l'expression (3.4) de T_q et du théorème de convergence monotone on conclut sans difficulté que T_q est également une L^1-contraction de $L^1(\mathbb{T}_q^p)$.

La démonstration du lemme 3.1 est donc achevée. □

Le lemme 3.1 et le théorème ergodique maximal de Hopf (cf. [2]) conduisent, pour $s > 1$, aux inégalités maximales fortes :

$$\Big\| \sup_N \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n f(x)\Big|\Big\|_{L^s(\mathbb{T}_q^p)} \leqslant \frac{s}{s-1}\|f\|_{L^s(\mathbb{T}_q^p)}.$$

En particulier

$$\Big\| \sup_N \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n f(x)\Big|\Big\|_{L^2(\mathbb{T}_q^p)} \leqslant 2\|f\|_{L^2(\mathbb{T}_q^p)}. \tag{3.6}$$

Remarque. — T_q étant une contraction linéaire positive de $L^1(\mathbb{T}_q^p)$ et $L^\infty(\mathbb{T}_q^p)$ est également, pour tout s, $1 < s < \infty$, une contraction de $L^s(\mathbb{T}_q^p)$ (cf. [2]).

Posons, pour $k \in \mathbb{Z}^p$,

$$e_{k/q}(x) = \mathrm{e}^{2i\pi\langle k/q,x\rangle}.$$

Remarque. — Il est clair que $\langle\varphi^* k/q\rangle_q = (1/q)\langle\varphi^* k\rangle_1$. Dans toute la suite nous garderons l'écriture $\langle\varphi^* k/q\rangle_q$.

Lemme 3.2. — *Fixons $\rho < \min(1/2q, \alpha/2q)$. Si $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\}) \neq 0$, alors $\langle\varphi^* k/q\rangle_q$ est défini sans ambiguïté. Les coefficients de Fourier $\widehat{T_q e_{k/q}}(\ell/q)$, $\ell \in \mathbb{Z}^p$, de la fonction $T_q e_{k/q}$ sont donnés par :*

1) *Si* $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\}) \neq 0$, *alors*

$$\widehat{T_q e_{k/q}}\Big(\frac{\ell}{q}\Big) = \begin{cases} \widehat{\Omega}_\rho\Big(\Big\{\varphi^* \dfrac{k}{q}\Big\}\Big) & si\ \dfrac{\ell}{q} = \Big\langle \varphi^* \dfrac{k}{q}\Big\rangle_q, \\ 0 & si\ \dfrac{\ell}{q} \neq \Big\langle \varphi^* \dfrac{k}{q}\Big\rangle_q. \end{cases} \tag{3.7}$$

2) *Si* $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\}) = 0$, *alors*

$$\widehat{T_q e_{k/q}}\Big(\frac{\ell}{q}\Big) = 0 \ \textit{ pour tout } \ \ell \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.8}$$

3) *Si, pour* $k \neq k'$, $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\}_q) \neq 0$ *et* $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k'/q\}_q) \neq 0$, *alors*

$$\Big\langle \varphi^* \frac{k}{q}\Big\rangle_q \neq \Big\langle \varphi^* \frac{k'}{q}\Big\rangle_q. \tag{3.9}$$

Pour $f \in L^2(\mathbb{T}_q^p)$ *le développement en série de Fourier de* $T_q f$ *est donné par*

$$T_q f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{f}\Big(\frac{k}{q}\Big) \widehat{\Omega}_\rho\Big(\Big\{\varphi^* \frac{k}{q}\Big\}_q\Big) \mathrm{e}^{2i\pi \langle \langle \varphi^* k/q \rangle_q, x\rangle}. \tag{3.10}$$

Démonstration. — Si $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\})$ n'est pas nul, on a nécessairement $\langle \varphi^* k/q\rangle_q < 1/(2q)$ et donc $\langle \varphi^* k/q\rangle_q$ est défini sans ambiguïté. Les coefficients de Fourier de la fonction $T_q e_k$ sont donnés par

$$\widehat{T_q e_k}\Big(\frac{\ell}{q}\Big) = \int_{\mathbb{R}^p} \mathrm{e}^{-2i\pi \langle \ell/q, x\rangle} \mathrm{e}^{2i\pi \langle \varphi * k/q, x\rangle} \Omega_\rho(x) = \widehat{\Omega}_\rho\Big(\varphi * \frac{k}{q} - \frac{\ell}{q}\Big).$$

Supposons que $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\}_q) \neq 0$. Si $\widehat{\Omega}_\rho(\varphi^* k/q - \ell/q) \neq 0$, alors on a nécessairement $|\langle \varphi^* k/q\rangle_q - \ell/q|_\infty < 2\rho < 1/q$ et, par suite, $\langle \varphi^* k/q\rangle_q = \ell/q$. D'où (3.7).

Supposons que $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\}_q) = 0$, i.e. $[\varphi^* k/q]_q \geqslant \rho$. Alors nécessairement, pour tout $\ell/q \in q^{-1}\mathbb{Z}^p$, $|\varphi^* k/q - \ell/q|_\infty \geqslant \rho$ et, par suite, $\widehat{\Omega}_\rho(\varphi^* k/q - \ell/q) = 0$. D'où (3.8).

Pour $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k/q\}) \neq 0$ et $\widehat{\Omega}_\rho(\{\varphi^* k'/q\}) \neq 0$, avec $k \neq k'$, la condition $\rho < \alpha/2q$ implique $\langle \varphi^* k/q\rangle_q \neq \langle \varphi^* k'/q\rangle_q$, car sinon on aurait

$$\big|\varphi^* k/q - \varphi^* k'/q\big|_\infty < 2\rho < \alpha/q,$$

d'où $|\varphi^*(k-k')|_\infty < \alpha$, ce qui, d'après la définition 3.5 de α, ne peut avoir lieu. D'où (3.9).

On conclut que, pour $f \in L^2(\mathbb{T}_q^p)$, le développement en série de Fourier de $T_q f$ est donné par (3.10).

La démonstration du lemme 3.2 est donc achevée. □

4. Presque-orthogonalité

Le but de cette section est d'établir un critère de *presque-orthogonalité*, critére qui a été évoqué dans l'introduction de cet article. Nous suivrons de manière similaire la démarche de [1] (cf. 4, *An almost orthogonality estimate*).

Rappelons que, pour l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^p$ que nous considérons, il existe un polynôme

$$P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0, \quad P \in \mathbb{Z}[X], \quad P \neq 0,$$

tel que $P(\varphi) = 0$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi)$ implique $|\lambda| > 1$. Nous supposons que, au signe près, P est le polynôme minimal de φ sur $\mathbb{Q}$ pour lequel les $a_d, \ldots, a_0$ sont premiers entre eux et que les degrés sur $\mathbb{Q}$ des itérées φ^n de φ vérifient l'hypothèse (1.12) :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1, \quad \deg_{\mathbb{Q}}(\varphi^n) = d.$$

D'après le lemme 2.3, en remplaçant φ par φ^*, il existe un indice entier R tel que, pour toute suite d'exposants entiers $n_1 < n_2 < \cdots < n_R$,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\varphi^{*n_1}, \ldots, \varphi^{*n_R}) = d.$$

Rappelons que nous avions posé, pour q entier $\geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}^p$,

$$[x]_q = \inf_{k \in \mathbb{Z}^p} \left| x - \frac{k}{q} \right|_\infty .$$

Il est clair que, si $q' \mid q$, alors, d'une part, $[x]_q \leqslant [x]_{q'}$ et, d'autre part, si on a l'inégalité stricte $[x]_q < [x]_{q'}$, alors $[x]_{q'} + [x]_q \geqslant 1/q$. On vérifie sans peine que, pour $x_0, \ldots, x_\ell \in \mathbb{R}^p$ et $b_0, \ldots, b_{\ell-1} \in \mathbb{Z}$, la relation $x_\ell = b_{\ell-1} x_{\ell-1} + \cdots + b_0 x_0$ implique $[x_\ell]_q \leqslant |b_{\ell-1}| \cdot [x_{\ell-1}]_q + \cdots + |b_0| \cdot [x_0]_q$.

Nous commencerons par deux lemmes préparatoires. Le premier lemme donne une estimation du $\max_{0 \leqslant s \leqslant T} [\varphi^{*s} x]_1$ à partir d'une estimation des $\max_{0 \leqslant s < d} [\varphi^{*s} x]_1$ et $\max_{0 \leqslant s < T-d} [\varphi^{*s} x]_1$.

Lemme 4.1. — *Soient $x \in \mathbb{R}^p$ et T entier $> d$ tels que*

$$(4.1) \qquad [\varphi^{*s} x]_1 < \tau, \quad [\varphi^{*(T-s)} x]_1 < \tau, \quad 0 \leqslant s < d,$$

avec

$$(4.2) \qquad \tau < A^{-T-2} \quad \text{où} \quad A = |a_d| + |a_{d-1}| + \cdots + |a_0|.$$

Alors

$$(4.3) \qquad [\varphi^{*s} x]_1 < \tau A^T, \quad 0 \leqslant s \leqslant T.$$

Démonstration. — On peut supposer $T \geqslant 2d$. Des hypothèses (1.3) et (1.4) découle que

$$a_d^{(s-d+1)^+}\varphi^{*s}x = b_{d-1}(s)\varphi^{*(d-1)}x + \cdots + b_1(s)\varphi^* x + b_0(s)x$$

où $s \geqslant 0$, $b_\ell(s) \in \mathbb{Z}$ et

$$|b_{d-1}(s)| + \cdots + |b_1(s)| + |b_0(s)| < A^{(s-d+1)^+}.$$

De l'hypothèse $[\varphi^{*s}x]_1 < \tau$, $0 \leqslant s < d$, résulte alors que, pour $s \geqslant 0$,

$$[a_d^{(s-d+1)^+}\varphi^{*s}x]_1 < \tau A^{(s-d+1)^+}.$$

Il existe donc, pour $d \leqslant s \leqslant T-d$, des éléments $\lambda_s \in a_d^{-(s-d+1)}\mathbb{Z}^p$ pour lesquels

$$|\varphi^{*s}x - \lambda_s|_\infty < \tau|a_d|^{-(s-d+1)}A^{s-d+1} < \tau|a_d|^{-s}A^T\Big(\frac{a_d}{A}\Big)^{d-1} < \tau|a_d|^{-s}A^T. \tag{4.4}$$

Comme, pour $0 \leqslant s \leqslant T$, les $|a_d|^{-s}A^T$ sont > 1, l'hypothèse (4.1) assure qu'il existe des $\lambda_1, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_{T-d+1}, \dots, \lambda_T \in \mathbb{Z}^p$ pour lesquels (4.4) a également lieu.

Résumons : pour des $\lambda_s \in a_d^{-(s-d+1)}\mathbb{Z}^p$, $d \leqslant s \leqslant T-d$,

$$\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}, \lambda_{T-d+1}, \dots, \lambda_T \in \mathbb{Z}^p, \tag{4.5}$$

nous avons

$$|\varphi^{*s}x - \lambda_s|_\infty < \tau|a_d|^{-s}A^T, \quad 0 \leqslant s \leqslant T. \tag{4.6}$$

Compte tenu de l'hypothèse $\tau < A^{-T-2}$, on en déduit que

$$|\varphi^{*s}x - \lambda_s|_\infty < |a_d|^{-s}A^{-2}, \quad 0 \leqslant s \leqslant T. \tag{4.7}$$

Pour $d \leqslant s \leqslant T$, nous obtenons successivement, compte tenu de (1.3), (1.4) et (4.7),

$$\begin{aligned} &|a_d\lambda_s + \cdots + a_0\lambda_{s-d}|_\infty \\ &\quad = \big|a_d(\varphi^{*s}x - \lambda_s) + \cdots + a_0(\varphi^{*(s-d)}x - \lambda_{s-d})\big|_\infty \\ &\quad < \big(|a_d|\cdot|a_d|^{-s} + \cdots + |a_0|\cdot|a_d|^{-(s-d)}\big)A^{-2} \\ &\quad < |a_d|^{-(s-d)}A^{-1} < |a_d|^{-(s-d+1)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

D'après (4.5), pour $0 \leqslant s \leqslant T$, $a_d^{(s-d+1)^+}\lambda_s \in \mathbb{Z}^p$ et donc, *a fortiori*,

$$a_d^{(s-d+1)}\lambda_{s-t} \in \mathbb{Z}^p \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant s,\ d \leqslant s \leqslant T.$$

De (4.8) résulte alors que

$$a_d\lambda_s^\ell + \cdots + a_0\lambda_{s-d}^\ell = 0, \quad 1 \leqslant \ell \leqslant p, \tag{4.9}$$

où $\lambda_s^1, \dots, \lambda_s^p$ désignent les composantes dans $\mathbb{Z}$ de λ_s.

Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ et r entier premier, notons $\nu_r(\alpha)$ l'exposant de r dans la décomposition en facteurs premiers de α (on convient que $\nu_r(\alpha) = +\infty$ si $\alpha = 0$). Prouvons que, pour $1 \leqslant \ell \leqslant p$ et $d \leqslant s \leqslant T-d$, $\lambda_s^\ell \in \mathbb{Z}$, i.e. que, pour tout r entier premier,

$$\nu_r(\lambda_s^\ell) \geqslant 0, \quad \text{pour } 1 \leqslant \ell \leqslant p,\ d \leqslant s \leqslant T-d. \tag{4.10}$$

Supposons que (4.10) n'ait pas lieu pour un ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant p$, et un r entier premier. Il existe alors un s_0, $d \leqslant s_0 \leqslant T-d$, tel que

$$\inf_{0 \leqslant s < s_0} \nu_r(\lambda_s^\ell) > \inf_{0 \leqslant s \leqslant T} \nu_r(\lambda_s^\ell) = \nu_r(\lambda_{s_0}^\ell) < 0. \tag{4.11}$$

D'après (4.9), on a

$$a_d \lambda_{s_0}^\ell + a_{d-1}\lambda_{s_0-1}^\ell + \cdots + a_0 \lambda_{s_0-d}^\ell = 0. \tag{4.12}$$

Par suite, de (4.11) et (4.12) découle que r divise a_d.

D'après (4.9) on a également

$$a_d \lambda_{s_0+1}^\ell + a_{d-1}\lambda_{s_0}^\ell + \cdots + a_0 \lambda_{s_0+1-d}^\ell = 0. \tag{4.13}$$

Compte tenu que r divise a_d, de (4.11) et (4.13) découle que r divise a_{d-1}.

De proche en proche on conclut que r est un diviseur commun de a_d, $a_{d-1}, \dots, a_0$. Les $a_d, a_{d-1}, \dots,\ a_0$ étant premiers entre eux, (4.11) ne peut avoir lieu.

On conclut que, pour tout s, $0 \leqslant s \leqslant T$, on a $\lambda_s \in \mathbb{Z}^p$. Comme, pour $0 \leqslant s \leqslant T$, $|a_d|^{-s} A^T \leqslant A^T$, de (4.6) découle alors (4.3).

La démonstration du lemme 4.1 est donc achevée. □

Le lemme qui suit s'appuie sur le lemme 2.3. À partir d'une estimation de $\max_{1 \leqslant s \leqslant R} [\varphi^{*n_s} x]_1$, pour des exposants entiers distincts dans $\{0, 1, \dots, n\}$ on obtient une estimation de $\max_{0 \leqslant \ell < d} [\varphi^{*\ell} x]_{q_n}$ où $(q_n)_{n \geqslant R}$ est une suite d'entiers telle que q_n divise q_{n+1} et dont les termes croissent modérément : $\ln q_n = O(n^c)$.

Lemme 4.2. — *Il existe une suite d'entiers* $(q_n)_{n \geqslant R}$ *telle que*

$$q_n \mid q_{n+1} \quad (*), \qquad \ln q_n < n^{c_3} \quad (**) \tag{4.14}$$

(*pour une constante* $c_3 > 1$) *et pour laquelle on a la propriété suivante : si pour un* $x \in \mathbb{R}^p$ *et une sous-suite* $n_1 < \cdots < n_R$ *de* $(0, 1, \dots, n)$ *a lieu l'inégalité*

$$[\varphi^{*n_s} x]_1 < \tau, \tag{4.15}$$

alors, pour $0 \leqslant \ell < d$,

$$[\varphi^{*\ell} x]_{q_n} < \tau c_0^n \tag{4.16}$$

(*pour une constante* $c_0 > 1$).

Démonstration. — Rappelons que, d'après les hypothèses (1.3) et (1.4),

$$\begin{aligned} a_d^{(m-d+1)^+} &\varphi^{*m} \\ &= b_{d-1}(m)\varphi^{*(d-1)} + \cdots + b_1(m)\varphi^* + b_0(m)\,\mathrm{Id} \quad (m \geqslant 0) \end{aligned} \tag{4.17}$$

où $b_s(m) \in \mathbb{Z}$ et

$$\big|b_{d-1}(m)\big| + \cdots + \big|b_1(m)\big| + \big|b_0(m)\big| < A^{(m-d+1)^+}. \tag{4.18}$$

Pour $m_0 < m_1 < \cdots < m_{d-1}$ entiers introduisons les déterminants

$$D_{m_0,m_1,\ldots,m_{d-1}} = \begin{vmatrix} b_{d-1}(m_0) & \ldots & b_0(m_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{d-1}(m_{d-1}) & \ldots & b_0(m_{d-1}) \end{vmatrix} \tag{4.19}$$

puis, pour $n \geqslant R$,

$$q_n = \prod_{0 \leqslant m_0 < \cdots < m_{d-1} \leqslant n} |D_{m_0,\ldots,m_{d-1}}|, \quad D_{m_0,\ldots,m_{d-1}} \neq 0. \tag{4.20}$$

De (4.18), (4.20) et de l'inégalité d'Hadamard découle que, pour une constante $c_3 > 1$, on a

$$\ln q_n \leqslant cn^{d+1} \leqslant n^{c_3}. \tag{4.21}$$

Il est clair que l'hypothèse (4.15) implique

$$\big[a_d^{(n_s-d+1)^+} \varphi^{*n_s} x\big]_1 < \tau |a_d|^n \tag{4.22}$$

D'après (2.4) on peut extraire de la suite $n_1 < \cdots < n_R$ une sous-suite $m_0 < m_1 < \cdots < m_{d-1}$ pour laquelle

$$\widetilde{q} = D_{m_0,\ldots,m_{d-1}} \neq 0.$$

Considérons, pour $\ell = 0, 1, \ldots, d-1$, le système linéaire

$$a_d^{(m_\ell-d+1)^+} \varphi^{*m_\ell} x = b_{d-1}(m_\ell)\varphi^{*(d-1)} x + \cdots + b_1(m_\ell)\varphi^* x + b_0(m_\ell) x.$$

Il résulte des formules de Cramer que, pour $0 \leqslant \ell < d$,

$$\begin{aligned} \widetilde{q}\,\varphi^{*\ell} x = a_d^{(m_{d-1}-d+1)^+} & c_{d-1}(\ell)\varphi^{*m_{d-1}} x \\ &+ \cdots + a_d^{(m_1-d+1)^+} c_1(\ell)\varphi^{*m_1} x + a_d^{(m_0-d+1)^+} c_0(\ell)\varphi^{*m_0} x \end{aligned}$$

où

$$c_j(\ell) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \max_{j,\ell<d} \big|c_j(\ell)\big| < C^n \tag{4.23}$$

pour une constante C convenable.

De (4.15) et (4.23) découle alors que, pour $0 \leqslant \ell < d$,

$$[\widetilde{q}\,\varphi^{*\ell}x]_1 < \tau c_0^n \tag{4.24}$$

pour une constante $c_0 > 1$ convenable. Comme $\widetilde{q}$ divise q_n, de (4.24) découle (4.16). La démonstration du lemme 4.2 est donc achevée. □

Remarque. — Vérifions que la suite (q_n) n'est pas bornée. Partons, pour $n \geqslant d$, des relations de récurrence

$$\begin{aligned} b_0(n+1) &= -b_{d-1}(n)a_0, \\ b_1(n+1) &= -b_{d-1}(n)a_1 + b_0(n)a_d, \\ &\vdots \\ b_{d-1}(n+1) &= -b_{d-1}(n)a_{d-1} + b_{d-2}(n)a_d. \end{aligned}$$

Si la suite $(b_0(n))$ était bornée, les suites $(b_1(n)), \dots, (b_{d-1}(n))$ seraient à leur tour bornées. Comme les $b_0(n), \dots, b_{d-1}(n)$ sont à valeurs $\mathbb{Z}$ et

$$a_d^{n-d+1}\varphi^n = b_{d-1}(n)\varphi^{d-1} + \dots + b_1(n)\varphi + b_0(n)\,\mathrm{Id},$$

il existerait alors $n > m \geqslant d$ tels que $\varphi^{(n-m)} = a_d^{-(n-m)}\,\mathrm{Id}$, ce qui n'est pas compatible avec les hypothèses faites sur φ. La suite $(b_0(n))$ n'est donc pas bornée. Comme, pour $m \geqslant d$, $|D_{1,\dots,d-1,m}| = |b_0(m)|$, on conclut que la suite (q_n) n'est pas bornée.

Le lemme suivant, similaire au lemme 4.29 de [1] (cf. 4, *An almost orthogonality estimate*), est le résultat pricipal de cette section : il donne une condition nécessaire portant sur les fréquences $k \in \operatorname{supp}\widehat{f}$ d'une $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$ dans le cas où les $f(\varphi x), \dots, f(\varphi^N x)$ ne sont pas *presque-orthogonaux*.

Lemme 4.3. — *Il existe des constantes c_1, c_2 et c_3 (c_3 désignant la constante figurant dans* (**)–(4.14) *telles que, pour $0 < \varepsilon < 1$, les conditions*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \leqslant 1, \quad \Big\|\sum_1^N f(\varphi^n x)\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} > \varepsilon N, \quad c_2\varepsilon^{5c_3}N > 1 \tag{4.25}$$

impliquent l'existence d'une fréquence $k \in \operatorname{supp}\widehat{f}$ telle que

$$[\varphi^{*n}k]_{q_{\lfloor c_1\varepsilon^{-4}\rfloor}} < \mathrm{e}^{-c_2\varepsilon N} \quad \textit{pour } 1 \leqslant n \leqslant c_2\varepsilon^5 N. \tag{4.26}$$

Avant d'aborder la démonstration du lemme 4.3 nous aurons besoin du lemme suivant qui s'appuie sur le fait que φ^* est dilatant (cf. (1.9)).

Lemme 4.4. — *Soient $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$ telle que $\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \leqslant 1$ et $I = [n_1, n_2]$ un intervalle d'entiers. Alors*

$$\Big\| \sum_I f(\varphi^n x) \Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant C|I|^{\frac34} \Big(\sup_{k \in \operatorname{supp} \widehat{f}} \sigma(k) \Big)^{\frac14} \tag{4.27}$$

où $\sigma(k) = \#\big\{0 \leqslant m < |I|;\ [\varphi^{*m}k]_1 < \mu^{-n_1}\big\}$, μ désignant la constante > 1 figurant dans (1.9).

Démonstration. — Fixons ρ, $0 < \rho < \frac12\kappa^2$, où κ, $0 < \kappa < 1$, est la constante figurant dans (1.9). Nous avons

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sum_I f\big(\varphi^n(x)\big) \Big\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \\
&\quad\leqslant C \int_{\mathbb{T}^p} \Big| \sum_{n\in I} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{2\pi\langle \varphi^{*n}k, x\rangle} \Big|^2 \Omega_\rho(x)\,\mathrm{d}x \\
&\quad\leqslant 2C \sum_{\substack{k,k'\in\mathbb{Z}^p \\ n_1\leqslant n'\leqslant n\leqslant n_2}} \big|\widehat{f}(k)\big| \cdot \big|\widehat{f}(k')\big|\, \widehat{\Omega}_\rho(\varphi^{*n}k - \varphi^{*n'}k') \\
&\quad\leqslant \quad 2C \sum_{\substack{k,k'\in\mathbb{Z}^p \\ |\varphi^{*n}k - \varphi^{*n'}k'|_\infty < \kappa^2/2 \\ n_1\leqslant n'\leqslant n\leqslant n_2}} \big|\widehat{f}(k)\big| \cdot \big|\widehat{f}(k')\big| \\
&\quad\leqslant \quad 2C \sum_{\substack{k,k'\in\mathbb{Z}^p \\ |\varphi^{*(n-n')}k - k'|_\infty < \kappa\mu^{-n_1}/2 \\ n_1\leqslant n'\leqslant n\leqslant n_2}} \big|\widehat{f}(k)\big| \cdot |\widehat{f}(k')| \\
&\quad\leqslant 2C|I| \sum_{0\leqslant m<|I|} \sum_{\substack{k,k'\in\mathbb{Z}^p \\ |\varphi^{*m}k - k'|_\infty < \kappa\mu^{-n_1}/2}} \big|\widehat{f}(k)\big| \cdot \big|\widehat{f}(k')\big|.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Les inégalités

$$|\varphi^{*m}k - k'_1|_\infty < \tfrac12\kappa\mu^{-n_1} \quad \text{et} \quad |\varphi^{*m}k - k'_2|_\infty < \tfrac12\kappa\mu^{-n_1}$$

impliquent $|k'_1 - k'_2|_\infty \leqslant \kappa\mu^{-n_1}$ et donc $k'_1 = k'_2$. Pour k fixé il existe donc au plus un k' tel que $|\varphi^{*m}k - k'|_\infty < \frac12\kappa\mu^{-n_1}$. D'autre part, les inégalités

$$|\varphi^{*m}k_1 - k'|_\infty < \tfrac12\kappa\mu^{-n_1} \quad \text{et} \quad |\varphi^{*m}k_2 - k'|_\infty < \tfrac12\kappa\mu^{-n_1}$$

impliquent $\kappa\mu^m|k_1 - k_2|_\infty \leqslant |\varphi^{*m}(k_1 - k_2)|_\infty < \kappa\mu^{-n_1}$ et donc $k_1 = k_2$. Pour k' fixé il existe donc au plus un k tel que $|\varphi^{*m}k - k'|_\infty < \frac12\kappa\mu^{-n_1}$.

De (4.28), de l'inégalité de Schwarz et de l'inégalité $\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \leqslant 1$ découle que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_I f(\varphi^n x)\Big\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} &\leqslant 2C|I| \sum_{0\leqslant m<|I|} \Big(\sum_{\substack{k\in\operatorname{supp}\hat f\\ [\varphi^{*m}k]_1<\mu^{-n_1}}} \big|\widehat{f}(k)\big|^2\Big)^{\frac12}\\ &= 2C|I|^2\Big(\frac{1}{|I|}\sum_{0\leqslant m<|I|}\Big(\sum_{\substack{k\in\operatorname{supp}\hat f\\ [\varphi^{*m}k]_1<\mu^{-n_1}}} \big|\widehat{f}(k)\big|^2\Big)^{\frac12}\Big)\\ &\leqslant 2C|I|^2\Big(\frac{1}{|I|}\sum_{k\in\operatorname{supp}\hat f}\sigma(k)\big|\widehat{f}(k)\big|^2\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

D'où

$$\Big\|\sum_I f(\varphi^n x)\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant C|I|^{\frac34}\big(\sup_{k\in\operatorname{supp}\hat f}\sigma(k)\big)^{\frac14}.$$

La démonstration du lemme 4.4 est donc achevée. □

Démonstration. — Passons maintenant à la démonstration du lemme 4.3 : celle-ci s'appuie sur les lemmes 4.1, 4.2 et 4.4. Posons

$$\beta = \sup\big\{\|f(\varphi^n x)\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p};\ \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \leqslant 1,\ n \geqslant 0\big\}. \tag{4.29}$$

On a $\beta \geqslant 1$. En se reportant à la démonstration du lemme 4.4 (prendre $I = \{n\}$), on vérifie que β est fini.

Considérons les entiers $N\varepsilon/(2\beta) < n_1 < \cdots < n_\ell = N$ que contient l'intervalle $]N\varepsilon/(2\beta), N]$ et donnons-nous une subdivision $I_1, \dots, I_{q-1}, I_q$ de $\{n_1, \dots, n_\ell\}$ en intervalles d'entiers tels que

$$|I_1| = |I_2| = \cdots = |I_{q-1}| = \ell_1, \quad \ell_1 \leqslant I_q < 2\ell_1, \tag{4.30}$$

où

$$\ell_1 = \ell_1(\varepsilon) = \lceil c'\varepsilon^{-4}\rceil, \tag{4.31}$$

c' étant une constante > 1 qui sera précisée plus loin.

Imposons à N la condition

$$N > 2\lceil c'\varepsilon^{-4}\rceil = 2\ell_1. \tag{4.32}$$

Il est alors clair que l'on a $\#\{n_1, \dots, n_\ell\} \geqslant N(1 - \varepsilon/(2\beta)) > \ell_1$.

L'inégalité

$$\Big\|\sum_1^N f(\varphi^n x)\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} > \varepsilon N \tag{4.33}$$

implique

$$\Big\| \sum_{n=n_1}^{n_\ell} f(\varphi^n x) \Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} > \varepsilon N - \beta(n_1 - 1) > \frac{\varepsilon}{2} N.$$

Par suite il existe un intervalle I_j tel que

$$\Big\| \sum_{I_j} f(\varphi^n x) \Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} > \frac{\varepsilon}{2} |I_j|. \tag{4.34}$$

Du lemme 4.4 et de l'inégalité (4.34) découle qu'il existe au moins une fréquence $k \in \operatorname{supp} \widehat{f}$, fréquence que nous notons k_0, telle que

$$\#\big\{0 \leqslant m < 2\ell_1;\ [\varphi^{*m} k_0]_1 < \mu^{-N\varepsilon/2\beta}\big\} > C^{-1} \varepsilon^4 2^{-4} \ell_1 \tag{4.35}$$

où C est une constante qui ne dépend que de φ (constante que l'on peut supposer > 1).

Choisissons

$$c' = 2^4 C R \tag{4.36}$$

où R est défini par (2.14). On a donc

$$\ell_1 = \lceil 2^4 C \varepsilon^{-4} R \rceil. \tag{4.37}$$

De (4.35) et (4.37) découle que

$$\#\big\{0 \leqslant m < 2\ell_1; [\varphi^{*m} k_0]_1\} < \mu^{-N\varepsilon/2\beta}\big\} > R. \tag{4.38}$$

Il existe donc des entiers $n_1 < \cdots < n_R < 2\ell_1$ tels que

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant R} [\varphi^{*n_s} k_0]_1 < \mu^{-N\varepsilon/2\beta} \tag{4.39}$$

et donc, d'après le lemme 4.2,

$$\max_{1 \leqslant s < d} [\varphi^{*s} k_0]_{q_{2\ell_1}} < c_0^{2\ell_1} \mu^{-N\varepsilon/2\beta}. \tag{4.40}$$

Remarque. — À ce stade de la démonstration du lemme 4.3, supposons provisoirement que φ soit entier algébrique, i.e. $|a_d| = 1$. De (4.17), (4.18) et (4.40) découle que

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant c\varepsilon N} [\varphi^{*n} k_0]_{q_{2\ell_1}} < c_0^{2\ell_1} A^{c\varepsilon N} \mu^{-N\varepsilon/2\beta}$$

et, par suite, pour $c_2 \varepsilon^5 N > 1$, avec c_2 suffisamment petit et $c_1 = 3c'\varepsilon^{-4}$,

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant c_2 \varepsilon N} [\varphi^{*n} k_0]_{q_{\lfloor c_1 \varepsilon^{-4} \rfloor}} < \mathrm{e}^{-c_2 \varepsilon N}.$$

On obtient donc un énoncé similaire à celui du lemme 4.3. Dans la suite de la démonstration du lemme 4.3 le rôle implicite du lemme 4.1 est de tenir compte du cas où φ n'est pas entier algébrique.

Remplaçons ε par $\frac{1}{2}\varepsilon$ dans l'expression (4.37) de ℓ_1. Posons

$$\ell_1' = \ell_1\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\right) = \lceil 2^8 C\varepsilon^{-4} R\rceil. \tag{4.41}$$

Remplaçons également ε par $\frac{1}{2}\varepsilon$ dans la condition (4.32) faite sur N :

$$N > 2\lceil 2^8 C\varepsilon^{-4} R\rceil = 2\ell_1' \tag{4.42}$$

(compte tenu de la valeur (4.36) de c').

Considérons l'inégalité

$$\max_{1\leqslant s<d} [\varphi^{*s}k]_{q_{2\ell_1'}} < c_0^{2\ell_1'}\mu^{-N\varepsilon/4\beta}. \tag{4.43}$$

Soit g, resp. h, la fonction obtenue à partir de f en éliminant, resp. en gardant, les fréquences $k \in \operatorname{supp}\widehat{f}$ pour lesquelles l'inégalité (4.43) n'a pas lieu, resp. a lieu, i.e.

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) & \text{si } k \in \operatorname{supp}\widehat{f} \text{ et (4.43) n'a pas lieu,} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\widehat{h}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) & \text{si } k \in \operatorname{supp}\widehat{f} \text{ et (4.43) a lieu,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Observons que

$$\Big\| \sum_1^N g(\varphi^n x)\Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant \frac{N\varepsilon}{2} \tag{4.44}$$

car, sinon, d'après les arguments qui ont conduit de (4.33) à (4.40), en remplaçant f par g et ε par $\frac{1}{2}\varepsilon$, il existerait an moins une fréquence $k \in \operatorname{supp}\widehat{g}$ pour laquelle (4.43) aurait lieu : ce qui n'est pas possible compte tenu de la définition de g. De (4.33) et (4.44) découle que, pour la fonction $h = f - g$, on a nécessairement

$$\Big\| \sum_1^N h(\varphi^n x)\Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} > \frac{N\varepsilon}{2}\cdot \tag{4.45}$$

Considérons alors les entiers $N\varepsilon/(4\beta) < n_1 < \cdots < n_m = N$ figurant dans l'intervalle $]N\varepsilon/(4\beta), N]$ et une subdivision $J_1, \ldots, J_r$ de $\{n_1, \ldots, n_m\}$ en intervalles d'entiers tels que

$$|J_1| = \cdots = |J_{r-1}| = \ell_2, \quad \ell_2 \leqslant |J_r| < 2\ell_2, \tag{4.46}$$

où

$$\ell_2 = \lceil c''\varepsilon N\rceil, \tag{4.47}$$

c'' étant une constante $< \frac{1}{4}$ qui sera précisée plus loin.

Il est clair que $\#\{n_1 < \cdots < n_m\} \geqslant N(1-\varepsilon/(4\beta)) > \frac{3}{4}N > \ell_2$, pour $N \geqslant 2$. De l'inégalité (4.45) découle qu'il existe un intervalle J_j tel que

$$\Big\| \sum_{J_j} h(\varphi^n x) \Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} > \frac{\varepsilon}{4} |J_j|. \tag{4.48}$$

Le lemme 4.4 implique alors qu'il existe au moins une fréquence $k \in \operatorname{supp} \widehat{h}$, fréquence que nous notons k_0', telle que

$$\#\big\{0 \leqslant m < 2\ell_2;\ [\varphi^{*m} k_0']_1 < \mu^{-N\varepsilon/4\beta}\big\} > C^{-1}\varepsilon^4 2^{-8} \ell_2 \tag{4.49}$$

où C est la même constante > 1 figurant dans (4.35). Par suite

$$\begin{aligned}\#\big\{C^{-1}\varepsilon^4 2^{-9}\ell_2 \leqslant m < 2\ell_2; [\varphi^{*m} k_0']_1 < \mu^{-N\varepsilon/4\beta}\big\}\\ > C^{-1}\varepsilon^4 2^{-9}\ell_2 - 1.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Imposons à N la condition

$$c''\varepsilon N > C 2^9 \varepsilon^{-4} R, \quad \text{i.e.} \quad N > C(c'')^{-1} 2^9 \varepsilon^{-5} R. \tag{4.51}$$

D'après la définition de ℓ_2 il est clair que

$$\ell_2 > C 2^9 \varepsilon^{-4} R \quad \text{et} \quad C^{-1}\varepsilon^4 2^{-9} \ell_2 > R.$$

Il existe alors un entier

$$C^{-1}\varepsilon^4 2^{-9}\ell_2 \leqslant N_1 < 2\ell_2 \tag{4.52}$$

tel que dans l'intervalle $\big[N_1, N_1 + 4\lceil C 2^9 \varepsilon^{-4} R\rceil\big]$ figurent R entiers $N_1 + n_1 < N_1 + n_2 < \cdots < N_1 + n_R$ pour lesquels

$$\max_{1 \leqslant s \leqslant R} [\varphi^{*(N_1+n_s)} k_0']_1 < \mu^{-N\varepsilon/4\beta} \tag{4.53}$$

car, sinon, l'ensemble des entiers $C^{-1}\varepsilon^4 2^{-9}\ell_2 \leqslant m < 2\ell_2$ réalisant

$$[\varphi^{*m} k_0']_1 < \mu^{-N\varepsilon/4\beta}$$

serait de cardinal inférieur à $2\ell_2(R-1)/2\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil$, soit strictement inférieur à $C^{-1}\varepsilon^4 2^{-9}\ell_2 - 1$, et, par suite, (4.50) ne pourrait être réalisé.

Appliquons le lemme 4.2 avec $x = \varphi^{*N_1} k_0'$ et $\tau = \mu^{-N\varepsilon/4\beta}$. De (4.53) résulte donc que

$$\max_{0 \leqslant s < d} [\varphi^{*(N_1+s)} k_0']_{q_{4\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil}} < c_0^{4\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil} \mu^{-N\varepsilon/4\beta}. \tag{4.54}$$

D'autre part, par définition de h, toutes les fréquences $k \in \operatorname{supp} \widehat{h}$ vérifient (4.43) : en particulier k_0' vérifie (4.43). D'après la définition (4.41) de ℓ_1', on a $2\ell_1' < 4\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil$. Donc $q_{2\ell_1'}$ divise $q_{4\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil}$. On en déduit que

$$\max_{0 \leqslant s < d} [\varphi^{*s} k_0']_{q_{4\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil}} < c_0^{4\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil} \mu^{-N\varepsilon/4\beta}. \tag{4.55}$$

D'après (4.54) et (4.55), on conclut dans un premier temps que

$$\begin{cases} \max\limits_{0\leqslant s<d}[\varphi^{*s}k'_0]_{q_m} < c_0^m \mu^{-N\varepsilon/4\beta} \quad \text{et} \\ \max\limits_{0\leqslant s<d}[\varphi^{*(N_1+s)}k'_0]_{q_m} < c_0^m \mu^{-N\varepsilon/4\beta} \end{cases} \tag{4.56}$$

où

$$m = 4\lceil C2^9\varepsilon^{-4}R\rceil. \tag{4.57}$$

Cherchons à appliquer le lemme 4.1 avec $x = k'_0 q_m$, $\tau = q_m c_0^m \mu^{-N\varepsilon/4\beta}$ et $T = N_1 + d - 1$: nous sommes amenés à déterminer la condition sous laquelle

$$q_m c_0^m \mu^{-N\varepsilon/4\beta} < A^{-N_1-d-1} \tag{4.58}$$

tout en tenant compte de la condition (4.51) faite sur N (la condition (4.42) sur N est alors satisfaite). Supposons dorénavant que

$$N > C(c'')^{-1}2^9\varepsilon^{-5c_3}R \tag{4.59}$$

où c_3 est la constante > 1 figurant dans (**)–(4.14) (cf. lemme 4.2) (la condition (4.51) sur N est alors satisfaite).

Comme $\ln q_m < m^{c_3}$ et $N_1 < 2\ell_2 = 2\lceil c''\varepsilon N\rceil < 3c''\varepsilon N$, pour que (4.58) ait lieu il suffit que l'on ait

$$m^{c_3} + m\ln c_0 < N\varepsilon\Big(\frac{\ln\mu}{4\beta} - 3c''\ln A\Big) - (d+1)\ln A$$

ou encore que l'on ait

$$\begin{aligned}(5C2^9R)^{c_3}\varepsilon^{-4c_3} &+ 5C2^9\varepsilon^{-4}R\ln c_0 \\ &< C(c'')^{-1}2^9R\varepsilon^{-(5c_3-1)}\Big(\frac{\ln\mu}{4\beta} - 3c''\ln A\Big) - (d+1)\ln A.\end{aligned} \tag{4.60}$$

En choisissant c'' suffisamment petit, l'inégalité (4.60) est satisfaite.

Du lemme 4.1 découle alors que

$$\max_{1\leqslant s\leqslant N_1}[\phi^{*s}k'_0]_{q_m} < c_0^m\mu^{-N\varepsilon/4\beta}A^{N_1+d-1} \tag{4.61}$$

et, par suite, comme $N_1 < 2\ell_2 = 2\lceil c''\varepsilon N\rceil$,

$$\max_{1\leqslant s\leqslant N_1}[\phi^{*s}k'_0]_{q_m} < c_0^m\mu^{-N\varepsilon/4\beta}A^{3c''\varepsilon N+d+1}. \tag{4.62}$$

Sous la condition (4.59), pour c'' suffisamment petit, nous avons

$$c_0^m\mu^{-N\varepsilon/4\beta}A^{3c''\varepsilon N+d+1} < \mathrm{e}^{-c''\varepsilon N}. \tag{4.63}$$

Posons

$$c_1 = 5C2^9R, \quad c_2 = C^{-1}c''2^{-9}R^{-1}. \tag{4.64}$$

Il est clair que $c_2 < c''$. D'autre part, comme $m = 4\lceil C\varepsilon^{-4}2^9R\rceil < c_1\varepsilon^{-4}$, alors q_m divise $q_{[c_1\varepsilon^{-4}]}$. D'après (4.47) et (4.52),

$$N_1 \geqslant C^{-1}c''\varepsilon^5 2^{-9}N > c_2\varepsilon^5 N.$$

La condition (4.59) faite sur N prend la forme $N > c_2^{-1}\varepsilon^{-5c_3}$, i.e. $c_2\varepsilon^{5c_3}N > 1$. Rappelons que $k_0' \in \operatorname{supp}\widehat{h}$ et donc $k_0' \in \operatorname{supp}\widehat{f}$. De (4.62) et (4.63) résulte que

$$[\varphi^{*n}k_0']_{q_{\lfloor c_1\varepsilon^{-4}\rfloor}} < \mathrm{e}^{-c_2\varepsilon N} \quad \text{pour } 1 \leqslant n \leqslant c_2\varepsilon^5 N.$$

La démonstration du lemme 4.3 est donc achevée. □

Le lemme 4.3 conduit au

Lemme 4.5 (Critère de presque-orthogonalité). — *Soit $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$ telle que, pour tout $k \in \operatorname{supp}\widehat{f}$,*

$$\max_{1\leqslant n\leqslant c_2\varepsilon^{5c_3}N}[\varphi^{*n}k]_{q_{[c_1\varepsilon^{-4}]}} > \mathrm{e}^{-c_2\varepsilon N}$$

(*avec les conditions* $0 < \varepsilon < 1$ *et* $c_2\varepsilon^{5c_3}N > 1$). *Alors nécessairement*

$$\Big\|\sum_1^N f(\varphi^n x)\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant \varepsilon N\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

5. Séries de Fourier et inégalités maximales

Dans cette section nous étendons en dimension p les résultats de [1] (cf. 5, *Estimating certain multipliers*).

Si ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$, nous notons ψ^* son adjoint. Nous écrirons ψx, resp. $\psi^* x$, au lieu de $\psi(x)$, resp. $\psi^*(x)$.

Pour $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$ nous écrirons $\|f\|_2$ au lieu de $\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}$.

Dans les énoncés des trois lemmes suivants les majorations successives des constantes $C(a)$ qui y figurent n'auront pas d'importance dans la suite.

Dans la preuve de ces trois lemmes nous utiliserons fréqemment, de manière implicite, l'inégalité élémentaire : pour $0 \leqslant a_\ell, b_\ell \leqslant 1$, $1 \leqslant \ell \leqslant L$,

$$\Big(\prod_1^L a_\ell\Big)\Big(1 - \prod_1^L b_\ell\Big) \leqslant \sum_1^L a_\ell(1 - b_\ell).$$

Lemme 5.1. — *Soient ψ un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$, $0 < a < 1$ fixé, et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j, \ldots$ une suite décroissante de réels strictement positifs tels que $\varepsilon_{j+1} < a\varepsilon_j$. Posons*

$$\sigma_j = \big\{n \in \mathbb{Z}^p;\ [\psi n]_1 < \varepsilon_j\big\}. \tag{5.1}$$

Alors, pour toute $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$,

$$\Big\| \sup_j \Big| \sum_{n\in\sigma_j} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big| \Big\|_2 \leqslant C(a)\|f\|_2 \tag{5.2}$$

où $C(a) \leqslant 2 + (1+4pa(1-a)^{-1})^{\frac{1}{2}} + (\frac{4}{3}p\pi^2 + \frac{1}{4})(1-a)^{-1}$.

Démonstration. — Comme les $[\psi n]_1$ sont $\leqslant \frac{1}{2}$, Il est clair que, si j_0 est le premier indice pour lequel $\varepsilon_{j_0} \leqslant \frac{1}{2}$, alors

$$\sup_j \Big| \sum_{n\in\sigma_j} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big| \leqslant \sup_{j\leqslant j_0} \Big| \sum_{n\in\sigma_j} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big| + |f|.$$

Pour prouver l'inégalité maximale (5.2) l'hypothèse supplémentaire $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}$ n'est donc pas restrictive.

Introduisons, pour N entier $\geqslant 1$, les noyaux de Fejer usuels sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^p$:

$$F_N(x) = \sum_{|k|<N} \frac{N-|k|}{N} \mathrm{e}^{2i\pi kx} = \frac{\sin^2 \pi N x}{N \sin^2 \pi x}, \tag{5.3}$$

$$\widetilde{F}_N(x_1,\ldots,x_p) = \prod_{\ell=1}^{p} F_N(x_\ell) = \prod_{\ell=1}^{p} \frac{\sin^2 \pi N x_\ell}{N \sin^2 \pi x_\ell}, , \tag{5.4}$$

et les opérateurs

$$K_N = N^{-1} F_N \quad \text{et} \quad \widetilde{K}_N = N^{-p} \widetilde{F}_N. \tag{5.5}$$

De la définition des K_N résulte que $0 \leqslant K_N \leqslant 1$, K_N est 1-périodique et paire. Pour M et N entiers $\geqslant 1$, $M \geqslant N$, on vérifie facilement d'une part, que pour $1/(4MN)^{\frac{1}{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, $K_M(x) \leqslant 1/(4M^2x^2) \leqslant N/M$ et d'autre part, que pour $0 \leqslant x \leqslant 1/(4MN)^{\frac{1}{2}}$,

$$1 - K_N(x) \leqslant \frac{1}{3}\pi^2 N^2 x^2 \leqslant \frac{\pi^2}{12} N/M < \frac{N}{M}\cdot$$

On en déduit que

$$\text{pour } M \geqslant N \geqslant 1, \quad \big\| K_M(1-K_N) \big\|_\infty \leqslant \frac{N}{M}\cdot \tag{5.6}$$

Associons à $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_j,\ldots$ les entiers $N_1,\ldots,N_j,\ldots$ tels que

$$\frac{1}{N_j} \leqslant \varepsilon_j < \frac{1}{N_j - 1}, \tag{5.7}$$

puis les opérateurs $\Psi_1,\ldots,\Psi_j,\ldots$ sur $L^2(\mathbb{T}^p)$ définis par

$$\Psi_j(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(n) \widetilde{K}_{N_j}(\psi n) \mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle}. \tag{5.8}$$

Il est clair que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,\psi n\rangle}\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x+\psi^* k\rangle} = f(x+\psi^* k).$$

Par suite

$$\Psi_j(f)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\widetilde{K}}_{N_j}(k) f(x+\psi^* k). \tag{5.9}$$

En tenant compte que $\|\widetilde{K}_{N_j}\|_\infty \leqslant 1$ et $\widehat{\widetilde{K}}_{N_j} \geqslant 0$, d'après (5.8) et (5.9), les Ψ_j sont des contractions linéaires positives auto-adjointes de $L^2(\mathbb{T}^p)$.

Montrons que, pour toute $f\in L^2(\mathbb{T}^p)$ à valeurs réelles,

$$\Big\| \sup_j |\Psi_j(f)| \Big\|_2 \leqslant c(a)\|f\|_2 \tag{5.10}$$

avec $c(a) \leqslant 1 + \big(2+4pa(1-a)^{-1}\big)^{\frac12}$. Comme les Ψ_j sont des contractions linéaires positives auto-adjointes (5.10) est équivalent à

$$\Big\|\sum_j \Psi_j(g_j)\Big\|_2 \leqslant c(a)\Big\|\sum_j g_j\Big\|_2 \tag{5.11}$$

pour toute suite finie $g_1,\dots,g_J$ de fonctions positives de $L^2(\mathbb{T}^p)$.

(Notons que, d'après (5.9), $|\Psi_j(f)| \leqslant \Psi_j(|f|)$ pour f à valeurs complexes : si (5.10) a lieu pour f à valeurs réelles, alors (5.10) a également lieu pour f à valeurs complexes).

Supposons que, pour J fixé, $C(J)$ soit la meilleure constante telle que

$$\Big\|\sum_j \Psi_j(g_j)\Big\|_2 \leqslant C(J)\Big\|\sum_j g_j\Big\|_2$$

pour toute suite finie $g_1, g_2,\dots,g_J$ de fonctions positives de $L^2(\mathbb{T}^p)$.

En posant $g_j = 0$ pour $j \geqslant J+1$, nous avons successivement

$$\Big\|\sum_j \Psi_j(g_j)\Big\|_2^2 = \sum_j \big\langle \Psi_j(g_j),\Psi_j(g_j)\big\rangle + 2\sum_{j<j'}\big\langle \Psi_j(g_j),\Psi_{j'}(g_{j'})\big\rangle$$

$$\leqslant \sum_j \|g_j\|_2^2 \tag{5.12}$$

$$+\,2\sum_{j<j'}\big\langle g_j,\Psi_{j'}(g_{j'})\big\rangle \tag{5.13}$$

$$+\,2\sum_{j<j'}\big\langle (\Psi_j - \mathrm{Id})(g_j),\Psi_{j'}(g_{j'})\big\rangle. \tag{5.14}$$

Pour (5.13) on a la majoration :

$$(5.15)\qquad 2\sum_{j<j'}\big\langle g_j,\Psi_{j'}(g_{j'})\big\rangle \leqslant 2\Big\langle \sum_j g_j, \sum_j \Psi_j(g_j)\Big\rangle \leqslant 2C(J)\Big\|\sum_j g_j\Big\|_2^2.$$

D'après (5.6) on a

$$\big\|K_{N_{j+k}}(1-K_{N_j})\big\|_\infty \leqslant \frac{N_j}{N_{j+k}}$$

et, par suite, compte tenu que $N_j/N_{j+k} < 2(\varepsilon_{j+k})/\varepsilon_j < 2a^k$,

$$(5.16)\qquad \big\|\widetilde{K}_{N_{j+k}}(1-\widetilde{K}_{N_j})\big\|_\infty \leqslant p\frac{N_j}{N_{j+k}} \leqslant 2pa^k.$$

Posons

$$(5.17)\qquad \lambda_j(n) = \widetilde{K}_{N_j}(\psi n).$$

Compte tenu de (5.16), pour (5.14) on a la majoration :

$$\begin{aligned}
&\Big|2\sum_{j<j'}\langle(\Psi_j-\mathrm{Id})(g_j),\Psi_{j'}(g_{j'})\rangle\Big| \\
&\qquad\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_j\sum_{n\in\mathbb{Z}^p}|\widehat{g}_j(n)|\cdot|\widehat{g}_{j+k}(n)|\lambda_{j+k}(n)\big(1-\lambda_j(n)\big) \\
&\qquad\leqslant 4p\sum_{k=1}^{\infty}a^k\sum_j\|g_j\|_2\cdot\|g_{j+k}\|_2 \\
&\qquad\leqslant 4p\sum_{k=1}^{\infty}a^k\Big(\sum_j\|g_j\|_2^2\Big)^{\frac12}\Big(\sum_j\|g_{j+k}\|_2^2\Big)^{\frac12} \\
(5.18)\qquad &\qquad\leqslant 4p\frac{a}{1-a}\sum_j\|g_j\|_2^2.
\end{aligned}$$

Comme $\sum_j\|g_j\|_2^2 \leqslant \|\sum_j g_j\|_2^2$, de (5.15) et (5.18) résulte que

$$C(J)^2 \leqslant 1 + 2C(J) + 4p\frac{a}{1-a},$$

i.e.

$$(5.19)\qquad C(J) \leqslant 1 + \big(1+4pa(1-a)^{-1}\big)^{\frac12}.$$

D'où

$$(5.20)\qquad c(a) \leqslant 1 + \big(1+4pa(1-a)^{-1}\big)^{\frac12}.$$

Pour prouver (5.2) partons de l'inégalité

$$\begin{aligned}\sup_j \Big| \sum_{n\in\sigma_j} \widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big| &\leqslant \sup_j \big|\Psi_j(f)(x)\big| \\ &\quad + \sup_j \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \big(\chi_{\sigma_j}(n) - \lambda_j(n)\big)\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big|. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Notons que $\lambda_j(n) = \widetilde{K}_{N_j}(\psi n) = \widetilde{K}_{N_j}\big(\psi n - \langle\!\langle \psi n \rangle\!\rangle_1\big)$. Par suite, comme

$$\begin{aligned}\sup_j \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \big(\chi_{\sigma_j}(n) - \lambda_j(n)\big)\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big| \\ \leqslant \Big(\sum_j \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \big(\chi_{\sigma_j}(n) - \lambda_j(n)\widehat{f}(n)\big)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big|^2 \Big)^{\frac12},\end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned}\Big\| \sup_j \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \big(\chi_{\sigma_j}(n) - \lambda_j(n)\big)\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big| \Big\|_2 \\ \leqslant \Big(\sum_j \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \big(\chi_{\sigma_j}(n) - \lambda_j(n)\widehat{f}(n)\big)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \Big\|_2^2 \Big)^{\frac12} \\ = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \sum_j \big|\chi_{\sigma_j}(n) - \lambda_j(n)\big|^2 |\widehat{f}(n)|^2 \Big)^{\frac12} \\ \leqslant \Big(\sup_{n\in\mathbb{Z}^p} \sum_j \big|\chi_{\sigma_j}(n) - \lambda_j(n)\big| \Big) \|f\|_2 \\ \leqslant \sup_{|x|_\infty<\varepsilon_1} \Big(\sum_j \big|\chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x) - \widetilde{K}_{N_j}(x)\big| \Big) \|f\|_2. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Soit $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$. Pour $\varepsilon_{M+1}\leqslant|x|_\infty<\varepsilon_M$ on a (compte tenu que les ε_M sont $\leqslant\frac12$)

$$\begin{aligned}
&\sum_j\bigl|\chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x)-\widetilde{K}_{N_j}(x)\bigr|\\
&\qquad=\sum_{j\leqslant M}\bigl(1-K_{N_j}(x_1)\dots K_{N_j}(x_p)\bigr)+\sum_{j\geqslant M+1}K_{N_j}(x_1)\dots K_{N_j}(x_p)\\
&\qquad\leqslant\sum_{j\leqslant M}\sum_{1\leqslant\ell\leqslant p}\bigl(1-K_{N_j}(x_\ell)\bigr)+\sum_{j\geqslant M+1}K_{N_j}(|x|_\infty)\\
&\qquad\leqslant\frac13 p\sum_{j\leqslant M}\pi^2N_j^2|x|_\infty^2+\frac14\sum_{j\geqslant M+1}\frac{1}{N_j^2|x|_\infty^2}\\
&\qquad\leqslant\frac43 p\pi^2\sum_{j\leqslant M}\frac{\varepsilon_M^2}{\varepsilon_j^2}+\frac14\sum_{j\geqslant M+1}\frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_{M+1}^2}\\
&\qquad\leqslant\frac43 p\pi^2\sum_{j\leqslant M}a^{2(M-j)}+\frac14\sum_{j\geqslant M+1}a^{2(j-M-1)}\leqslant\Bigl(\frac43p\pi^2+\frac14\Bigr)(1-a)^{-1}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\sup_{|x|_\infty<\varepsilon_1}\sum_j\bigl|\chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x)-\widetilde{K}_{N_j}(x)\bigr|\leqslant\Bigl(\frac43p\pi^2+\frac14\Bigr)(1-a)^{-1}. \tag{5.23}$$

Sous l'hypothèse $\varepsilon_1\leqslant\frac12$, de (5.20) et (5.23) résulte (5.2) avec

$$C(a)\leqslant1+\bigl(1+4pa(1-a)^{-1}\bigr)^{-\frac12}+\bigl(\tfrac43p\pi^2+\tfrac14\bigr)(1-a)^{-1}.$$

Dans le cas où $\varepsilon_1>\frac12$ on remplace $C(a)$ par $C(a)+1$.

La démonstration du lemme 5.1 est donc achevée. □

Le lemme 5.1 admet la généralisation suivante.

Lemme 5.2. — *Soient $\psi_1,\dots,\psi_s$ des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$, $0<a<1$ fixé, et $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j,\dots$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $\varepsilon_{j+1}<a\varepsilon_j$. Posons*

$$\sigma_j=\bigl\{n\in\mathbb{Z}^p;\ [\psi_1n]_1<\varepsilon_j,\dots,[\psi_sn]_1<\varepsilon_j\bigr\}. \tag{5.24}$$

Alors, pour toute $f\in L^2(\mathbb{T}^p)$,

$$\Bigl\|\sup_j\Bigl|\sum_{n\in\sigma_j}\widehat{f}(n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle}\Bigr|\Bigr\|_2\leqslant C(a)\|f\|_2 \tag{5.25}$$

où

$$C(a)\leqslant1+\bigl(1+(2+4pa(1-a)^{-1})^{\frac12}\bigr)^s+s\bigl(\tfrac43p\pi^2+\tfrac14\bigr)(1-a)^{-1}.$$

Démonstration. — Comme dans la démonstration du lemme 5.1, on suppose d'abord $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Introduisons, pour $1 \leqslant \ell \leqslant s$ et $j \geqslant 1$, les opérateurs sur $L^2(\mathbb{T}^p)$ définis par

$$\Psi_{\ell,j}(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^p} \widehat{f}(n)\widetilde{K}_{N_j}(\psi_\ell n)\mathrm{e}^{2i\pi\langle n,x\rangle} \tag{5.26}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{\widetilde{K}}_{N_j}(k) f(x+\psi_\ell^* k) \tag{5.27}$$

où N_j désigne l'entier pour lequel $1/N_j \leqslant \varepsilon_j < 1/(N_j-1)$.

En itérant l'inégalité (5.10) appliquée aux $\Psi_{\ell,j}$ on obtient

$$\begin{aligned} &\Big\| \sup_j \big|\Psi_{1,j}\circ\Psi_{2,j}\circ\cdots\circ\Psi_{s,j}(f)\big|\Big\|_2 \\ &\qquad\leqslant \Big\| \sup_{j_1,\dots,j_s} \big|\Psi_{1,j_1}\circ\Psi_{2,j_2}\circ\cdots\circ\Psi_{s,j_s}(f)\big|\Big\|_2 \\ &\qquad\leqslant c(a)^s\|f\|_2. \end{aligned} \tag{5.28}$$

On suit ensuite la même démarche (cf. (5.21) et (5.22)) que celle effectuée dans la démonstration du lemme 5.1. On remplace $\lambda_j(n) = \widetilde{K}_{N_j}(\psi n)$ par

$$\lambda_j(n) = \widetilde{K}_{N_j}(\psi_1 n)\cdots\widetilde{K}_{N_j}(\psi_s n) \tag{5.29}$$

et l'on est conduit à majorer

$$\sup_{\substack{x_1,\dots,x_s\in\mathbb{R}^p\\ |x_1|_\infty<\varepsilon_1,\dots,|x_s|_\infty<\varepsilon_1}} \sum_j \Big|\prod_{\ell=1}^s \chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x_\ell) - \prod_{\ell=1}^s \widetilde{K}_{N_j}(x_\ell)\Big|. \tag{5.30}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{x_1,\dots,x_s\in\mathbb{R}^p\\ |x_1|_\infty<\varepsilon_1,\dots,|x_s|_\infty<\varepsilon_1}} \sum_j \Big|\prod_{\ell=1}^s \chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x_\ell) - \prod_{\ell=1}^s \widetilde{K}_{N_j}(x_\ell)\Big| \\ &\qquad\leqslant \sum_{\ell=1}^s \sup_{|x_\ell|_\infty<\varepsilon_1} \sum_j \big|\chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x_\ell) - \widetilde{K}_{N_j}(x_\ell)\big| \\ &\qquad\leqslant s\big(\tfrac{4}{3}p\pi^2+\tfrac{1}{4}\big)(1-a)^{-1}. \end{aligned} \tag{5.31}$$

En tenant compte du cas $\varepsilon_1 > \frac{1}{2}$, de (5.28) et (5.31) résulte (5.25).

La démonstration du lemme 5.2 est donc achevée. □

Le lemme suivant, variante du lemme précédent, fait intervenir une suite infinie $\psi_1,\dots,\psi_s,\dots$ d'endomorphismes de $\mathbb{R}^p$.

LEMME 5.3. — *Soient* $\psi_1, \dots, \psi_s, \dots$ *une suite d'endomorphismes de* $\mathbb{R}^p$, $0 < a < 1$ *fixé, et* $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j, \dots$ *une suite décroissante de réels strictement positifs tels que* $\varepsilon_{j+1} < a^j \varepsilon_j$. *Posons*

$$\sigma_j = \big\{ n \in \mathbb{Z}^p ;\ [\psi_s n]_1 < \varepsilon_j \text{ pour tout } s \leqslant a^{-j} \big\}. \tag{5.32}$$

Alors, pour toute $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$,

$$\Big\| \sup_j \Big| \sum_{n \in \sigma_j} \widehat{f}(n) \mathrm{e}^{2i\pi \langle n,x \rangle} \Big| \Big\|_2 \leqslant C(a) \|f\|_2 \tag{5.33}$$

où

$$C(a) \leqslant 4 + \big(1 + 4p(1-a)\big)^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} p \pi^2 \frac{a^2}{\ln a} \cdot$$

Démonstration. — On suit une démarche similaire à celle de la démonstration du lemme 5.1. Supposons d'abord $\varepsilon_1 \leqslant \frac{1}{2}$. Introduisons, pour $s, j \geqslant 1$, les opérateurs sur $L^2(\mathbb{T}^p)$:

$$\Psi_{s,j}(f)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} \widehat{f}(n) \widetilde{K}_{N_j}(\psi_s n) \mathrm{e}^{2i\pi \langle n,x \rangle} \tag{5.34}$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{\widetilde{K}}_{N_j}(k) f(x + \psi_s^* k) \tag{5.35}$$

où N_j désigne l'entier pour lequel $1/N_j \leqslant \varepsilon_j < 1/N_j - 1$, puis les opérateurs

$$\widetilde{\Psi}_j = \Psi_{1,j} \circ \Psi_{2,j} \circ \cdots \circ \Psi_{\lfloor a^{-j} \rfloor, j} . \tag{5.36}$$

D'après (5.34), (5.35) et (5.36) les $\Psi_{s,j}$ sont des contractions linéaires positives auto-adjointes de $L^2(\mathbb{T}^p)$.

Montrons que, pour toute $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$ à valeurs réelles,

$$\big\| \sup_j \big| \widetilde{\Psi}_j(f) \big| \big\|_2 \leqslant c(a) \|f\|_2 \tag{5.37}$$

avec $c(a) \leqslant 1 + (1 + 4pa(1-a)^{-1})^{-\frac{1}{2}}$.

Comme les $\widetilde{\Psi}_j$ sont des contractions linéaires positives auto-adjointes de $L^2(\mathbb{T}^p)$, (5.37) est équivalent à

$$\Big\| \sum_j \widetilde{\Psi}_j(g_j) \Big\|_2 \leqslant c(a) \Big\| \sum_j g_j \Big\|_2 \tag{5.38}$$

pour toute suite finie $g_1, \dots, g_J$ de fonctions positives de $L^2(\mathbb{T}^p)$.

Notons, d'après (5.35), que $|\Psi_{s,j}(f)| \leqslant \Psi_{s,j}(|f|))$, pour f à valeurs complexes.

Supposons que, pour J fixé, $C(J)$ soit la meilleure constante telle que

$$\Big\| \sum_j \widetilde{\Psi}_j(g_j) \Big\|_2 \leqslant C(J) \Big\| \sum_j g_j \Big\|_2$$

pour toute suite finie $g_1, g_2, \ldots, g_J$ de fonctions positives de $L^2(T^p)$. Posons $g_j = 0$ pour $j \geqslant J+1$.

Nous réécrivons l'inégalité (5.12) à (5.14) en remplaçant les Ψ_j par $\widetilde{\Psi}_j$. Similairement à (5.15) nous avons

$$2 \sum_{j<j'} \big\langle g_j, \widetilde{\Psi}(g_{j'}) \big\rangle \leqslant 2C(J) \Big\| \sum_j g_j \Big\|_2^2. \tag{5.39}$$

Posons

$$\lambda_{s,j}(n) = \widetilde{K}_{N_j}(\psi_s n). \tag{5.40}$$

Compte tenu que, pour $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
&\Big(\prod_{s \leqslant \lfloor a^{-j-k} \rfloor} \lambda_{s,j+k}(n) \Big) \Big(1 - \prod_{s \leqslant \lfloor a^{-j} \rfloor} \lambda_{s,j}(n) \Big) \\
&\quad \leqslant \sum_{s \leqslant \lfloor a^{-j} \rfloor} \lambda_{s,j+k}(n) \big(1 - \lambda_{s,j}(n)\big) \leqslant \lfloor a^{-j} \rfloor \cdot \big\| \widetilde{K}_{N_{j+k}} (1 - \widetilde{K}_{N_j}) \big\|_\infty \\
&\quad \leqslant p a^{-j} \frac{N_j}{N_{j+k}} \leqslant 2pa^{-j} \frac{\varepsilon_{j+k}}{\varepsilon_j} \leqslant 2pa^{j(k-1) + \frac{1}{2}k(k-1)} \leqslant 2pa^{\frac{1}{2}k(k-1)},
\end{aligned}$$

nous obtenons similairement à (5.18), en remplaçant $\lambda_j(n)$ par $\prod_{s \leqslant \lfloor a^j \rfloor} \lambda_{s,j}(n)$,

$$\begin{aligned}
2 \Big| &\sum_{j<j'} \big\langle (\widetilde{\Psi}_j - \mathrm{Id})(g_j) \widetilde{\Psi}_{j'}(g_{j'}) \big\rangle \Big| \\
&\leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_j \sum_{n \in \mathbb{Z}^p} |\widehat{g}_j(n)| \cdot |\widehat{g}_{j+k}(n)| \\
&\qquad \times \Big(\prod_{s \leqslant \lfloor a^{-j-k} \rfloor} \lambda_{s,j+k}(n) \Big) \Big(1 - \prod_{s \leqslant \lfloor a^{-j} \rfloor} \lambda_{s,j}(n) \Big) \\
&\leqslant 4p(1-a)^{-1} \sum_j \|g_j\|_2^2.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$C(J)^2 \leqslant 1 + 2C(J) + 4p(1-a)^{-1}, \quad \text{i.e. } C(J) \leqslant 1 + \big(1 + 4p(1-a)^{-1}\big)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite

$$c(a) \leqslant 1 + \big(1 + 4p\big(1-a\big)^{-1}\big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.41}$$

Dans (5.21) on remplace $\Psi_j(f)$ par $\widetilde{\Psi}(f)$ et $\lambda_j(n)$ par $\prod_{s\leqslant\lfloor a^j\rfloor}\lambda_{s,j}(n)$. Le dernier terme dans (5.22) est alors remplacé par

$$\sup_{\substack{x_1,\dots,x_s,\dots\in\mathbb{R}^p\\ |x_1|_\infty<\varepsilon_1,\dots,|x_s|_\infty<\varepsilon_1,\dots}}\sum_j\Big|\prod_{s\leqslant\lfloor a^{-j}\rfloor}\chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x_s)-\prod_{s\leqslant\lfloor a^{-j}\rfloor}\widetilde{K}_{N_j}(x_s)\Big|. \tag{5.42}$$

Considérons le terme général d'une des sommes de (5.42)

$$r_j=\Big|\prod_{s\leqslant\lfloor a^{-j}\rfloor}\chi_{]-\varepsilon_j,\varepsilon_j[^p}(x_s)-\prod_{s\leqslant\lfloor a^{-j}\rfloor}\widetilde{K}_{N_j}(x_s)\Big|.$$

Supposons que, pour un rang $j_0\geqslant 2$,

$$r_{j_0}>\frac{1}{4}a^{-j_0}. \tag{5.43}$$

S'il existait un indice $s_0\leqslant\lfloor a^{-j_0}\rfloor$ tel que $|x_{s_0}|_\infty\geqslant\varepsilon_{j_0-1}$ on aurait

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a^{-j_0}<r_{j_0}&=\prod_{s\leqslant\lfloor a^{-j_0}\rfloor}\widetilde{K}_{N_{j_0}}(x_s)\leqslant\widetilde{K}_{N_{j_0}}(x_{s_0})\leqslant K_{N_{j_0}}\big(|x_{s_0}|_\infty\big)\\ &<\frac{1}{4N_{j_0}^2\varepsilon_{j_0-1}^2}\leqslant\frac{1}{4}\frac{\varepsilon_{j_0}^2}{\varepsilon_{j_0-1}^2}<\frac{1}{4}a^{-2(j_0-1)},\end{aligned}$$

d'où $1<a^{-(j_0-2)}$, ce qui ne peut avoir lieu si $j_0\geqslant 2$.

Sous la condition (5.43) on a donc, pour tout $s\leqslant a^{-j_0}$,

$$|x_s|_\infty<\varepsilon_{j_0-1}$$

et, par suite, pour $j\leqslant j_0-2$,

$$\begin{aligned}r_j=1-\prod_{s\leqslant\lfloor a^{-j}\rfloor}\widetilde{K}_{N_j}(x_s)&\leqslant\frac{1}{3}p\lfloor a^{-j}\rfloor\pi^2N_j^2\varepsilon_{j_0-1}^2\\ &\leqslant\frac{4}{3}p\lfloor a^{-j}\rfloor\pi^2\frac{\varepsilon_{j_0-1}^2}{\varepsilon_j^2}\leqslant\frac{4}{3}pa^{-(j_0-2)}\pi^2a^{2(j_0-1)}\leqslant\frac{4}{3}p\pi^2a^{j_0}.\end{aligned} \tag{5.44}$$

On conclut, sans difficultés, que

$$\begin{aligned}(5.42)&\leqslant\sup_{j\geqslant 2}\Big(2+\frac{4}{3}(j-2)p\pi^2a^j+\frac{1}{4}a^{j+1}(1-a)^{-1}\Big)\\ &<2-\frac{4}{3}p\pi^2\frac{a^2}{\ln a}\cdot\end{aligned} \tag{5.45}$$

De (5.41) et (5.45) découle (5.33).

La démonstration du lemme 5.3 est donc achevée. □

6. Cas d'un endomorphisme entier algébrique

Dans [1] (cf. sections 6, 7, 8, 9), J. Bourgain donne d'abord la démonstration de l'inégalité maximale (1.11) pour θ entier quadratique, puis l'étend au cas plus général θ entier algébrique. Dans cette section nous donnons directement la démonstration de l'inégalité maximale (1.11) dans le cas où l'endomorphisme φ est entier algébrique. Nous adaptons en dimension p les arguments développés dans [1].

Dans cette section nous supposons donc que le polynôme minimal

$$P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0,$$

pour lequel $P(\varphi) = 0$, est unitaire, i.e. $|a_d| = 1$. Les hypothèses (1.5) et (1.12) sont maintenues.

L'endomorphisme φ vérifie donc (en fixant $a_d = 1$)

$$\varphi^d + a_{d-1}\varphi^{d-1} + \cdots + a_1\varphi + a_0 \,\mathrm{Id} = 0. \tag{6.1}$$

Remarque 6.1. — Pour prouver l'inégalité maximale

$$\big\| \sup_N |A_N f| \big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant C \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \tag{6.2}$$

il suffit de prouver celle-ci quand N parcourt les dyadiques, i.e $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, ou bien quand N parcourt les quadriadiques, i.e $N = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$: on passe, par exemple, de l'inégalité maximale

$$\big\| \sup_{\substack{N \\ \text{quadriadique}}} |A_N f| \big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant c \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}$$

à l'inégalité maximale (1.11) en supposant d'abord $f \geqslant 0$. Nous serons amenés à supposer, pour des raisons pratiques, que N parcourt les quadriadiques.

On désigne par M une constante > 2 (que nous serons amenés à choisir suffisamment grande) et s_0 un entier (que nous serons amenés également à choisir suffisamment grand) pour lequel $s_0^{10} \geqslant R$ (où R est défini par (2.14)).

Partons donc d'une $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$. Réduisons d'abord le support de $\widehat{f}$.

Pour $N \geqslant 2^{s_0}$, avec s_0 suffisamment grand, nous avons

$$(\ln N/\ln 2)^{10} > c_1\varepsilon^{-4}, \quad M^{-\sqrt{N}} > \mathrm{e}^{-c_2\varepsilon N} \quad \text{et} \quad c_2\varepsilon^{5c_3} N > d-1,$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon = (\ln N)^{-2}, \tag{6.3}$$

où c_1, c_2, c_3 sont les constantes figurant dans le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5).

Posons, pour $N \geqslant 2^{s_0}$, N quadriadique,

$$f_N = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p \\ \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}k]_{\widetilde{q}_N}<M^{-\sqrt{N}}}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \tag{6.4}$$

où

$$\widetilde{q}_N = q_{(\ln N/\ln 2)^{10}}. \tag{6.5}$$

Comme $q_{\lfloor c_1\varepsilon^{-4}\rfloor} | q_{(\ln N/\ln 2)^{10}}$ (cf. (*)–(4.14) du lemme 4.2), pour tout k dans $\operatorname{supp}\widehat{f - f_N}$,

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}k]_{q_{\lfloor c_1\varepsilon^{-4}\rfloor}} \geqslant \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_N} \geqslant M^{-\sqrt{N}} > \mathrm{e}^{-c_2\varepsilon N}. \tag{6.6}$$

Du critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5) découle que

$$\text{pour } N \geqslant 2^{s_0}, \quad \big\|A_N(f - f_N)\big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant (\ln N)^{-2}\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.7}$$

De (6.7) résulte alors que

$$\Big\| \sup_{\substack{N \\ \text{quadriadique}}} |A_N(f - f_N)|\Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.8}$$

Il nous reste à démontrer que

$$\Big\| \sup_{\substack{N \\ \text{quadriadique}}} |A_N f_N|\Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.9}$$

Posons, pour s entier, $s \geqslant s_0$, et $\varepsilon > 0$,

$$\sigma_{s,\varepsilon} = \Big\{k \in \mathbb{Z}^p;\ \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}k]_{q_{s^{10}}} < \varepsilon\Big\}, \tag{6.10}$$

puis

$$f_{N,s} = \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-\sqrt{N}}}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}. \tag{6.11}$$

Introduisons, pour $N \geqslant 2^{s_0}$, N quadriadique, la décomposition

$$f_N = \sum_{s_0\leqslant s\leqslant \ln N/\ln 2} g_{N,s} \tag{6.12}$$

où

$$g_{N,s_0} = f_{N,s_0} \ \text{ et } \ g_{N,s} = f_{N,s} - f_{N,s-1} \quad \text{pour } s > s_0. \tag{6.13}$$

De (6.12) découle que

$$A_N f_N = \sum_{s_0\leqslant s\leqslant \ln N/\ln 2} A_N g_{N,s} \tag{6.14}$$

et, par suite,

$$\sup_{N\geqslant 2^{s_0}} |A_N f_N| \leqslant \sum_{s\geqslant s_0} \sup_{N\geqslant 2^s} |A_N g_{N,s}|. \tag{6.15}$$

Nous sommes donc amenés à estimer, pour $s \geqslant s_0$, les

$$\Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}} |A_N g_{N,s}|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}. \tag{6.16}$$

En nous appuyant sur le fait que $q_{s^{10}} < \exp(s^{10c_3})$ et le fait que $q_{(s-1)^{10}}$ divise $q_{s^{10}}$ (cf. (*)–(4.14) et (**)–(4.14) nous allons donner une expression des $g_{N,s}$ qui sera commode dans la suite.

Choisissant s_0 suffisamment grand, on a pour $s > s_0$ et $N \geqslant 2^s$,

$$\frac12 (q_{s^{10}})^{-1} > \frac12 \mathrm{e}^{-(\ln N/\ln 2)^{c_3}} > M^{-\sqrt{N}}. \tag{6.17}$$

D'autre part, comme $q_{(s-1)^{10}} | q_{s^{10}}$, l'inégalité stricte

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{s^{10}}} < \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{(s-1)^{10}}}$$

implique nécessairement

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{s^{10}}} + \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{(s-1)^{10}}} \geqslant (q_{s^{10}})^{-1}.$$

La condition

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{s^{10}}} < M^{-\sqrt{N}} \quad \text{et} \quad \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{(s-1)^{10}}} \geqslant M^{-\sqrt{N}} \tag{6.18}$$

est donc équivalente à

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{s^{10}}} < M^{-\sqrt{N}} \text{ et } \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{(s-1)^{10}}} > \frac12 (q_{s^{10}})^{-1}. \tag{6.19}$$

Nous poserons

$$\widehat{h}_{s_0}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) & \text{si } \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{s_0^{10}}} < M^{-2^{s_0/2}}, \quad (*) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.20}$$

et, pour $s > s_0$,

$$\widehat{h}_s(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) & \text{si } \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{s^{10}}} < M^{-2^{\frac12 s}} \qquad (*) \\ & \text{et } \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{(s-1)^{10}}} > \frac12 (q_{s^{10}})^{-1}, \quad (**) \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6.21}$$

Il est alors clair que, pour $s_0 \leqslant s \leqslant \ln N/\ln 2$,

$$g_{N,s} = \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-\sqrt{N}}}} \widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}. \tag{6.22}$$

Introduisons la décomposition suivante des $g_{N,s}$ (N quadriadique) :

$$\begin{aligned} g_{N,s} = \widetilde{g}_{N,s} &\equiv \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-N}}} \widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \\ +h_{N,s,1} &\equiv \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-N/2^j}}\setminus\sigma_{s,M^{-N}}} \widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \\ &\vdots \\ +h_{N,s,j} &\equiv \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-N/2^j}}\setminus\sigma_{s_0,M^{-N/2^{(j-1)}}}} \widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \end{aligned} \tag{6.23}$$

$$\vdots$$

$$+h_{N,s,\ln\sqrt{N}/\ln 2} \equiv \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-\sqrt{N}}}\setminus\sigma_{s,M^{-2\sqrt{N}}}} \widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}. \tag{6.24}$$

La contribution du terme "principal" (6.23) sera évaluée à l'aide des contractions positives T_q (cf. section 3) et du critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5), La contribution des termes "annexes" (6.24) sera évaluée à l'aide du seul critère de presque-orthogonalité.

6.1. Contributions des termes $h_{N,s,j}$

Montrons qu'il existe des constantes c et C (ne dépendant que de φ) telles que

$$\big\|A_N h_{N,s,j}\big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant C2^{-cj}\|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \text{ pour } N \geqslant 4^j. \tag{6.25}$$

Comme

$$\big\|A_N h_{N,s,j}\big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant \beta\|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}$$

il suffit de prouver que, pour j suffisamment grand,

$$\big\|A_N h_{N,s,j}\big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant 2^{-cj}\|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.26}$$

Nous utiliserons le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5). En choisissant $c > 0$ suffisamment petit, pour j suffisamment grand, nous avons

$$c_2\varepsilon^{5c_3}N > d-1 \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 2^{-cj} \text{ et } N \geqslant 4^j. \tag{6.27}$$

Posons

$$\widetilde{q}_j = q_{\lfloor c_1 2^{4cj}\rfloor}. \tag{6.28}$$

L'inégalité (**)–(4.14) du lemme 4.2 implique

$$1/\widetilde{q}_j > \mathrm{e}^{-(c_1 2^{4cj})^{c_3}} > 2M^{-\sqrt{N}} \quad (N \geqslant 4^j) \tag{6.29}$$

pour c suffisamment petit et j suffisamment grand.

Si $\widetilde{q}_j \mid q_{s^{10}}$, alors $[\varphi^{*\ell}k]_{q_{s^{10}}} \leqslant [\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_j}$. D'après la définition (6.24) des $h_{N,s,j}$ il en résulte que, pour tout $k \in \operatorname{supp} \widehat{h}_{N,s,j}$,

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_j} \geqslant M^{-N/2^{(j-1)}} > \mathrm{e}^{-c_2 2^{-cj} N} (N \geqslant 4^j) \tag{6.30}$$

pour c suffisamment petit et j suffisamment grand. D'où (6.26) d'après le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5).

Si $q_{s^{10}} \mid \widetilde{q}_j$ et $\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_j} = \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_s^{10}}$, on retombe sur (6.30).

Si $q_{s^{10}} \mid \widetilde{q}_j$ et $\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_j} < \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_s^{10}}$, alors

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_j} + \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_s^{10}} \geqslant \frac{1}{\widetilde{q}_j}, \tag{6.31}$$

d'où, d'après (6.29) et la condition $N \geqslant 4^j$,

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_j} > 2M^{-\sqrt{N}} - M^{-N/2^j} \geqslant M^{-N/2^j} > M^{-N/2^{(j-1)}}, \tag{6.32}$$

et on retombe sur (6.30).

On conclut que (6.25) a bien lieu.

Montrons de plus qu'il existe une constante C telle que, pour $N \geqslant 2^s$ et $s \geqslant s_0$,

$$\|A_N h_{N,s,j}\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant Cs^{-2} \|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.33}$$

Comme

$$\big\|A_N h_{N,s,j}\big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant \beta \|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}$$

il suffit de prouver que, pour s suffisamment grand, $s > s_0$,

$$\|A_N h_{N,s,j}\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant s^{-2} \|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.34}$$

Nous utiliserons à nouveau le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5). Pour s suffisamment grand, nous avons

$$c_2 \varepsilon^{5c_3} N > d-1, \quad M^{-\sqrt{N}} > \mathrm{e}^{-c_2 \varepsilon N}, \quad (s-1)^{10} > c_1 \varepsilon^{-4}$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon = s^{-2} \text{ et } N \geqslant 2^s. \tag{6.35}$$

D'après la définition (6.24) des $h_{N,s,j}$ et la condition (**)–(6.20) portant sur la définition des $\widehat{h}_s$ on en déduit que, pour tout $k \in \operatorname{supp} \widehat{h}_{N,s,j}$,

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{\lfloor c_1 s^{-8}\rfloor}} \geqslant \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{(s-1)^{10}}} > \frac{1}{2}(q_{s^{10}})^{-1} > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s^{10c_3}} > M^{-\sqrt{N}} (N \geqslant 2^s)$$

pour s choisi suffisamment grand. Par suite, pour tout $k \in \operatorname{supp} \widehat{h}_{N,s,j}$,

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_{q_{\lfloor c_1 s^{-8}\rfloor}} > \mathrm{e}^{-c_2 s^{-2} N}. \tag{6.36}$$

D'où (6.34) d'après le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5).

On conclut que (6.33) a bien lieu.

De (6.25) et (6.33) découle que

$$\left\|A_N h_{N,s,j}\right\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant C \min(s^{-2}, 2^{-cj}) \|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \qquad \big(N \geqslant \max(2^s, 4^j)\big). \tag{6.37}$$

Comme $\sigma_{s,M^{-4N/2^j}} \subseteq \sigma_{s,M^{-N/2^{(j-1)}}}$, d'après la définition (6.25) des $h_{N,s,j}$ les supports des $\widehat{h}_{N,s,j}$, pour s et j fixés, sont disjoints quand N varie dans les quadriadiques. Comme

$$\sup_{\substack{N\geqslant 2^s, N\geqslant 4^j\\ \text{quadriadique}}} \left|A_N h_{N,s,j}\right| \leqslant \Bigg(\sum_{\substack{N\geqslant 2^s, N\geqslant 4^j\\ \text{quadriadique}}} |A_N h_{N,s,j}|^2_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s, N\geqslant 4^j\\ \text{quadriadique}}} |A_N h_{N,s,j}| \Bigg\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \\
&\qquad\leqslant \Bigg(\sum_{\substack{N\geqslant 2^s, N\geqslant 4^j\\ \text{quadriadique}}} \|A_N h_{N,s,j}\|^2_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\leqslant C \min(s^{-2}, 2^{-cj}) \Bigg(\sum_{\substack{N\geqslant 2^s, N\geqslant 4^j\\ \text{quadriadique}}} \|h_{N,s,j}\|^2_{L^2(\mathbb{T}^p)} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\leqslant C \min(s^{-2}, 2^{-cj}) \|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \qquad (6.38)
\end{aligned}$$

De (6.38) résulte que

$$\begin{aligned}\sum_{s\geqslant s_0,j\geqslant 1}\Big\|\sup_{\substack{N\geqslant 2^s,\,N\geqslant 4^j\\ \text{quadriadique}}}\big|A_N h_{N,s,j}\big|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}&\\ \leqslant C\Big(\sum_{s\geqslant s_0,j\geqslant 1}\min(s^{-2},2^{-cj})\Big)\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}&\\ \leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.&\qquad (6.39)\end{aligned}$$

6.2. Contributions des termes $\widetilde{g}_{N,s}$

Posons

$$\widetilde{\alpha}=\inf\big(|\varphi^{*m}k|_\infty;\ m\in\mathbb{N}^*,k\in\mathbb{Z}^p,k\neq 0\big).\qquad (6.40)$$

Pour $q=q_{s^{10}}$, posons $\rho(q)=\min(1/4q,\ \widetilde{\alpha}/4q)$. Il est clair que, d'une part, d'après (1.9) on a $\widetilde{\alpha}>0$ et que, d'autre part, $\rho(q)<\min(1/2q,\alpha/2q)$ où α est défini par (3.5).

Nous noterons Ω_q au lieu de $\Omega_{\rho(q)}$ la densité de probabilité définie par (1.18), $\widehat{\Omega}_q$ au lieu de $\widehat{\Omega}_{\rho(q)}$ sa transformée de Fourier, i.e.

$$\Omega_q(x_1,\dots,x_p)=\prod_1^p\frac{\sin^2\pi\rho(q)x_\ell}{\rho(q)\pi^2x_\ell^2},\qquad (6.41)$$

$$\widehat{\Omega}_q(x_1,\dots,x_p)=\prod_1^p\left(1-\frac{|x_\ell|}{\rho(q)}\right).\qquad (6.42)$$

T_q désigne la contraction positive de $L^2(\mathbb{T}_q^p)$ associée à $\rho=\rho(q)$, définie par (3.4) :

$$\begin{aligned}T_qf&=q^p\sum_{n\in\mathbb{Z}^p}f(\varphi(x+qn))\Omega_q(x+qn)\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{f}\Big(\frac{k}{q}\Big)\widehat{\Omega}_q\Big(\Big\{\varphi^*\frac{k}{q}\Big\}_q\Big)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle\varphi^*\frac{k}{q}\rangle_q,x\rangle}\qquad (6.43)\end{aligned}$$

(cf. lemme 3.2).

Étape 6.2.1. Estimation de l'écart quadratique entre les moyennes A_N et $(1/N)\sum_1^N T_q^n$.

Soit $g\in L^2(\mathbb{T}^p)$ telle que, pour tout $k\in\operatorname{supp}\widehat{g}$,

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}k]_q<M^{-N}\quad(q=q_{s^{10}},N\geqslant 2^s,\ s\geqslant s_0,\ s\text{ fixé}).\qquad (6.44)$$

Dans [1] (cf. sections 6 et 7), J. Bourgain donne (en dimension $p=1$) une estimation de l'écart, dans $L^2(-\frac12q,\frac12q)$, entre les moyennes A_Ng et

$(1/N)\sum_1^N T_q^n g$. Cette estimation permet de substituer la moyenne $A_N g$ à la moyenne $(1/N)\sum_1^N T_q^n g$ ou vice-versa.

Il est d'autre part nécessaire de pouvoir passer d'une estimation de $\sup_N \left|A_N g(x)\right|$ dans $L^2(-\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q)$ à une estimation de $\sup_N \left|A_N g(x)\right|$ dans $L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: le simple changement de la variable x par la variable qx suffit.

Dans le cas présent (dimension p quelconque) nous suivrons une démarche similaire. Néanmoins, en dimension $p \geqslant 2$, le changement de variable précité est inadapté : il sera remplacé par le changement de la variable x par la variable $\varphi^\ell x$ sur un domaine adéquat. C'est pourquoi nous sommes amenés à donner une estimation, dans $L^2(qa + q^{-p}(-\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q)^p))$ avec $a \in \mathbb{Z}^p$, de l'écart entre les moyennes $A_N g$ et $(1/N)\sum_1^N T_q^n g$ (le fait que N parcourt les quadriadiques ne jouera pas de rôle). Ce sera l'objet de cette premiére étape.

De (6.1) découle que

$$\varphi^{*n} = b_{d-1}(n)\varphi^{*(d-1)} + \cdots + b_1(n)\varphi^* + b_0(n)\,\mathrm{Id} \quad (n \geqslant 0) \qquad (*) \tag{6.45}$$

où $b_\ell(n) \in \mathbb{Z}$ et

$$\left|b_{d-1}(n)\right| + \left|b_1(n)\right| + \cdots + \left|b_0(n)\right| < A^{(n-d+1)^+}. \qquad (**)$$

Comme les $b_\ell(n)$ sont à valeurs $\mathbb{Z}$, il en résulte, d'après (6.44), que, pour tout $k \in \operatorname{supp}\widehat{g}$,

$$\begin{aligned}[\varphi^{*n}k]_q &\leqslant \left|b_{d-1}(n)\right| \cdot [\varphi^{*(d-1)}k]_q + \cdots + \left|b_1(n)\right| \cdot [\varphi^* k]_q,\\ &< A^{(n-d+1)^+} M^{-N}.\end{aligned} \tag{6.46}$$

De (6.46) on en déduit, en choisissant M assez grand, les conséquences qui suivent ((6.47) à (6.50)).

Pour $1 \leqslant n \leqslant N$,

$$[\varphi^{*n}k]_q < M^{-\frac{3}{4}N}. \tag{6.47}$$

Comme (cf. (**)–(4.14) du lemme 4.2) pour $s \leqslant \ln N/\ln 2$, $q = q_{s^{10}} < \mathrm{e}^{(\ln N/\ln 2)^{10c_3}}$ et que $\rho(q) = 1/4q\min(1, \widetilde{\alpha})$, alors, pour $1 \leqslant n \leqslant N$ et $N \geqslant 2^s$,

$$[\varphi^{*n}k]_q < M^{-\frac{1}{2}N}\rho(q). \tag{6.48}$$

Comme

$$\begin{aligned}&\varphi^*\big(\langle\varphi^{*(n-1)}k\rangle_q\big) - \langle\varphi^{*n}k\rangle_q\\ &\qquad = \varphi^*\big(\langle\varphi^{*(n-1)}k\rangle_q\big) - \varphi^*\big(\varphi^{*(n-1)}k\big) + \varphi^{*n}k - \langle\varphi^{*n}k\rangle_q,\end{aligned}$$

alors, pour $1 \leqslant n \leqslant N$ et $N \geqslant 2^s$,

$$\left|\varphi^*(\langle\varphi^{*(n-1)}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*n}k\rangle_q\right|_\infty \leqslant (\|\varphi^*\|_\infty + 1)M^{-\frac{3}{4}N} < M^{-\frac{1}{2}N}\rho(q).$$

Par conséquent, pour $1 \leqslant n \leqslant N$ et $N \geqslant 2^s$,

$$\langle \varphi^*(\langle \varphi^{*(n-1)} k\rangle_q)\rangle_q = \langle \varphi^{*n} k\rangle_q, \tag{6.49}$$

$$[\varphi^*(\langle \varphi^{*(n-1)} k\rangle_q)]_q < M^{-\frac{1}{2}N}\rho(q). \tag{6.50}$$

D'autre part, pour $k, k' \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq k'$, on vérifie, sans difficultés, à partir de la définition (6.40) de $\widetilde{\alpha}$, que, pour q suffisamment grand (i.e. $s \geqslant s_0$ avec s_0 suffisamment grand),

$$\big|\langle \varphi^{*n} k\rangle_q - \langle \varphi^{*n} k'\rangle_q\big|_\infty > \frac{\widetilde{\alpha}}{2}, \quad \big|\langle \varphi^{*n} k\rangle_q - \varphi^{*n} k'\big|_\infty > \frac{\widetilde{\alpha}}{2} \quad (n \geqslant 1). \tag{6.51}$$

On aurait pu obtenir (6.51) pour $k, k' \in \operatorname{supp} \widehat{g}$ et $1 \leqslant n \leqslant N$, à partir de la condition (6.47) : $\big|\langle \varphi^{*n} k\rangle_q - \langle \varphi^{*n} k'\rangle_q\big|_\infty > \widetilde{\alpha} - 2M^{-\frac{3}{4}N} > \frac{1}{2}\widetilde{\alpha}$ et $\big|\langle \varphi^{*n} k\rangle_q - \varphi^{*n} k'\big|_\infty > \widetilde{\alpha} - M^{-\frac{3}{4}N} > \frac{1}{2}\widetilde{\alpha}$.

D'après (6.43) et (6.49) le développement en série de Fourier de $T_q^n g$ est de la forme :

$$T_q^n g = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{g}(k) a_{q,k,n} \mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle \varphi^{*n} k\rangle_q, x\rangle} \quad (*)$$

où

$$\begin{aligned} a_{q,k,n} = \widehat{\Omega}_q\big(\{\varphi^* k\}_q\big)\widehat{\Omega}_q\big(\{\varphi^*(\langle \varphi^* k\rangle_q)\}_q\big) \\ \cdots \widehat{\Omega}_q\big(\{\varphi^*(\langle \varphi^{*(n-1)} k\rangle_q)\}_q\big) \quad (**). \end{aligned} \tag{6.52}$$

Comme $|\{\varphi^*(\langle \varphi^{*(n-1)} k\rangle_q)\}_q|_\infty = [\varphi^*(\langle \varphi^{*(n-1)} k\rangle_q)]_q$, de (6.50) et de l'expression (6.42) de $\widehat{\Omega}_q$ résulte alors que

$$\big(1 - M^{-\frac{1}{2}N}\big)^{pn} \leqslant a_{q,k,n} \leqslant 1$$

et, par suite,

$$0 \leqslant 1 - a_{q,k,n} \leqslant pnM^{-\frac{1}{2}N}. \tag{6.53}$$

Fixons $a \in \mathbb{Z}^p$. La comparaison des moyennes $(1/N)\sum_{n=1}^N T_q^n g(x)$ et $A_N g(x+qa)$ conduit à :

$$\begin{aligned} &\Big\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N T_q^n g(x) - A_N g(x+qa)\Big\|_{L^2(\Omega_q)} \\ &\leqslant \Big\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{g}(k)(a_{q,k,n} - 1)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle \varphi^{*n} k\rangle_q, x\rangle}\Big\|_{L^2(\Omega_q)} \\ &\quad + \Big\|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{g}(k)\big(\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle \varphi^{*n} k\rangle_q, x+qa\rangle} - \mathrm{e}^{2i\pi\langle \varphi^{*n} k, x+qa\rangle}\big)\Big\|_{L^2(\Omega_q)} \end{aligned}$$

$$\leqslant \max_{n\leqslant N}\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{g}(k)(a_{q,k,n}-1)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,x\rangle}\Big\|_{L^2(\Omega_q)}$$

$$+\max_{n\leqslant N}\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{g}(k)\big(\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,x+qa\rangle}-\mathrm{e}^{2i\pi\langle\varphi^{*n}k,x+qa\rangle}\big)\Big\|_{L^2(\Omega_q)}. \tag{6.54}$$

Comme $\rho(q)\leqslant\widetilde{\alpha}/4q<\widetilde{\alpha}/2$, de l'expression (6.42) de $\widehat{\Omega}_q$ et des inégalités (6.51) découle que, pour $k\neq k'$,

$$\widehat{\Omega}_q\big(\langle\varphi^{*n}k\rangle_q-\langle\varphi^{*n}k'\rangle_q\big)=0\quad\text{et}\quad\widehat{\Omega}_q\big(\varphi^{*n}k-\langle\varphi^{*n}k'\rangle_q\big)=0.$$

Il en résulte alors que, pour les premiers termes de (6.54), compte tenu de (6.53),

$$\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widehat{g}(k)(a_{q,k,n}-1)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,x\rangle}\Big\|_{L^2(\Omega_q)}\leqslant pNM^{-\frac{1}{2}N}\|g\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \tag{6.55}$$

et que, pour les seconds termes de (6.54),

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}&\widehat{g}(k)(\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,x+qa\rangle}-\mathrm{e}^{2i\pi\langle\varphi^{*n}k,x+qa\rangle})\Big\|_{L^2(\Omega_q)}\\
&=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big|\widehat{g}(k)\big|^2\int_{\mathbb{R}^p}\big|1-\mathrm{e}^{2i\pi\langle\varphi^{*n}k-\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,x+qa\rangle}\big|^2\Omega_q(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big|\widehat{g}(k)\big|^2 2\Big(1-\cos(\langle\varphi^{*n}k-\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,qa\rangle)\\
&\qquad\qquad\times\widehat{\Omega}_q\big(\varphi^{*n}k-\langle\varphi^{*n}k\rangle_q\big)\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big|\widehat{g}(k)\big|^2 2\Big(1-\cos\big(\langle\varphi^{*n}k-\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,qa\rangle\big)\\
&\qquad\qquad+1-\widehat{\Omega}_q\big(\varphi^{*n}k-\langle\varphi^{*n}k\rangle_q\big)\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big|\widehat{g}(k)\big|^2 2\Big(1-\cos\big(\langle\varphi^{*n}k-\langle\varphi^{*n}k\rangle_q,qa\rangle\big)\\
&\qquad\qquad+1-\big(1-[\varphi^{*n}k]_q(\rho(q))^{-1}\big)^p\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\big|\widehat{g}(k)\big|^2 2\Big(\frac{1}{2}p|a|_2^2q^2[\varphi^{*n}k]_q^2+p[\varphi^{*n}k]_q(\rho(q))^{-1}\Big)\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant CM^{-\frac{1}{4}N}\big(|a|_2+1\big)\|g\|_{L^2(\mathbb{T}^p)},
\end{aligned} \tag{6.56}$$

compte tenu de (6.48).

À partir de l'expression (6.41) de Ω_q on note, sans difficultés, que

$$\frac{1}{q^p}\chi_{(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p}\leqslant c\Omega_q\quad(c\text{ indépendant de }q). \tag{6.57}$$

De (6.55), (6.56) et (6.57) résulte que

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T_q^n g - A_N g\Big\|_{L^2(qa+(1/q^p)(-\frac12 q,\frac12 q)^p)}\\
&\qquad = \Big\|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T_q^n g(x) - A_N g(x+qa)\Big\|_{L^2((1/q^p)(-\frac12 q,\frac12 q)^p)}\\
&\qquad \leqslant c\Big\|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T_q^n g(x) - A_N g(x+qa)\Big\|_{L^2(\Omega_q)}\\
&\qquad \leqslant CM^{-N/4}\big(|a|_2+1\big)\|g\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \qquad (6.58)
\end{aligned}$$

Étape 6.2.2 – Estimation des $\| \sup\limits_{\substack{N\leqslant 2^s,\\ \text{quadriatique}}} |A_N\widetilde{g}_{N,s}|\|_{L^2(-1/2,1/2)^p}$ (1).

D'après leur définiton (6.23), les $\widetilde{g}_{N,s}$ satisfont les conditions (6.44) imposées à g. Notons que $\|\widetilde{g}_{N,s}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \leqslant \|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}$. Par suite, pour $N \geqslant 2^s$, $s \geqslant s_0$ et $a \in \mathbb{Z}^p$, M et s_0 étant choisis suffisamment grands,

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N} T_q^n \widetilde{g}_{N,s} - A_N \widetilde{g}_{N,s}\Big\|_{L^2\left(qa+(1/q^p)(-\frac12 q,\frac12 q)^p\right)}\\
&\qquad \leqslant CM^{-N/4}\big(|a|_2+1\big)\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \qquad (6.59)
\end{aligned}$$

Pour $\ell \geqslant 1$, considérons le spectre ordonné $\lambda_1(\ell) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p(\ell)$ de la forme quadratique $|\varphi^{*\ell}x|_2^2$ sur $\mathbb{R}^p$. $(\lambda_1(\ell))^{-1}, \dots, (\lambda_p(\ell))^{-1}$ sont alors les valeurs propres de la forme quadratique $|\varphi^{-\ell}x|_2^2$.

Compte tenu de (1.9) il existe des constantes μ_1 et $\mu_2 > 1$ telles que

$$\mu_1^{\ell} < \lambda_1(\ell) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p(\ell) < \mu_2^{\ell} \qquad (6.60)$$

pour ℓ suffisamment grand. Posons

$$\ell_s = 4\big\lceil s^{10c_3}/\ln\mu_1\big\rceil \qquad (6.61)$$

où c_3 est la constante figurant dans l'énoncé du lemme 4.2, puis

$$\begin{aligned}
D_s &= \big\{x \in \mathbb{R}^p; |\varphi^{-\ell_s}x|_2 < \tfrac12\sqrt{p}\big\},\\
D_s^* &= \big\{x \in \mathbb{R}^p; |\varphi^{-\ell_s}x|_2 < \tfrac12\sqrt{p}(1+2\mu_1^{-\ell_s/4})\big\}. \qquad (6.62)
\end{aligned}$$

Pour $q = q_{s^{10}}$ considérons les hypercubes de la forme

$$qa + \big(-\tfrac12 q, \tfrac12 q\big)^p, \quad a \in \mathbb{Z}^p,$$

rencontrant le domaine D_s.

Nous poserons

$$\widetilde{P}_s = \left\{a \in \mathbb{Z}^p ; qa + (-\tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}q)^p \text{ rencontre } D_s\right\}, \quad \widetilde{N}_s = \#\widetilde{P}_s,$$

puis

$$\widetilde{D}_s = \bigcup_{a \in \widetilde{P}_s} qa + \big(-\tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}q\big)^p.$$

Désignons par $d_2(\delta D_s, \delta D_s^*)$ la distance euclidienne entre les bords des domaines D_s et D_s^*. À partir de la réduction de la forme quadratique $|\varphi^{-\ell_s} x|_2^2$ on vérifie que

$$d_2(\delta D_s, \delta D_s^*) \geqslant \sqrt{p}\big(\lambda_1(\ell_s)\big)^{\frac{1}{2}} \mu_1^{-\frac{1}{4}\ell_s}.$$

Par suite

$$d_2(\delta D_s, \delta D_s^*) \geqslant \sqrt{p}\, \mu_1^{\frac{1}{4}\ell_s} \geqslant \sqrt{p}\, \mathrm{e}^{s^{10c_3}} > \sqrt{p}\, q \quad (q = q_{s^{10}}).$$

Il s'ensuit que $\widetilde{D}_s \subseteq D_s^*$ et donc

$$\text{pour } a \in \widetilde{P}_s, \quad |a|_2^2 < c\mu_2^{\ell_s}. \tag{6.63}$$

Désignons par $\mathrm{Vol}(D_s)$, $\mathrm{Vol}(\widetilde{D}_s)$ et $\mathrm{Vol}(D_s^*)$ les mesures de Lebesgue respectives des domaines D_s, $\widetilde{D}_s$ et D_s^*. De la double inclusion $D_s \subseteq \widetilde{D}_s \subseteq D_s^*$ et du fait que

$$\mathrm{Vol}(D_s^*) = \mathrm{Vol}(D_s)\big(1 + 2\mu_1^{-\frac{1}{4}\ell_s}\big)^p$$

résulte que

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{D}_s) \sim \mathrm{Vol}(D_s) \quad (s \to \infty). \tag{6.64}$$

Notons que $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^p \subseteq B(0, \frac{1}{2}\sqrt{p})$ et $\varphi^{\ell_s}\big(B(0, \frac{1}{2}\sqrt{p})\big) = D_s$. Par suite

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sup_{N \geqslant 2^s} |A_N \widetilde{g}_{N,s}| \Big\|_{L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^p} \\
&\qquad \leqslant \Big\| \sup_{N \geqslant 2^s} |A_N \widetilde{g}_{N,s}(\varphi^{\ell_s} x)| \Big\|_{L^2(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^p} + C\frac{\ell_s}{2^s} \|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \\
&\qquad \leqslant c\Big\| \sup_{N \geqslant 2^s} |A_N \widetilde{g}_{N,s}| \Big\|_{L^2(\widetilde{D}_s)} \big(\mathrm{Vol}(\widetilde{D}_s)\big)^{-\frac{1}{2}} + Cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.
\end{aligned} \tag{6.65}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&\Big\| \sup_{N \geqslant 2^s} |A_N \widetilde{g}_{N,s}| \Big\|_{L^2(\widetilde{D}_s)}^2 \big(Vol(\widetilde{D}_s)\big)^{-1} \\
&\qquad \leqslant 2\Big\| \sup_{N \geqslant 2^s} \frac{1}{N} \Big| \sum_1^N T_q^n \widetilde{g}_{N,s} \Big| \Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}^2 \\
&\qquad\qquad + 2\sum_{N \geqslant 2^s} \Big\| \frac{1}{N} \sum_1^N T_q^n \widetilde{g}_{N,s} - A_N \widetilde{g}_{N,s} \Big\|_{L^2(\widetilde{D}_s)}^2 \big(\mathrm{Vol}(\widetilde{D}_s)\big)^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.66}$$

De l'estimation (6.59) de l'écart quadratique entre les moyennes $A_N\widetilde{g}_{N,s}$ et $(1/N)T_q^n\widetilde{g}_{N,s}$ sur chacun des hypercubes $qa+(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p$ découle que

$$\begin{aligned}
\sum_{N\geqslant 2^s}\Big\|\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\widetilde{g}_{N,s}-A_N\widetilde{g}_{N,s}\Big\|^2_{L^2(\widetilde{D}_s)}\big(\mathrm{Vol}(\widetilde{D}_s)\big)^{-1}&\\
&= \widetilde{N}_s^{-1}q^{-p}\sum_{N\geqslant 2^s}\sum_{a\in\widetilde{P}_s}\Big\|\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\widetilde{g}_{N,s}-A_N\widetilde{g}_{N,s}\Big\|^2_{L^2(qa+(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p)}\\
&\leqslant \widetilde{N}_s^{-1}\sum_{N\geqslant 2^s}\sum_{a\in\widetilde{P}_s}M^{-\frac{1}{2}N}\big(|a|_2+1\big)^2\|h_s\|^2_{L^2(\mathbb{T}^p)}\\
&\leqslant cM^{-2^s/2}\mu_2^{\ell_s}\|h_s\|^2_{L^2(\mathbb{T}^p)}\\
&\leqslant Cs^{-4}\|h_s\|^2_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \qquad (6.67)
\end{aligned}$$

Reportons l'estimation (6.67) dans (6.66), puis (6.66) dans (6.65). Il en résulte que

$$\Big\|\sup_{N\geqslant 2^s}\big|A_N\widetilde{g}_{N,s}\big|\Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p}\leqslant C\Big\|\sup_{N\geqslant 2^s}\frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\widetilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}+cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.68}$$

De l'inégalité maximale concernant les contractions T_q (cf. section 3) et de l'inégalité maximale (5.25) (cf. section 5, lemme 5.2) appliquée aux endomorphismes $\psi_\ell=\varphi^{*\ell}$, $1\leqslant\ell\leqslant d-1$ et à la suite $\varepsilon_j=M^{-j}$, avec $a=\frac{1}{2}$, résulte que

$$\begin{aligned}
\Big\|\sup_{N\geqslant 2^s}\frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\widetilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}&\leqslant c\Big\|\sup_{N\geqslant 2^s}\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\big(\sup_{j\geqslant 2^s}|\widetilde{g}_{j,s}|\big),\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}\\
&\leqslant C\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.
\end{aligned}$$

Cette dernière estimation, reportée dans (6.68), parait insuffisante pour estimer, en sommant sur s, la somme des $\big\|\sup_{N\geqslant 2^s}|A_N\widetilde{g}_{N,s}|\big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p}$. Dans l'étape suivante nous chercherons à améliorer cette estimation tout en imposant à N de parcourir les quadriadiques.

Étape 6.2.3 – Estimation des $\| \sup\limits_{\substack{N\leqslant 2^s,\\ \text{quadriatique}}} |A_N\widetilde{g}_{N,s}| \|_{L^2(-1/2,1/2)^p}$ (2).

En se limitant à N quadriadique dans l'étape précédente 6.2.2, on peut remplacer l'inégalité (6.68) par

$$\Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} |A_N\widetilde{g}_{N,s}| \Big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant C \Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n \widetilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} + cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.69}$$

Introduisons les moyennes

$$\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m\widetilde{g}_{N,s}\Big) \quad (q = q_{s^{10}}) \tag{6.70}$$

où $\bar{s} = s^{n_0}$ est une *puissance entière de s*. Il est clair que

$$\Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n \tilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant \Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m\tilde{g}_{N,s}\Big)\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} + c\frac{\bar{s}}{2^s}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.71}$$

Nous nous proposons de prouver que, pour $\bar{s} = s^{n_0}$, n_0 étant un exposant spécifié plus loin,

$$\Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m\tilde{g}_{N,s}\Big)\Big|\Big\|_{L^2(1/q^p\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.72}$$

Sous-lemme 1. — *Posons*

$$H_s = \frac{1}{\tilde{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m h_s \quad \text{où} \quad \bar{s} = s^{n_0} \quad \text{avec} \quad n_0 = \lceil 10c_3 + 4\rceil. \tag{6.73}$$

Alors

$$\|H_s\|_{L^2\left(\frac{1}{q^p}\mathbb{T}^p\right)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} (s \geqslant s_0). \tag{6.74}$$

Démonstration. — Rappelons que, pour chaque $k \in \operatorname{supp}\widehat{h}_s$, d'après la condition (*)–(6.20)–(6.21) portant sur la définition des $\widehat{h}_s$ on a

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_q < M^{-2^{\frac{1}{2}s}} (q = q_{s^{10}}, s \geqslant s_0). \tag{6.75}$$

Soit $g \in L^2(\mathbb{T}^p)$ telle que, pour tout $k \in \operatorname{supp}\tilde{g}$, la condition 6.75 ait lieu.

En suivant une démarche similaire à celle exposée dans l'étape 6.2.1, on obtiendra (M étant choisi suffisamment grand) :

$$\text{pour} \quad 1 \leqslant m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s},$$

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell} k]_q < M^{-\frac{3}{4}2^{\frac{1}{2}s}}, \tag{6.76}$$

puis

$$\begin{aligned} [\varphi^{*m} k]_q &< M^{-\frac{1}{2}2^{\frac{1}{2}s}} \rho(q), \\ \langle \varphi^* \langle \varphi^{*(m-1)} k\rangle_q \rangle_q &= \langle \varphi^{*m} k\rangle_q, \\ [\varphi^* \langle \varphi^{*(m-1)} k\rangle_q]_q &< M^{-\frac{1}{2}2^{\frac{1}{2}s}} \rho(q). \end{aligned} \tag{6.77}$$

La comparaison des moyennes $(1/L)\sum_1^L T_q^m g$ et $A_L g$ conduira, pour $L \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$, $a \in \mathbb{Z}^p$, $s \geqslant s_0$, à

$$\begin{aligned} &\Big\| \frac{1}{L} \sum_1^L T_q^m g - A_L g \Big\|_{L^2(qa+(1/q^p)(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p)} \\ &\qquad \leqslant C M^{-\frac{1}{4}2^{\frac{1}{2}s}} \big(|a|_2 + 1\big) \|g\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}, \end{aligned} \tag{6.78}$$

Soit $\bar{s} = s^{n_0}$ une puissance de s. Pour $s \geqslant s_0$ avec s_0 choisi suffisamment grand, alors $\bar{s} \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$. De (6.78) résulte que, en remplaçant g par h_s, pour $a \in \mathbb{Z}^p$ et $s \geqslant s_0$,

$$\begin{aligned} \big\| H_s \big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} &\leqslant \big\| A_{\bar{s}} h_s \big\|_{L^2(qa+(1/q^p)(-\frac{1}{2}q,\frac{1}{2}q)^p)} \\ &\quad + C M^{-\frac{1}{4}2^{\frac{1}{2}s}} \big(|a|_2 + 1\big) \|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}, \end{aligned} \tag{6.79}$$

Introduisons les domaines

$$\begin{aligned} D'_s &= \big\{ x \in \mathbb{R}^p;\ |\varphi^{-\ell_s} x|_2 \big\} < \tfrac{1}{2} \big\}, \\ D'_{*s} &= \big\{ x \in \mathbb{R}^p;\ |\varphi^{-\ell_s} x|_2 \big\} < \tfrac{1}{2}\big(1 - 2\mu_1^{-\frac{1}{4}\ell_s}\big) \big\} \end{aligned} \tag{6.80}$$

où, rappelons-le, ℓ_s est défini par

$$\ell_s = 4 \lceil s^{10c_3} / \ln \mu_1 \rceil. \tag{6.81}$$

Posons

$$\widetilde{P}'_s = \big\{ a \in \mathbb{Z}^p;\ qa + \big(-\tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}q\big)^p \big\} \subseteq D'_s \big\}, \quad \widetilde{N}'_s = \#\widetilde{P}'_s,$$

puis

$$\widetilde{D}'_s = \bigcup_{a \in \widetilde{P}'_s} qa + \big(-\tfrac{1}{2}q, \tfrac{1}{2}q\big)^p. \tag{6.82}$$

À partir de la réduction de la forme quadratique $|\varphi^{-\ell_s}x|_2^2$, on vérifie que la distance $d_2(\delta D'_s, \delta D'_{*s})$ entre les bords des domaines D'_s et D'_{*s} satisfait $d_2(\delta D'_s, \delta D'_{*s}) > \sqrt{p}\,q$. Il en résulte que $D'_{*s} \subseteq \widetilde{D}'_s$.

Comme $\widetilde{D}'_s \subseteq D'_s$, on note que, pour $a \in \widetilde{P}'_s$,

$$|a|_2^2 < \mu_2^{\ell_s}. \tag{6.83}$$

Enfin, à partir de la double inclusion $D'_{*s} \subseteq \widetilde{D}'_s \subseteq D'_s$ et du fait que

$$\mathrm{Vol}(D'_{*s}) = \mathrm{Vol}(D'_s)(1 - 2\mu_1^{-\frac{1}{4}\ell_s})^p$$

résulte que

$$\mathrm{Vol}(\widetilde{D}'_s) \sim \mathrm{Vol}(D'_s) \qquad (s \to \infty). \tag{6.84}$$

Notons que $B(0, \frac{1}{2}) \subseteq (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^p$ et $\varphi^{\ell_s}\big(B(0, \frac{1}{2})\big) = D_s$.

D'après (6.79), il en résulte que

$$\begin{aligned}
\big\|H_s\big\|^2_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}^p_q)} &\leqslant 2(\widetilde{N}'_s)^{-1} q^{-p} \sum_{a \in \widetilde{P}'_s} \Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} h_s(\varphi^m)\Big\|^2_{L^2(qa + (-\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}q)^p)} \\
&\qquad + cs^{-4}\|h_s\|^2_{L_2(\mathbb{T}^p)} \\
&= 2\Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} h_s(\varphi^m)\Big\|^2_{L^2(\widetilde{D}'_s)} \big(\mathrm{Vol}(\widetilde{D}'_s)\big)^{-1} + cs^{-4}\|h_s\|^2_{L_2(\mathbb{T}^p)} \\
&\leqslant C\Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} h_s\big(\varphi^{(m+\ell_s)}\big)\Big\|^2_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} + cs^{-4}\|h_s\|^2_{L_2(\mathbb{T}^p)} \\
&\leqslant C\Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} h_s(\varphi^m)\Big\|^2_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} + c\,\frac{\ell_s^2}{\bar{s}^2}\|h_s\|^2_{L_2(\mathbb{T}^p)} + cs^{-4}\|h_s\|^2_{L_2(\mathbb{T}^p)}.
\end{aligned}$$

Choisissons

$$\bar{s} = s^{n_0} \quad \text{avec } n_0 = \lceil 10c_3 + 4\rceil. \tag{6.85}$$

Cherchons à appliquer le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5) aux moyennes $(1/\bar{s})\sum_1^{\bar{s}} h_s(\varphi^m)$ $(s > s_0)$ avec $N = \bar{s}$. Pour $s > s_0$, avec s suffisamment grand, il est clair que

$$c_2\varepsilon^{5c_3}\bar{s} > d - 1, \quad (s-1)^{10} > c_1\varepsilon^{-4}, \quad s^{10c_3} + \ln 2 < c_2\varepsilon\bar{s}$$

avec $\varepsilon = s^{-2}$. D'autre part, pour toute fréquence $k \in \mathrm{supp}\,\widehat{h}_s$, la condition (**)–(6.21) portant sur la définition des $\widehat{h}_s$ implique

$$\begin{aligned}
\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{\lfloor c_1\varepsilon^{-4}\rfloor}} &\geqslant \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{(s-1)^{10}}} \\
&> \frac{1}{2}(q_{s^{10}})^{-1} > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s^{10c_3}} > \mathrm{e}^{-c_2\varepsilon\bar{s}}.
\end{aligned}$$

Du critère de presque-orthogonalité résulte que

$$\Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_{1}^{\bar{s}} h_s(\varphi^m)\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant s^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

Comme

$$\Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_{1}^{\bar{s}} h_s(\varphi^m)\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant \beta\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \quad (s \geqslant s_0)$$

on en déduit que

$$\Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_{1}^{\bar{s}} h_s(\varphi^m)\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant Cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \quad (s \geqslant s_0).$$

En reportant cette dernière estimation dans (6.84) on en déduit (6.74).

Le sous-lemme 1 est donc prouvé. □

Remarque 6.2. — La démonstration du lemme 1 s'appuie uniquement sur le fait que toute fréquence $k \in \operatorname{supp}\widehat{h}_s$ satisfait les conditions (*) et (**) de (6.20)–(6.21). Par suite, si l'on remplace les h_s par des g_s, $g_s \in L^2(\mathbb{T}^p)$, telles que $\operatorname{supp}\widehat{g}_s \subseteq \operatorname{supp}\widehat{h}_s$ (en particulier si $|\widehat{g}_s| \leqslant |\widehat{h}_s|$), (6.74) a également lieu, i.e.

$$\Big\|\frac{1}{\bar{s}}\sum_{1}^{\bar{s}} T_q^m g_s\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|g_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}(s \geqslant s_0). \tag{6.86}$$

Sous-lemme 2. — *Il existe une constante C_1 ne dépendant que de φ telle que, pour tout $s \geqslant s_0$ (avec s_0 suffisamment grand) et tout $k \in \operatorname{supp}\widehat{h}_s$,*

$$\max_{0\leqslant \ell\leqslant d-1}\big[(\varphi^{*\ell}\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)\big]_q \overset{C_1^{\bar{s}}}{\sim} \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}k]_q, \tag{6.87}$$

avec $m \leqslant \bar{s}$ et $s \geqslant s_0$.

Démonstration. — Rappelons que (cf. (6.45))

$$\varphi^{*m} = b_{d-1}(m)\varphi^{*(d-1)} + \cdots + b_1(m)\varphi^* + b_0(m)\mathrm{Id}$$

où $b_s(m) \in \mathbb{Z}$ et

$$\big|b_s(m)\big| + \cdots + \big|b_s(0)\big| < A^{(m-d+1)^+}.$$

D'après la définition (6.20)–(6.21) des $\widehat{h}_s$, pour chaque $k \in \operatorname{supp}\widehat{h}_s$,

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}k]_q < M^{-2^{\frac12 s}} \quad (q = q_{s^{10}}, \geqslant s_0).$$

Par suite, compte tenu de (6.45), pour $m \leqslant 2^{\frac12 s}$,

$$[\varphi^{*m}k]_q < M^{-\frac34 2^{\frac12 s}} \quad (*) \quad \text{et} \quad A[\varphi^{*m}k]_q < \mathrm{e}^{-s^{10c_3}} < \frac{1}{q} \quad (**) \tag{6.88}$$

(M étant choisi suffisamment grand). Partons de la relation

$$\varphi^{*m}k + a_{d-1}\varphi^{*(m-1)}k + \cdots + a_1\varphi^{*(m-d+1)}k + a_0\varphi^{*(m-d)}k = 0.$$

Compte tenu que les $a_d, \ldots, a_1, a_0$ sont à valeurs $\mathbb{Z}$, de (**)–(6.88) résulte alors que

$$\langle\varphi^{*m}k\rangle_q + a_{d-1}\langle\varphi^{*(m-1)}k\rangle_q + \cdots + a_1\langle\varphi^{*(m-d+1)}k\rangle_q + a_0\langle\varphi^{*(m-d)}k\rangle_q = 0$$

$$(d \leqslant m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}). \tag{6.89}$$

On en déduit que, pour $m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$,

$$\langle\varphi^{*m}k\rangle_q = b_{d-1}(m)\langle\varphi^{*(d-1)}k\rangle_q + \cdots + b_1(m)\langle\varphi^{*}k\rangle_q + b_0(m)k. \tag{6.90}$$

D'autre part, comme

$$\begin{aligned}\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q) &- \langle\varphi^{*(\ell+m)}k\rangle_q \\ &= \varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q) - \varphi^{*\ell}(\varphi^{*m}k) + \varphi^{*(\ell+m)}k - \langle\varphi^{*(\ell+m)}k\rangle_q\end{aligned}$$

alors, compte tenu de (*)–(6.88), pour $\ell + m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$,

$$\begin{aligned}\left|\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+m)}k\rangle_q\right|_\infty &\leqslant \|\varphi\|_\infty^\ell[\varphi^{*m}k]_q + [\varphi^{*(\ell+m)}k]_q \\ &\leqslant (\|\varphi\|_\infty^\ell + 1)M^{-\frac{3}{4}2^{\frac{1}{2}s}} < M^{-\frac{1}{2}2^{\frac{1}{2}s}} < \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s^{10c_3}} < \frac{1}{2q}\end{aligned}$$

(M étant choisi suffisamment grand). Par suite, pour $\ell + m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$,

$$\langle\varphi^{*(\ell+m)}k\rangle_q = \langle\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)\rangle_q. \tag{6.91}$$

Pour $s \geqslant s_0$, avec s_0 suffisamment grand, nous avons $d - 1 + \bar{s} \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$. Considérons, pour m fixé, $m \leqslant \bar{s}$, le système linéaire

$$\begin{aligned}\varphi^{*(m+\ell)}k - \langle\varphi^{*(m+\ell)}k\rangle_q &= b_{d-1}(m+\ell)\big(\varphi^{*(d-1)}k - \langle\varphi^{*(d-1)}k\rangle_q\big) \\ &\quad + \cdots + b_1(m+\ell)\big(\varphi^{*}k - \langle\varphi^{*}k\rangle_q\big)\end{aligned}$$

où $\ell = 0, 1, \ldots, d-1$.

Comme les $\varphi^{*(m+d-1)}, \ldots, \varphi^{*(m+1)}, \varphi^{*m}$ sont linéairement indépendants, d'après (*)–(6.45), la matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_{d-1}(m) & \ldots & b_0(m) \\ b_{d-1}(m+1) & \ldots & b_0(m+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{d-1}(m+d-1) & \ldots & b_0(m+d-1) \end{pmatrix}$$

est inversible.

Les $b_j(m+\ell)$ sont à valeurs $\mathbb{Z}$. Par suite $|\det(\Delta)| \geqslant 1$. Du fait que $\max_{\ell,j\leqslant d-1}|b_j(m+\ell)| < c^m$ résulte que

$$\max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*(\ell+m)}k\big]_q \overset{C^m}{\sim} \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}k\big]_q \tag{6.92}$$

(C suffisamment grand) pour $m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s} - (d-1)$ et donc pour $m \leqslant \bar{s}$.

En effet il est clair, d'une part, que

$$\max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*(\ell+m)}k\big]_q \leqslant C^m \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}k\big]_q$$

et, d'autre part (d'après les formules de Cramer), que

$$\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}k\big]_q \leqslant C^m \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*(\ell+m)}k\big]_q.$$

Comme

$$\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q) = \varphi^{*\ell}\big(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q - \varphi^{*m}k\big) + \varphi^{*(\ell+m)}k,$$

alors

$$\max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)\big]_q \leqslant (\|\varphi\|_\infty^{d-1}+1) \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*(\ell+m)}k\big]_q,$$
$$\max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*(\ell+m)}k\big]_q \leqslant (\|\varphi\|_\infty^{d-1}+1) \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)\big]_q.$$

Par suite

$$\max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*(\ell+m)}k\big]_q \overset{C_0^d}{\sim} \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)\big]_q. \tag{6.93}$$

De (6.92) et (6.93) résulte alors que

$$\max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)\big]_q \overset{C_1^{\bar{s}}}{\sim} \max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1}\big[\varphi^{*\ell}k\big]_q \quad (m\leqslant\bar{s}). \tag{6.94}$$

Le sous-lemme 2 est donc prouvé. □

Sous-lemme 3. — *Pour $m\leqslant\bar{s}$, $N\geqslant 2^s$,*

$$T_q^m\widetilde{g}_{N,s} = \sum_{\substack{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}^p \\ \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q < C_1^{-\bar{s}}M^{-N}}} \widehat{T_q^m h_s}(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle}$$
$$+ T_q^m g_{N,s,m} \tag{6.95}$$

où

$$g_{N,s,m}\in L^2(\mathbb{T}^p),\ |\widehat{g}_{N,s,m}| \leqslant |\widehat{h}_s|,\ \operatorname{supp}\widehat{g}_{N,s,m} \subset \sigma_{s,M^{-N}} \setminus \sigma_{s,C_1^{-2\bar{s}}M^{-N}},$$

les $\sigma_{s,M^{-N}} \setminus \sigma_{s,C_1^{-2\bar{s}}M^{-N}}$ étant disjoints, pour s fixé, quand N parcourt les quadriadiques.

Démonstration. — Remarquons d'abord que, d'après (6.43) et (6.77), le développement en série de Fourier de $T_q^m h_s$ est de la forme :

$$T_q^m h_s = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widehat{h}_s(k) a(k,q,m) \mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle\varphi^{*m}k\rangle_q, x\rangle}$$

où les $a(k,q,m)$ sont donnés par (**)–(6.52). Il est alors clair que

$$\operatorname{supp}\widehat{T_q^m h_s} \subseteq \big\{\langle\varphi^{*m}k\rangle_q;\, k\in\mathbb{Z}^p\big\},\quad \widehat{T_q^m h_s}\big(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q\big) = \widehat{h}_s(k)a(k,q,m).$$

Partons de la définition (6.23) des $\widetilde{g}_{N,s}$:

$$\widetilde{g}_{N,s} = \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-N}}} \widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}.$$

D'après (6.87) (cf. sous-lemme 2), pour $m \leqslant \bar{s}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\widehat{h}_s \cap \sigma_{s,C_1^{-2\bar{s}}M^{-N}} &\subseteq \{k\in\operatorname{supp}\widehat{h}_s;\ \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)]_q < C_1^{-\bar{s}}M^{-N}\}\\ &\subseteq \operatorname{supp}\widehat{h}_s\cap\sigma_{s,M^{-N}}.\end{aligned}$$

Par suite

$$\widetilde{g}_{N,s} = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p\\ \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)]_q<C_1^{-\bar{s}}M^{-N}}} \widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} + g_{N,s,m} \tag{6.96}$$

où

$$|\widehat{g}_{N,s,m}| \leqslant |\widehat{h}_s| \quad\text{et}\quad \operatorname{supp}\widehat{g}_{N,s,m} \subseteq \sigma_{s,M^{-N}}\setminus\sigma_{s,C_1^{-2\bar{s}}M^{-N}}. \tag{6.97}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}T_q^m\widetilde{g}_{N,s} &= \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p\\ \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)]_q<C_1^{-\bar{s}}M^{-N}}} \widehat{T_q^m h_s}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\langle\varphi^{*m}k\rangle_q,x\rangle}\\ &\qquad\qquad + T_q^m g_{N,s,m}\\ &= \sum_{\substack{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}^p\\ \max_{0\leqslant\ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q<C_1^{-\bar{s}}M^{-N}}} \widehat{T_q^m h_s}(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle} + T_q^m g_{N,s,m}.\end{aligned}$$

Enfin observons que la condition $N \geqslant 2^s$ implique $M^{-N} < C_1^{-2\bar{s}}$, pour M assez grand, et donc $\sigma_{s,M^{-2N}} \subseteq \sigma_{s,C_1^{-2\bar{s}}M^{-N}}$. Les $\sigma_{s,M^{-N}}\setminus\sigma_{s,C_1^{-2\bar{s}}M^{-N}}$, s étant fixé, sont donc disjoints quand N parcourt les dyadiques et donc, *a fortiori*, quand N parcourt les quadriadiques.

Le sous-lemme 3 est donc prouvé. □

Passons à la démonstration de l'inégalité (6.72) :

$$\Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m \tilde{g}_{N,s}\Big)\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

De 6.95 (cf. sous-lemme 3) on en déduit que

$$\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m \tilde{g}_{N,s} = \sum_{\substack{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}^p \\ \max_{0\leqslant \ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q < C_1^{-\bar{s}}M^{-N}}} \widehat{H}_s(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle} + \frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m g_{N,s,m}. \tag{6.98}$$

Nous avons donc

$$\sup_{\substack{N\geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m \tilde{g}_{N,s}\Big)\Big|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{N\geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\sup_{j\geqslant 1}\Big|\sum_{\substack{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}^p \\ \max_{0\leqslant \ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q < C_1^{-\bar{s}}M^{-j}}} \widehat{H}_s(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle}\Big|\Big) \tag{6.99}$$

$$+\Big(\sum_{\substack{N\geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}}\Big|\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m g_{N,s,m}\Big)\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.100}$$

Le terme figurant dans (6.99), resp. (6.100) sera également noté (6.99), resp. (6.100). Il s'agit maintenant d'estimer dans $L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)$ (6.99) et (6.100).

Pour $\gamma \in q^{-1}\mathbb{Z}^p$, $\gamma = k/q$, la condition $[\varphi^{*\ell}\gamma]_q < C_1^{-\bar{s}}M^{-j}$ est identique à la condition $[\varphi^{*\ell}k]_1 < qC_1^{-\bar{s}}M^{-j}$. Notons que $H_s \in L^2(\mathbb{T}_q^p)$ et donc $H_s(q.) \in L^2(\mathbb{T}^p)$. L'application de l'inégalité maximale (5.25), avec $\psi^\ell = \varphi^{*\ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant d-1$, $\varepsilon_j = qC_1^{-\bar{s}}M^{-j}$ et $a = \frac{1}{2}$ conduit à

$$\Big\| \sup_{j\geqslant 1}\Big|\sum_{\substack{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}^p \\ \max_{0\leqslant \ell\leqslant d-1}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q < C_1^{-\bar{s}}M^{-j}}} \widehat{H}_s(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant \big\|H_s\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}.$$

De l'inégalité maximale 3.6 et du sous-lemme 1 résulte que

$$\big\|(6.99)\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant C\big\|H_s\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.101}$$

Reste à estimer la norme $L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)$ de (6.100). Il est clair que

$$\begin{aligned}(6.102)\qquad &\big\|(6.100)\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}\\ &= \Big(\sum_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \Big\|\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m g_{N,s,m}\Big)\Big\|^2_{L^2(1/q^p\mathbb{T}_q^p)}\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{supp}\widehat{g}_{N,s,m} \subseteq \operatorname{supp}\widehat{h}_s$, d'après la remarque (6.2),

$$(6.103)\qquad \Big\|\sum_1^{\bar{s}}\frac{1}{\bar{s}}T_q^m g_{N,s,m}\Big\|_{L^2(1/q^p\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|g_{N,s,m}\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}.$$

Notons (cf. sous-lemme 3) que, pour s fixé, les $\operatorname{supp}\widehat{g}_{N,s,m}$ sont disjoints quand N parcourt les quadriadiques.

De (6.102) et (6.103) résulte que

$$(6.104)\qquad \big\|(6.100)\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

De (6.101) et (6.104) résulte que

$$\begin{aligned}(6.105)\qquad &\Big\|\sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}}\Big|\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m\widetilde{g}_{N,s}\Big)\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}\\ &\qquad\leqslant Cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.\end{aligned}$$

Les étapes 6.2.1 et 6.2.2 conduisent en définitive à

$$(6.106)\qquad \Big\|\sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}}\frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\widetilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant Cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

Terminons la démonstration du théorème 1.1, i.e. de l'inégalité maximale (1.11). Revenons sur les décompositions (6.23)–(6.24) des $g_{N,s}$ et (6.12) des f_N avec N quadriadique :

$$g_{N,s} = \widetilde{g}_{N,s} + \sum_{1\leqslant j\leqslant \ln\sqrt{N}/\ln 2} h_{N,s,j} \quad (N\geqslant 2^s, \geqslant s_0),$$

$$f_N = \sum_{s_0\leqslant s\leqslant \ln N/\ln 2} g_{N,s}.$$

Les estimations des contributions maximales (6.39) et (6.106) des $h_{N,s,j}$ et $\widetilde{g}_{N,s}$ conduisent à

$$(6.107)\qquad \Big\|\sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}}|A_N f_N|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

On conclut (cf. début de la section 6) que

$$\big\| \sup_N |A_N f| \big\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{6.108}$$

La démonstration du théorème 1.1 dans le cas d'un endomorphisme entier algébrique est donc achevée. □

7. Cas général

Dans cette dernière section nous supposons que le polynôme minimal

$$P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0, \quad P \in \mathbb{Z}[X], \quad P \neq 0,$$

(les $a_d, a_{d-1}, \ldots, a_0$ étants premiers entre eux) pour lequel $P(\varphi) = 0$ n'est pas unitaire, i.e. $|a_d| > 1$. Les hypothèses (1.5) et (1.12) sont maintenues.

Dans cette dernière section nous suivons la même démarche que celle de [1] (cf. 10, *The general case*).

Dans le cas présent l'estimation des $[\varphi^{*\ell}k]_q$, $1 \leqslant \ell \leqslant d-1$, ne suffit pas à contrôler les $[\varphi^{*\ell}k]_q$, $1 \leqslant \ell \leqslant L$. Le lemme suivant permettra de contourner cette difficulté. Par la suite, nous adapterons les arguments de la section 6.

Lemme 7.1. — *Soient $q \geqslant 1$ entier et $(\mu_\ell)_{0\leqslant \ell \leqslant T}$ une suite d'éléments de $q^{-1}\mathbb{Z}^p$ telle que $\mu_0, \ldots, \mu_{d-1} \in \mathbb{Z}^p$ et*

$$a_d \mu_{\ell+d} + \cdots + a_1 \mu_{\ell+1} + a_0 \mu_\ell = 0 \quad \textit{pour } \ell \leqslant T - d. \tag{7.1}$$

Alors $\mu_\ell \in \mathbb{Z}^p$ pour $\ell \leqslant T - d \ln_2 q$.

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de prouver le lemme 7.1 dans le cas où $p = 1$ et $q \geqslant 2$.

Pour r facteur premier de q, désignons par $\nu_r(\mu_\ell)$ l'exposant de r dans la décomposition en facteurs premiers de μ_ℓ (on convient que $\nu_r(\mu_\ell) = +\infty$ si $\mu_\ell = 0$). Nous devons prouver que, pour tout facteur premier r de q et tout $\ell \leqslant T - d \ln_2 q$, $\nu_r(\mu_\ell) \geqslant 0$.

Notons que l'on a nécessairement $\nu_r(\mu_\ell) \geqslant \lfloor \ln_2 q \rfloor$, $0 \leqslant \ell \leqslant T$.

Supposons que, pour un entier k, $1 \leqslant k \leqslant \ln_2 q$,

$$\min_{\ell \leqslant T-dk} \nu_r(\mu_\ell) = \min_{\ell \leqslant T-d(k-1)} \nu_r(\mu_\ell) < 0. \tag{7.2}$$

Il existe donc un ℓ_0, $d \leqslant \ell_0 \leqslant T - dk$, tel que

$$\min_{\ell < \ell_0} \nu_r(\mu_\ell) > \nu_r(\mu_{\ell_0}) = \min_{\ell \leqslant T-d(k-1)} \nu_r(\mu_\ell) < 0. \tag{7.3}$$

Comme $a_d\mu_{\ell_0} + a_{d-1}\mu_{\ell_0-1} + \cdots + a_0\mu_{\ell_0-d} = 0$, r divise alors nécessairement a_d. Par suite, comme

$$a_d\mu_{\ell_0+1} + a_{d-1}\mu_{\ell_0} + \cdots + a_0\mu_{\ell_0+1-d} = 0,$$

r divise nécessairement a_{d-1}.

De proche en proche on conclut que r divise les $a_d, \ldots, a_1, a_0$. Les $a_d, \ldots, a_1, a_0$ étant premiers entre eux (7.2) ne peut avoir lieu.

Reste à envisager le cas où, pour tout k, $1 \leqslant k \leqslant \ln_2 q$,

$$\min_{\ell \leqslant T-dk} \nu_r(\mu_\ell) \geqslant \min_{\ell \leqslant T-d(k-1)} \nu_r(\mu_\ell) + 1. \tag{7.4}$$

En itérant (7.4) on obtient

$$\min_{\ell \leqslant T-d\lfloor \ln_2 q\rfloor} \nu_r(\mu_\ell) \geqslant \min_{j \leqslant T} \nu_r(\mu_\ell) + \lfloor \ln_2 q \rfloor \geqslant 0.$$

La démonstration du lemme 7.1 est donc achevée. □

Le lemme 7.1 implique le

Lemme 7.2. — *Soient q' et q'' entiers tels que $q' \mid q''$. Soit $(\lambda_\ell)_{0\leqslant \ell \leqslant T}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^p$ telle que*

$$a_d\lambda_{\ell+d} + \cdots + a_1\lambda_{\ell+1} + a_0\lambda_\ell = 0 \quad \textit{pour } \ell \leqslant T-d, \tag{7.5}$$

$$[\lambda_\ell]_{q''} < (q'')^{-1}A^{-1} \quad \textit{pour} \quad \ell \leqslant T \tag{7.6}$$

et

$$q'\langle\lambda_\ell\rangle_{q''} \in \mathbb{Z}^p \quad \textit{pour } \ell = 0, 1, \ldots, d-1. \tag{7.7}$$

Alors

$$[\lambda_\ell]_{q'} = [\lambda_\ell]_{q''} \textit{ pour } \ell \leqslant T - d\ln_2 q''. \tag{7.8}$$

Démonstration. — De (7.5) et (7.6) découle que

$$a_d\langle\lambda_{\ell+d}\rangle_{q''} + \cdots + a_1\langle\lambda_{\ell+1}\rangle_{q''} + a_0\langle\lambda_\ell\rangle_{q''} = 0 \quad \text{pour } \ell \leqslant T-d. \tag{7.9}$$

Appliquant le lemme 7.1 à la suite $\mu_\ell = q_{'}\langle\lambda_\ell\rangle_{q''}$, avec $q = q''/q'$, on obtient

$$\langle\lambda_\ell\rangle_{q''} \in (q')^{-1}\mathbb{Z}^p \quad \text{pour } \ell \leqslant T - d\ln_2(q''/q') \tag{7.10}$$

et donc

$$\langle\lambda_\ell\rangle_{q'} = \langle\lambda_\ell\rangle_{q''} \quad \text{pour } \ell \leqslant T - d\ln_2 q'', \tag{7.11}$$

d'où (7.8).

La démonstration du lemme 7.1 est donc achevée. □

Partons d'une $f \in L^2(\mathbb{T}^p)$. La définition (6.4) de f_N est remplacée par

$$f_N = \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^p \\ \max_{1\leqslant \ell\leqslant \sqrt{N}} [\varphi^{*\ell}k]_{\tilde{q}_N} < \sqrt{N}}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \tag{7.12}$$

où $\widetilde{q}_N = q_{(\ln N/\ln 2)^{10}}$ (N quadriadique).

Pour s_0 entier suffisamment grand la condition $N \geqslant 2^{s_0}$ implique

$$(\ln N/\ln 2)^{10} > c_1\varepsilon^{-4}, \quad c_2\varepsilon^{5c_3}N > \sqrt{N} \quad \text{et} \quad M^{-\sqrt{N}} > \mathrm{e}^{-c_2\varepsilon N}$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon = (\ln N)^{-2}. \tag{7.13}$$

Du critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5) résulte que, pour $N \geqslant 2^{s_0}$,

$$\big\|A_N(f-f_N)\big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant (\ln N)^{-2}\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \tag{7.14}$$

et, par suite,

$$\Big\| \sup_{\substack{N \\ \text{quadriadique}}} |A_N(f-f_N)| \Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{7.15}$$

Il nous reste à démontrer que

$$\Big\| \sup_{\substack{N \\ \text{quadriadique}}} |A_N f_N| \Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{7.16}$$

La définition (6.10) des $\sigma_{s,\varepsilon}$ est remplacée par

$$\sigma_{s,\varepsilon,T} = \big\{k \in \mathbb{Z}^p;\ [\varphi^{*\ell}k]_{q_{s^{10}}} < \varepsilon \text{ pour } 1 \leqslant \ell \leqslant T\big\} \tag{7.17}$$

et la définition (6.11) des $f_{N,s}$ par

$$f_{N,s} = \sum_{k\in\sigma_{s,M^{-\sqrt{N}},\sqrt{N}}} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}. \tag{7.18}$$

Introduisons, pour $N \geqslant 2^{s_0}$, N quadriadique, la décomposition

$$f_N = \sum_{s_0\leqslant s\leqslant \ln N/\ln 2} g_{N,s} \tag{7.19}$$

où

$$g_{N,s_0} = f_{N,s_0} \quad \text{et} \quad g_{N,s} = f_{N,s} - f_{N,s-1} \text{ pour } s > s_0. \tag{7.20}$$

La définition (6.20)–(6.21) des h_s est remplacée par

$$\widehat{h}_{s_0}(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) & \text{si } \max_{1\leqslant\ell\leqslant 2^{s_0/2}} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{s_0^{10}}} < M^{-2^{s_0/2}}\,(*), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{7.21}$$

et, pour $s > s_0$,

$$\widehat{h}_s(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k) & \text{si } \max_{1\leqslant \ell \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{s^{10}}} < M^{-2^{\frac{1}{2}s}} \quad (*), \\ & \text{et } \max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{(s-1)^{10}}} > \frac{1}{2}(q_{s^{10}})^{-1} \quad (**), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(7.22)

Partons d'une fréquence $k \in \sigma_{s,M^{-\sqrt{N}},\sqrt{N}}$, $k \in \operatorname{supp} \widehat{f}$, avec les conditions $N \geqslant 2^s$ et $s > s_0$. De deux choses l'une :

(i) $\max_{1\leqslant j\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{(s-1)^{10}}} \geqslant \frac{1}{2}(q_{s^{10}})^{-1}$,

(ii) $\max_{1\leqslant j\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{(s-1)^{10}}} < \frac{1}{2}(q_{s^{10}})^{-1}$.

Dans le cas (i), nous avons

$$\max_{1\leqslant \ell\leqslant \sqrt{N}} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{(s-1)^{10}}} > \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-s^{10c_3}} > M^{-2^{\frac{1}{2}s}} \geqslant M^{-\sqrt{N}}$$

(s_0 suffisamment grand) et, par suite, $k \notin \sigma_{s-1,M^{-\sqrt{N}},\sqrt{N}}$.

Dans le cas (ii), nous avons nécessairement, pour $0 \leqslant \ell \leqslant d-1$,

$$\langle\varphi^{*\ell}k\rangle_{q_{s^{10}}} = \langle\varphi^{*\ell}k\rangle_{q_{(s-1)^{10}}}, \quad \textit{i.e.} \quad q_{(s-1)^{10}}\langle\varphi^{*\ell}k\rangle_{q_{s^{10}}} \in \mathbb{Z}^p. \tag{7.23}$$

Posons alors

$$\lambda_\ell = \varphi^{*\ell}k, \quad q'' = s^{10}, \quad q' = (s-1)^{10}, \quad T = \sqrt{N}. \tag{7.24}$$

Pour $\ell \leqslant \sqrt{N}$ et $N \geqslant 2^s$, nous avons

$$[\varphi^{*\ell}k]_{q_{s^{10}}} < M^{-\sqrt{N}} < \mathrm{e}^{-(\ln N/\ln 2)^{10c_3}}A^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-s^{10c_3}}A^{-1} < (q_{s^{10}})^{-1}A^{-1}$$

(s_0 suffisamment grand). Les hypothèses (7.5), (7.6) et (7.7) du lemme 7.2 sont alors satisfaites. Il s'ensuit que, pour $\ell \leqslant \sqrt{N} - d\ln_2 q_{s^{10}}$,

$$\langle\varphi^{*\ell}k\rangle_{q_{s^{10}}} = \langle\varphi^{*\ell}k\rangle_{q_{(s-1)^{10}}}. \tag{7.25}$$

Comme

$$\sqrt{N} - d\ln_2 q_{s^{10}} > \sqrt{N} - d\ln_2(\ln_2 N)^{10c_3} > \frac{1}{2}\sqrt{N}$$

($N \geqslant 2^s, s > s_0$, avec s_0 suffisamment grand), de (7.25) résulte que

$$\text{pour } \ell \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{N}, \quad [\varphi^{*\ell}k]_{q_{(s-1)^{10}}} = [\varphi^{*\ell}k]_{q_{s^{10}}} < M^{-\sqrt{N}}. \tag{7.26}$$

De la définition (7.20) des $g_{N,s}$ et des considérations précédentes découle que, pour $s > s_0$,

$$g_{N,s} = \sum_{k \in \sigma_{s,M-\sqrt{N},\sqrt{N}} \setminus \sigma_{s-1,M-\sqrt{N},\sqrt{N}}} \widehat{f}(k) \mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

$$= g'_{N,s} \equiv \sum_{k \in \sigma_{s,M-\sqrt{N},\sqrt{N}}} \widehat{h}_s(k) \mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \tag{7.27}$$

$$+ g''_{N,s} \tag{7.28}$$

où

$$|\widehat{g''}_{N,s}| \leqslant |\widehat{g}_{N,s}| \text{ et } \operatorname{supp} \widehat{g''}_{N,s} \subset \sigma_{s-1,M-\sqrt{N},\frac{1}{2}\sqrt{N}} \setminus \sigma_{s-1,M-\sqrt{N},\sqrt{N}}. \tag{7.29}$$

Cherchons à appliquer le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5) aux moyennes $A_N g''_{N,s}$, $s > s_0$. Il est clair que, pour $s > s_0$ avec s suffisamment grand,

$$(s-1)^{10} > c_1 \varepsilon^{-4}, \quad c_2 \varepsilon^{5c_3} N > \sqrt{N} \quad \text{et} \quad M^{-\sqrt{N}} > \mathrm{e}^{-c_2 \varepsilon N}$$

avec $\varepsilon = s^{-2}$ et $N \geqslant 2^s$. Pour toute fréquence $k \in \operatorname{supp} \widehat{g''}_{N,s}$, il en résulte que

$$\max_{n \leqslant c_2 \varepsilon^5 N} [\varphi^{*n} k]_{q_{\lfloor c_1 s^{-8} \rfloor}} > \mathrm{e}^{-c_2 s^{-2} N}.$$

Le critère de presque-orthogonalité implique donc

$$\|A_N g''_{N,s}\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant s^{-2} \|g''_{N,s}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \quad (N \geqslant 2^s, s > s_0).$$

Comme

$$\|A_N g''_{N,s}\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant \beta \|g''_{N,s}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \quad (s \geqslant s_0)$$

alors

$$\|A_N g''_{N,s}\|_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \leqslant c s^{-2} \|g''_{N,s}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \quad (N \geqslant 2^s, s \geqslant s_0).$$

Notons que, d'après (7.29), pour s fixé, $s \geqslant s_0$, les $\widehat{g''}_{N,s}$ ont des supports disjoints quand N parcourt les quadriadiques. Par suite, comme

$$\sup_{\substack{N \geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}} \left| A_N g''_{N,s} \right| \leqslant \Big(\sum_{\substack{N \geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}} \left| A_N g''_{N,s} \right|^2_{L^2(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^p} \Big)^{\frac{1}{2}},$$

alors

$$\sum_{s\geqslant s_0}\Big\|\sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}}\big|A_N g''_{N,s}\big|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}$$

$$\leqslant \sum_{s\geqslant s_0}\Big(\sum_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}}\big\|A_N g''_{N,s}\big\|^2_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}\Big)^{\frac12}\leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{7.30}$$

Il nous reste donc à estimer la contribution des termes $g'_{N,s}$. Introduisons la décomposition suivante, analogue à (6.20)–(6.21), des $g'_{N,s}$:

$$g'_{N,s}=\widetilde{g}_{N,s}\equiv\sum_{k\in\sigma_{s,M-N,N}}\widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \tag{7.31}$$

$$+h_{N,s,1}\equiv\sum_{k\in\sigma_{s,M-N/2,N/2}\setminus\sigma_{s,M-N,N}}\widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

$$\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots$$

$$+h_{N,s,j}\equiv\sum_{k\in\sigma_{s,M-N/2^j,N/2^j}\setminus\sigma_{s_0,M-N/2^{(j-1)},N/2(j-1)}}\widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}$$

$$\dots\qquad\dots\qquad\dots\qquad\dots$$

$$+\,h_{N,s,(\ln\sqrt{N})/\ln 2}\equiv\sum_{k\in\sigma_{s,M-\sqrt{N},\sqrt{N}}\setminus\sigma_{s,M-2\sqrt{N},2\sqrt{N}}}\widehat{h}_s(k)\mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle} \tag{7.32}$$

(N quadriadique).

7.1. Contribution des termes $h_{N,s,j}$

On suit et adapte la même démarche que dans la sous-section 6.1.

Il existe des constantes c et C (ne dépendant que de φ) telles que

$$\big\|A_N h_{N,s,j}\big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}\leqslant C2^{-cj}\|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \tag{7.33}$$

pour $N\geqslant 4^j$ et $s\geqslant s_0$.

Pour démontrer (7.33), on utilise à nouveau le critère de presque-orthogonalité (lemme 4.5). Notons d'abord qu'en choisissant c suffisamment petit, pour j suffisamment grand, nous avons

$$c_2\varepsilon^{5c_3}N>N/2^{(j-1)}\quad\text{avec}\quad\varepsilon=2^{-cj}\ \text{ et }\ N\geqslant 4^j \tag{7.34}$$

(condition qui remplace 6.27).

Ensuite on réécrit (6.28) jusqu'à (6.32) où l'on remplace

- $\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1}\left[\varphi^{*\ell}k\right]_{\tilde q_j}$ par $\max_{1\leqslant \ell\leqslant N/2^{(j-1)}}\left[\varphi^{*\ell}k\right]_{\tilde q_j}$ et
- $\max_{1\leqslant \ell\leqslant d-1}\left[\varphi^{*\ell}k\right]_{q_{s^{10}}}$ par $\max_{1\leqslant \ell\leqslant N/2^{(j-1)}}\left[\varphi^{*\ell}k\right]_{q_{s^{10}}}$.

De même il existe une constante C telle que

$$\|A_N h_{N,s,j}\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant Cs^{-2}\|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \tag{7.35}$$

pour $N\geqslant 2^s$ et $s\geqslant s_0$.

La démonstration de (7.35) est identique à celle de 6.33.

De (7.33) et (7.35) découle que

$$\left\|A_N h_{N,s,j}\right\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant C\min(s^{-2},2^{-cj})\|h_{N,s,j}\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}$$

($N\geqslant \max(2^s,4^j)$). On note, sans difficultés, que les supports des $\widehat{h}_{N,s,j}$ sont disjoints, pour s et j fixés, quand N parcourt les quadriadiques.

On conclut, comme dans la sous-section 6.1, que

$$\sum_{s\geqslant s_0, j\geqslant 1}\Big\|\sup_{\substack{N\geqslant 2^s,4^j\\ \text{quadriadique}}}\left|A_N h_{N,s,j}\right|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}. \tag{7.36}$$

7.2. Contribution des termes $\widetilde{g}_{N,s}$

Étape 7.2.1. — T_q désigne toujours la contraction positive de $L^2(\mathbb{T}^p)$ présentée dans le début de la sous-section 6,2.

De la définition même (7.31) des $\widetilde{g}_{N,s}$ découle que

$$\text{pour tout } k\in\operatorname{supp}\widehat{\widetilde{g}}_{N,s},\quad \max_{1\leqslant n\leqslant N}\left[\varphi^{*n}k\right]_q < M^{-N}\quad (q=q_{s^{10}}). \tag{7.37}$$

Pour $g=\widetilde{g}_{N,s}$ la condition

$$\text{pour tout } k\in\operatorname{supp}\widehat{\widetilde{g}},\quad \max_{1\leqslant n\leqslant N}\left[\varphi^{*n}k\right]_q < M^{-\frac34 N}, \tag{7.38}$$

sur laquelle s'appuie la preuve de (6.58) est donc réalisée. L'écart entre les moyennes $A_N\widetilde{g}_{N,s}$ et $(1/N)\sum_1^N T_q^m\widetilde{g}_{N,s}$ satisfait alors à l'estimation (6.59) du début de l'étape 6.2.2. Comme dans l'étape 6.2.2, on aboutit à l'inégalité

$$\begin{aligned}\Big\|\sup_{N\geqslant 2^s}\left|A_N\widetilde{g}_{N,s}\right|\Big\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p} &\leqslant C\Big\|\sup_{N\geqslant 2^s}\frac1N\Big|\sum_1^N T_q^n\widetilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}\\ &\quad + cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(-\frac12,\frac12)^p}.\end{aligned} \tag{7.39}$$

Étape 7.2.2. — Comme dans l'étape 6.2.3 de la sous-section 6.2, on recherche une bonne estimation de

$$\Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n \widetilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}$$

à l'aide de l'inégalité

$$\begin{aligned}\Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n \widetilde{g}_{N,s}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}&\\ \leqslant \Big\| \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\Big|\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m \widetilde{g}_{N,s}\Big)\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}&\\ + C\frac{\bar{s}}{2^s}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}&\end{aligned}\tag{7.40}$$

où $\bar{s}=s^{n_0}$ est une puissance entière de s qui sera spécifiée plus loin.

Comme dans l'étape 6.2.3 de la sous-section 6.2, introduisons

$$H_s=\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m h_s=\sum_{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}} \widehat{H}_s(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle}.$$

De la définition même (7.21)–(7.22) des h_s découle que, pour toute fréquence $k\in\operatorname{supp}\widehat{h}_s$,

$$\begin{aligned}&\max_{1\leqslant\ell\leqslant 2^{\frac12 s}} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{s^{10}}} < M^{-2^{\frac12 s}} \quad \text{pour } s\geqslant s_0 \quad (*),\\ &\max_{1\leqslant\ell\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}k]_{q_{(s-1)^{10}}} > \frac12 (q_{s^{10}})^{-1} \quad \text{pour } s> s_0 \quad (**).\end{aligned}\tag{7.41}$$

Sous les conditions (7.41), la même démonstration que celle du sous-lemme 1 (cf. étape 6.2.3 de la sous-section 6.2) conduit au

Sous-lemme 4. — *Posons*

$$H_s=\frac{1}{\tilde{s}}\sum_1^{\tilde{s}} T_q^m h_s \quad \textit{où } \bar{s}=s^{n_0} \textit{ avec } n_0=\lceil 10c_3+4\rceil.\tag{7.42}$$

Alors

$$\big\|H_s\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \quad (s\geqslant s_0).\tag{7.43}$$

La remarque qui suit est identique à la remarque 6.2.

Remarque 7.3. — Pour des $g_s \in L^2(\mathbb{T}^p)$ telles que $\operatorname{supp} \widehat{g}_s \subseteq \operatorname{supp} \widehat{h}_s$ (en particulier si $|\widehat{g}_s| \leqslant |\widehat{h}_s|$) (7.43) a également lieu, i.e.

$$\Big\| \sum_1^{\bar{s}} \frac{1}{\bar{s}} T_q^m g_s \Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant c s^{-2} \|g_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)} \quad (s \geqslant s_0). \tag{7.44}$$

Le sous-lemme suivant remplace le sous-lemme 2 (cf. étape 6.2.3 de la sous-section 6.2).

Sous-lemme 5. — *Pour s_0 suffisamment grand, $s \geqslant s_0$, $k \in \operatorname{supp} \widehat{h}_s$, $m \leqslant \bar{s}$, $N \geqslant \bar{s} + d - 1$,*

$$\max_{\ell \leqslant N} [\varphi^{*\ell} k]_q \leqslant M^N \max_{\ell \leqslant N} [\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m} k \rangle_q)]_q,$$

$$\max_{\ell \leqslant N} [\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m} k \rangle_q)]_q \leqslant M^N \max_{\ell \leqslant 2N} [\varphi^{*\ell} k]_q. \tag{7.45}$$

Démonstration. — D'après la définition (7.21)–(7.22) des h_s,

$$\text{pour } \ k \in \operatorname{supp} \widehat{h}_s et \ \ell \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}, \quad [\varphi^{*\ell} k]_q < M^{-2^{\frac{1}{2}s}}. \tag{7.46}$$

Comme

$$\begin{aligned} &\varphi^{*\ell}\big(\langle \varphi^{*m} k \rangle_q\big) - \langle \varphi^{*(\ell+m)} k \rangle_q \\ &\qquad = \varphi^{*\ell}\big(\langle \varphi^{*m} k \rangle_q - \varphi^{*m} k\big) + \varphi^{*(\ell+m)} k - \langle \varphi^{*(\ell+m)} k \rangle_q \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} \big|\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m} k \rangle_q) - \langle \varphi^{*(\ell+m)} k \rangle_q\big|_\infty &\leqslant \|\varphi\|_\infty^\ell [\varphi^{*m} k]_q + [\varphi^{*(\ell+m)} k]_q \\ &\leqslant \big(\|\varphi\|_\infty^\ell + 1\big) M^{-2^{\frac{1}{2}s}} < \frac{1}{2} \exp\left(-s^{10c_3}\right) < \frac{1}{2q} \end{aligned}$$

pour $\ell + m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$ (M étant choisi suffisamment grand). Par suite

$$\langle \varphi^{*(\ell+m)} k \rangle_q = \langle \varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m} k \rangle_q) \rangle_q \quad \text{pour } \ell + m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}. \tag{7.47}$$

Compte tenu que $q = q_{s^{10}} < \mathrm{e}^{s^{10c_3}}$ (cf. (**)–(4.14) la condition (7.46) assure que

$$A[\varphi^{*\ell} k]_q < \frac{1}{q} \quad \text{pour } \ \ell \leqslant 2^{\frac{1}{2}s} \tag{7.48}$$

(M étant choisi suffisamment grand). La relation

$$a_d \varphi^{*m} k + a_{d-1} \varphi^{*(m-1)} k + \cdots + a_1 \varphi^{*(m-d+1)} k + a_0 \varphi^{*(m-d)} k = 0$$

avec $d \leqslant m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$, implique alors la même relation sur les $\langle \varphi^{*m} k \rangle_q$:

$$a_d \langle \varphi^{*m} k \rangle_q + a_{d-\ell} \langle \varphi^{*(m-1)} k \rangle_q + \cdots + a_1 \langle \varphi^{*(m-d+1)} k \rangle_q + a_0 \langle \varphi^{*(m-d)} k \rangle_q = 0,$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} a_d\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+m)}k\rangle_q\big) \\ + a_{d-1}\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*(m-1)}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+m-1)}k\rangle_q\big) \\ + \cdots + a_0\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*(m-d)}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+m-d)}k\rangle_q\big) = 0 \end{aligned}$$

$$(d \leqslant \ell + m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}). \tag{7.49}$$

De (7.49) résulte (au moyen d'une récurrence sur m) que

$$\begin{aligned} a_d^{(m-d+1)^+}\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*m}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+m)}k\rangle_q\big) \\ = b_{d-1}(m)\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*(d-1)}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+d-1)}k\rangle_q\big) \\ + \cdots + b_1(m)\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+1)}k\rangle_q\big) \\ + \cdots + b_0(m)\big(\varphi^{*\ell}k - \langle\varphi^{*\ell}k\rangle_q\big) \\ \big(\ell + m \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}\big) \end{aligned}$$

où les $b_\ell(m)$ sont à valeurs $\mathbb{Z}$.

Considérons, pour ℓ et m fixés, $\ell + m + d - 1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$, le système linéaire

$$\begin{aligned} a_d^{(m+j-d+1)^+}\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*(m+j}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+m+j)}k\rangle_q\big) = \\ b_{d-1}(m+j)\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*(d-1)}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+d-1)}k\rangle_q\big) \\ + \cdots + b_1(m+j)\big(\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*1}k\rangle_q) - \langle\varphi^{*(\ell+1)}k\rangle_q\big) \\ + \cdots + b_0(m+j)\big(\varphi^{*\ell}k - \langle\varphi^{*\ell}k\rangle_q\big) \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad j = 0, 1, \ldots, d-1. \tag{7.50}$$

Comme les $\varphi^{*(m+d-1)}, \ldots, \varphi^{*(m+1)}, \varphi^{*m}$ sont linéairement indépendants la matrice

$$\Delta = \begin{pmatrix} b_{d-1}(m) & \ldots & b_0(m) \\ b_{d-1}(m+1) & \ldots & b_0(m+1) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{d-1}(m+d-1) & \ldots & b_0(m+d-1) \end{pmatrix}.$$

est inversible. Comme les $b_j(m+j)$ sont à valeurs $\mathbb{Z}$, $|\det(\Delta)| \geqslant 1$.

Compte tenu que $\max_{\ell,j\leqslant d-1}|b_j(m+j)| < c^m$, de (7.50) résulte alors qu'il existe une constante C_2 telle que, pour $\ell + m + d - 1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}$,

$$\max_{0\leqslant j\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*(m+j)}k\rangle_q)]_q \overset{C_2^m}{\sim} \max_{0\leqslant j\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*j}k\rangle_q)]_q. \tag{7.51}$$

Dans la suite nous n'utiliserons (7.51) que dans le sens

$$\max_{0\leqslant j\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*j}k\rangle_q)]_q \leqslant C_2^m \max_{0\leqslant j\leqslant d-1} [\varphi^{*\ell}(\langle\varphi^{*(m+j)}k\rangle_q)]_q.$$

Choisissons s_0 suffisamment grand de telle sorte que, pour $s \geqslant s_0$, l'on ait

$$2\bar{s} + d - 1 \leqslant 2^{\frac{1}{2}s}(s \geqslant s_0). \tag{7.52}$$

De (7.51) et de la relation

$$\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*(m+j)}k\rangle_q) = \varphi^{*\ell}\big(\langle \varphi^{*(m+j)}k\rangle_q - \varphi^{*j}(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q)\big) + \varphi^{*(\ell+j)}\big(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q\big)$$

résulte que, pour $m \leqslant \bar{s}$,

$$\max_{\ell \leqslant m}[\varphi^{*\ell}k]_q \leqslant C_2^m\big(\|\varphi\|_\infty^\ell + 1\big) \max_{\ell \leqslant m+d-1}[\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q)]_q. \tag{7.53}$$

De la relation

$$\varphi^{*\ell}k = \varphi^{*(\ell-m)}\big(\varphi^{*m}k - \langle \varphi^{*m}k\rangle_q\big) + \varphi^{*(\ell-m)}(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q) \quad (\ell \geqslant m)$$

résulte que

$$\max_{m \leqslant \ell \leqslant N}[\varphi^{*\ell}k]_q \leqslant \big(\|\varphi\|_\infty^{N-m} + 1\big) \max_{\ell \leqslant N}[\varphi^{*(\ell-m)}(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q)]_q. \tag{7.54}$$

Par suite, pour M choisi suffisamment grand,

$$\max_{\ell \leqslant N}[\varphi^{*\ell}k]_q \leqslant M^N \max_{\ell \leqslant N}[\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q)]_q \tag{7.55}$$

avec $m \leqslant \bar{s}$ et $N \geqslant \bar{s} + d - 1$. D'autre part, comme

$$\varphi^{*\ell}\big(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q\big) = \varphi^{*\ell}\big(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q - \varphi^{*m}k\big) + \varphi^{*(\ell+m)}k,$$

il s'ensuit que

$$\max_{\ell \leqslant N}[\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q)]_q \leqslant \big(\|\varphi\|_\infty^N + 1\big) \max_{\ell \leqslant N+\bar{s}}[\varphi^{*\ell}k]_q$$

pour $(m \leqslant \bar{s})$ et, par conséquent, pour M choisi suffisamment grand,

$$\max_{\ell \leqslant N}[\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m}k\rangle_q)]_q \leqslant M^N \sup_{\ell \leqslant 2N}[\varphi^{*\ell}k]_q \tag{7.56}$$

pour $m \leqslant \bar{s}$ et $N \geqslant \bar{s}$.

La démonstration du sous-lemme 5 est donc achevée. □

Le sous-lemme qui suit est l'analogue du sous-lemme 3 (cf. étape 6.2.3 de la sous-section 6.2).

Sous-lemme 6. — *Pour $m \leqslant \bar{s}$, $N \geqslant 2^s$,*

$$T_q^m \widetilde{g}_{N,s} = \sum_{\substack{\gamma \in q^{-1}\mathbb{Z}^p \\ \max_{\ell \leqslant N}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q < M^{-2N}}} \widehat{T_q^m h_s}(\gamma) \mathrm{e}^{2i\pi\langle \gamma, x\rangle} + T_q^m g_{N,s,m} \tag{7.57}$$

où $g_{N,s,m} \in L^2(\mathbb{T}^p)$, $|\widehat{g}_{N,s,m}| \leqslant |\widehat{h}_s|$ et $\operatorname{supp} \widehat{g}_{N,s,m} \subset \sigma_{s,M^{-N},N} \backslash \sigma_{s,M^{-4N},4N}$, les $\sigma_{s,M^{-N},N} \setminus \sigma_{s,M^{-4N},4N}$ étant disjoints, pour s fixé, quand N parcourt les quadriadiques.

Démonstration. — Rappelons que

$$\widetilde{g}_{N,s} = \sum_{k \in \sigma_{s,M^{-N},N}} \widehat{h}_s(k) \mathrm{e}^{2i\pi\langle k,x\rangle}. \tag{7.58}$$

On fixe s_0 de telle sorte que, pour $s \geqslant s_0$, $2^{\frac{1}{2}s} \geqslant \bar{s} + d - 1$. D'après (6.43) et (7.47), pour $m \leqslant \bar{s}$, on a

$$\operatorname{supp} \widehat{T_q^m h_s} \subseteq \{\langle \varphi^{*m} k\rangle_q ; k \in \mathbb{Z}^p\} \quad \text{et} \quad \widehat{T_q^m h_s}(\langle \varphi^{*m} k\rangle_q) = \widehat{h}_s a(q,k,m)$$

où les $a(q,k,m)$ sont donnés par (**)–(6.52).

D'autre part, du sous-lemme 5 découle que, pour $m \leqslant \bar{s}$ et $N \geqslant 2^s$,

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \widehat{h}_s \cap \sigma_{s,M^{-4N},4N} &\subseteq \operatorname{supp} \widehat{h}_s \cap \sigma_{s,M^{-3N},2N} \\ &\subseteq \Big\{k \in \operatorname{supp} \widehat{h}_s ; \max_{0 \leqslant \ell \leqslant N} [\varphi^{*\ell}(\langle \varphi^{*m} k\rangle_q)]_q < M^{-2N}\Big\} \\ &\subseteq \operatorname{supp} \widehat{h}_s \cap \sigma_{s,M^{-N},N}. \end{aligned}$$

Il est clair que, pour s fixé, les $\sigma_{s,M^{-N},N} \backslash \sigma_{s,M^{-4N},4N}$ sont disjoints quand N parcourt les quadriadiques.

La même démarche que celle utilisée dans la preuve du sous-lemme 3 conduit à (7.57).

Le sous-lemme 6 est donc prouvé. □

Passons à la démonstration de l'inégalité

$$\Big\| \sup_{\substack{N \geqslant 2^s \\ \text{quadriadique}}} \Big| \sum_1^N T_q^n \Big(\frac{1}{\bar{s}} \sum_1^{\bar{s}} T_q^m \widetilde{g}_{N,s}\Big)\Big| \Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant c s^{-2} \|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

De (7.57) (cf. sous-lemme 6) résulte que

$$\frac{1}{\bar{s}} \sum_1^{\bar{s}} T_q^m \widetilde{g}_{N,s} = \sum_{\substack{\gamma \in q^{-1}\mathbb{Z}^p \\ \max_{\ell \leqslant N} [\varphi^{*\ell}\gamma]_q < M^{-2N}}} \widehat{H}_s(\gamma) \mathrm{e}^{2i\pi\langle \gamma,x\rangle} + \frac{1}{\bar{s}} \sum_1^{\bar{s}} T_q^m g_{N,s,m}. \tag{7.59}$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \Big|\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m \widetilde{g}_{N,s}\Big)\Big|$$

$$\leqslant \sup_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}} \frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\sup_{j\geqslant 1}\ \Big|\sum_{\substack{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}^p\\ \max_{\ell\leqslant 4^j}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q\leqslant M^{-2(4^j)}}} \widehat{H}_s(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle}\Big|\Big) \tag{7.60}$$

$$+\Big(\sum_{\substack{N\geqslant 2^s\\ \text{quadriadique}}}\Big|\frac{1}{N}\sum_1^N T_q^n\Big(\frac{1}{\bar{s}}\sum_1^{\bar{s}} T_q^m g_{N,s,m}\Big)\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.61}$$

Le terme figurant dans (7.60), resp. (7.61), sera également noté (7.60), resp. (7.61).

Il s'agit maintenant d'estimer (7.60) et (7.61) dans $L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)$. Suivons maintenant la même démarche qu'à la fin de la section 6. En s'appuyant sur la remarque 7.3 et en tenant compte que, pour s fixé, les $\operatorname{supp}\widehat{g}_{s,N,m}$ sont disjoints quand N parcourt les quadriadiques, on obtiendra

$$\big\|(7.61)\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}_q^p)}. \tag{7.62}$$

Reste à estimer la norme $L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)$ de (7.60). L'application de l'inégalité maximale (5.25) (avec $a=\frac{1}{4}$, $\psi_j=\varphi^{*j}$ et $\varepsilon_j = qM^{-2(4^j)}$) conduit à

$$\Big\|\sup_{j\geqslant 1}\Big|\sum_{\substack{\gamma\in q^{-1}\mathbb{Z}^p\\ \max_{\ell\leqslant 4^j}[\varphi^{*\ell}\gamma]_q\leqslant M^{-2(4^j)}}} \widehat{H}_s(\gamma)\mathrm{e}^{2i\pi\langle\gamma,x\rangle}\Big|\Big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant c\big\|H_s\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)}.$$

De l'inégalité maximale (3.6) et du sous-lemme 4 résultera que

$$\big\|(7.60)\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant \big\|H_s\big\|_{L^2((1/q^p)\mathbb{T}_q^p)} \leqslant cs^{-2}\|h_s\|_{L^2(\mathbb{T}^p)}.$$

On conclut comme à la fin de la section 6. Le théorème 1.1 est donc prouvé dans le cas général. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Bourgain, « The Riesz-Raikov theorem for algebraic numbers », in *Israël Mathematical Conference Proceedings*, vol. 3, Weizmann, 1990, p. 1-45.

[2] A. Garsia, « Topics in almost everywhere convergence », in *Lectures in Advanced Math.*, vol. 4, Markham Publ. Co., 1970.

[3] B. Jessen, « On the approximation of ebesgue integrals by Riemann sums », *Annals of Math.* **35** (1934), p. 248-251.

[4] C. Lech, « A note on recurring series », *Ark. Mat., Band 2* **22** (1952), p. 417-421.

[5] M. Raikov, « On some arimetical properties of summable functions », *Math. Sbornik (NS)* **1** (1936), p. 377-383.

[6] M. Riesz, « Sur la théorie ergodique », *Comm. Math. Helv.* **17** (1945), p. 22-239.

[7] H. P. Schlickewei, « Multiplicities of recurrence sequences », *Acta Math.* **176** (1996), p. 171-243.

[8] W. M. Schmidt, « The zero multiplicity of linear recurrence sequences », *Acta Math.* **182** (1999), p. 243-282.

Manuscrit reçu le 16 août 2004,
révisé le 15 décembre 2005,
accepté le 30 janvier 2006.

Jean-Claude LOOTGIETER
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires
4, Place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 (France)
loot@ccr.jussieu.fr